

MEMORIU DE ACTIVITATE

SERGIU MOROIANU

Subiectele mele de cercetare graviteaza in jurul geometriei diferentiale. Din punct de vedere analitic obiectele pe care le-am studiat sunt operatorii eliptici, cu un accent pe operatorii geometrici de tip Laplace sau Dirac si analiza lor spectrala. In primii 10 ani dupa sustinerea tezei de doctorat am studiat in principal algebrele de operatori pseudodiferentiali *à la Melrose* si aplicatiile lor in teoria indexului. In ultimii 5 ani am inceput sa fiu interesat de formula de urma Selberg, si in mod natural de geometria hiperbolica. Ultimele mele lucrari trateaza probleme de existenta de metrici Einstein si spinori paraleli; varietatile Einstein asimptotic hiperbolice si volumul lor renormalizat; si in fine suprafetele Ricci, un subiect clasic de geometrie. Voi detalia mai jos cateva rezultate. Toate articolele sunt disponibile pe pagina IMAR, iar cele mai multe si pe arxiv.

Teoria indexului si operatori pseudodiferentiali pe varietati necompacte. In teza de doctorat *Residue functionals on the algebra of adiabatic pseudo-differential operators*, sustinuta in 1999 la MIT sub indrumarea prof. R. B. Melrose, am studiat omologia Hochschild a algebrei de operatori pseudodiferentiali adiabatici. Calculul adiabatic este adaptat degenerarii adiabactice a unei metrici pe spatiul total al unei fibrari local triviale, si l-am folosit ulterior in [9] pentru a extinde formula de anomalie globala a lui Witten-Bismut-Freed (pentru limita adiabatica a invariantului eta) la o clasa mai larga de operatori decat operatorul Dirac, si pentru intreaga familie de functii meromorfe eta. Una din consecintele principale ale calcului omologiei Hochschild din teza este existenta unei functionale multi-liniare pe algebra de operatori adiabatici, care extinde reziduul necomutativ al lui Wodzicki al operatorilor clasici. In articolele urmatoare [3], [7] and [10] in colaborare cu R. Lauter am extins studiul omologiei Hochschild la alte clase de operatori pseudodiferentiali si am dedus formule de index pentru operatori Fredholm apartinand acestor clase. Proprietatea Fredholm a unui operator eliptic pe o varietate necompacta este guvernata de comportamentul la infinit al operatorului. In clasele studiate, acest comportament este codat de asa-numitul operator normal, un fel de restrictie la frontiera ideala la infinit. Aceasta frontiera este presupusa a fi o varietate cu colturi (Melrose) iar operatorul normal este o familie de operatori pe diferitele hipersuprfete ale varietatii. Tipic, aceasta familie trebuie sa fie inversabila pentru ca operatorul sa fie Fredholm. Cazul-model este problema de index Atiyah-Patodi-Singer, care a fost reformulata si analizata de Melrose in cadrul algebrei de b -operatori pseudodiferentiali. Invariantul eta apare acolo drept contributia bordului in cazul compact cu bord, sau a infinitului pentru b -operatori.

In [4] am gasit o formula de index pentru operatori de tip cusp total eliptici pe varietati cu colturi, contributia acestora fiind niste invarianti de tip eta. Am demonstrat invarianta la cobordism a indexului pentru aceeasi clasa de operatori [12], in particular obtinand o noua demonstratie a invariantei la cobordism a indexului operatorilor eliptici pe varietati inchise [15]. Un articol inrudit este [6], in care studiez K -teoria algebrei de operatori 1-suspendati pe o varietate compacta, ilustrand indexul si invariantul eta drept morfisme de bord in sirul exact cu 6 termeni.

Date: 5 septembrie 2013.

Articolele [14] si [18] exploateaza invarianta conforma a operatorului Dirac pentru a calcula indexul operatorului Dirac pe varietati conice (actionand in L^p), si pe varietati cu diferite clase de metrice complete avand bordul la infinit fibrat peste o baza compacta.

Indexul operatorilor pseudo-diferentiali poate fi definit pentru operatori inchisi A daca nucleeele lui A si A^* au dimensiune finita, chiar daca A nu este Fredholm. Calculul indexului devine mai delicat in acest caz (este situatia in care operatorul Dirac pe bord are nucleu in formula APS). In [13, 16] analizam indexul operatorului Dirac pentru metrice de tip Taub-NUT generalizate, aratand ca indexul este finit desi operatorul nu e Fredholm. Reusim sa calculam indexul doar pentru metrica Taub-NUT standard care este Ricci-plata si de volum infinit, astfel incat nu admite spinori armonici.

