MEMORIU DE ACTIVITATE

VLAD TIMOFTE

1. Prezentare generală

1.1. **Domenii de cercetare.**

În general: Analiză pură şi aplicată.
În particular: Teoria aproximării, Polinoame simetrice (proprietăţi analitice), Analiză Funcţională, Aliaje cu memoria formei (studiul matematic al unor modele).

Lista publicaţiilor mele în aceste domenii cuprinde 20 de articole publicate (dintre care 15 cotate ISI) şi monografia *Shape Memory Alloys: Manufacture, Properties and Applications*, în care am scris capitolul *Analysis of a thermomechanical model of shape memory alloys* (50 pagini) la invitaţia celor de la Nova Science Publishers (New York). Acest capitol a fost republicat în 2012 în *Encyclopedia of Materials Science Research*.

1.2. **Conferinţe, prezentări, granturi, poziţii.**

De când am devenit cercetător la IMAR (1 iulie 2007) am participat la mai multe conferinţe internaţionale:

- Joint International Meeting of the American Mathematical Society and the Romanian Mathematical Society (Alba Iulia, 27–30 iunie 2013), cu expunerea *Generalized Dini theorems for nets of functions on arbitrary sets*;
- XI-ème Colloque Franco-Roumain de Mathématiques Appliquées (Bucureşti, 24–30 august 2012), cu expunerea *General Stone-Weierstrass theorem*;
- 5th European Congress of Mathematics (5ECM, Amsterdam, 14–18 iulie 2008), cu *The half-degree and degree principles for symmetric polynomials on symmetric semi-algebraic sets*;
- 6th International Conference on Inverse Problems in Engineering (ICIPE 2008, Dourdan-Paris, 15–19 iunie 2008, la invitaţia lui Andrei Constantinescu, profesor la École Polytechnique Palaiseau).

În perioada ianuarie–mai 2009 am ocupat o poziţie de Visiting Associate Professor oferită de către University of Mississippi, unde am ţinut trei cursuri pentru doctoranzi şi am susţinut în mod regulat expuneri în cadrul Seminarului de Analiză. Această poziţie a fost apoi extinsă pentru încă 9 luni, pe perioada august 2009 – mai 2010.

Am vizitat şi Universitatea Konstanz (Germania) la invitaţia lui Alexander Prestel (28 noiembrie – 14 decembrie 2007).

În cadrul grantului 2-CEx-11-34/2006 de la IMAR am predat lucrările [14, 15].

În paralel cu cele de mai sus, mi-am continuat activitatea de Editor Asociat la Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications (AJMAA).

2. Contribuţii ştiinţifice

2.1. **Teoria aproximării.**

[5] analizează aproximarea sub condiţii suplimentare (asupra imaginii şi suportului) a funcţiilor cu valori vectoriale. Mai precis, pentru un spaţiu topologic T, un spaţiu local convex X, o funcţie continuă $u \in C(T,X)$, un subspaţiu vectorial $E \subset C(T,X)$ şi o vecinătate arbitrară a originii $W \subset X$, problema este cea a găsirii unui W-aproximant $u_W \in E$ a lui u, astfel încât

$$(u_W - u)(T) \subset W, \quad u_W(T) \subset \operatorname{co}(u(T)), \quad \operatorname{supp} u_W \subset u^{-1}(X \setminus \{0\}).$$

Într-un cadru destul de general (una din mulţimile $T, u(T)$ este paracompactă, sau $u(T)$ e total mărginită), rezultatul principal arată că astfel de aproximanţi există în "*produsul tensorial local*"

$$(C(T) \otimes X)_{\mathrm{loc}} := \left\{ u : T \to X \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{pentru orice } t \in T, \text{ avem } u|_V = v|_V \\ \text{pentru anumite } V \in \mathcal{V}_T(t) \text{ şi } v \in C(T) \otimes X \end{array} \right\}$$

(funcţii care coincid local cu elemente din $C(T) \otimes X$). În particular, *pentru un spaţiu topologic compact T, există W-aproximanţi $u_W \in C(T) \otimes X$.* Astfel de aproximanţi sunt utili, întrucât iau valori în subspaţii finit dimensionale ale lui X. Trei aplicaţii distincte sunt puse în evidenţă[1]: un rezultat de densitate în raport cu topologia limită inductivă, o teoremă de prelungire de tip Tietze-Dugundji şi o nouă demonstraţie a teoremei Schauder-Tihonov de punct fix.

[6] generalizează anumite rezultate din [5] pentru produsul tensorial $C(T, X) \otimes C(S, Y)$, cât şi teorema de densitate a lui Dieudonné pentru incluziunea $C(T) \otimes C(S) \subset C(T \times S)$.

[7] extinde şi unifică majoritatea teoremelor de tip Stone-Weierstrass cunoscute, pentru funcţii cu valori scalare sau vectoriale, pentru subspaţii vectoriale sau submulţimi ale lui $C(T, X)$. Acest lucru este posibil prin folosirea unor tehnici de factorizare în locul tradiţionalei localizabilităţi (a lui J.B. Prolla). Un exemplu de rezultat din [7] este următorul (enunţat aici într-un cadru particular):

Teoremă (Stone-Weierstrass, cazul scalar). *Pentru $\Gamma \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, fie un spaţiu topologic compact T şi un subspaţiu vectorial $E \subset C(T, \Gamma)$ care separă punctele lui T. Fie $G \subset C(\Gamma^n, \Gamma)$ o mulţime de funcţii neconstante, astfel încât*

$$g(v_1, \ldots, v_n) \cdot w \in E \qquad (g \in G \text{ şi } v_1, \ldots, v_n, w \in E).$$

Presupunem că una din mulţimile E, G este autoadjunctă şi că una din următoarele şapte condiţii este satisfăcută:

- **(a):** *E este o subalgebră a lui $C(T, \Gamma)$,*
- **(b):** $1 \in E$,
- **(c):** *Pentru orice $t, s \in T$ distincte, avem* $\begin{vmatrix} v_1(t) & v_1(s) \\ v_2(t) & v_2(s) \end{vmatrix} \neq 0$ *pentru anumite $v_1, v_2 \in E$,*
- **(d):** $|E| := \{|v| \mid v \in E\} \subset C(T, \mathbb{R})$ *separă T,*
- **(e):** *G separă punctele unei vecinătăţi $V \in \mathcal{V}_{\Gamma^n}(0)$,*
- **(f):** $\Gamma = \mathbb{R}$, *şi pentru orice $t, s \in T$ distincte, avem $v(t) + v(s) \neq 0$ pentru un $v \in E$,*
- **(g):** $\Gamma = \mathbb{R}$ *şi G conţine funcţii care nu sunt pare.*

Dacă $E(t) := \{u(t) \mid u \in E\} \neq \{0\}$ pentru orice $t \in T$, atunci E este uniform dens în $C(T, \Gamma)$.

De exemplu, în teoremă putem lua $\Gamma = \mathbb{R}$ şi $G = \{g\}$ (deci $n = 1$) pentru oricare din funcţiile $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ următoare:

$$g(x) = x, \quad g(x) = x|x|, \quad g(x) = x^3, \quad g(x) = \mathrm{e}^x, \quad g(x) = \sin x, \quad g(x) = \mathrm{e}^x \cos x$$

(atunci condiţia (g) din teoremă este satisfăcută).

Condiţii referitoare la structuri de ordine pot uneori înlocui cu succes alte ipoteze. Astfel, teoreme cunoscute (ca Stone-Weierstrass) au variante legate de structuri de ordine. O direcţie de cercetare promiţătoare o constituie căutarea unor asemenea versiuni ale rezultatelor din [5, 6, 7].

[8, 9] stabilesc principii de aproximare "semi-întreagă" pentru serii pozitive sau alternate definite de funcţii convexe. Termenii de corecţie rezultaţi conduc la bune aproximări ale sumei seriei prin intermediul sumelor parţiale de ordin mic (de exemplu, eroare $< 10^{-3}$ pentru suma a doar patru termeni). Iterarea metodei conduce la creşterea preciziei, dacă derivatele succesive ale funcţiei există şi au semne constante, care alternează.

