Simpozion “Modelarea matematică în Ştiinţele Economice“

Rezultate obţinute în cadrul Proiectului CERBUN

Program de studii post-doctorale POSDRU ID. 62988

IMAR, 23 – 24 ianuarie 2013

Ecuaţii cu derivate parţiale neliniare stochastice asociate cu ecuaţii diferenţiale stochastice cu salturi cu aplicaţii în matematici financiare

Marinela Marinescu

Academia de Studii Economice şi
Institutul de Matematică "Simion Stoilow" al Academiei Române

24 Ianuarie 2013

- Stadiul actual al cercetării în domeniu
- Rezultate proprii obţinute
  • O problemă de filtrare pentru ecuaţii cu derivate parţiale neliniare stochastice non-Markoviene
  • Curenţi stochastici inversabili asociaţi cu ecuaţii cu derivate parţiale neliniare stochastice
  • Probleme bazate pe ecuaţii cu derivate parţiale neliniare stochastice cu salturi
- Aplicaţii
  • Strategii admisibile pentru ecuaţii diferenţiale stochastice non-Markoviene

Stadiul actual al cercetării în domeniu

Rezultate privind existenţa şi unicitatea soluţiilor ecuaţiilor cu derivate parţiale stochastice şi care utilizează metoda caracteristicilor stochastice au fost date de:

- Soluţii clasice: Kunita (1986), Tubaro (1988), Bensoussan (1992), Da Prato & Tubaro (1996) ;
- Viscosity solutions: Lions & Souganidis (1998), Buckdahn& Ma (2001).

În articolul *Functionals associated with gradient stochastic flows and nonlinear SPDEs*, autori B. Iftimie, M. Marinescu şi C. Vârsan, publicat în Advanced Mathematical Methods for Finance, Eds. Giulia Di Nunno, Bernt Oksendal, 1st. edn, VIII, 397-417, a fost studiată existenţa soluţiei pentru următoarea ecuaţie cu derivate parţiale stochastică:

(1)

$$\begin{cases} \mathrm{d}u(t,x) = \langle \nabla u(t,x), g_0(x)\rangle\, u(t,x)\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{m} \langle \nabla u(t,x), g_i(x)\rangle \circ \mathrm{d}W_i(t) \\ u(0,x) \ = \varphi(x), t \in [0,T], x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Sistemul de caracteristici corespunzător (introdus de Kunita, 1990), este dat de:

(2)

$$\begin{cases} \mathrm{d}\widehat{x}(t;\lambda) = -\widehat{u}(t;\lambda) g_0(\widehat{x}(t;\lambda))\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{m} (-g_i)(\widehat{x}(t;\lambda)) \circ \mathrm{d}W_i(t); \\ \widehat{x}(0,\lambda) \ = \lambda; \\ \mathrm{d}\widehat{u}(t,\lambda) = 0, \widehat{u}(0,\lambda) \ = \varphi(\lambda); \lambda \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

• **O problemă de filtrare pentru ecuaţii cu derivate parţiale neliniare stochastice non-Markoviene**

Fie $\{w(t) \in \mathbb{R} : t \in [0,\infty)\}$ procesul scalar Wiener pe spaţiul de probabilitate complet filtrat $\{\Omega, \mathcal{F} \supseteq \{\mathcal{F}^t\}, P\}$.

Considerăm următoarea ecuaţie diferenţială stochastică Markoviană:

$$(3) \quad \begin{cases} d_t x = f(x;\lambda)\mathrm{d}t + g(x) \circ \mathrm{d}w(t), \quad t \in [0,T], x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}^n \\ x(0) = \lambda. \end{cases}$$

Curentul stochastic $\{\widehat{x}(t;\lambda) \in \mathbb{R}^n : t \in [0,T], \lambda \in \mathbb{R}^n\}$ este soluţia ecuaţiei (3).

Ecuaţia curent $\widehat{x}(t;\lambda) = x$, în raport cu necunoscuta λ are soluţie unică $\lambda = \psi(t,x)$.

Problema A. Descriem evoluţia funcţionalei valoare medie condiţionată

$$v\left(t,x\right)=E\left\{\varphi\left(z_{\psi}\left(T;t\right)\left[x\right]\right)|\psi\left(t,x\right)\right\},t\in\left[0,\widehat{T}\right],x\in\mathbb{R}^{n},$$

utilizând funcţionala parametrizată $u\left(t,x;\lambda\right)=E\varphi\left(z_{\lambda}\left(T;t\right)\left[x\right]\right)$ şi ecuaţiile Kolmogorov corespunzătoare.

Facem următoarele presupuneri:

(P1) câmpurile vectoriale f şi g comută în raport cu paranteza Lie uzuală, adică $\left[g,f_{\lambda}\right]\left(x\right)=0$, $x\in\mathbb{R}^{n}$, pentru oricare $\lambda\in\mathbb{R}^{n}$, unde $f_{\lambda}\overset{def}{=}f\left(x;\lambda\right)$;

(P2) $f\in\left(C_{b}^{1}\cap C^{2}\right)\left(\mathbb{R}^{2n};\mathbb{R}^{n}\right)$ şi $g\in\left(C_{b}\cap C_{b}^{1}\cap C^{2}\right)\left(\mathbb{R}^{n},\mathbb{R}^{n}\right)$.

Problema B. Utilizând presupunerea de mai sus, găsim soluţia unică netedă şi $\mathcal{F}^t$- adaptată

$$\left\{\lambda = \psi(t,x) \in \mathbb{R}^n : (t,x) \in \left[0, \widehat{T}\right] \times \mathbb{R}^n\right\},$$

care satisface ecuaţia curent

$$\widehat{x}(t;\psi(t,x)) = x, \quad t \in \left[0, \widehat{T}\right], \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Problema C. Descriem evoluţia procesului $\{\psi(t,x)\}$ utilizând ecuaţiile cu derivate parţiale neliniare stochastice

(4) $$\psi\left(t, \widehat{x}\left(t;\lambda\right)\right) = \lambda, \quad t \in \left[0, \widehat{T}\right],$$

(5) $$\begin{cases} d_t\psi\left(t,x\right) + \partial_x\psi(t,x)f\left(x;\psi(t,x)\right)\mathrm{d}t + \\ \qquad + \left[\partial_x\psi\left(t,x\right)g\left(x\right)\right]\widehat{\circ}\mathrm{d}w(t) = 0 \\ \psi\left(0,x\right) = x \in \mathbb{R}^n, t \in \left[0, \widehat{T}\right]. \end{cases}$$

Soluţie pentru **Problema B**

Teorema (2)

În ipotezele (P1) *şi* (P2) *procesul continuu şi* $\mathcal{F}^t$*-adaptat*

(6) $$\left\{\psi(t,x) \stackrel{def}{=} \widehat{\psi}(t,\widehat{z}(t,x)) : t \in \left[0,\widehat{T}\right], x \in \mathbb{R}^n\right\}$$

satisface ecuaţia curent $\widehat{x}(t;\psi(t,x)) = x, t \in \left[0,\widehat{T}\right],\ x \in \mathbb{R}^n$*, unde procesul continuu* $\widehat{z}(t,x) = G(-w(t)[x], t \in \left[0,\widehat{T}\right], x \in \mathbb{R}^n$*, satisface următoarea ecuaţie cu derivate parţiale de tip parabolic*

(7) $$\begin{cases} \mathrm{d}_t\widehat{z}(t,x) + [\partial_x\widehat{z}(t,x)g(x)] \,\widehat{\circ}\, \mathrm{d}w(t) = 0, t \in \left[0,\widehat{T}\right], x \in \mathbb{R}^n \\ \widehat{z}(0,x) = x. \end{cases}$$

Soluţie pentru **Problema C**

Teorema (3)

În aceleaşi ipoteze ca (P1) *şi* (P2), *considerăm procesul continuu şi* $\mathcal{F}^t$ *- adaptat*

$$\left\{\lambda = \psi\left(t,x\right) \in \mathbb{R}^n : t \in \left[0,\widehat{T}\right], x \in \mathbb{R}^n\right\}$$

definit în (6). *Atunci* $h\left(t,x\right) \overset{def}{=} \left[\partial_x \psi\left(t,x\right)\right] g\left(x\right)$ *(vezi* ***Problema C****)* *este un proces mărginit. În plus, este adevărată următoarea ecuaţie cu derivate parţiale stochastică*

(8)

$$\begin{cases} d_t\psi(t,x) + \left[\partial_x\psi(t,x)\right] f\left(x;\psi(t,x)\right) + \left[\partial_x\psi(t,x)g(x)\right] \widehat{\circ} \mathrm{d}w(t) = 0 \\ \psi(0,x) = x \in \mathbb{R}^n,\ t \in \left[0,\widehat{T}\right]. \end{cases}$$