Analiza functiilor de tip zeta spectrale. Am mentionat deja articolul [9] in care explic comportamentul functiei eta in degenerarea adiabatica. Functiile spectrale de tip zeta pot avea poli, o problema naturala este gasirea unor restrictii asupra multiplicitatilor acestor poli (de exemplu, pe varietati inchise polii functiei zeta a unui operator de tip Laplace sunt simpli si pot aparea doar in puncte intregi). Impreuna cu C. Bär am studiat acesti poli pentru radacini ale operatorului Laplace. In [20] am studiat functia zeta a operatorului Dirac asociat unei metrice conforme cu o metrica cusp. Rezultatul este absenta spectrului continuu, existenta unei functii zeta care se prelungeste meromorf la planul complex, cu poli de multiplicitate posibil 2 (datorita frontierei) care se traduc intr-o lege asimptotica non-standard pentru valorile proprii. Impreuna cu P. Loya si J. Park am studiat functia eta pe varietati cu cuspiduri [26], in particular aratand ca pe varietati hiperbolice de volum finit aceasta functie este intreaga. In [30] am aratat ca generic, functia eta are reziduuri nenule in anumite puncte intregi.

In [22, 25] analizam spectrul Laplacianului pe formele diferentiale pe o varietate conforma-cusp. Punem in evidenta, depinzand de o conditie topologica, fie o lege de tip Weyl pentru cresterea valorilor proprii in cazul total eliptic, fie calculam spectrul continuu. In particular gasim exemple de varietati hiperbolice de volum finit cu spectrul Laplacianului discret pe formele de grad intermediar.

In articolul [19] gasim o conditie geometrica (existenta unui camp Killing generalizat incomplet) pentru absenta valorilor proprii ale operatorului Dirac in L^2 . Acest rezultat exinde un rezultat al lui Lott, care arata anulara indexului intr-un context apropiat.

Varietati hiperbolice si formula de urma Selberg. In [25] consideram varietati hiperbolice de dimensiune 3 care sunt convex co-compacte cu singularitati conice de-a lungul unor geodezice posibil infinite sau de-a lungul unui graf geodezic. Astfel de singularitati sunt folosite de fizicieni ca model pentru particule masive fara spin. Demonstram un rezultat de rigiditate infinitezimala cand unghiurile in jurul curbilor singulare sunt mai mici decat π : orice deformare infinitezimala schimba sau aceste unghiuri, sau structura conforma la infinit cu puncte marcate corespunzand directiilor singulare. Mai mult, orice variatie suficient de mica a structurii conforme marcate la infinit sau a unghiurilor singulare poate fi realizata printr-o unica deformare a structurii de varietate conica hiperbolica.

In [27] aratam ca functia zeta Selberg de tip impar $Z_{\Gamma, \Sigma}^o(\lambda)$ pe o varietate de dimensiune impara convex co-compacta $X = \Gamma \backslash \mathbb{H}^{2n+1}$ asociata fibratului de spinori admite o extensie meromorfa la planul complex si descriem structura polilor si a zerourilor. Ca unalta de abordare analizam spectrul operatorului Dirac si dezvoltam teoria difuziei (scattering) pe varietati asimptotic hiperbolice. Aratam ca exista un invariant eta $\eta(D)$ asociat natural

operatorului Dirac peste varietati hiperbolice convex co-compacte si demonstrem identitatea

$$\exp(\pi i \eta(D)) = Z_{\Gamma, \Sigma}^{\circ}(0),$$

extinzand astfel formula lui Millson din cazul compact. Sub ipoteza ca exponentul grupului convex co-compact Γ este suficient de mic, definim un invariant eta pentru operatorul de semnatura impar si aratam ca pe varietati Schottky de dimensiune 3 invariantul eta este argumentul unei functii olomorfe care apare in formula Zograf de factorizare care leaga doua potentiale Kähler naturale pentru metrica Weil-Petersson pe spatiul de moduli de varietati Schottky.

Un articol inrudit este [29], unde studiem natura conormala a nucleelor Schwartz ale proiectorului Calderon si Bergman pe o varietate spin compacta cu bord folosind rezultatele analitice din [27]. Obtinem si un operator diferential de ordin 3 explicit, cu acelasi simbol principal ca D^3 , conform covariant pe orice varietate spin, analog operatorului Paneitz.

Din punct de vedere spectral, deducem ca un corolar (usor) invarianta la cobordism a indexului, precum si absenta valorilor proprii pentru operatorul Dirac pe varietati hiperbolice convex co-compacte.

Metrici Einstein, geometrie conforma si teorie Teichmüller. Impreuna cu B. Ammann si A. Moroianu am studiat problema existentei unei metrici care admite un spinor paralel pornind de la o hipersuprafata data impreuna cu un spinor fixat (o obstructie imediata este ca spinorul sa fie Killing generalizat). Aceasta problema necesita in prealabil rezolvarea problemei Cauchy pentru metrici Einstein, deoarece un spinor paralel nu poate exista decat pe varietati Ricci-plate. Obtinem rezultate de existenta in cazul real-analitic si contraexemple in cazul neted (am re-descoperit in particular un rezultat de existenta al lui Koiso, necunoscut specialistilor in domeniu).

Impreuna cu Andrei Moroianu am studiat in 2012 suprafetele Ricci, mai precis suprafetele cu metrica Riemanniana a caror curbura Gaussiana satisface ecuatia

$$K\Delta K + g(dK, dK) + 4K^3 = 0.$$

Ricci-Curbastro (1890) a aratat ca orice suprafata minimala in R^3 satisface aceasta constrangere; reciproc, daca $K < 0$ atunci suprafata se poate scufunda izometric (local) in R^3 . Rezultatul nostru arata ca acelasi lucru ramane valabil si langa punctele unde K se anuleaza, cu o posibilitate aditionala. Mai precis, daca ecuatia Ricci este satisfacuta, atunci curbura nu-si schimba semnul, dar este posibil ca acest semn sa fie ne-negativ. In acest caz suprafata se scufunda izometric (local) in spatiul Lorentz $\mathbb{R}^{2,1}$.

Impreuna cu Guillarmou si Schlenker [33] am studiat volumul renormalizat al varietatilor Poincare-Einstein in dimensiune $n + 1$ cu n par. Pentru n impar, volumul renormalizat este invariant conform, in timp ce in dimensiune para punctele critice in clasa conforma sunt atinse in metrici cu v_n constant, unde v_n este coeficientul lui x^n in dezvoltarea asymptotica a formei volum a metricii Einstein la frontiera ideala. Gasim un 2-tensor simetric G_n de divergenta nula si de urma v_n , care descrie variatia volumului renormalizat la schimbari de metrica. Calculam Hessianul volumului langa metrici Fuchs-Einstein, demonstrand ca aceste puncte sunt minime locale in spatiul claselor conforme. Concluzia articolului este relevanta unei uniformizari (alegerea unei metrici intr-o clasa conforma data) bazate pe restrictia $v_n = \text{constant}$, alta decat uniformizarea prin conditia Yamabe ($\text{scal} = \text{constant}$).

Impreuna cu Colin Guillarmou, intr-un articol recent acceptat in *Geometry and Topology*, analizam volumul renormalizat pentru varietati hiperbolice de geometrie finita fara cuspiduri de rang 1. Acest volum este intim legat de fibratul olomorf in drepte Chern-Simons pe spatiul de moduli de structuri conforme, cu o proprietate de invarianta la anumite transformari

modulare. O sectiune canonica olomorfa in acest fibrat este de norma egala cu exponentiala volumului renormalizat, care astfel devine un potential Kähler pe spatiul Teichmüller, asa cum era cunoscut pentru varietatile quasi-fuchsiane si Schottky. Impreuna cu Guillarmou si F. Rochon lucram la extinderea acestui rezultat la cusurile de rang 1.

REFERENCES

- [1] Sergiu Moroianu, *Habilitation à Diriger des Recherches*, Université Paul Sabatier, Toulouse, June 2004.
- [2] R. Lauter, Sergiu Moroianu, *Fredholm Theory for degenerate pseudodifferential operators on manifolds with fibered boundaries*, Comm. Partial Diff. Equat. **26** (2001), 233–285.
- [3] R. Lauter, Sergiu Moroianu, *Homology of pseudo-differential operators on manifolds with fibered boundaries*, J. Reine Angew. Math. **547** (2002), 207–234.
- [4] R. Lauter, Sergiu Moroianu, *The index of cusp operators on manifolds with corners*, Ann. