Inegalităţi funcţionale şi probleme de transport cu aplicaţii în economie

Anca Bonciocat

IMAR

Proiect "Cercetarea ştiinţifică economică, suport al bunăstării şi dezvoltării umane în context european - CerBun" POSDRU ID 62988

- Inegalităţi slabe de transport (inegalităţi Talagrand slabe) pe spaţii discrete şi grafuri ;
- Inegalităţi Brunn-Minkowski pe spaţii discrete şi grafuri ;
- Probleme de transport pe reţele de trafic.

Abordare : via "mass transportation"

Problema de transport

- Problema clasică : Monge, *Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais*, 1781 ; observaţie extrem de importantă din punctul de vedere al "geometriei" transportului optimal : transportul trebuie să urmeze linii drepte, ortogonale pe o familie de suprafeţe. Această observaţie l-a condus la studiul liniilor de curbură.

- Varianta liniarizată : Kantorovich şi Rubinstein, anii '40 ; teoremă de dualitate, programare liniară. Abia în 1975 Kantorovich a primit Premiul Nobel pentru Economie, "pentru contribuţiile sale la teoria alocării optimale a resurselor".

Problema de transport

- Relansată : R. McCann (*A convexity principle for interacting gases*, 1997), F. Otto, C. Villani (*Generalization of an inequality by Talagrand and links with the logarithmic Sobolev inequality*, 2000), Sturm-Lott-Villani - geometria spaţiilor metrice 2006, etc. Cea mai cuprinzătoare monografie pe acest subiect : C. Villani, *Optimal Transport, Old and New*, 2009.

- Gamă largă de aplicaţii : econometrie, economie urbană, "nonlinear pricing", teoria economică a stimulării ("incentive theory"), teoria transmiterii informaţiei, meteorologie, ecuaţii de difuzie şi mecanica fluidelor, cu consecinţe în biologie, etc.

Cazul Riemannian

Teoremă (von Renesse-Sturm 2005)

Pentru orice varietate riemanniană netedă şi conexă M cu metrica riemanniană d şi măsura volum m, şi pentru orice $K \in \mathbb{R}$, următoarele proprietăţi sunt echivalente :

1. $\mathrm{Ric}_x(v, v) \geq K|v|^2$ *pentru orice* $x \in M$ *şi* $v \in T_x(M)$.
2. *Funcţionala entropie* $Ent(\cdot|m)$ *este* K*-convexă pe* $\mathcal{P}_2(M)$ *în sensul că pentru orice geodezică* $\gamma : [0, 1] \to \mathcal{P}_2(M)$ *şi pentru orice* $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}\mathrm{Ent}(\gamma(t)|m) \quad \leq \quad & (1-t)\mathrm{Ent}(\gamma(0)|m) + t\mathrm{Ent}(\gamma(1)|m) \\ & -\frac{K}{2}t(1-t)\,\mathrm{d}_W^2(\gamma(0), \gamma(1)).\end{aligned}$$

Minoranţi pentru curbură pe spaţii metrice cu măsură

Definiţie (Sturm, Acta Math. 2006)

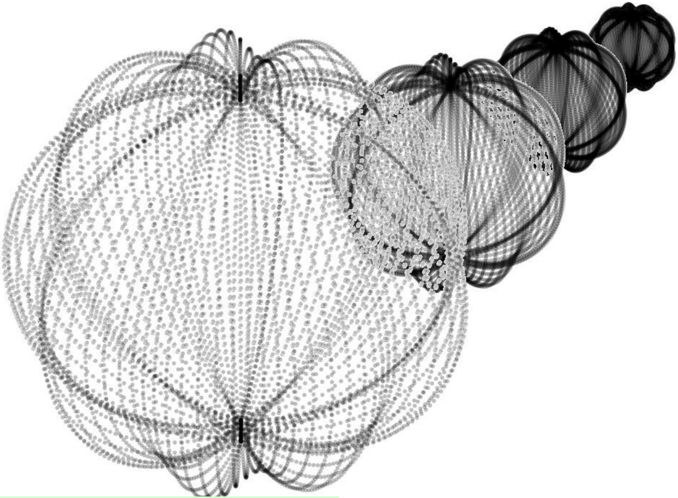
Un spaţiu metric cu măsură (M, d, m) *are curbura* $\geq K$ *pentru un* $K \in \mathbb{R}$ *dacă entropia relativă* $\mathrm{Ent}(\cdot|m)$ *este slab* K*-convexă pe* $\mathcal{P}_2^*(M, \mathrm{d}, m)$ *: pentru orice pereche de măsuri* $\nu_0, \nu_1 \in \mathcal{P}_2^*(M, \mathrm{d}, m)$ *există o geodezică* $\Gamma : [0,1] \to \mathcal{P}_2^*(M, \mathrm{d}, m)$*, ce uneşte* ν_0 *şi* ν_1*, cu*