Pentru rezolvarea **Problemei A** înlocuim ipotezele (P1) şi (P2) cu ipotezele:

$(\mathrm{P1}')$ câmpurile vectoriale $f_\lambda(z) = f(z;\lambda)$, $g(z)$ comută, adică $[g, f_\lambda](z) = 0$, $z \in \mathbb{R}^n$, pentru fiecare $\lambda \in \mathbb{R}^n$;

$(\mathrm{P2}')$ $g \in \left(C_b \cap C_b^1 \cap C_b^2 \cap C_p^3\right)(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ şi $f \in \left(C_b^1 \cap C_p^2\right)\left(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^n\right)$.

Soluţie pentru **Problema A**

Teorema (4)

În ipotezele $(\mathrm{P1}')$ *şi* $(\mathrm{P2}')$ *considerăm soluţia* $\left\{z_{\psi}(s;t)[y] : s \in \left[t, \widehat{T}\right], y \in \mathbb{R}^n\right\}$ *care satisface ecuaţia diferenţială stochastică non-Markoviană (8) şi* $\lambda = \psi(t,x)$, $t \in \left[0, \widehat{T}\right]$, $x \in \mathbb{R}^n$, *care are proprietăţile descrise în Teoremele 2 şi 3. Pentru* $\varphi \in C_p^2(\mathbb{R}^n)$ *fixat, considerăm funcţionala valoare medie condiţionată*
$v(t,x) = E\left\{\varphi\left(z_{\psi}\left(\widehat{T},t\right)[x]\right) / \psi(t,x)\right\}, 0 \le t < \widehat{T}, x \in \mathbb{R}^n.$
Atunci $v(t,x) = u(t,x;\psi(t,x))$, $t \in \left[0, \widehat{T}\right)$, $x \in R^n$, *unde funcţionala parametrizată* $u(t,x;\lambda)$, $\lambda \in R^n$ *este dată de*
$u(t,x;\lambda) = E\varphi\left(z_{\lambda}\left(\widehat{T},t\right)[x]\right), 0 \le t \le \widehat{T}, x \in \mathbb{R}^n.$

Rezultate de mai sus sunt prezentate în detaliu în articolul *Filtering for non-Markovian SDE involving nonlinear SPDE and backward parabolic equations*, autori D. Ijacu, M. Marinescu, trimis spre publicare la Dynamics of Partial Differential Equations.

• **Curenţi stochastici inversabili asociaţi cu ecuaţii cu derivate parţiale neliniare stochastice**

Utilizăm rezultatele din prima parte a prezentării pentru a studia inversabilitatea curentului stochastic bazată pe reprezentarea sa integrală, în cazul în care câmpul vectorial de difuzie comută cu câmpurile vectoriale din partea de drift.

Considerăm o mulţime finită de câmpuri vectoriale complete
$$\{g, f_1, \ldots, f_d\} \subseteq \left(C_b \cap C_b^1 \cap C^2\right)(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$$
şi funcţiile scalare
$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_d\} \subseteq \left(C_b \cap C_b^1 \cap C^2\right)(\mathbb{R}^n).$$
Fie $\{w(t) \in \mathbb{R} : t \in [0, \infty)\}$ procesul scalar Wiener pe spaţiul de probabilitate complet filtrat $\{\Omega, \mathcal{F} \supseteq \{\mathcal{F}^t\}, P\}$.
Definim curentul stochastic $\{\widehat{x}_\varphi(t; \lambda) : t \in [0, T], \ \lambda \in \mathbb{R}^n\}$ care satisface următoarea ecuaţie diferenţială stochastică

$$\text{(9)} \quad \begin{cases} d_t x = \sum_{i=1}^{d} \varphi_i(\lambda) f_i(x) \mathrm{d}t + g(x) \circ \mathrm{d}w(t), \ t \in [0, T], \ x \in \mathbb{R}^n; \\ x(0) = \lambda, \ \lambda \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Rezultate proprii obţinute

