Structuri matematice ale cercetarii economice actuale,cu aplicatii in evaluarea optiunilor europene

G.Barad
Proiectul POSDRU-CERBUN, cercetator postdoctoral IMAR si INCE

Cuprins

pornind de la realitatea economica (in particular serii de date financiare, pretul optiunilor europene, si cercetarile inter si trans-disciplinare efectuate), ce rezultate pur matematice putem deduce- abordare econofizica

dificultati specifice ipotetic asociate lipsei de structurare matematica. O intrebare generala ar fi ‘cat de multa matematica’ trebuie sa stapanim, ca instrument de lucru, ca limbaj, pentru a fi capabili sa formalizam corect si sa rezolvam problemele actuale ale preturilor optiunilor, legate de modele stohastice- de preferinta solvabile- de volatilitate locala, ce pot prevedea evolutia unor indici bursieri, sau a preturilor optiunilor Europene. Structurile matematice folosite in rezolvarea catorva probleme concrete, matematice, enuntate, sunt deosebit de interesante, avansate si recente. De asemenea, au mai fost folosite in studii de natura inter si trans-disciplinara. Metodologia de lucru poate fi aplicata si in rezolvarea altor probleme matematice similare.

Problematica

- Formule exacte pentru pretul optiunilor europene, doar in putine cazuri. De ce? .
- Calculul Ito $df(x,t) = (f_t + 1/2 f_{xx})dt + f_x dx$, desi diferit de cel clasic (Stratonovici) ofera aceleasi rezultate stohastice.
- Structuri algebrice si formule integrale. Simulari numerice cu probabilitati de tranzitie folosite in aproximarea probabil.empirice asociate unor produse financiare.

Raspunsuri si probleme deschise

- Volatilitatea depinde de timp si NU putem face o schimbare de variabile relevanta economic (schimbari de numerar, schimbarea punctului de referinta spatial si temporal) pentru a aduce ecuatia de evaluarea pretului optiunilor Merton Black-Scholes la o ecuatie cu derivate partiale cu coeficienti ce nu depind de timp.
- Exista un izomorfism de algebre Hopf intre 2 algebre Hopf, asociate calculului Ito si asociata celui clasic, care conduce la un izomorfism de calcule diferentiale bicovariante.
- Rezultatul are aplicatii in calculul bicovariant introdus de Hudson, unul din creatorii calculului stohastic quantic si in studiul unor produse quasi-shuffle introduse pe algebra Hopf Connes-Kreimer (asociata unui calcul diferential unde ab este diferit de $\int adb + \int bda$

- Introducere .
- Cuprins: instrumente matematice, modele de volatilitate locala pentru pretul optiunilor , solvabilitate, structuri algebrice si simulari numerice;concluzii si probleme deschise .
- Rezumat rezultate.

- Econofizica este un domeniu de cercetare multidisciplinar care aplica teorii si metode dezvoltate in fizica pentru a rezolva probleme economice. Marele economist roman Nicholas Georgescu-Roegen se numara printre primii promotori ai termoeconomiei (folosirea conceptului de entropie in economie The Entropy Law and the Economic Process (1971)). Unul din succesele aplicarii econofizicii este explicarea unor elemente ale distributiilor datelor financiare (Y. Liu, P. Gopikrishnan, P. Cizeau, M. Meyer, C.-K. Peng, and H. E. Stanley (1999)*Statistical properties of the volatility of price fluctuations*. Physical Review E 60 (2): 1390. . Exista similitudini, analogii intre observabilele cuantice si diverse concepte din stiintele sociale

Fluxul curburii medii (mean curvature flow) a fost folosit in procesarea imaginilor [140],[141](Batard). Suprafetele minimale sunt puncte critice ale acestui flux. Ecuatiile cu derivate partiale -existenta si unicitatea solutiilor in timp scurt, studiul singularitatilor si ecuatiile de evolutie ale tensorilor geometrici in cazul unor varietati diferentiabile cu metrica depinzand de timp t sunt de asemenea folosite in studiul curentului Ricci, folosit in demonstratia Conjecturii lui Poincare.De exemplu in spatiul 3-dimensional, ecuatia satisfacuta de hipersuprafata de evolutie u(t,x,y) este data de:

$$\frac{du}{dt} = \frac{(1 + (\frac{du}{dx})^2)\frac{d^2u}{dy^2} + (1 + (\frac{du}{dy})^2)\frac{d^2u}{dx^2} - 2\frac{du}{dx}\frac{du}{dy}\frac{d^2u}{\partial x \partial y}}{(1 + (\frac{du}{dx})^2 + (\frac{du}{dy})^2)^{3/2}}$$

- Studiul suprafetelor minimale a fost inceput de Lagrange in 1762. Plateau in 1832 a realizat experimente cu baloanele de sapun. Computerele folosind ecuatiile fluxului curburii medii sunt capabile sa genereze astfel de suprafete minimale care sunt solutii ale ecuatiei (locale):

$$1 + (\frac{du}{dx})^2)\frac{d^2u}{dy^2} + (1 + (\frac{du}{dy})^2)\frac{d^2u}{dx^2} - 2\frac{du}{dx}\frac{du}{dy}\frac{d^2u}{\partial x \partial y} = 0$$

.

- Algebrele Hopf si calculul diferential bicovariant generalizeaza in cazul necomutativ algebra comutativa a functiilor definite pe varietatea M. Hudson, Majid si Dimakis au combinat elementele calculului stohastic cu calculul diferential bicovariant [29],[143].Structura de algebra Hopf si factorizarea algebrica [151],[152],[153] (ce conduce la ne-comutativitatea functiilor date de axele de coordonate) sunt elemente esentiale ale acestor constructii.

- Structurile algebrice de Operad si Bialgebra generalizata au fost definite in monografiile lui Loday, Valette,Markl .

- Geometria spatiilor de moduli generalizeaza integralele folosite in functia zeta a lui Riemann. Apar produse shuffle modulare, in sensul ca notiunea de shuffle se pastreaza, dar grafurile inzestrate cu diferentiale nu mai sunt arbori, ci devin grafuri cu un singur ciclu de lungime maxima. In [125] si [126] se continua studiile lui Goncharov [158] si se enunta conjectura ca oricare 2 egalitati dintre anumite integrale multidimensionale se poate demonstra folosind Stokes, schimbarea variabilelor si un set finit de relatii de tip shuffle generalizat. O problema similara este gasirea identitatilor algebrice din calculul integral Ito, similare identitatilor satisfacute de polinoamele Hermite in raport cu miscarea Browniana.

.

- Deformari si quantizari ale produsului shuffle si al structurii de algebra asociativa apar in teorii algebrice de index , teoreme de formalitate si geometrie ne-comutativa. O problema deschisa este generalizarea produselor modulare shuffle si a produselor ciclice in cazul stohastic (Ito). Teorema de Formalitate a lui Kontsevich (1997) foloseste idei din teoria stringurilor. Dandu-se o varietate diferentiabila Poisson- algebra A a functiilor definite pe M este inzestrata cu o paranteza Poisson- adica o structura de algebra Lie astfel incat [x,...] este derivare in raport cu structura de algebra asociativa, se pune problema gasirii unei deformari a multiplicarii algebrei asociative A[[t]], astfel incat O(1) este dat de paranteza Poisson iar componentele sunt date de operatori bidiferentiali.

- Exemplu [157](Kontsevich):
  $a = \sum_{i,j} a_{ij}\partial_i \Lambda \partial_j$ paranteza Poisson cu coeficienti variabili pe un domeniu
  Atunci urmatoarea formula genereaza un produs asociativ pana la ordinul h
  $f * g = fg + h\sum_{i,j} a_{ij}\partial_i(f)\partial_j(g) + \frac{h^2}{2}\sum_{i,j,k,l} a_{ij}a_{kl}\partial^2_{ik}(f)\partial^2_{jl}(g) + \frac{h^2}{3}\sum_{i,j,k}$
  $\partial^2_{il}(g)\partial_k(f)]$

- Urmatoarele distributii au fost identificate ca fiind aplicabile domeniului financiar si studiate cu ajutorul integralelor de drum.

Distributii Levy truncate: $L(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{ipz} \exp[-H(p)]$, unde Hamiltonianul H(p) este dat de

$$\mathrm{H(p)} = \sigma^2 \frac{(\alpha^2 + p^2)^{\lambda/2} \cos(\lambda \arctan(p/\alpha)) - \alpha^\lambda}{\alpha^{\lambda-2} \lambda(1-\lambda)}$$

Distributii Levy: $L(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{ipz} \exp[-(\sigma^2 p^2)^{\lambda/2}/2]$
Distributii Meixner:
$M(z) = \frac{[2\cos(b/2)]^{2d}}{2a\pi\Gamma(2d)} |\Gamma((d+iz)/a)|^2 \exp(bz/a)$

- Distributiile hiperbolice simetrice generalizate au fost aplicate in studiul empiric al unor indici bursieri europeni (Germania), Brazilia, China si India. Concluzia noastra este ca in aplicarea modelelor 1-dimensionale de volatilitate locala (aproximarea suprafetei de volatilitate implicita si a nucleului caldurii), folosirea dezvoltarilor asimptotice de ordin 2 folosite in teoria integralelor de drum, trebuie precedata de parametrizarea (timp, forward moneyness) in cazul in care studiile empirice ale suprafetei de volatilitate locala implicita duc la concluzia ca distributia hiperbolica generalizata aproximeaza suficient de bine anumite serii de active financiare.

- Consideram un activ financiar condus de o miscare Browniana; dinamica pretului sau e descris de urmatorul proces Ito:

$$dx_t = a(x_t, t)\,dt + b(x_t, t)\,dW.$$

W este o miscare Browniana. Pretul bond-ului este un proces deterministic:

$$dx^0 = rx^0 dt \Rightarrow x^0(t) = e^{r(t-T)}.$$

Ecuatia Black-Scholes este urmatoarea ecuatie cu derivate partiale cu functie necunoscuta $f(x, t)$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rx\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = rf. \tag{3}$$

exista o unica solutie pe $[0, T]$ pentru procesul stohastic si pentru f, unde $f(x, T) = h(x)$ o functie data. De obicei $h(x) = \max(x - K, 0)$; K este pretul de exercitare. $f(x, 0)$ este pretului unei European call option cu maturitate T si strike price K, pentru un pret dat al activului, x la momentul $t = 0$.

- Cand putem face o schimbare de variabile pentru a transforma ecuatia (3) in ecuatia caldurii

$$h_t + \frac{1}{2} h_{xx} = 0 \tag{4}$$

.

- Prin schimbare de variabile intelegem existenta functiilor $c(t)$ si $H(x,t)$, astfel incat pentru orice f care este solutie a ecuatiei (3), $c(t)f(H(x,t),t)$ va fi solutie pentru ecuatia (4). Aceeasi problema poate fi pusa in cazul multi-dimensional, cand pretul optiunilor depinde de cel putin doua produse financiare. Avem o relatie de echivalenta pe multimea PDE's definite de (a,b,r), daca impunem ca aplicatia $(x,t) \to (H(x,t),t)$ sa fie difeomorfism.

- Daca f satisface (3) si

$$f(x,t) = e^{rt} g\left(e^{-rt}x, t\right) \Rightarrow f_t = rf + e^{rt} g_t - rg_x,$$

$$f_x = g_x f_x = e^{-rt} g_{xx} \Rightarrow g$$

satisface $g_t + \frac{1}{2}B^2 g_{xx} = 0$, unde $B(x,t) = b\left(e^{rt}x, t\right)e^{-rt}$.

daca $g(x,t) = u\left(H(x,t), t\right)$, unde $u_t + \frac{1}{2}u_{xx} = 0$

$\Rightarrow$

$\rightarrow B_t + \frac{1}{2}B^2 B_{xx} = 0$

$H = \int\limits_a^x \frac{1}{B}(y,t)dy$ $/$

Solutia generala pentru u este $u(x,t) = V\left(x\sqrt{2}, T-t\right)$

$undeV(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int \ e^{\frac{-|x-y|^2}{4t}} f(y)dy.$

- Demonstram ca teoria polinoamelor Hermite in 2 variabile furnizeaza solutii ale ecuatiei (5) in mod automat.

Teorema 2.2.1. Fie $y_t = H_n(B_t, t)$ procesul stohastic definit de al n^{lea} polinom Hermite in 2 variabile. Atunci el satisface o ecuatie diferentiala stohastica Ito fara drift a carei functie de volatilitate satisface ecuatia (5).

$H_0 = 1$, $H_1 = x$, $H_2 = x^2 - t$, $H_3(x, t) = x^3 - 3xt$,
$H_4(x, t) = x^4 - 6x^2 t + 3t^2$,

$H_n^{\#}(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} d^n dx^n e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x, t) y^n n! = e^{xy - \frac{y^2 t}{2}}$;
$H_n(x, t) = t^{\frac{n}{2}} H_n^{\#}(x) \left(x\sqrt{t} \right)$, unde $H_n^{\#}$ sunt polinoame Hermite de o variabila definite mai sus.
In teoria integrarii stohastice Ito, satisfac relatia fundamentala:

$$\int_0^t H_n(B_S, S)\, dB_S = H_{n+1}(B_t, t)$$

B miscare Browniana. Ce alte relatii mai exista ? ("tabele de integrale Ito nedefinite")

- Daca $B_t + 1/2B^2 B_{xx} = 0 \Rightarrow$ atunci exista W, solutie a ecuatiei caldurii
  $W_t + 1/2W_{xx} = 0$ astfel incat $B(x,t) = W\left(\int_x 1/B, t\right)$.

- $W(x,t) = \sqrt{t}a\left(x/\sqrt{t}\right)$. Un calcul simplu ne arata ca
  $a'' - xa' + a = 0$. (1)
  Pentru $a = e^f \Rightarrow e^f\left(f'' + (f')^2\right) - xe^f f' + e^f = 0$

- $\Rightarrow f'' + (f')^2 - xf' + 1 = 0 \Leftrightarrow f'' + (f' - x/2)^2 = (x/2)^2 - 1$. Daca
  $$g = f' - (x/2) \Rightarrow g' = f'' - (1/2) \Rightarrow g' + g^2 = (x/2)^2 - (3/2). \quad (2)$$
  .
- Ecuatiile equivalente 1 si 2 sunt ecuatiile diferentiale ordinare ce genereaza solutii quasi-homogene ale ecuatiei 5. Solutia generala pentru eq. 1 este $y(x) = c_1 D_1(x) + c_2 D_{-2}(ix)$
- unde D_V este “the parabolic cylinder function”.

  $D_V(z) = 2^{\frac{V}{2}} e^{-\frac{z^2}{4}} U\left(-1/2V, 1/2, 1/2z^2\right)$, U este functia hypergeometrica confluenta de prima speta. Eq.(2) este o ecuatie Riccati, a carei solutie generala se scrie de asemenea in functie de D_V.

  $U(a, b, z) = \Gamma(b)\Gamma(b-a)\Gamma(a) \int_0^1 e^{zt} t^{a-1} (1-t)^{b-a-1}$ṭ, unde

  $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}$ṭ.

- O problema similara este: dandu-se o ecuatie diferentiala stohastica n-dimensionala care descrie evolutia unui index format din n asset prices, cand ecuatia Black-Scholes de evaluare a optiunilor poate fi transformata, intr-un mod specific ce va fi definit mai jos, la ecuatia caldurii in $\mathbb{R}^n$? W_i sunt n miscari Browniene independente standard. Dinamica celor n preturi este data de:

$$dX_t^\mu = rX_t^\mu + \sum_i \sigma_i^\mu (X(t), t) dW_i.$$

r este dobanda constanta. Definim $G^{\alpha\beta}(x, t) = \sum_i \sigma_i^\alpha \sigma_i^\beta$.

ecuatia multidimensionala Black-Scholes este:

$$\partial_t f(x, t) + 1/2 G^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} = r\left(f - x_i \partial_i f\right). \qquad (1)$$

Atunci $h\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, t\right) = e^{-rt} f\left(x_1 e^{rt}, x_2 e^{rt}, \ldots, x_n e^{rt}, t\right)$ satisface

$$h_t + 1/2 g^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} = 0, \qquad (2)$$

- **Definitie** Spunem ca ecuatia 2 este echivalenta cu ecuatia caldurii daca exista n functii $H_1(x,t),\ldots,H_n(x,t)$, t (timp) si $xin\mathbb{R}^n$ astfel incat pentru orice W, solutie a ecuatiei $W_t + 1/2\sum_{i=1}^{n}\partial^2 W/\partial x_i^2 = 0, (6)$ $W(H_1(x,t),\ldots,H_n(x,t),t) = h(x,t)$ este solutie pentru ecuatia (2). Si pentru orice h solutie a ecuatiei (2), exista W ca mai sus.

- $(g_{\alpha\beta}) = \left(g^{ij}\right)^{-1}$ este inversa matricei data de $g^{\alpha\beta}(x,t)$. Taddei(1999) defineste un Lagrangian, care pentru un SDE fara drift este egal cu $L[x,\dot{x},t] = 1/2 g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta + 1/12R$, unde R este definit astfel:

$$R = \sum_{i,j,k} g^{ij} R^k_{ikj}\ R^a_{bcd} = \partial P^a_{bc}/\partial X_d - \partial P^a_{ad}/\partial X_c + \sum_k P^k_{bc}P^a_{dk} - P^k_{bd}P^a_{ck},$$

unde P se defineste mai jos:

$$P^a_{bc} = 1/2\sum_k g^{ka}(\partial g_{ck}/\partial X_b + \partial g_{bk}/\partial X_c - \partial g_{bc}/\partial X_k).$$

- Pentru $n = 2$, conditia $R = 0$ nu e numai necesara, dar e si suficienta (Teorema lui Gauss), in cazul in care coeficientii g nu depind de timp. Pentru $n \geq 3$ Eqs. (2) $\Leftrightarrow$ (6) daca si numai daca toti $R^a_{bcd} = 0$ si a urmatoarei **propozitii esentiale**.

  Propozitie 4.1. Daca ecuatia $(\Delta_t + d_t)\, f = 0$ este echivalenta cu ecuatia caldurii in $\mathbb{R}^n$, atunci H_i si $\left(g^{ij}\right)$ nu depind de timp.

  Observatie Rationamentul de mai sus se poate aplica pentru orice model fixat (in loc de ecuatia caldurii in spatiul euclidian) in care coordonatele (x(t)) sunt armonice: solutii ale ecuatiei Laplace. Coordonatele armonice au fost studiate de Einstein (1916) in contextul teoriei relativitatii si studiate pe varietati Riemann de [89] DeTurck si Kazdan (1981), care au demonstrat ca ele exista pe orice varietate Riemann cu metrica suficient de smooth. In concluzie, daca coeficientii (g) asociati unei ecuatii diferentiale stohastice depind de timp, solutiile ecuatiei Black-Scholes asociate nu pot fi in corespondenta bijectiva data de o transformare (H) ca mai sus, cu solutiile ecuatiei

- **Teorema** Se considera ecuatia multi-dimensionala Black-Scholes in cazul unei matrici ne-degenerate.

$$h_t + 1/2 g^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} = 0 \tag{2}$$

Se calculeaza coeficientii Γ^k_{ij} si se aplica transformarea (t,y(t,x)) care verifica $\sum g^{ij}\Gamma^k_{ij} = \frac{dy^k}{dt}$. Daca cel putin unul din coeficientii matricei $Jacobian(y)gJacobian(y)^T$ depinde de timp, atunci nu mai putem face o schimbare de variabile (t,H(t,x)) care transforma ecuatia intr-o ecuatie a caldurii cu coeficienti ce nu depind de timp. (jacobian=matricea derivatelor partiale).

$$P^a_{bc} = 1/2 \sum_k g^{ka} (\partial g_{ck}/\partial X_b + \partial g_{bk}/\partial X_c - \partial g_{bc}/\partial X_k).$$

- Fie X_t solutie n-dimensionala Stratonovich SDE

$$dX_t = V_0 dt + \sum_{i=1}^{m} V_i \circ dW_t^i, \qquad (***)$$

$X_0 \in \mathbb{R}^n$.

Notatie. $dt = dW_t^0$. pentru orice functie diferentiabila f, avem dezvoltarea in serie Stratonovich-Taylor.

$$f(X_T) = \sum_{i_1,\ldots,i_k \leq r} V_{i_1} \circ V_{i_2} \circ \ldots \circ V_{i_k} f(X_0) \underbrace{\int_{0 \leq t_1 \leq t_2 \ldots \leq t_k \leq T} dW_{t_1}^{i_1} \circ \ldots \circ dW_{t_k}^{i_k}}_{\text{IteratedStratonovichIntegrals}}$$

Teorema (Chen) ([4] 2009 p. 363)

$$X_{0,1}(W) = \sum_{i_1,\ldots,i_k} V_{i_1}, V_{i_2}, \ldots, V_{i_k} \int_{0 \leq t_1 \leq t_2 \ldots \leq t_k \equiv 1} dW_{t_1}^{i_1} \circ \ldots \circ dW_{t_k}^{i_k}$$

este element grupal si L este o serie Lie (primitiva).

- Solutia X_t a ecuatiei $(***)$ se reprezinta ca $X_t = \exp(L_t)\, X_0$, unde $L_t = tV_0 + \sum_{i=1}^{m} W_t^i V_i + \sum_{r=2}^{\infty} \sum_{i_1,\ldots,i_k \le r} c_j W_t^j V^j$, W_t^j iterated Stratonovich integrals. $V^j = \left[\left[\left[V_{j_1}, V_{j_2}\right] \ldots V_{j_{n+1}}\right]\right]$ paranteze Lie iterate de vector fields.

- O algebra Hopf este un spatiu vectorial H impreuna cu operatiile m, Δ, E, η si S astfel incat avem o algebra asociativa $a(bc) = (ab)c$. (H, Δ) este coalgebra $\Delta : H \to H \otimes H$, $\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y)$ (compatibilitatea dintre structurile de algebra si coalgebra). $S : H \to H$ se numeste antipodul lui H daca $\sum S(a_1)\, a_2 = \sum a_1 S(a_2) = \varepsilon(a)\, 1_H$, unde $\Delta(a) = \sum a_1 \otimes a_2$. Campurile vectoriale $V_0, V_1, \ldots, V_m$ formeaza o algebra Hopf; multiplicarea e data de concatenarea cuvintelor formata din alfabetul $V_{i_1}, V_{i_2}, \ldots, V_{i_k}$,
$\Delta(V) = V \otimes 1 + 1 \otimes V$
$S\left(V_{i_1}, V_{i_2}, \ldots, V_{i_k}\right) = (-1)^k V_{i_k}, V_{i_{k-1}}, \ldots, V_{i_1}$.

- $J(a,b;w) = \int\limits_{a<s_1<s_2<\ldots<s_n<b} dA_{\alpha_1}(s_1)\circ dA_{\alpha_2}(s_2)\circ\ldots\circ dA_{\alpha_n}(s_n)$ integrala iterata Stratonovich in raport cu miscarea Browniana si de multi-index $w=(\alpha_j)$. Folosim notatia $I(a,b,w)$ pentru integralele Ito similare .

- $$J_w = \sum_{u\in D(w)} 1/2^{n(u)} I_u,$$

  unde $n(u)$ este numarul de zero-uri obtinut prin inlocuirea (colapsarea) a $n(u)$ indici adiacenti egali w, si u este cuvantul rezultat (diferentiale multiple)

  $$I_W^{Ito} = \sum_{u\in D(W)} (-1)^{n(u)}/2^{n(u)} J_u^{Strat}$$

  .

Produse de integrale Stratonovich se comporta ca produse de integrale iterate clasice; Produsul integralelor Ito se comporta ca un "stuffle" sau produs Ito descris mai jos. In teoria integrarii Ito, se considera si intersectiile simplexelor de dimensiuni mai mici decat domeniul de integrare.

$$rI\left(\int_0^t dB(x)\right)\left(\int_0^t dB(x)\right)=\int_0^t\left(\int_0^s dB(x)\right)dB(s)+$$

$$+\int_0^t\left(\int_0^x dB(s)\right)dB(x)+\int_0^t (dB\cdot dB)\,(x).$$

Introducerea algebrelor Hopf in abordarea lui Hudson a calculului stohastic quantic si a diferentialelor Ito pentru quantum noises. Fie A algebra asociativa. Peste algebra tensoriala $T(A) = \bigoplus \bigoplus_{k=1}^{\infty} A^{\otimes K}$ exista doua structuri de algebre Hopf cu aceeasi comultiplicare, dar cu multiplicari diferite

$$\Delta\left(L_1 \otimes L_2 \otimes \ldots \otimes L_n\right) = \sum_{j=0}^{n} \left(L_1 \otimes L_2 \otimes \ldots \otimes L_j\right) \otimes \left(L_{j+1} \otimes \ldots \otimes L_n\right).$$

Produsul shuffle ▲ dintre doua elemente omogene

$$(a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_n) \blacktriangle (b_1 \otimes b_2 \otimes \ldots \otimes b_m) = \sum (c_1 \otimes c_2 \otimes \ldots \otimes c_{m+n}$$

suma este dupa toate $\left(\begin{array}{c} m+n \\ n \end{array} \right)$ modurile de a insera $a's$ printre $b's$: elementele $a_1, a_2, \ldots, \ldots, a_n$ vor apare in aceeasi ordine ca si $c - uri$. Analog pentru $b's$.

Examplu:

$$(a \otimes b) \blacktriangle (x \otimes y) = x \otimes a \otimes b \otimes y + a \otimes x \otimes b \otimes y + a \otimes b \otimes x \otimes y + \\ + x \otimes y \otimes a \otimes b + x \otimes a \otimes y \otimes b + a \otimes x \otimes y \otimes b$$

$\blacktriangle$ este numit produs shuffle; impreuna cu comultiplicarea Δ, $T(A)$ este o algebra Hopf. Produsul Ito foloseste structura de algebra a lui A:

$$(a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_n) \widetilde{\blacktriangle} (b_1 \otimes b_2 \otimes \ldots \otimes b_m) = \sum_{j=0}^{\min(m,n)} \sum (c_1 \otimes c_2 \otimes \ldots$$

In a doua suma, c_j este egal cu un a_α, b_β, sau cu un produs $a_i b_j$. Ca si in produsul $\blacktriangle$, aparitia elementelor a' si b' respecta ordinea initiala din $a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_n$ si $b_1 \otimes b_2 \otimes \ldots \otimes b_m$. produsul shuffle este un caz particular pentru produsul Ito in cazul unei algebre asociative triviale $xy = 0, \forall\, x$ si y. Antipodul $S_{\widetilde{\blacktriangle}}(a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_n) = (-1)^m a_n \otimes a_{n-1} \otimes \ldots \otimes a_1 +$ l.o.t. a fost descris de Hudson ([34],[41]).

- Exista un izomorfism de algebre Hopf intre algebra Hopf shuffle $T_{\blacktriangle}(A)$ si algebra Hopf Ito $T(A)$, unde A este algebra diferentialelor Ito clasice: $A = R\langle a_0 a_1 \ldots a_n \rangle$, $a_i a_j = 0$, pentru $i \neq j$, $a_i^2 = a_0$, pentru $j \neq 0$.

- **Definitie** ([46]Mesref, pag 10-12) Dandu-se o algebra A, un calcul diferential de ordinul 1 A este o pereche (B, d) astfel incat $d : A \to B$ este liniara si:

  1) B este A-bimodul $(a \to b) \leftarrow a'' = a \to (b \leftarrow a'')$

  2) d satisface regula Leibnitz $d(xy) = x \to d(y) + d(x) \leftarrow y$

  3) bimodulul B numit spatiul 1-formelor este generat de elementele $x \to d(y)$.

  Definitie Daca A este algebra Hopf, un calcul diferential de ordinul 1 peste A e dat de un quadruplu $(B, d, \Delta_L, \Delta_R)$ astfel incat (B, d) este un calcul diferential de ordinul 1, (B, Δ_L, Δ_R) este bimodul bicovariant peste A, d este aplicatie intre bicomodule.

Orice calcul diferential de ordinul 1 peste A permite definirea unui produse wedge intre forme, constructia algebrei exterioare $O(A)$ si extinderea unica a diferentialei d la $O(A)$. Lucrarea sus-mentionata contine exemple, primii pasi fiind dati de constructia unei forme Maurer-Cartan (page 6, [47]Majid)si a operatorilor Yang-Baxter ([47] pag 4, si [48]Woronowicz, Proposition 3.1).

In [45], Hudson defineste un calcul diferential de ordinul 1 peste algebra Hopf Ito a unei algebre asociative X, folosind:
$D : A = T(X) \to T(X) \otimes X = B$, unde

$$D\,(L_1 \otimes L_2 \otimes \ldots \otimes L_n) = (L_1 \otimes L_2 \otimes \ldots \otimes L_{n-1}) \otimes (L_n)\,(a \otimes b) \leftarrow c = (ac$$

multiplicarea Ito s-a folosit pentru primul factor.
$c \to (a \otimes b) = (ca \otimes b) + D(c)(a \otimes b)$, produsul tensorial al multiplicarilor a 2 algebre folosindu-se in al doilea termen.
Aplicand izomorfismul f din Teorema 3.1.1 la corolarul (pag 157 [45]) care afirma ca "in cazul produsului shuffle obisnuit,

calculul diferential introdus este bi-covariant", deducem ca este posibil a construi un calcul diferential bi-covariant folosind diferentialele Ito (miscarea Browniana).

- **4.3. Determinantul Van Vleck-Pauli-Morette**

  Se considera o solutie $\xi(t)$ a ecuatiei omogene

$$\left[-\partial_t^2 - \Omega^2(t)\right]\xi(t) = 0,$$

si se defineste

$$D_{ron} = \xi(t)\xi(t_0)\int_{t_a}^{t_b} dt'\xi^2(t') = \dot{x}_{cl}(t_b)\dot{x}_{cl}(t_a)\int_{t_a}^{t_b} dt\dot{x}_{cl}^2(t)$$

Consideram solutia ecuatiei Euler-Lagrange $x_{cl}(t)$ si derivatele partiale mixte ale functionalei de actiune $A((x_b x_a; t/t_b - t_a)$. Solutia $\xi(t)$ este data de

$$\xi(t) = \dot{x}_{cl}(t).$$

- Aproximarea semiclasica a unei integrale de drum este data de actiunea

$$\mathcal{A}_{qu}[x,\dot{x}] = \mathcal{A}\left[x_{cl}\right] + \int\limits_{t_a}^{t_b} dt \left[M2(\partial\dot{x})^2 + \Omega^2(t)(\partial x)^2\right],$$

$$F(x_b, x_a; t_b - t_a) = 1\sqrt{2\pi ih/M}\left[\partial\dot{x}_b\partial x_a\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 1\sqrt{2\pi ih}\left[-\partial_{x_b}\partial_{x_a}A\left(x_b, x_a; t_b - t_a\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Generalizarea *D*-dimensionala este data de

$$F\left(x_b, x_a, t_b - t_a\right) = 1\sqrt{2\pi ih}^D\left\{\det_D\left[-\partial_{x_b^i}\partial_{x_a^j}A\left(x_b, x_a, t_b - t_a\right)\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

Aproximarea semiclasica a probabilitatii de tranzitie este data de

$$p\left(x_b t_b \mid x_a t_a\right) =$$

$$= 1/\sqrt{2\pi ih}^{D}\left\{\det_D\left[-\partial_{x_b^i}\partial_{x_a^j}A\left(x_b, x_a, t_b - t_a\right)\right]\right\}^{\frac{-}{1}2} e^{iA(x_b,x_a,t_b-t_a)/h}.$$

- Determinantul de dimensiune $D \times D$ se numeste determinantul Van Vleck-Pauli-Morette. aproximarea semiclasica devine

$$p\left(x_b t_b \mid x_a t_a\right) = 1/\sqrt{2\pi ih}^{D}\left[\det_D\left(-\partial p_b \partial x_a\right)\right]^{\frac{1}{2}} e^{iA(x_b,x_a;t_b-t_a)/h}$$

$$\int_{x(t_1)=x_1}^{x(t_2)=x_2} e^{-A[x(t)]} Dx(t)$$

$= 1/\sqrt{2\pi \det\left(\partial^2 A_{Cl}\left(x_2, x_1\right) \partial x_2^\mu x_1^\mu\right)} \exp\left\{-A_{Cl}\left(x_2, x_1\right)\right\} =$
$p\left(t_1, x_1, T, K\right)$.$\mathrm{A}_{Cl}\left(x_2, x_1\right)$ este functionala de actiune evaluata de-a lungul solutiei clasice a ecuatiei Euler -Lagrange

$$\partial A/\partial x^\mu = \partial L/\partial x^\mu - d/dt \partial L/\partial x^\mu = 0,$$

$$\mathrm{x}_{Cl}^\mu\left(t_1\right) = x_1^\mu,$$
$$\mathrm{x}_{Cl}^\mu\left(t_2\right) = x_2^\mu.$$

Elementele de calcul variational aplicate in evaluarea optiunilor europene sunt cazuri particulare ale formalismului hamiltonian si lagrangian.

- **2.3 Definitie** ([75], [77], [87]) Un non-Σ operad O este o colectie de multimi $O(n)$, $n \geq 1$ astfel incat exista o lege de compozitie:
  $f : O(m) \otimes O(n_1) \otimes \ldots \otimes O(n_m) \to O\left(n_1 + \ldots + n_m\right)$.

  Exista un element unitate $e \in O(1)$. $f(g; e, e, e, \ldots e) = g$ pentru orice $g \in O(k)$. Legea de compozitie f este asociativa:

$$f\left[f\left(g; g_1, g_2, \ldots, g_n\right); r_1^1, r_2^1, \ldots, r_{x_1}^1, r_1^2, r_2^2, \ldots, r_{x_2}^2, \ldots, r_1^n, r_2^n, \ldots, r_{x_n}^n\right] =$$
$$= f\left(g; f\left(g_1; r_1^1, r_2^1, \ldots, r_{x_1}^1\right), \left(g_2; r_1^2, r_2^2, \ldots, r_{x_2}^2\right) \ldots \left(g_n; r_1^n, r_2^n, \ldots, r_{x_n}^n\right)\right)$$

Un operad simetric este un operad cu actiuni ale grupului simetric $S(n)$ pe $O(n)$, de obicei asociata cu permutari ale variabilelor sau renumerotari, compatibile cu compozitia. Un spatiu vectorial V este o O-algebra daca exista un morfism de operazi intre O si $End(V)$, operadul endomorfismelor lui V. Deci fiecare element a lui $O(n)$ defineste o operatie algebrica $V^{\otimes n} \to V$, subiectul unor compozitii de natura asociativa si a unor relatii ca ma sus, deductibile din generatorii si relatiile operadului $O(n)$. Alebrele Lie, Poisson, asociative, sunt toate O-algebre ale unor operazi.

2.4 Notiunea duala este cea de co-algebra peste un co-operad

In cazul finit-dimensional, trecerea la duale va schimba "directia" morfismelor. Spatiul vectorial gradat C este un co-operad daca si numai daca C^* este un operad. Daca D este o C-coalgebra, orice $\delta \in C(n)$ defineste o co-operatie de la D la $D^{\otimes n}$.

2.5 Definitie ([77],[79],[81]) O bialgebra generalizata este un spatiu vectorial H care este o C-coalgebra, o A-algebra si exista relatii de compatibilitate sau distributivitate intre operatii si co-operatii, notate $(C^c, (\Omega), \mathcal{A})$. H este numita o $(C^c, (\Omega), \mathcal{A})$-algebra. Aceste relatii de compatibilitate sunt formalizate de urmatoarea axioma (Ω): pentru oricare co-operatie $\delta \in C(m)$ si oricare operatie $\mu \in \mathcal{A}(n)$ exista urmatoarea egalitate de functii

$$\delta \circ \mu = \sum_i \left(\mu_1^i \otimes \ldots \otimes \mu_m^i\right) \circ \omega \circ \left(\delta_1^i \otimes \ldots \otimes \delta_m^i\right) : H^{\otimes n} \to H^{\otimes m},$$

unde :

$$\begin{cases} \mu \in \mathcal{A}(n), \mu_1^i \in \mathcal{A}(k_1), ..., \mu_m^i \in \mathcal{A}(k_m), \\ \delta \in \mathcal{C}(n), \delta_1^i \in \mathcal{C}(k_1), ..., \delta_n^i \in \mathcal{C}(k_m), \\ k_1 + \ldots k_m = l_1 + \ldots + l_n = r, \\ \omega \in K[S_r]. \end{cases}$$

Axioma de mai sus este generalizarea cazului bialgebrei clasice, unde avem conditia de compatibilitate Hopf: un produs de 2 elemente urmat de comultiplicare este egal cu produsul, in algebra produs tensorial, a doua co-produse (putem schimba ordinea operatiilor si co-operatiilor).

Rezultatul nostru este: produsul $*$ Kreimer face parte dintr-o structura de bialgebra generalizata pe $H(V)$ pentru care exista o relatie de compatibilitate ca mai sus in raport cu co-produsul obisnuit.

Alte produse de tip shuffle

Teoria functiei Zeta a lui Riemann si algebrele Hopf definite de Goncharov folosesc cele 2 produse, shuffle si “Ito aditiv” , in mod esential.

Definitie Pentru orice secventa de intregi pozitivi, definim valorile zeta multiple.

$a = (a_1 ... a_r), \ \mathrm{a}_1 > 1, \ \text{functia zeta multipla}$

$\zeta(\mathrm{a}) = \sum_{n_1 > n_2 > ... > n_r > 0} \frac{1}{n_1^{a_1} n_2^{a_2} ... n_r^{a_r}}$

$w(a) = \sum a_i \qquad \mathrm{d(a)} = \mathrm{r} \qquad \text{Proprietati :}$

$\zeta(2,1) = \zeta(3) \quad \zeta(3,1) = \frac{1}{4}\zeta(4) \quad \zeta(5) = \zeta(3,1,1) + \zeta(2,1,2) + \zeta(2,2$

Fie n si r < n fixate. Atunci $\zeta(n) = \sum_{(a)|w(a)=n} \zeta(a)$

Formula Kontsevich:

$\omega_0(t) = \frac{dt}{t}; \quad \omega_1(t) = \frac{dt}{1-t}$
$\sum_{n_1>n_2>...>n_r>0} \frac{z^{n_1}}{n_1^{a_1} n_2^{a_2} ... n_r^{a_r}} = \int_0^z \omega_{p(n)}(t_n) \int_0^{t_n} \omega_{p(n-1)}(t_{n-1}) ... \int_0^{t_2} \omega_{p(1)}(t_1$
Secventa $(p_1 ... p_n)$, *unde* $\mathrm{n} = \mathrm{w(a)}$ si $p_i \in \{0, 1\}$ este data de concaten
secventelor $0000^{a(j)-1}1$

Exista o bijectie intre secventele binare care incep cu 0 si se termina cu 1 si valorile zeta convergente;
Teorema produsului shuffle pentru MZV (multiple zeta values):

$\zeta(\mathrm{a})\zeta(\mathrm{b}) = \zeta(\overrightarrow{\mathrm{a}} \text{ shuffle } \overrightarrow{b}),$ unde $\overrightarrow{x}$ este forma binara a secventei de intreg

Exemplu de consecinta a acestei formule, care se demonstreaza folosind faptul ca un produs de 2 simplexe se descompune in simplexe indexate dupa permutari shuffle.

$$\zeta(2)\zeta(3,1) = \zeta(2,3,1) + 3\zeta(3,2,1) + 9\zeta(4,1,1) + \zeta(3,1,2)$$

Teorema produsului stuffle (Ito aditiv) pentru MZV (multiple zeta values)

$$\zeta(\mathrm{a})\zeta(\mathrm{b}) = \zeta(\mathrm{a} * \mathrm{b}),\ \text{unde a} * \text{b este produsul quasi} - \text{Ito dintre cele 2 secv}$$
$$\text{de numere intregi: pe orice pozitie apare un element din monomul a sau}$$
$$\text{b, sau o suma a}(\mathrm{i}) + \mathrm{b}(\mathrm{j}),\ \text{respectandu} - \text{se ordinea initiala data de a si b.}$$

Este conjecturat ca toate relatiile dintre MZV sunt consecinta relatiilor de mai sus. Goncharov [158] defineste o algebra Hopf Li-shuffle care inglobeaza fenomenele descrise mai sus.

Se considera varietatea
$M_{0,n}(\mathrm{C}) = \{(z_1, ...z_n), \text{ numere complexe distincte ce parametrizeaza spatiul proiectiv complex modulo/actiunea PSL}_2 \text{ z} \to \frac{az+b}{cz+d}\}$
Integrarea unor forme diferentiale de dimensiune maxima de tipul $\frac{dt_1 dt_2 ... dt_m}{\prod_{i=1}^{n-2} z_{s(i+1)} - z_{s(i)}}$ pe aceste varietati
(s fiind un reprezentant pentru coset-ul S(n)/grupul diedral D(n)) si schimbari de coordonate intre cele simpliciale, cubice si diedrale au dus la redemonstrarea in 1996 a unei identitati Dixon (1905):

$I(h, i, j, k, l) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^h(1-x)^i y^k (1-y)^j dxdy}{(1-xy)^{i+j-l+1}}$ Atunci:

$I(h, i, j, k, l) = \frac{j!k!}{(k+l-i)!(i+j-l)!} I(h, i, k+l-i, i+j-l, l)$

Produsul ciclic shuffle in geometrie necomutativa si teorii de index.

Definitie. Consideram multimea $\{(1,0),(1,1)...(1,p);(2,0)....(2,q)\}$ ordonata lexicografic
O permutare F a acesteia se numeste un (p+1,q+1)-shuffle ciclic daca:
F(1,0)<F(2,0) iar elementele F(1,0).....F((1,p), respectiv F(2,0).....F((1,q)), formeaza o
Permutare ciclica a p+1 elemente (respectiv q+1) elemente.
Inversa permutarii F actioneaza asupra multimii {1,2...p+q+2} rearanjand ciclic k,k+1....p+1,1,2...p (analog pentru q).

$$\text{x mod 1} = \text{x daca x} \in [0,1] \text{ si x} - 1 \text{ in cazul in care x} \in (1,2]$$

Pentru $(r,s,t) \in [0,1]^2 \times [0,1]^p \times [0,1]^q$, definim
r+s+t:=$(r_1, r_1+s_1, ...r_1+s_p, r_2, r_2+t_1, ...r_2+t_q)$ Mod 1
Pentru F un (p+1,q+1)-shuffle ciclic, definim
$\Sigma(F) = \{(r,s,t) \in \Sigma^2 \times \Sigma^p \times \Sigma^q \subset$

$[0,1]^2 \times [0,1]^p \times [0,1]^q| \ (\mathrm{F} \to (\mathrm{r}+\mathrm{s}+\mathrm{t})) \in \Sigma^{p+q+2}\}$
Atunci $\Sigma^2 \times \Sigma^p \times \Sigma^q$ se descompune ca reuniunea simplexelor $\Sigma(F)$, unde F parcurge multimea shuffle-urilor ciclice. Σeste simplexul standard, coordonatele fiind in ordine crescatoare si cuprinse intre 0 si 1. Este adevarata si o teorema mai generala, si anume

$$\Sigma^n \times \Sigma^{p1} \times \Sigma^{p2} ... \times \Sigma^{pn} \text{ se descompune in simplexe parametrizate dupa } (\mathrm{p1....pn}) - \text{shuffle permutari ciclice}$$

Spre deosebire de produsul shuffle obisnuit , care genereaza un produs asociativ pe spatiul vectorial al algebrei tensoriale (asociativitatea fiind si rezultatul descompunerii geometrice a produsului a 3 simplexe standard), produsul ciclic shuffle nu mai are aceasta proprietate si este implicat in calcule coomologice ce vor fi amintite mai jos, precum si in structura algebrica de $A_\infty - a\lg ebra$, notiune ce cuprinde ca un caz particular notiunea de algebra asociativa. Getzler si Jones [127],[128] au identificat in teoria spatiilor de functii structurile algebrice ce vor fi amintite mai jos, precum si fundamentul geometric al produsului ciclic shuffle ce apare si in Loday [137] si [129]

DefinitieO algebra A_∞ este un spatiu vectorial gradat $\mathrm{A} = \bigoplus_{p \text{ intreg}} A^p$ inzestrat cu o familie de aplicatii liniare gradate de grad (2-n): $m_n : A^{\otimes n} \to A, \;\; \mathrm{n} > 0$,satisfacand urmatoarele identitati (Stasheff):

$$\sum_{\substack{r+s+t=n \\ r,t \geq 0, s \geq 1}} (-1)^{r+st} m_{r+t+1}(id^{\otimes r} \otimes m_s \otimes id^{\otimes t}) = 0.$$ E

numita si strongly homotopy algebra. Definitia este echivalenta cu existenta unei coderivari de grad 1 pe T(sA), coalgebra libera generata de A astfel incat D(D(x))=0

Exemplu: Fie complexul $\Omega(M)[u]$ al formelor diferentiale pe varietatea M pe care actioneaza S^1

Variabila u este de grad 2. Definim aplicatiile multiliniare:

$P(k) : \Omega(M)^{\otimes k} \to \Omega(M),\ \mathrm{P(k)(w_1, w_2, ...w_k)} = \int_{\Delta(k)} i\mathrm{w}_1(t_1)\Lambda...\Lambda i\mathrm{w}_k(t_k)$
i este campul vectorial ce genereaza actiunea lui S^1 *inserat* in formele dif
$W(t)$ este actiunea difeomorfismului φ(t) asupra formei w $\Leftrightarrow$ argumentele
formei diferentiale, care sunt campuri vectoriale sunt translatate cu $\mathrm{D}\varphi$(t)

Urmatoarele aplicatii definesc o structura A_∞ pe $\Omega(M)[u]$

$m_1(w) = dw + uP(1)(w) \quad m_2(a, b) = a\Lambda b + \mathrm{uP(2)(a, b)} \quad m_n = uP(n)$

Omologia unei algebre A_∞ este omologia lui A inzestrat cu diferentiala m(1).
H(A) devine algebra asociativa cu produsul indus de m(2).
Daca w este 1-forma diferentiala pe X,
$c \in LX \to \int_c w$ este functie pe LX
Daca w este forma diferentiala pe X, w(t) e forma diferentiala pe LX data de pull-back-ul formei w prin aplicatia e(t):LX$\to$ X, e(t)(c)=c(t)

$S(k) : \Omega(M)^{\otimes k+1} \to \Omega(M),\ \mathrm{S(k)(w, w_1, w_2, ...w}_k) = \int_{\Delta(k)} \mathrm{w}(0)\Lambda.\mathrm{iw}_1(t$

i este campul vectorial ce genereaza actiunea lui S^1.

$W(t)$ este actiunea difeomorfismului φ(t) asupra formei w $\Leftrightarrow$ argumentele formei diferentiale, care sunt campuri vectoriale sunt translatate cu Dφ(t)

Fie A si B 2 algebre asociative. $a = (a_{0,}a_{1,}, ...a_p) \in \Omega^p(A) = A \otimes (A/\mathrm{C} \cdot 1_A)^{\otimes p}$
$b = (b_0, b_1, ...b_q) \in \Omega^q(B) = B \otimes (B/\mathrm{C} \cdot 1_B)^{\otimes q}$

$d : A \to (A/\mathrm{C} \cdot 1_A)$ functia factor $-$ inmultire cu scalari a unitatii

Definim produsul shuffle ciclic

$\mathrm{a} \overset{\longleftrightarrow}{\times} \mathrm{b} = \sum_{F \text{ ciclic (p+1,q+1)−shuffle}} F_{\longrightarrow}(1 \otimes 1, a_0 \otimes 1, a_{1,} \otimes 1, ...a_p \otimes 1, 1 \otimes b_0, 1 \otimes b_1, ...1 \otimes b_q)$

Definitie

Aplicatia de frontiera Hochschild

b($a_{0,}a_{1,}, ...a_p$)=($a_0a_1, ...a_p) + \sum(a_0a_1, ...a_ia_{i+1}, ...a_p)$

Aplicatia Connes B($a_{0,}a_{1,}, ...a_p$)=$\sum(-1)^{ip}(1, a_i...a_p, a_0, ...a_{i-1})$

Propozitie: B($\mathrm{a} \times \mathrm{b}$)-B$\mathrm{a} \times \mathrm{b}$-$(-1)^p \mathrm{a} \times \mathrm{Bb}$ +
b($\mathrm{a} \overset{\longleftrightarrow}{\times} \mathrm{b}$)-b$\mathrm{a} \overset{\longleftrightarrow}{\times} \mathrm{b}$-$(-1)^q \mathrm{a} \overset{\longleftrightarrow}{\times} \mathrm{b(b)}$=0

Obstructia operatorului Connes B de a fi derivare pentru produsul shuffle e egala modulo semne cu obstructia operatorului Hochschild b de a fi derivare pentru produsul ciclic shuffle.

Teorema (Teorema Eilenberg-Zilber pentru Omologia ciclica negativa)
Aplicatia x + v $\overleftrightarrow{\times}$:CN(A) $\underset{C[v]}{\overset{\wedge}{\otimes}}$ CN(B)$\rightarrow$ $CN(A \otimes B)$ induce izomorfism in omologie.

$$CN_\bullet(A) = (\Omega^*(A)[[v]], b + vB) \text{ este complex celular,}$$

v parametru formal de grad -2

Daca A este algebra functiilor diferentiabile pe varietatea diferentiabila M, omologia Hochschild
HH(A) este izomorfa cu
$\Omega(M)$ (Teorema Hochschild – Konstant – Rosenberg)
$(f_0, f_1, ...f_n) \rightarrow \frac{1}{n!} f_0 df_1, ...df_n$
Produsul shuffle de pe HH(A) este trimis in produsul exterior al formelor.Operatorul Connes B este trimis in operatorul de diferentiere exterioara a formelor. Cel putin in stadiul actual

structurile algebrice ce pot fi intalnite sunt cele descrise mai sus, legate de teoria omotopica a operazilor, quantizari si formalitate.

evidentierea unor structuri de $A_\infty-\mathrm{algebra}$.

- **Capitolul I**. Evaluarea preturilor optiunilor Europene se realizeaza considerand modele de volatilitate locala ce generalizeaza modelul clasic Merton Black-Scholes. Ecuatiile diferentiale stohastice conduc la pretul optiunilor ca solutii ale unor ecuatii cu derivate partiale. Practica economica si metode statistice specifice selecteaza anumite modele matematice, iar literatura de specialitate este saraca in formule analitice, practice de evaluare. Una din cauzele ne-prezentei acestor formule a fost identificata in lucrarea noastra, si nu este rezultatul lipsei de diversitate a modelelor propuse, ci al teoremei : daca cel putin unul dintre coeficientii transformati ai SDE depinde de timp, nu exista o transformare canonica care transforma ecuatia Merton Black-Scholes intr-o ecuatie cu coeficienti ce nu depind de timp.Cadrul geometric adecvat studierii transformarilor via difeomorfisme ale ecuatiilor implicate in option pricing este cel al ecuatiilor de evolutie geometrice- mean curvature flow.

In economie aceste transformari sunt necesare aplicarii metodei integralelor de drum, in care determinantul Van Vleck poate fi calculat numai daca ele exista.Amintim si alte metode de calcul si aproximare ale nucleului caldurii, unele prezente in lucrare impreuna cu exemple de modele solvabile:
-metode geometrice; calculul geodezicelor, al solutiilor ecuuatiei Euler-Lagrange, al functiei de actiune ca solutie a ecuatiei Hamilton-Jacobi.
-transformarea Fourier; dezvoltarea in serie dupa vectori proprii.
-metode stohastice; operatorul diferential este generatorul unui proces de difuzie Ito.
-aproximarea folosind metoda parametrixului, formule de cubatura , metoda Instanton-ului si a aproximarii semi-clasice.
-calculul simetriilor Lie si al simetriilor discrete.
De mentionat ca nu avem o formula inchisa pentru nucleului caldurii in cazul sferei 2-dimensionale [120],[121]. In 1985

apare dezvoltarea asimptotica Fisher-Jungster-Williams pentru SU(2)/U(1). Polinoamele Jacobi sunt definite ca

$P(n, a, b)(x) =$

$$\begin{pmatrix} n+a \\ n \end{pmatrix} \sum_{p=0}^{n} \frac{\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} p+a \\ p \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} n+a+b+p \\ p \end{pmatrix} [(x-1)/2]^p$$

Polinoamele Legendre se obtin in cazul a=b=0. Nucleul caldurii in cazul sferei

$S^2 = SU(2)/U(1)$ este dat de

$E(t, gH) = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\exp(-n(n+1)t/2)P(n)(\frac{1}{2}(tr(g)^2 + (tr(Jg)^2$

$J = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}; \quad \mathrm{tr} := \text{urma unei matrice din SU}(2),$

caz particular al formulei lui Benabdallah pentru

spatiile omogene compacte de forma G/H

O formula similara pentru K(t,x,x) a fost obtinuta de Avramidi folosind izomorfismul $S^2 = SO(3)/SO(2)$

Formula lui Benabdallah pentru G/H:

$E_{G/H}(t, gH) = \sum_{i \in J} d_i \exp(-\lambda_i t) f_i(gH), \quad \text{unde :}$
J este multime de index pentru clasele de reprezentari ireductibile ale lui G care restrictionate la H lasa invariant un vector nenul.
d(i)=dimensiunea reprezentarii
λ_i este o submultime a valorilor proprii ale Laplacianului pe G, care sunt valori proprii si pentru G/H
$f_i(gH) = \int_H ch(gh)dh,$ unde ch este caracterul reprezentarii si dh masura Haar

Capitolul II. Acest capitol porneste de la studiile empirice asupra suprafetei de volatilitate implicite. Are si o componenta experimentala si face conexiunea dintre abordarea analitica a primului capitol si cea algebrica a celui din urma capitol.
Ultimul capitol al lucrarii cuprinde fenomene de natura structurala, algebrica.
Metodologia de lucru si tipul de rezultatele obtinute in cazul primului produs Kreimer * pot fi aplicate si in cazul celui de-al

doilea produs de tip shuffle introdus de acesta in lucrarile: [144],[145],[146],[147].Algebra Hopf Connes-Kreimer definita in [49] joaca un rol important in combinatorica renormalizarii perturbative. Kreimer a reusit sa formalizeze diferenta dintre produsul shuffle obisnuit si produsul quasi-shuffle, de tip Ito , prin constructia unui produs pe algebra Connes-Kreimer definit recursiv.

- Produsul al doilea Kreimer, ne-studiat in lucrarea noastra, stabileste o conexiune intre teoriile de camp cuantice, ecuatiile Dyson-Schwinger, si factorizarea Euler a functiei ζ a lui Riemann

$$\sum_{n} 1/n^s = \prod_{p \,\mathrm{prime}} 1/1 - p^{-s}, \qquad \mathrm{Re}(s) > 1$$

Produsul shuffle pe arbori si cel de tip Ito au fost definite in Kreimer (2000):

$$t_1 * t_2 = B_+^{r(t_1)}\left(u\left(B_-\left(t_1\right)\right) * t_2\right) + B_+^{r(t_2)}\left(t_1 * u\left(B_-\left(t_2\right)\right)\right)$$

unde aplicatia u se defineste de asemenea recursiv.

$$u\left(\prod_{i=1}^{k} t_i\right) = t_1 * u\left(\prod_{i=2}^{k} t_i\right),$$

$\prod$ este produsul obisnuit comutativ al algebrei Connes-Kreimer.

$$\begin{aligned} t_1 \times t_2 &= B_+^{r(t_1)}\left(\tilde{s}\left[\tilde{u}\left(B_-\left(t_1\right)\right), t_2\right]\right) + B_+^{r(t_2)}\left(\tilde{s}\left[t_1, \tilde{u}\left(B_-\left(t_2\right)\right)\right]\right) + \\ &+ B_+^{r(t_1) r(t_2)}\left(\tilde{s}\left[\tilde{u}\left(B_-\left(t_1\right)\right), \tilde{u}\left(B_-\left(t_2\right)\right)\right]\right) \end{aligned}$$

al treilea termen foloseste structura de algebra.

O aplicatie a teoremelor 3 si 4 este demonstratia faptului ca cele doua produse asociative Kreimer, sunt izomorfe in cazul in

care V are o structura de algebra comutativa. Asa cum am demonstrat in ultimul capitol, nu putem vorbi despre un izomorfism de algebre Hopf datorita structurilor operadice implicate.
c) Structuri algebrice exotice au fost deja identificate in Fizica Teoretica: [74] algebre pre-Lie, vertex- algebre, [83] algebre Poisson, [84] operadul Bi-Hamiltonial si structuri Bi-Hamiltoniene [85], [86] si [87]. Este si cazul primului produs $*$ Kreimer, unde diversi operazi intalniti au fost identificati in lucrarea noastra.

d) Una dintre cele mai generale intrebari este cum am putea determina toate relatiile satisfacute de integralele Ito, similare relatiei Hermite discutata in sectiunea 2.2 pag 11. Cu siguranta orice astfel de relatie *implica* o relatie geometrica satisfacuta de simplexele peste care facem integrarea si de intersectiile lor (deoarece nu avem formula de integrare prin parti) si *implica* o egalitate in cadrul calculului diferential clasic. Probleme

similare, deschise, rezolvate sau formalizate partial , au aparut recent in cadrul geometriei algebrice ne-comutative si in teoriile de quantizare. In ce masura aceste rezultate au consecinte in cazul integrarii Ito a proceselor stohastice este o problema de care ne vom ocupa in viitor. Ultima parte a capitolului III doreste a arata ca *produsul shuffle* folosit in mod esential in integrarea Ito (formule de cubatura , integrale iterate, dezvoltarea in serie taylor) are origini geometrice si nu este cel mai general produs de natura geometrica : mai exista produse shuffle ciclice si produse shuffle modulare.
Mentionam urmatoarele probleme deschise neabordate in lucrare si pentru care am prezentat metodologia de lucru:
-Lucrarile lui E.Getzler pot conduce la aplicatii in cazul proceselor stohastice in care apar astfel de produse geometrice: identitati satisfacute de familii de procese stohastice , structurate in notiunea de algebra A_∞.
Generalizarea in cazul Ito a produsului ciclic shuffle.

Constructia elementelor quasitriangulare in cazul structurii de “brace-algebra”, dupa metodologia de constructie de catre Hudson a acestor elemente in cazul algebrei Hopf Ito; studiul produsului dublu simetric introdus de Hudson.
-al doilea produs Kreimer admite compatibilitati cu structura de coprodus formalizate prin notiunea de bialgebra generalizata.
- Rezultatele de Formalitate si Quantizare implica faptul ca structurile diferentiabile clasice (bazate pe integrarea pe simplexe modulo frontiere datorata teoremei Stokes si a formulei de integrare prin parti) sunt similare calculului la nivel de ciclii, ca si in cazul integrarii Ito, aceasta similaritate fiind formalizata cu ajutorul unor structuri algebrice deosebit de complexe.

- .

- Haven, E.2008, *Elementary quantum-mechanical principles and social science: is there a connection*? Romanian Journal of Econ. Forecasting, pp. 41-58.

- R. L. Hudson, 2009. *Hopf algebraic aspects of iterated stochastic integrals*, Infinite Dimensional Analysis, Quantum Prob. and Related Topics, Vol.12, 3 pp. 479-496

- E. Bennati, M. Rosa-Clot and S. Taddei, 1999. *A path integral approach to derivative security pricing: I. formalism and analytical results*, International Journal of Theoretical and Applied Finance 2: 381 Available at < http://arxiv.org/abs/cond-mat/9901277v1>

- Widder D.V,1975, *The Heat Equation*, Pure and Applied Math., Vol. 67. Academic Press, New York-London

Rosenberg,S.,1997. *The Laplacian on a Riemannian Manifold*. Cambridge Univ. Press

D. V. Vassilevich, 2003. *Heat kernel expansion: User's manual*" Phys. Rept. 388, 279 <arXiv:hep-th/0306138>

R.L. Hudson, 2005. *Ito calculus and quantisation of Lie bialgebras*, Ann. Inst. H. PoincarÃ©-PR 41, 375-390

Kloeden, E. Platen, 1992. Springer-Verlag *Numerical Solution of Stochastic Diferential Equations*

C. A. Braumann, *Ito versus Stratonovich calculus in random population growth*, Mathematical Biosciences 206 (2007) 81-107

A. Dimakis and F. Müller-Hoissen, *Stochastic differential calculus, the Moyal *-product, and noncommutative* *geometry*, Lett. Math. Phys. 28, 123 (1993); hep-th/9401151.

L.G.Gyurkó, L. G. and Lyons, T. J. (2008) *Rough Paths based Numerical Algorithms in Computational Finance*, Working Paper. Oxford-Man Institute of Quantitative Finance

Levin, D. and Wildon, M. (2008), *A combinatorial method for calculating the moments of the Lévy area. Trans*. AMS 360(12) 6695-6709

Malham, S.J.A. and Wiese, A, *Stochastic expansions and Hopf algebras*, Proc. R. Soc. A 465 (2009), pp. 3729-3749.

Kloeden and E. Platen,1991. *Stratonovich and Ito stochastic Taylor expansions*, Math. Nachr. 151 33-50.

- Kloeden and E. Platen,1991. *Relations between multiple ito and Stratonovich integrals*, Stochastic Analysis and Applications Volume 9, Issue 3
- R L Hudson, *Ito versus Woronowicz calculus in the Ito-Hopf algebra*, Math Slovaca 54 (2004), 151-159. Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/130429
- L. Mesref, *Quantum gauge theories*, Int. J. Mod. Phys. A 20 (2005) 5317, [hep-th/0412158]
- S. L. Woronowicz, *Differential calculus on compact matrix pseudogroups* (quantum groups), Commun. Math. Phys. 122, 125 (1989). http://en.scientificcommons.org/917311
- A. Connes, D. Kreimer, *Hopf algebras, Renormalization and Noncommutative Geometry*. Commun. Math. Phys., 199, 203,1998; hep-th/9808042

- Gubinelli, M. (2008). *Abstract integration, Combinatorics of Trees and Differential Equations*. arXiv:0809.1821 (2008). Proceed. of Conf. on Combinatorics and Physics, MPI Bonn, 2007

- Terry Lyons and Nicolas Victoir, *Cubature on Wiener Space, Proceedings of the Royal Society of London*. Series A. Mathematical and Physical Sciences 460 (2004), 169-198. http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/460/2041/169.full.pc

- C. Necula (2009), *Modeling Heavy-Tailed Stock Index Returns Using The Generalized Hyperbolic Distribution*, Romanian Journal for Economic Forecasting, 6(2):118-131.

- Eberlein, E. and U. Keller: *Hyperbolic distributions in Finance*. Bernoulli, 1:281-299 (1995)

- Poetter, Behr, *Modeling Marginal Distributions of Ten European Stock Market Index Returns*, International Research Journal of Finance and Economics Issue 28 (2009).
- A. Alentorn (2004),*Modelling the implied volatility surface: an empirical study for FTSE options*. cite-seerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.199.3271rep=rep
- Gatheral, Jim and Wang, Tai-Ho, *The Heat-Kernel Most-Likely-Path Approximation* (September 22, 2011). International Journal of Theoretical and Applied Finance, Vol. 15, No. 1, 1250001, 2012. Available at SSRN: http://ssrn.com/abstract=1663318
- V. N. Kolokoltsov, *Semiclassical analysis for diffusions and stochastic processes*, Springer Lecture Notes in Math. 1724, 2000

- D. Kreimer, *Shuffling quantum field theory*, Lett. Math. Phys.51 (2000) 179

  arxiv.org/abs/hep-th/9912290

- D. Kreimer, *Feynman diagrams and polylogarithms: Shuffles and pentagons*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. 89 (2000) 289 http://arxiv.org/abs/hep-th/0005279

- D. Burde, *Left-symmetric algebras, or pre-Lie algebras in geometry and physics*, Cent. Eur. J. Math.4(2006)323-357.http://arxiv.org/abs/math ph/0509016

- M. Markl, S. Shnider, J. Stasheff (2002). *Operads in Algebra, Topology and Physics*. American Mathematical Society

- M. Aguiar and J.-L. Loday, *Quadri-algebras*, J. Pure Applied Algebra 191, (2004), 205-221. (arXiv:math.QA/03090171)

- J.-L. Loday, *Generalized bialgebras and triples of operads*, http://arxiv.org/abs/ math/0611885 , Astérisque 320 (2008), x+116 pp

- G. W. Zinbiel, (2011) *Encyclopedia of types of algebras 2010*". arXiv:math/1101.0267

- DeTurck, Dennis M.; Kazdan, Jerry L. (1981) *Some regularity theorems in Riemannian geometry*, Annales Scientifiques de l'Ãcole Normale SupÃ©rieure, 14 (3): 249â260

- B Chow, P Lu, L Ni, Hamilton's Ricci flow, Graduate Studies in Mathematics 77, Amer. Math. Soc. (2006) MR2274812

- X.-P. Zhu, âLectures on mean curvature flowsâ, Studies in Advanced Mathematics, vol. 32, International Press, Somerville, 2002.

- Stanley, H. E., Amaral, L. A. N., Gabaix, X., Gopikrishnan, P., Plerou, V., Quantifying economic fluctuations, Physica A 302 (2001) 126.

- Srinivasan, Devanadhen, Deo, An Empirical Analysis of Implied Volatility in Indian Options Market , International Research Journal of Finance and Economics , Issue 18 (2008)

- Fajardo, J. and Farias, A. (2004): *Generalized Hyperbolic Dis tributions and Brazilian Data.* Brazilian Review of Econometrics, Vol. 24, No. 2, 249-271.

- Dumas, Bernard, Jeff Fleming, and Robert E. Whaley. (1997). âImplied Volatility Functions: Empirical Tests,â Journal of Finance 53, 2059â2106.

- H. Berestycki, J. Busca, and I. Florent, Asymptotics and calibration of local volatility models, Quantitative Finance, 2 (2002), pp. 61â69.
- O. Calin, D. C. Chang, K. Furutani, and C. Iwasaki, âHeat kernels for elliptic and sub-elliptic operators, Methods and techniquesâ, Applied and Numerical Harmonic Analysis. BirkhÂ¨auser/Springer, New York, 2011
- Lo, C. F., Hui, C. H., 2006. Lie-Algebraic Approach for Pricing Moving Barrier Options with Time-Dependent Parameters. Journal of Mathem. Analysis and Appl. 323, 1455-1464.
- Fischer, H. R., Jungster, J. J., and Williams, F. L. The heat kernel on the two-sphere, Adv. Math, 54:226-232, [1984]

- I. G. Avramidi, Heat kernel on homogeneous bundles over symmetric spaces, arXiv:math.AP/0701489, 55 pp., submitted to Advances in Math. (2007),
- Saslow, W.M., 1999. An economic analogy to thermodynamics. American Journal of Physics 67, 1239â1247
- F. Brown, S. Carr, and L. Schneps, âThe algebra of cellâzeta valuesâ, Compos. Math. Vol. 146 Iss. 3 (2010) 731, [arXiv:0910.0122 [math.NT]].
- E. Getzler, J.D.S. Jones and S. Petrack, Differential forms on loop space and the cyclic bar complex, Topology 30 (1991), 339371.
- E. Getzler and J. D. S. Jones, âA_∞-algebras and the cyclic bar complexâ, Ill. Jour. Math. 34 (1990) 256.

- U. Otgonbayar, Local index theorem in noncommutative geometry, Ph.D. dissertation, The Pennsylvania State University, 2009.
- D. Tamarkin,B. Tsygan, Cyclic formality and index theorems, Lett. Math. Phys. 56 (2001) 85-97
- J.-L. Loday, Cyclic Homology, second ed., Grundlehren vol. 301, Springer, Berlin, 1998.
- M. Kontsevich, Homological algebra of mirror symmetry, in: Proceedings of the 1994 International Congress of Mathematicians I, BirkhÃuser, ZÃ$\frac{1}{4}$rich, 1995, p. 120.alg-geom/9411018.
- T. Batard: Heat Equations on Vector Bundles - Application to Color Image Regularization. [hal] Journal of

Mathematical Imaging and Vision JMIV (Special Issue of MIA'09 Conference), 41(1-2) 2011, pp. 59-85

T. Batard and M. Berthier: Heat Kernels of Generalized Laplacians - Application to Color Image Smoothing. IEEE International Conference on Image Processing ICIP 2009

D. Kreimer. Unique factorization in perturbative QFT. Nucl. Phys. Proc. Suppl., 116:2003

Voit, Johannes. The statistical mechanics of financial markets. Springer, 2005.

Kontsevich, Maxim. "Deformation quantization of Poisson manifolds." Letters in Mathematical Physics 66.3 (2003): 157-216.

Goncharov, Alexander B. "Periods and mixed motives." arXiv preprint math/0202154 (2002).