$$\begin{aligned}\mathrm{Ent}(\Gamma(t)|m) \quad \leq \quad & (1-t)\mathrm{Ent}(\Gamma(0)|m) + t\mathrm{Ent}(\Gamma(1)|m) \\ & -\frac{K}{2}t(1-t)\,\mathrm{d}_W^2(\Gamma(0), \Gamma(1))\end{aligned}$$

pentru orice $t \in [0,1]$.

Curbura discretă - din perspectiva geometriei grosiere

Geometria grosieră (*coarse geometry) studiază proprietăţile spaţiilor "la scară mare".*



Minoranţi grosieri pentru curbură

Definiţie

(M, d, m) are curbura h-grosieră $\geq K$ dacă pentru orice $\nu_0, \nu_1 \in \mathcal{P}_2^*(M, \mathrm{d}, m)$ şi pentru orice $t \in [0,1]$ există un punct t-intermediar h-grosier $\eta_t \in \mathcal{P}_2^*(M, \mathrm{d}, m)$ între ν_0 şi ν_1, ce îndeplineşte

$$\mathrm{Ent}(\eta_t|m) \leq (1-t)\mathrm{Ent}(\nu_0|m) + t\mathrm{Ent}(\nu_1|m) - \frac{K}{2} t(1-t)\, \mathrm{d}_W^{\pm h}(\nu_0, \nu_1)^2,$$

unde semnul în $\mathrm{d}_W^{\pm h}(\nu_0, \nu_1)$ este ales '$+$' pentru $K > 0$, şi '$-$' pentru $K < 0$.

Pe scurt, scriem în acest caz $h\text{-}\mathbb{C}\mathrm{urv}(M, \mathrm{d}, m) \geq K$.

Stabilitate

Teoremă

1. **Stabilitate la convergenţă :** *Fie* (M, d, m) *un spaţiu metric cu măsură normalizat şi* $\{(M_h, \mathrm{d}_h, m_h)\}_{h>0}$ *o familie de spaţii normalizate cu diametre uniform mărginite, astfel încât* $h\text{-}\mathbb{C}\mathrm{urv}(M_h, \mathrm{d}_h, m_h) \geq K_h$, *cu* $K_h \to K$ *pentru* $h \to 0$. *Dacă*

$$(M_h, \mathrm{d}_h, m_h) \xrightarrow{\mathbb{D}} (M, \mathrm{d}, m)$$

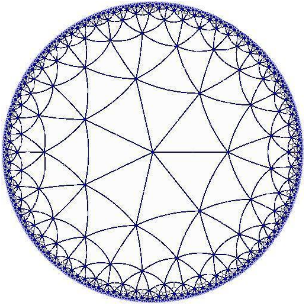
pentru $h \to 0$, *atunci*

$$\mathbb{C}\mathrm{urv}(M, \mathrm{d}, m) \geq K.$$

2. **Stabilitate la discretizare :** *Dacă* (M, d, m) *este un spaţiu metric cu măsură şi* $\mathbb{C}\mathrm{urv}(M, \mathrm{d}, m) \geq K$, *atunci pentru orice* $h > 0$ *şi pentru orice discretizare* (M_h, d, m_h) *with* $R(h) \leq h/4$, *avem* $h\text{-}\mathbb{C}\mathrm{urv}(M_h, \mathrm{d}, m_h) \geq K$.

Exemplu : Grafurile planare omogene

$\mathbb{G}(l, n, r)$ cu vârfurile de grad constant $l \geq 3$, cu feţele poligoane cu acelaşi număr $n \geq 3$ de muchii şi cu toate muchiile de aceeaşi lungime $r > 0$.