[R1] studiază "*funcţiile rest*" (remainder maps) $R_f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f(z + k)$, asociate seriilor complexe convergente definite de funcţii raţionale $f \in \mathbb{F}(X)$ cu coeficienţi într-un subcorp arbitrar $\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$. Aceste funcţii meromorfe pe $\mathbb{C}$ formează un spaţiu vectorial peste $\mathbb{F}$ şi generează corpul $\mathbb{F}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}})$, numit în [R1] "*corpul rest*" (the remainder field). Se obţine un criteriu de independenţă algebrică

[1] Din referatul de acceptare pentru [5]: "This is an excellent paper. It is well written, and the mathematics in it is new and correct, dealing with approximations of continuous vector-valued functions by functions of a special type namely in the "local tensor product". The main applications are density with respect to the inductive limit topology, an extension theorem, and a new proof of the Schauder-Tihonov fixed point theorem. This paper should be accepted by JAT without hesitation."

peste $\mathbb{F}(X)$ pentru funcţii rest şi se arată că extinderea de corpuri $\mathbb{F}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}})/\mathbb{F}(X)$ este pur transcendentă. Se demonstrează că orice funcţie nenulă $\varphi \in \mathbb{F}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}})$ admite un unic "*grad*" $\mathrm{d}(\varphi) \in \mathbb{Z}$, pentru care $\lim_{z\rightrightarrows\infty} \frac{\varphi(z)}{z^{\mathrm{d}(\varphi)}} \in \mathbb{F}\setminus\{0\}$ (limită pentru $|z| \to \infty$, cu $\mathrm{Re}(z) > 0$). În acest mod, se obţine o dezvoltare asimptotică naturală a lui φ. Astfel, $\mathbb{F}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}})$ este un subcorp al corpului $\mathbb{F}((X^{-1}))$ al seriilor Laurent formale "inversate". Aproximanţi raţionali de orice ordin există pentru orice funcţie din corpul rest $\mathbb{F}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}})$. Pentru funcţii rest, găsirea seriei formale asociate şi a aproximanţilor raţionali succesivi se reduc la aceleaşi probleme pentru *cazul fundamental* $f = \frac{1}{X^2}$. Astfel se obţine seria formală explicită a oricărei funcţii rest. În general, avem $\lim_{z\rightrightarrows\infty}\left(\frac{1}{R_f(z)} - W_f(z)\right) = 0$ pentru un unic polinom $W_f \in \mathbb{F}[X]$, numit în [R1] "*polinomul invers*" al lui R_f. În cazul real ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$), convergenţa este monotonă şi conduce la estimări interesante ale funcţiei rest. Iterarea construcţiei conduce la polinoame inverse de ordin superior, ale căror grade cresc exponenţial. În exemplul din [R1], eroarea cauzată de înlocuirea sumei seriei $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ cu suma parţială de ordin n corectată, este mai mică decât 10^{-4} pentru $n = 1$, decât 10^{-15} pentru $n = 5$ şi decât 10^{-32} pentru $n = 20$. Această teorie include şi funcţiile rest alternate $\widehat{R}_f(z) := \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}f(2z+k)$. *Pentru* $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$, *există speranţa obţinerii unor informaţii calitative asupra naturii sumelor unor astfel de serii, prin accelerarea convergenţei (aşa cum a procedat R. Apéry pentru a demonstra că* $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$*).*

[R3] pune la punct o metodă inductivă pentru determinarea naturii rădăcinilor unui polinom real separabil (fără rădăcini multiple). Noua metodă se bazează pe un fapt topologic: orice două astfel de polinoame monice de grad n au aceeaşi structură a rădăcinilor, dacă şi numai dacă ele aparţin aceleiaşi componente conexe a mulţimii $\Delta_n^{-1}(\mathbb{R}^*)$, unde Δ_n este discriminantul de ordin n. Mici perturbări în $\mathbb{R}$ ale coeficienţilor nu schimbă natura rădăcinilor unui polinom real separabil. Prin urmare, f şi $f - f(\alpha) = (X-\alpha)g$ (pentru un anumit $g \in \mathbb{R}[X]$) au aceeaşi structură a rădăcinilor, dacă $f \in \mathbb{R}[X]$ este separabil şi $f(\alpha)$ este un număr real suficient de mic. Astfel, clasificarea rădăcinilor este redusă la aceeaşi problemă pentru un polinom separabil de grad inferior. Găsirea efectivă a aproximaţiilor suficient de bune ale unei (eventuale) rădăcini reale se poate face prin metoda bisecţiunii intervalului, sau prin alte metode specifice Analizei Numerice. Implementarea pe calculator a algoritmului inductiv rezultat nu ridică probleme.

2.2. **Polinoame simetrice.**

[1] conţine rezultate generale asupra inegalităţilor polinomiale simetrice de grad arbitrar pe $\mathbb{R}_+^n$ şi pe $\mathbb{R}^n$. *Pentru orice astfel de inegalitate* $\mathcal{I}$ *de grad cel mult* $d \in \mathbb{N}$, *avem echivalenţele:*

$$\mathcal{I} \textit{ are loc pe } \mathbb{R}^n \iff \mathcal{I} \textit{ are loc pe } \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \#\{x_1,\dots,x_n\} \leq \max\left\{\tfrac{d}{2}, 2\right\}\right\},$$
$$\mathcal{I} \textit{ are loc pe } \mathbb{R}_+^n \iff \mathcal{I} \textit{ are loc pe } \left\{x \in \mathbb{R}_+^n \,\middle|\, \#(\{x_1,\dots,x_n\}\setminus\{0\}) \leq \max\left\{\tfrac{d}{2}, 1\right\}\right\}$$

(unde $\#A$ reprezintă cardinalul unei mulţimi finite A). Numai a doua echivalenţă era cunoscută anterior, doar pentru polinoame simetrice şi omogene de grad 3 [M.D. Choi, T.Y. Lam, B. Reznick; *Math. Z.* (1987)] şi 4 [W. Harris; *J.Algebra* (1999)]. O consecinţă importantă: *inegalităţile polinomiale simetrice de grad inferior unei valori date* $d \in \mathbb{N}$ *sunt decidabile în timp polinomial în raport cu numărul* $n \geq 2$ *al variabilelor.*

[R4] generalizează rezultatele din [1] la cazul inegalităţilor polinomiale simetrice de grad arbitrar pe mulţimi semialgebrice simetrice. *Fie* $A \subset \mathbb{R}^n$ *o mulţime definită de o combinaţie booleană de inegalităţi polinomiale simetrice de grad cel mult* $s \in \mathbb{N}^*$. *Notăm* $A_+ := A \cap \mathbb{R}_+^n$. *Pentru orice inegalitate polinomială simetrică* $\mathcal{I}$ *o de grad cel mult* $2s+1$, *avem echivalenţele:*

$$\mathcal{I} \textit{ are loc pe } A \iff \mathcal{I} \textit{ are loc pe } \{x \in A \,|\, \#\{x_1,\dots,x_n\} \leq s\},$$
$$\mathcal{I} \textit{ are loc pe } A_+ \overset{s\geq 2}{\iff} \mathcal{I} \textit{ are loc pe } \{x \in A_+ \,|\, \#(\{x_1,\dots,x_n\}\setminus\{0\}) \leq s\}.$$

Rezultatele din [1] se obţin pentru $A = \mathbb{R}^n$. Consecinţă importantă în Teoria Eliminării:

Teoremă. *Fie* $\mathcal{B}_{f_1,\dots,f_k}$ *o combinaţie booleană abstractă de inegalităţi de forma* $f_i > 0$ *sau* $f_i \geq 0$ *(cu* $f_1,\dots,f_k$ *neprecizate). Pentru orice* $d \in \mathbb{N}$, *există un algoritm de complexitate polinomială în numărul* n *al variabilelor, care rezolvă problema de eliminare a cuantificatorilor*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n\ \mathcal{B}_{f_1,\dots,f_k}(x) \qquad (\textit{respectiv } \exists x \in \mathbb{R}^n\ \mathcal{B}_{f_1,\dots,f_k}(x))$$

pentru orice $n \geq 2$ *şi orice polinoame simetrice* $f_i \in \mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]$ *de grad cel mult* d.

[2] studiază spaţiul liniar ordonat al polinoamelor reale simetrice şi d-omogene (forme simetrice)

în n nedeterminate, echipat cu ordinea punctuală pe $\mathbb{R}^n_+$ şi respectiv pe pe $\mathbb{R}^n$. Se arată că pentru $d \geq 4$ aceste spaţii nu au proprietatea de descompunere a lui Riesz (deci nu sunt latici), iar conurile pozitive au o infinitate nenumărabilă de raze extremale. Pentru gradul $d \in \{4, 5\}$, pozitivitatea pe $\mathbb{R}^n_+$ poate fi testată pe o mulţime finită, determinată de soluţiile unor ecuaţii algebrice de grad cel mult $d - 2 \leq 3$.

[3] studiază proprietăţile formelor simetrice extremale (raze extremale ale conului pozitiv) de grad $d = 4$ pe $\mathbb{R}^n_+$ şi realizează construcţia lor efectivă.

[P1] furnizează discriminanţi expliciţi caracterizând pozitivitatea formelor reale simetrice de grad $d = 4$ pe $\mathbb{R}^n_+$ şi pe $\mathbb{R}^n$. Algoritmii rezultaţi sunt de complexitate polinomială (de grad 1) în raport cu numărul n al variabilelor; versiunile lor în Maple 8 necesită o cantitate mică de memorie şi sunt foarte rapide (de exemplu, mai puţin de 60 de secunde pentru $n = 100000$ variabile).

[4] obţine un criteriu pentru generatorii inelului $R[\mathbb{X}]^{S_n}$ al polinoamelor simetrice în n nedeterminate $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_n)$ peste un inel comutativ unitar R. Acesta depinde de inversabilitatea Jacobianului $J_e(f_1, \dots, f_n) := \left|\frac{\partial f_i}{\partial e_j}\right|_{1\leq i,j\leq n}$ al "candidaţilor" în raport cu polinoamele simetrice fundamentale $e_1, \dots, e_n$. *Dacă* $\deg(f_k) \leq k$*, avem equivalenţa*

$$R[f_1, \dots, f_n] = R[\mathbb{X}]^{S_n} \iff J_e(f_1, \dots, f_n) \textit{ inversabil în } R.$$

Dacă R este un corp, o a treia condiţie echivalentă este $J(f_1, \dots, f_n) := \left|\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right|_{1\leq i,j\leq n} \neq 0$ *(în* $R[\mathbb{X}]$*).* Mai multe rezultate cunoscute se obţin drept cazuri particulare.

2.3. **Analiză funcţională.**

[19] generalizează cunoscuta teoremă de reprezentare a lui Kakutani pentru laticile Banach cu norma generată de o unitate tare (element axial). Dacă o latice Banach de tip (M) are conul pozitiv cu interiorul nevid, atunci pentru o anumită funcţie superior semicontinuă $a : T \to (0, \infty)$ definită pe un spaţiu topologic compact T, laticea Banach este izomorfă cu $C(T)$, echipat cu norma $\|x\|_a = \sup_{t\in T} |a(t)x(t)|$.

[14] foloseşte rezultatul din [19] pentru obţinerea reprezentării concrete a unor latici local convexe de tip (M). Spaţiul de reprezentare este

$$c_0(T, \mathcal{H}) := \{f \in \mathbb{R}^T \mid f \cdot \mathcal{H} \subset c_0(T)\},$$

cu $T \neq \emptyset$ şi $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^T_+$, astfel încât $\bigcap_{h\in\mathcal{H}} h^{-1}(\{0\}) = \emptyset$. Acest spaţiu este o latice local convexă separată de tip (M) în raport cu ordinea punctuală şi topologia liniară definită de seminormele $\|f\|_h = \sup_{t\in T} |h(t)f(t)|$ (considerate pentru $h \in \mathcal{H}$). Dualul lui $c_0(T, \mathcal{H})$ este izomorf cu spaţiul $l^1(T, \mathcal{H}) := l^1(T) \cdot \mathcal{H} = \{vh \mid v \in l^1(T),\, h \in \mathcal{H}\}$.