Principala ipoteză utilizată este următoarea

$$(\mathrm{I}) \qquad g \quad \text{comută cu } \{f_1, \ldots, f_d\}$$

utilizând paranteza Lie, adică $[g, f_i](x) = 0$, $i \in \{1, \ldots, d\}$.
Problema pe care dorim să o rezolvăm este descrierea evoluţiei funcţionalei stochastice

$$u(t,x) \stackrel{\text{def}}{=} h(\psi(t,x)), \; (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n, \; h \in \left(C_b^1 \cap C^2\right)(\mathbb{R}^n)$$

incluzând $u_i(t,x) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_i(\psi(t,x))$, $1 \le i \le d$, unde

$$\left\{\lambda = \psi(t,x) \in \mathbb{R}^n : (t,x) \in [0,\widehat{T}] \times \mathbb{R}^n\right\}$$

este soluţia unică netedă şi $\mathcal{F}^t$-adaptată ce satisface ecuaţia

$$\widehat{x}_\varphi(t;\lambda) = x, \quad t \in [0,\widehat{T}], \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Teorema (5)

În ipoteza (I) *considerăm unica soluţie netedă şi $\mathcal{F}^t$-adaptată* $\lambda = \psi(t,x) \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{\psi}\,(t, \widehat{z}(t,x)), t \in \left[0, \widehat{T}\right], x \in \mathbb{R}^n$*, care satisface*

$$\text{(10)} \qquad \widehat{x}_{\varphi}(t;\lambda) = G\left(w(t)\right) \circ F(t;\lambda) = x,\ \ t\left[0, \widehat{T}\right],\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Atunci este adevărată următoarea ecuaţie cu derivate parţiale neliniară stochastică

$$\text{(11)} \qquad \begin{cases} \mathrm{d}_t\psi(t,x) + \partial_x\psi(t,x)\left[\sum_{i=1}^{d} \varphi_i\left(\psi(t,x)\right) f_i(x)\right]\mathrm{d}t + \\ \qquad + \left[\partial_x\psi(t,x) g(x)\right] \widehat{\circ}\mathrm{d}w(t) = 0; \\ \psi(0,x) = x,\ x \in \mathbb{R}^n,\ t \in \left[0, \widehat{T}\right]. \end{cases}$$

Rezultate proprii obţinute

Teorema (6)

Considerăm

$$h \in \left(C_b^1 \cap C^2\right)(\mathbb{R}^n) \text{ şi } \left\{\lambda = \psi(t,x) \in \mathbb{R}^n : (t,x) \in \left[0, \widehat{T}\right] \times \mathbb{R}^n\right\}$$

care satisface ecuaţia cu derivate parţiale neliniară (11).
Atunci $u(t,x) \stackrel{\text{def}}{=} h(\psi(t,x))$, $(t,x) \in [0,\widehat{T}] \times \mathbb{R}^n$, *este o soluţie a următoarei ecuaţii cu derivate parţiale stochastică*

$$\begin{cases} \mathrm{d}_t u(t,x) + < \partial_x u(t,x), \left[\sum_{i=1}^{d} \varphi_i\left(\psi(t,x)\right) f_i(x)\right] > \mathrm{d}t + \\ \qquad + < \partial_x u(t,x),\ g(x) > \widehat{\circ}\, \mathrm{d}w(t) = 0; \\ u(0,x) = h(x),\ t \in \left[0, \widehat{T}\right]. \end{cases}$$

Rezultatele de mai sus sunt prezentate în detaliu în articolul *Reversible stochastic flows associated with nonlinear SPDEs*, autori M. Marinescu, D. Ijacu, trimis spre publicare la Nonlinear Analysis Series A: Theory, Methods and Applications.

• Probleme bazate pe ecuaţii cu derivate parţiale neliniare stochastice cu salturi

Considerăm două procese independente $\{(w(t), y(t)) : t \in [0, T]\}$ pe spaţiul de probabilitate complet filtrat $\{\Omega, \mathcal{F} \supseteq \{\mathcal{F}^t\}, \mathbb{P}\}$ (vezi $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}^t = \mathcal{F}_1^t \times \mathcal{F}_2,\ \mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2$), unde $\{w(t) \in \mathbb{R} : t \in [0, T]\}$ este mişcarea Browniană pe spaţiul $\{\Omega_1, \mathcal{F}_1 \supseteq \{\mathcal{F}_1^t\}, \mathbb{P}_1\}$ şi $\{y(t) \in [-\gamma, \gamma] : t \in [0, T], y(0) = 0\}$ este un proces constant pe porţiuni definit pe spaţiul de probabilitate $\{\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_2\}$. Procesul constant pe porţiuni $\{y(t)\}$ satisface

$$y(t,\omega_2) = y(\theta_i(\omega_2),\omega_2) \overset{\text{not}}{=} y_i(\omega_2), \quad t \in [\theta_i(\omega_2), \theta_{i+1}(\omega_2))$$

unde $0 = \theta_0(\omega_2) < \theta_1(\omega_2) < \ldots < \theta_{N-1}(\omega_2) < \theta_N(\omega_2) = T$ este o partiţie astfel încât $y_i(\omega_2) : \Omega_2 \to \mathbb{R}$ este o variabilă aleatoare $\mathcal{F}_2-$ măsurabilă pentru orice $i \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$.
Fie câmpurile vectoriale $\{g, f_1, f_2\} \subseteq \left(C_b \cap C_b^1 \cap C^2\right)(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ şi două funcţii scalare $\{\varphi_1, \varphi_2\} \subseteq \left(C_b^1 \cap C^2\right)(\mathbb{R}^n)$ astfel încât

(A1) $\{g, f_1, f_2\}$ comută în raport cu paranteza Lie

(A2) $(\gamma + T)VK = \rho \in [0,1)$, unde $\{|y(t)| \leq \gamma : t \in [0,T]\}$,

şi

$$V = \sup\{|\partial_x\varphi_1(x)|, |\partial_x\varphi_2(x)| : x \in \mathbb{R}^n\},$$
$$K = \sup\{|f_1(x)|, |f_2(x)| : x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Rezultate proprii obţinute

Considerăm următoarea ecuaţie diferenţială stochastică, cu salturi (12)

$$\begin{cases} \mathrm{d}_t\widehat{x} = \left[f_1\left(\widehat{x}(t-)\right)\varphi_1(\lambda)\mathrm{d}t \quad + f_2\left(\widehat{x}(t-)\right)\varphi_2(\lambda)\delta y(t)\right] + \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + g\left(\widehat{x}(t-)\right)\circ \mathrm{d}w(t); \\ \widehat{x}(0) = \lambda \in \mathbb{R}^n,\ t \in [0,T],\, \delta y(t) = y(t) - y(t-),\, \widehat{x}(t-) = \lim\limits_{s \nearrow t} \widehat{x}(s). \end{cases}$$

Fie $\{\widehat{x}_\varphi(t;\lambda) : t \in [0,T],\ \lambda \in \mathbb{R}^n\}$ curentul stochastic generat de ecuaţia (12).

Problema (I). În ipotezele (A1) şi (A2) există o soluţie $\mathcal{F}^t-$ adaptată $\lambda = \psi(t,x) \in \mathbb{R}^n$ astfel încât

(13) $$\widehat{x}_\varphi(t;\lambda) = x,\ t \in [0,T],\ \psi(0,x) = x \in \mathbb{R}^n;$$

(14) $$\{\psi(t,x) : t \in [\theta_i, \theta_{i+1}),\ x \in \mathbb{R}^n\} \text{ este aplicaţie continuă;}$$

(15) $$\{\psi(t,x) : t \in [\theta_i, \theta_{i+1}),\ x \in \mathbb{R}^n\}$$

este aplicaţie continuu diferenţiabilă de ordinul 2 în raport cu $x \in \mathbb{R}^n$, care satisface o ecuaţie cu derivate parţiale neliniară stochastică de tip parabolic.

Problema (II). Utilizând soluţia unică $\{\lambda = \psi(t,x)\}$ a Problemei (I), descriem evoluţia valorii medii condiţionate

$$(16)\quad v_i(t,x) = E_1\left\{h\left(z_\psi(T;t,x)\right) \mid \psi(t,x)\right\},\ t \in [\theta_i, \theta_{i+1}),\ x \in \mathbb{R}^n,$$

pentru orice $h \in C_p^2(\mathbb{R}^n)$ şi $i \in \{0,1,2,\ldots N-1\}$ unde $C_p^2(\mathbb{R}^n)$ reprezintă spaţiul funcţiilor continuu diferenţiabile de ordinul 2 astfel încât h, $\partial_{x_i} h$, $\partial^2_{x_i x_j} h$ satisfac o condiţie de creştere polinomială pentru $i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$, unde $\{z_\psi(s;t,x) : s \in [t,T]\}$ este soluţia unică a următoarei ecuaţii diferenţiale stochastice non-Markoviene cu salturi

(17)
$$\begin{cases} d_s z = [f_1(z(s-))\varphi_1(\psi(t,x))\,ds + f_2(z(s-))\varphi_2(\psi(t,x))\delta y(s)] + \\ \qquad +g(z(s-)) \circ dw(s); \\ z(t) = x, \quad s \in [t,T]. \end{cases}$$

Soluţie pentru Problema (I)

Teorema (7)

În aceleaşi ipoteze (A1) *şi* (A2), *considerăm procesul continuu pe porţiuni şi* $\mathcal{F}^t = \mathcal{F}_1^t \times \mathcal{F}_2$*- adaptat,* $\psi(t,x) = \widehat{\psi}\,(t, \widehat{z}(t,x))$, $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$*. Atunci* $\psi(t,x)$ *satisface următorul sistem de ecuaţii cu derivate parţiale neliniare stochastice*

$$(18)\qquad \begin{cases} d_t\psi(t,x) + \partial_z\widehat{\psi}\,(t,\widehat{z}(t,x))\, f_1\left(\widehat{z}(t,x)\right)\varphi_1\left(\psi(t,x)\right) dt + \\ \qquad + \left[\partial_x\psi(t,x)\cdot g(x)\right]\widehat{\circ}\, dw(t) = 0,\ \ t \in [\theta_i, \theta_{i+1})\,; \\ \psi\left(\theta_i, x\right) = \widehat{\psi}\left(\theta_i, \widehat{z}\left(\theta_i, x\right)\right) = \\ \qquad = F_2\left[-\varphi_2\left(\psi\left(\theta_i-, x\right)\right)\delta y\left(\theta_i\right)\right]\left(\psi\left(\theta_i-, x\right)\right); \\ \psi(0,x) \ \ = x \in \mathbb{R}^n, i \in \{1,2,\ldots,N-1\}. \end{cases}$$

Calculăm valoarea medie condiţionată

(19)
$$v_i(t,x) = E_1\left\{h\left(z_\psi(T;t,x)\right) \mid \psi(t,x)\right\},\ t \in [\theta_i, \theta_{i+1}),\ x \in \mathbb{R}^n,\ i \in \{0,1,\ldots,N-1\}$$

(vezi (16) din Problema (II)), utilizând funcţionala parametrizată $u_i(t,x;\lambda)$ dată de

(20)
$$u_i(t,x;\lambda) = E_1 h\left(z_\lambda(T;t,x)\right),\ t \in [\theta_i, \theta_{i+1}),\ x \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}^n.$$

Soluţia Problemei (II)

Teorema (8)

În ipotezele (A1) *şi* (A2), *considerăm procesul continuu pe porţiuni şi* $\mathcal{F}^t = \mathcal{F}_1^t \times \mathcal{F}_2$*-adaptat* $\{\psi(t,x)\}$ *definit în teorema* 7. *Asociem funcţionalele* $\{v_i(t,x\}, i \in \{0,1,\ldots,N-1\}$, *ca în* (16) *(vezi Problema (II)). Considerăm şirul finit de ecuaţii parabolice de tip retrograd parametrizate şi soluţiile lor* $u_i(t,x;\lambda)$, $t \in [\theta_i, \theta_{i+1})$, $x \in \mathbb{R}^n$, $i \in \{0,1,\ldots,N-1\}$, *ca în* (20). *Atunci soluţia Problemei (II) este dată de*

(21)

$$v_i(t,x) = u_i\left(t,x;\psi(t,x)\right), \ t \in \left[\theta_i,\theta_{i+1}\right), \ x \in \mathbb{R}^n, i \in \{0,1,\ldots,N-1\}.$$

Rezultatele de mai sus sunt prezentate în detaliu în articolul *Functionals and gradient stochastic flows with jumps associated with nonlinear SPDEs*, autori M. Marinescu, M. Nica, care va fi publicat în vol. 1, 2013, în Mathematical Reports.

• Strategii admisibile pentru ecuaţii diferenţiale stochastice non-Markoviene

Considerăm câmpurile vectoriale netede $\{g_1, \ldots, g_m\} \subseteq \left(C_0^1 \cap C^2\right)(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ şi procesul Wiener m-dimensional standard $w(t) = (w_1(t), \ldots, w_m(t)) \in \mathbb{R}^m$, $t \in [0, T]$, pe spaţiul de probabilitate complet filtrat $\{\Omega, F \supseteq \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{P}\}$. Pentru fiecare $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ fixat, considerăm soluţia unică $\mathcal{F}_s$-adaptată şi continuă $\{\widehat{x}(s; t, x) \in \mathbb{R}^n : s \in [t.T]\}$ care satisface ecuaţiile diferenţiale stochastice non-Markoviene

$$(22) \qquad \begin{cases} d_s\widehat{x} = f\left(\widehat{x}; s, x\right) \mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{m} g_i\left(\widehat{x}\right) \mathrm{d}w_i(s), \; s \in [t, T] \\ \widehat{x}(t) = x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Aplicaţii

Aplicaţia $f(z;s,x) : \mathbb{R}^n \times [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ este mărginită şi $\mathcal{F}_s$-adaptată pentru fiecare $(z,x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ şi satisface

(α) pentru fiecare $t \in [0,T]$ şi $x \in \mathbb{R}^n$ fixat, $f_{x,x}(z) \stackrel{def}{=} f(z;t,x)$ este Lipschitz continua în raport cu $z \in \mathbb{R}^n$, adică

$$|f_{x,x}(z'') - f_{t,x}(z')| \leq L\,|z'' - z'|\,,$$

pentru $z', z'' \in \mathbb{R}^n$, $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$, unde $L > 0$ este o constantă care nu depinde de $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ şi $z', z'' \in \mathbb{R}^n$.

Observaţie

În ipoteza (α), ecuaţia diferenţiala stochastică non-Markoviană (22) are soluţie unică $\left\{\widehat{x}(s;t,x) \in \mathbb{R}^n : \left[\widehat{t},T\right]\right\} \to \mathbb{R}^n$, continuă şi $\mathcal{F}_s$-adaptată, pentru fiecare $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$.

O strategie $\theta = \{\nu_0(s;t,x), \nu(s;t,x)\} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $s \in [t,T]$ este o pereche de procese continue şi $\mathcal{F}_s$-adaptate pentru care funcţia valoare corespunzătoare este definită astfel

$$V_\theta(s;t,x) = \nu_0(s;t,x) + \langle \theta(t,w), x(t,w) \rangle, \; s \in [t,T]. \tag{23}$$

Pentru $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$ fixat, o strategie $\{\theta\}$ satisface condiţia Europeană dacă

$$V_\theta(T;t,x) \geq \varphi\left(\widehat{x}(T,t,x)\right), \; x \in (\mathbb{R}^n) \tag{24}$$

O strategie $\{\theta\}$ este admisibilă (vezi $\theta \in A_\varphi$)) dacă îndeplineşte condiţia Europeană (24) pentru fiecare $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$.

Aplicaţii

Căutăm o strategie admisibilă ($\theta \in A_\varphi$), pentru care componenta scalară $\{\nu_0(s;t,x)\}$, $s \in [t,T]$ este aleasă astfel încât sunt verificate următoarele ecuaţii

$$(25) \quad V_\theta(s;t,x) = V_\theta(t;t,x) + \int_t^x \langle \nu(\sigma;t,x); d_\sigma \widehat{x}(\sigma;t,x) \rangle \,, \; s \in [t,T]$$

pentru fiecare $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ fixat.
Ecuaţiile integrale (25) sunt adevărate dacă şi numai dacă $\{\nu_0\}$ satisface ecuaţiile integrale corespunzătoare.

Presupunem că

$$(\beta) \qquad \varphi \in C_p^2\left(\mathbb{R}^n\right) \; \text{ şi } \; g_i \in \left(C_b^1 \cap C_p^2\right)\left(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n\right), \; i \in \{1,\ldots,m\}.$$

Propoziţie

Presupunem că ipotezele (α) *şi* (β) *sunt îndeplinite. Considerăm funcţionala* $u(s,x) = E\varphi(z(T;t,x))$, $s \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$ *care satisface o ecuaţia de tip Kolmogorov. Definim o strategie admisibilă*

$$\theta = \{(\nu_0(s;t,x), \nu(s;t,x))\,; s \in [t,T],\ (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n\}$$

astfel

$$\nu(s;t,x) = \partial_x u\left(s, \widehat{x}(s;t,x)\right),\ s \in [t,T], \tag{26}$$

iar $\nu_0(s;t,x)$, $s \in [t,T]$, *satisface* (22), *unde* $\nu_0(t;t,x) + \langle x, \partial_x u(t,x)\rangle \geq u(t,x)$, *pentru orice* $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ *fixat.*