$\mathbb{G}(7, 3, r)$

Exemplu : Grafurile planare omogene

1. Dacă $\frac{1}{l}+\frac{1}{n}<\frac{1}{2}$, atunci $\mathbb{G}(l,n,r)$ poate fi scufundat în spaţiul hiperbolic 2-dimensional de curbură secţională constantă

$$K=-\frac{1}{r^2}\left[\operatorname{arccosh}\left(2\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{l}\right)}-1\right)\right]^2.$$

2. Dacă $\frac{1}{l}+\frac{1}{n}>\frac{1}{2}$, atunci $\mathbb{G}(l,n,r)$ poate fi scufundat în sfera 2-dimensională de curbură secţională constantă

$$K=\frac{1}{r^2}\left[\arccos\left(2\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{l}\right)}-1\right)\right]^2.$$

3. Dacă $\frac{1}{l}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}$, atunci $\mathbb{G}(l,n,r)$ poate fi scufundat în planul euclidian ($K=0$).

Exemplu : Grafurile planare omogene

Echipăm $\mathbb{G}(l, n, r)$ cu metrica d indusă de metrica riemanniană corespunzătoare şi cu măsura uniformă m pe muchii.

Propoziţie

$(\mathbb{G}(l, n, r), \mathrm{d}, m)$ *are h-curbura* $\geq K$ *pentru* $h \geq r \cdot C(l, n)$*, unde*

$$K = \begin{cases} -\frac{1}{r^2}\left[\operatorname{arccosh}\left(2\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{l}\right)} - 1\right)\right]^2 & \text{for } \frac{1}{l} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{r^2}\left[\arccos\left(2\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{l}\right)} - 1\right)\right]^2 & \text{for } \frac{1}{l} + \frac{1}{n} < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{for } \frac{1}{l} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

iar $C(l, n) = 4 \cdot \dfrac{\operatorname{arcsinh}\left(\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}\sqrt{\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{l}\right)} - 1}\right)}{\operatorname{arccosh}\left(2\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{l}\right)} - 1\right)}$

Inegalitatea Talagrand clasică de transport

Inegalitatea Pinsker-Csizsar-Kullback : pentru orice două probabilităţi μ şi ν avem

$$\|\mu - \nu\|_{\mathrm{TV}} \leq \sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{Ent}(\nu|\mu)}.$$

Mai general :

Definiţie

Fie (M, d) un spaţiu metric, iar $m \in \mathcal{P}_2(M, \mathrm{d})$ dată. Spunem că m satisface o inegalitate Talagrand (sau o inegalitate de transport cu cost pătratic) de constantă K, dacă pentru orice $\nu \in \mathcal{P}_2(M, \mathrm{d})$

$$\mathrm{d}_W(\nu, m) \leq \sqrt{\frac{2\,\mathrm{Ent}(\nu|m)}{K}}. \tag{4.1}$$

Inegalităţi slabe de transport

Propoziţie

Fie (M, d, m) *un spaţiu metric cu măsură, cu* h-$\mathbb{C}\mathrm{urv}(M, \mathrm{d}, m) \geq K$ *pentru* $h > 0$ *şi* $K > 0$. *Atunci pentru fiecare* $\nu \in \mathcal{P}_2(M, \mathrm{d})$ *avem*

$$\mathrm{d}_W^{+h}(\nu, m) \leq \sqrt{\frac{2\,\mathrm{Ent}(\nu|m)}{K}}. \tag{4.2}$$

Definiţie

Dacă (M, d) *este un spaţiu metric şi* $m \in \mathcal{P}_2(M, \mathrm{d})$, *spunem că* m *satisface o* *inegalitate (slabă) h-Talagrand de transport* *de constantă* $K > 0$ *dacă pentru orice* $\nu \in \mathcal{P}_2(M, \mathrm{d})$

$$\mathrm{d}_W^{+h}(\nu, m) \leq \sqrt{\frac{2\,\mathrm{Ent}(\nu|m)}{K}}.$$

Concentrarea măsurii

Pentru $A \subset M$ măsurabilă notăm
$B_r(A) := \{x \in M : \mathrm{d}(x, A) < r\}$ for $r > 0$.