[15] arată că o latice vectorială topologică X_τ secvenţial (τ)-completă este izomorfă cu un spaţiu $L^1(\mu)$, dacă şi numai dacă are conul pozitiv de forma $X_+ = \mathbb{R}_+B$, pentru o mulţime convexă, (τ)-mărginită şi (τ)-închisă $B \subset X_+ \setminus \{0\}$. Aceeaşi echivalenţă are loc în ipoteze mai slabe, cum ar fi proprietatea de descompunere a lui Riesz pentru spaţiul liniar ordonat X (care nu mai e presupus a fi o latice) şi σ-completitudinea monotonă (şirurile Cauchy *monotone* sunt convergente). Partea izometrică a rezultatului principal implică teorema de reprezentare a lui Kakutani pentru laticile Banach de tip (L). Ca aplicaţie, se arată că un spaţiu normat infinit dimensional X înzestrat cu ordinea liniară generată de conul $X_+ = \mathbb{R}_+\overline{B}(u, 1)$ (u fixat, cu $\|u\| > 1$) nu are proprietatea de descompunere a lui Riesz, şi deci nu poate fi o latice vectorială.

[20] caracterizează spaţiile metrice (M, d) care admit scufundari izometrice în spaţii Hilbert; aceasta depinde de funcţia $h_\theta(x, y) = \frac{1}{2}[d^2(\theta, x) + d^2(\theta, y) - d^2(x, y)]$ (definită pentru un $\theta \in M$ fixat). *O astfel de scufundare există, dacă şi numai dacă pentru orice submulţime finită nevidă $F \subset M$, matricea simetrică $(h_\theta(x, y))_{x,y\in F}$ este pozitiv semidefinită.* Scufundările izometrice cu imagine convexă sunt de asemenea caracterizate prin intermediul unei funcţii similare, numită în [20] "*funcţia paralelogram*" a spaţiului metric.

[R2] introduce şi studiază o noţiune de diferenţiabilitate (apropiată de cea a lui H.H. Keller) pe spaţii liniare topologice arbitrare. Dificultăţi tehnice importante provin din lipsa *subaditivităţii*, intens utilizată de astfel de teorii pe spaţii normate sau local convexe. Se arată că în ipotezele obişnuite din cazul normat, proprietăţile uzuale se păstrează şi diferenţiabilitatea este moştenită de funcţiile implicite şi inverse (în cazul existenţei lor). În aceleaşi ipoteze standard se demonstrează existenţa funcţiilor implicite şi inverse, în cadrul "*spaţiilor naturale*" (cu topologii local convexe separate, definite de mulţimi dirijate de seminorme complete). Această categorie include atât produsele arbitrare de spaţii Banach, cât şi spaţiile vectoriale înzestrate cu topologii slabe (*care nu sunt neapărat complete*), deci în particular şi spaţiul $\mathcal{D}'(\Omega)$ al distribuţiilor pe o mulţime deschisă $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. În cazul spaţiilor normate, rezultatele se reduc la corespondentele lor clasice pentru diferenţiabilitatea Fréchet.

