Probleme actuale in studiul functiei zeta Igusa si a designurilor esalon

Denis IBADULA, *Institutul de matematica Simion Stoilow al Academiei Romane*

Simpozion Posdru,
Bucureşti,
24 ianuarie 2013

Funcţia zeta Igusa locală

Definition

Fie $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}_p[x_1, \ldots, x_n]$. **Func ţia zeta Igusa locală** asociată lui f este definită astfel:

$$Z_f(s) = \int_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{Z}_p^n} |f(x_1, \ldots, x_n)|^s |dx_1| \ldots |dx_n|,$$

unde $s \in \mathbb{C}$, $Re(s) > 0$, $|.|$ este valoarea absolută p-adică şi $|dx| = |dx_1| \cdot \ldots \cdot |dx_n|$ reprezintă măsura Haar pe $\mathbb{Q}_p^n$ normalizată astfel încât $\mathbb{Z}_p^n$ are măsura 1.

- Conjectura Monodromiei: stabileşte legătura dintre valorile proprii ale monodromiei locare care măsoară, într-un anume sens, complexitatea singularităţilor hipersuprafeţiei complexe $f(x) = 0$.
- Forma 'tare': Conjectura polinoamelor Bernstein.

Ce se stie despre polii FZIL:

- **Polii candidaţi** ai lui $Z_f(s)$ asociaţi lui E_i:

$$-\frac{\nu_i}{N_i} + \frac{2k\pi}{N_i \ln p}\sqrt{-1},$$

  cu $k \in \mathbb{Z}$ şi $i \in T$;
- **Ordinul posibil** al unui pol candidat s_0: cel mai mare număr de E_i-ri cu polul candidat s_0;
- Un pol candidat cu ordinul posibil 1 este pol dacă şi numai dacă reziduul lui $Z_f(s)$ în s_0 este diferit de 0.
- Un pol candidat real este de forma $-\frac{\nu_i}{N_i}$, cu $i \in T$.

O formulă de calcul a contribuţiei la reziduul lui $Z_f(s)$ în s_0

Teoremă (Segers, 2006)

Fie $g = g_t \circ \cdots \circ g_1 : Y = Y_t \to \mathbb{Z}_p^2$ *o compunere de blowing-up-ri* $g_i : Y_i \to Y_{i-1}$.
Fie s_0 *un pol candidat care este asociat unei curbe excepţionale* E_r.
Fie $(W, (y_1, y_2))$ *chart-ul lui* Y_r *astfel încât* y_1 *este o ecuaţie a lui* E_r *pe* W. *Fie*

$$\begin{aligned} f \circ g_1 \circ \cdots \circ g_r &= \gamma y_1^{N_r} \\ (g_1 \circ \cdots \circ g_r)^* dx &= \delta y_1^{\nu_r - 1} dy \end{aligned}$$

Teoremă (Segers, 2006)

În aceste condiţii, contribuţia lui $U := W \cap E_r$ la reziduul lui $Z_f(s)$ în s_0 este egal cu

$$\frac{p-1}{pN_r \log p}\left[\int_U |\gamma|^s |\delta| |dy_2|\right]^{mc}_{s=s_0}$$

Rezultatul principal

Teoremă (Segers, _, 2012)
Fie $\mathcal{R}$ contribuţia lui E_r la reziduul lui $Z_f(s)$ în s_0.
Atunci, $\mathcal{R} \neq 0$ dacă şi numai dacă $|S| \geq 3$ sau $|S'| \geq 1$. Mai mult, daca $\mathcal{R} \neq 0$, atunci

1. $\mathcal{R} > 0$ dacă şi numai dacă $\alpha_i > 0$ pentru orice $i \in S$
2. $\mathcal{R} < 0$ dacă şi numai dacă există $i \in S$ astfel încât $\alpha_i < 0$

Ce este un design?

Definition

Fie k un corp şi fie $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Un **design** $\mathcal{D}$ este o mulţime finită de puncte distincte din k^n.

Idealul $I(\mathcal{D})$ al design-ului $\mathcal{D}$ se numeşte **idealul design** al lui $\mathcal{D}$ şi conţine toate polinoamele din $k[x_1, \ldots, x_n]$ care se anulează în toate punctele din $\mathcal{D}$.

Ce este un design eşalon?

Definition

Fie $K \in \mathbb{N} - \{0\}$ şi fie $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(K)}$ vectori cu componente în $\mathbb{Z}_+^n$ astfel încât niciun $\mathbf{x}^{\alpha^{(i)}}$ nu divide niciun $\mathbf{x}^{\alpha^{(j)}}$ pentru orice $1 \leq i \neq j \leq K$. Atunci **design-ul eşalon** $\mathcal{E} \subset \mathbb{Z}_+^n$ determinat de vectorii $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(K)}$ este mulţimea tuturor punctelor $b \in \mathbb{Z}_+^n$ astfel încât $\mathbf{x}^b$ nu este divizibil cu niciun $\mathbf{x}^{\alpha^{(i)}}$, $1 \leq i \leq K$. Vectorii $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(K)}$ se numesc **vectori dominanţi (de definiţie)** ai design-ului eşalon $\mathcal{E}$.

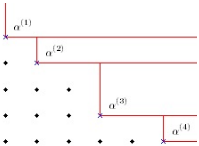
Definition

Fie $\mathcal{E} \subset \mathbb{Z}_+^2$ un design eşalon în dimensiune doi. Atunci el este reuniunea coloanelor punctelor de forma

$$\begin{array}{ll} (0, h), & \text{cu } h = 0, \ldots, k_0; \\ (1, h), & \text{cu } h = 0, \ldots, k_1; \\ \vdots & \\ (l, h), & \text{cu } h = 0, \ldots, k_l. \end{array}$$

unde $k_0 \geq k_1 \geq \ldots \geq k_l \geq 0$.

Fie $\mathcal{E}$ un design eşalon în dimensiune 2 format din punctele $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,2)$, $(0,3)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,0)$, $(2,1)$, $(2,2)$, $(3,0)$ şi $(4,0)$.



În acest exemplu, vectorii dominanţi sunt $\alpha^{(1)} = (0,4)$, $\alpha^{(2)} = (1,3)$, $\alpha^{(3)} = (3,1)$, $\alpha^{(4)} = (5,0)$.
De asemenea, obţinem $k_0 = 3$, $k_1 = 2$, $k_2 = 2$ and $k_3 = 0$.

De ce este important studiul design-ului eşalon?

Un magazin de calculatoare are o anumită strategie de aprovizionare cu laptop-uri de-a lungul unui an: Dupa de introdus exemplu

- Ianuarie - Aprilie
  - Allview
  - Acer
  - HP
  - Asus
  - Lenovo
  - Samsung
  - Toschiba
  - Dell
- Mai - August
  - Allview
  - Acer
  - HP
  - Asus
  - Lenovo
- Septembrie - Decembrie
  - Allview
  - Acer
  - HP

Propoziţie

Fie $\mathcal{E}$ un design eşalon şi $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ o fracţie a lui. Fie f un polinom caracteristic a lui $\mathcal{F}$. Atunci

$$\mathcal{I}(\mathcal{F}) = (f_{\alpha(1)}, \ldots, f_{\alpha(K)}, f)\,.$$

Teoremă

Fie $<$ o ordonare monomială pe $k[x_1, \ldots, x_n]$, fie $\mathcal{E} \in \mathbb{Z}_+^n$ un design eşalon şi $f_{\alpha(1)}, \ldots, f_{\alpha(K)}$ polinoamele canonice ale lui $\mathcal{E}$ şi $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ o fracţie a lui $\mathcal{E}$.
Atunci există un unic polinom caracteristic f al lui $\mathcal{F}$ în $\mathcal{E}$ astfel încât $\mathrm{in}_<(f)$ şi niciunul din monoamele sale nu este dominat de niciunul dintre $\mathrm{in}_<(f_{\alpha(i)})$, $1 \le i \le n$.

Teoremă

Fie $H \in \mathbb{Z}[t]$ un polinom cu coeficienţi nenegativi. Atunci H este polinomul Hilbert pentru un design-ul eşalon în dimensiune doi dacă şi numai dacă există un număr întreg $i \geq 0$ astfel încât

$$H(t) = 1 + 2t + 3t^2 + \ldots + (i+1)t^i + a_{i+1}t^{i+1} + \ldots + a_d t^d,$$

cu $d \geq 0$ şi $i + 1 \geq a_{i+1} \geq \ldots \geq a_d$.