Funcţia de concentrare a spaţiului (M, d, m) este

$$\alpha_{(M,\mathrm{d},m)}(r) := \sup\left\{1 - m(B_r(A)) : A \in \mathcal{B}(M), m(A) \geq \frac{1}{2}\right\}, \ r > 0.$$

Propoziţie

Fie (M, d, m) un spaţiu metric cu măsură cu h-$\mathbb{C}\mathrm{urv}(M, \mathrm{d}, m) \geq K > 0$. Atunci există $r_0 > 0$ astfel incât pentru orice $r \geq r_0$

$$\alpha_{(M,\mathrm{d},m)}(r) \leq e^{-Kr^2/8}.$$

Stabilitatea la $\mathbb{D}$-convergenţa

Teoremă

Fie (M, d, m) *un spaţiu metric cu măsură, normalizat şi compact, şi fie* $\{(M_h, \mathrm{d}_h, m_h)\}_{h>0}$ *o familie de spaţii metrice cu măsură normalizate, cu diametrele uniform mărginite şi astfel încât fiecare* (M_h, d_h, m_h) *să îndeplinească o inegalitate h-Talagrand de constantă* K_h*, pentru* $K_h \to K$ *când* $h \to 0$*. Dacă*

$$(M_h, \mathrm{d}_h, m_h) \xrightarrow{\mathbb{D}} (M, \mathrm{d}, m)$$

pentru $h \to 0$*, atunci* (M, d, m) *îndeplineşte o inegalitate Talagrand de constantă* K*.*

Tensorizare

Teoremă

Fie $\{(M_i, \mathrm{d}_i, m_i)\}_{i=1,\ldots,n}$ n spaţii cu măsură normalizate, ce îndeplinesc fiecare câte o inegalitate h-Talagrand de constantă K. Atunci spaţiul $M = M_1 \times \ldots \times M_n$, cu metrica

$$\mathrm{d}(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}_i(x_i, y_i)}, \quad x, y \in M$$

şi cu măsura $m = m_1 \otimes \ldots \otimes m_n$, îndeplineşte o inegalitate h-Talagrand de constantă K.

Condiţia curbură-dimensiune

Pentru a obţine rezultate geometrice mai consistente, este necesară şi o constrângere impusă dimensiunii.

Condiţia curbură-dimensiune $(h-)\mathrm{CD}(K, N)$ revine la :

1. $(h$-)curbura $\geq K$
2. $(N$-)dimensiune $\leq N$ (cu $N \geq 1$)

Funcţionala entropie Rényi :

$$S_N(\cdot|m) : \mathcal{P}_2(M, \mathrm{d}) \to \mathbb{R}$$

cu

$$S_N(\nu|m) := -\int_M \rho^{-1/N} d\nu,$$

unde ρ este densitatea părţii absolut continue ν^c în raport cu m în descompunerea Lebesgue $\nu = \nu^c + \nu^s = \rho m + \nu^s$ a măsurii $\nu \in \mathcal{P}_2(M, \mathrm{d})$.

Condiţia (h-)$\mathrm{CD}(0, N)$

Un spaţiu (M, d, m) satisface h-$\mathrm{CD}(0, N)$ dacă pentru orice pereche de măsuri $\nu_0, \nu_1 \in \mathcal{P}_2(M, \mathrm{d}, m)$ există un cuplaj h-optimal q al lui ν_0, ν_1 astfel încât pentru orice $t \in [0, 1]$ să existe un punct t-intermediar h-grosier $\eta_t \in \mathcal{P}_2(M, \mathrm{d}, m)$ între ν_0, ν_1 cu

$$S_{N'}(\eta_t|m) \le (1-t) \cdot S_{N'}(\nu_0|m) + t \cdot S_{N'}(\nu_1|m),$$

pentru orice $N' \ge N$.

Condiţia generală curbură-dimensiune

Definiţie

(M, d, m) *satisface condiţia* h-$\mathrm{CD}(K, N)$ *(resp.* h-$\mathrm{CD}^s(K, N)$*) dacă pentru orice* $\nu_0, \nu_1 \in \mathcal{P}_2(M, \mathrm{d}, m)$ *există un cuplaj* δh*-optimal q cu* ν_0, ν_1 *asfel încât pentru orice* $t \in [0, 1]$ *există un punct t-intermediar h-grosier (resp. în sens tare)* $\eta_t \in \mathcal{P}_2(M, \mathrm{d}, m)$ *între* ν_0, ν_1 *cu*

$$\begin{aligned} S_{N'}(\eta_t|m) \quad \leq \quad & -\int \Big[\tau_{K,N'}^{(1-t)}((\mathrm{d}(x_0,x_1)-\delta h)_+)\cdot \rho_0^{-1/N'}(x_0) \\ & +\tau_{K,N'}^{(t)}((\mathrm{d}(x_0,x_1)-\delta h)_+)\cdot \rho_1^{-1/N'}(x_1)\Big]\, dq(x_0,x_1) \end{aligned}$$

pentru orice $N' \geq N$.

ρ_i este densitatea părţii absolut continue a lui ν_i în raport cu m, $\delta = -1$ pentru $K < 0$, iar $\delta = 1$ pentru $K \geq 0$.

Consecinţe geometrice - Inegalitatea Brunn-Minkowski

Propoziţie ('Inegalitatea Brunn-Minkowski generalizată')

Fie (M, d, m) *un spaţiu metric cu măsură normalizat, care îndeplineşte* $h\text{-CD}^s(0, N)$. *Atunci pentru orice mulţimi măsurabile* $A_0, A_1 \subset M$ *cu* $m(A_0) \cdot m(A_1) > 0$, *pentru orice* $t \in [0, 1]$ *şi* $N' \geq N$

$$m(A_t^{\sqrt{h}})^{1/N'} + h^{1-1/N'} \geq (1-t) \cdot m(A_0)^{1/N'} + t \cdot m(A_1)^{1/N'}.$$

unde

$$A_t^\lambda := \left\{ y \in M : \exists (x_0, x_1) \in A_0 \times A_1 \text{ cu } (1-t)\,\mathrm{d}(x_0, y)^2 + t\,\mathrm{d}(y, x_1)^2 \leq \leq t(1-t)(\mathrm{d}(x_0, x_1)^2 + \lambda^2) \right\}.$$

Consecinţe geometrice - Inegalitatea Brunn-Minkowski

Teoremă ('Inegalitatea Brunn-Minkowski generalizată')

Fie (M, d, m) *un spaţiu normalizat ce îndeplineşte* $h\text{-CD}^s(K, N)$. *Atunci pentru orice mulţimi măsurabile* $A_0, A_1 \subset M$ *cu* $m(A_0) \cdot m(A_1) > 0$, *şi pentru orice* $t \in [0, 1]$ *şi* $N' \geq N$

$$m(A_t^{\sqrt{h}})^{1/N'} + h^{1-1/N'} \geq \tau_{K,N'}^{(1-t)}(\Theta_h) m(A_0)^{1/N'} + \tau_{K,N'}^{(t)}(\Theta_h) m(A_1)^{1/N'},$$

unde

$$\Theta_h := \begin{cases} \inf_{x_0 \in A_0, a_1 \in A_1} (\mathrm{d}(x_0, x_1) - h)_+, & \textit{pentru } K \geq 0 \\ \sup_{x_0 \in A_0, a_1 \in A_1} (\mathrm{d}(x_0, x_1) + h), & \textit{pentru } K < 0. \end{cases}$$

Consecinţe geometrice - Teorema Bonnet-Myers

Propoziţie

Oricare ar fi spaţiul metric cu măsură normalizat (M, d, m), *ce îndeplineşte condiţia curbură-dimensiune* $h\text{-}\mathrm{CD}^s(K, N)$ *pentru numerele reale* $h > 0$, $K > 0$ *şi* $N \geq 1$, *suportul măsurii m are diametrul*

$$L \leq \sqrt{\frac{N-1}{K}}\pi + h.$$

În particular, dacă avem $K > 0$ *şi* $N = 1$, *atunci* $\mathrm{supp}[m]$ *constă dintr-o bilă de rază h.*

Probleme de transport pe reţele de trafic

Fie M o submulţime convexă şi mărginită M a lui $\mathbb{R}^N$, pentru $N \geq 2$, înzestrată cu metrica euclidiană d. Considerăm distanţa dintre doua drumuri Lipschitziene $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to M$

$$\tilde{\mathrm{d}}(\gamma_1, \gamma_2) = \inf_{\varphi} \max_{t \in [0,1]} |\gamma_1(t) - \gamma_2(\varphi(t))|,$$

unde infimumul este luat după toate funcţiile $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ crescătoare şi bijective.

Definim Γ ca mulţimea tuturor claselor de echivalenţă de drumuri Lipschitziene din M, parametrizate peste $[0,1]$, unde γ_1 si γ_2 sunt echivalente dacă $\tilde{\mathrm{d}}(\gamma_1, \gamma_2) = 0$.

Γ este un spaţiu metric echipat cu distanţa $\tilde{\mathrm{d}}$.

Probleme de transport pe reţele de trafic

Fie $A, B : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ două funcţii monoton crescătoare cu :

- $A(0) = B(0) = 0$;
- A continuă ;
- B inferior semicontinuă.

Interpretăm $A(s)$ drept costul de transport cu mijloace proprii pe o distanţa s (costul combustibilului, al taxelor de autostradă, consumul de timp, oboseala, mersul pe jos, etc.).

Interpretăm $B(s)$ ca fiind costul de transport folosind transportul în comun pe distanţa s ("preţul biletului").

Probleme de transport pe reţele de trafic

Pentru o reţea de transport urbană $G \subset M$ (e.g. un graf metric finit), costul total de transport pe un drum $\gamma \in \Gamma$ este dat de

$$C_G(\gamma) = A(\mathcal{H}^1(\gamma \setminus G)) + B(\mathcal{H}^1(\gamma \cap G)),$$

unde $\mathcal{H}^1$ este măsura Hausdorff 1-dimensională, iar $\gamma := \gamma([0,1])$.

Definim o "distanţă" pe M, ce depinde de G şi este dată de costul cel mai mic de transport al drumurilor ce unesc două puncte :

$$D_G(x,y) = \inf\{C_G(\gamma) : \gamma \in \Gamma, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\}$$

Funcţia $D_G : M \times M \to \mathbb{R}^+$ este continuă.

Probleme de transport pe reţele de trafic

Scop : găsirea celei mai potrivite reţele de transport G, pentru a transporta populaţia de la "domicilii" la "locurile de munca".

Fie μ şi ν două probabilităţi pe M ; μ dă o distribuţie a domiciliilor, pe cand ν dă o distribuţie a locurilor de muncă.

Fiecărui cuplaj π îi putem asocia costul de transport dat de formula

$$I_G(\pi) = \int_{M\times M} D_G(x,y)d\pi(x,y)$$

Definiţie

Se numeşte măsură de traseu o măsură Φ pe Γ astfel încât $(p_0)_*\Phi = \mu$ şi $(p_1)_*\Phi = \nu$, unde pentru $t \in \{0,1\}$ am notat $p_t : \Gamma \to M$, $p_t(\gamma) = \gamma(t)$.

Probleme de transport pe reţele de trafic

Costul total de transport asociat unei măsuri de traseu :

$$T_G(\Phi) = \int_\Gamma C_G(\gamma) d\Phi(\gamma)$$

Notăm, pentru o reţea urbană G,

$$\mathcal{K}(G) = \inf\{T_G(\Phi) : \Phi \text{ măsură de traseu}\}$$

Fie $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ cu

- L monoton crescătoare şi inferior semicontinuă ;
- $L(0) = 0$;
- $\lim_{l\to\infty} L(l) = \infty$.

Interpretăm $L(l)$ ca fiind costul de mentenanţă al unei reţele de transport G de lungime $\mathcal{H}^1(G) = l$.

Costul total de folosire a reţelei G :

$$\mathcal{T}(G) = \mathcal{K}(G) + L(\mathcal{H}^1(G))$$

Reţele optimale de transport

Considerăm doar reţele G conexe.

Funcţie cost mai generală :
$f : (\mathbb{R}_+)^3 \to [0, +\infty]$, cu proprietăţile :

- f inferior semicontinuă ;
- f continuă în prima variabilă ;
- f monoton crescătoare în fiecare dintre cele trei variabile ($f(s, t, u) \leq f(s', t', u')$ pentru orice $s \leq s'$, $t \leq t'$, $u \leq u'$) ;
- Pentru orice $s, t \in \mathbb{R}_+$ fixate, $\lim_{u \to \infty} f(s, t, u) = \infty$.

Caz particular : $f(s, t, u) = A(s) + B(t) + L(u)$

Reţele optimale de transport

Redefinim în acest context "distanţa" D_G de pe M :

$$D_G(x,y) = \inf\Big\{ f(\mathcal{H}^1(\gamma \setminus G), \mathcal{H}^1(\gamma \cap G), \mathcal{H}^1(G)) : \gamma \in \Gamma, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y \Big\}$$

Teoremă

Fie μ şi ν două măsuri de probabilitate pe M. Atunci, cu notaţiile precedente, problema de optimizare

$$\min\{\mathcal{K}(G) : G \subseteq M, G \text{ conexă}\}$$

admite o soluţie G_{opt}.