2.4. **Aliaje cu memoria formei.**
[10, 11, 12, 18] analizează problema matematică pusă de un nou model termomecanic macroscopic al aliajelor cu memoria formei. Acest model (X. Balandraud, E. Ernst, E. Soós) ia în considerare atât caracterul neizoterm al transformării de fază, cât şi disiparea intrinsecă. O reformulare echivalentă a problemei cu ajutorul noilor noţiuni de "*spaţiu cu derivare abstractă*" şi de "*punct incremental*" al unei funcţii continue (ambele definite în [10]) permite un studiu unitar al acesteia în diverse spaţii de funcţii precum

$$C(J), BV_{\mathrm{loc}}(J), AC_{\mathrm{loc}}(J), Lip_{\mathrm{loc}}(J), D^A_{\mathrm{f}}(J), D^A_{\mathrm{b}}(J), D^A_{\mathrm{l}}(J), D^{\aleph_0}(J), A_{\mathrm{f}}(J), A_{\mathrm{b}}(J), A_{\mathrm{l}}(J),$$

echipate cu derivatele lor naturale (la dreapta, la stânga, aproape peste tot, în sensul distribuţiilor, etc.). Unicitatea soluţiilor în orice spaţiu cu derivare abstractă este obţinută în [10]. Existenţa şi regularitatea soluţiilor este demonstrată în [11, 12] pentru toate spaţiile listate mai sus. *Rămâne de studiat continuitatea soluţiilor în raport cu datele iniţiale în spaţiile de mai sus echipate cu topologii convenabile.* Noile noţiuni definite în [10] pot fi utile în studiul problemelor de acest tip.

[13] corectează o eroare a modelului matematic expus în articolul citat în titlul notei. Această eroare avea drept consecinţă obţinerea unui sistem diferenţial incompatibil. Varianta corectă a sistemului este cea analizată în [10, 11, 12, 18].

La invitaţia celor de la Nova Science Publishers, am grupat şi detaliat aceste contribuţii într-un capitol publicat în monografia [M1] şi republicat apoi în [M2].

2.5. **Diverse.**
[16] furnizează un criteriu integral şi un principiu de condensare pentru serii reale cu termenul general definit prin iterarea ($x_{n+1} = f(x_n)$ pentru $n \in \mathbb{N}$) unei funcţii $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$. *Pentru orice alegere a unei funcţii local integrable $\varphi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ obţinem un φ-test corespunzător pentru seria $\sum_{n\geq 0} x_n$, a cărei convergenţă depinde de cea a integralei improprii $\int_0^1 t\varphi(t)dt$ şi de limitele ($\limsup_{x\searrow 0}$ şi $\liminf_{x\searrow 0}$) integralei $\int_{f(x)}^x \varphi(t)\mathrm{d}t$.* Patru rezultate cunoscute (Altman, Fort-Schuster, Brauer, Švarcman) sunt generalizate şi unificate, acestea corespunzând unor alegeri particulare ale funcţiei $\varphi \in L^1_{\mathrm{loc}}((0, \infty))$.

[17] demonstrează o inegalitate diferenţială pentru polinoame omogene de grad arbitrar, problema fiind considerată pe un ortant închis $H \subset \mathbb{R}^n$. Astfel se obţin condiţii suficiente de pozitivitate. Rezultatul principal conţine suficientă informaţie pentru a implica inegalitatea mediilor.

[P2] caracterizează convergenţa uniformă a unui şir generalizat monoton $F_\Delta = (f_\delta)_{\delta\in\Delta} : S \to X^\Delta$ de funcţii $f_\delta : S \to X$ cu imagini relativ compacte într-un spaţiu liniar ordonat topologic separat X (mulţimea S fiind arbitrară). *Avem echivalenţa*

$$f_\delta \xrightarrow{\mathrm{u}} 0 \iff \overline{F_\Delta(S)} \subset \mathrm{c}_0(\Delta, X),$$

unde $\mathrm{c}_0(\Delta, X) := \{(x_\delta)_{\delta\in\Delta} \in X^\Delta \mid \lim_{\delta\in\Delta} x_\delta = 0\}$*, iar aderenţa* $\overline{F_\Delta(S)}$ *este considerată în* X^Δ*.* În cazul unui şir generalizat de funcţii continue pe un spaţiu topologic compact S, mulţimea $F_\Delta(S)$ este compactă, iar incluziunea din echivalenţa de mai sus se reduce la convergenţa punctuală $f_\delta \xrightarrow{\mathrm{p}} 0$. Teorema clasică a lui Dini se obţine pentru $X = \mathbb{R}$.

Data: 10.09.2013 Semnătura: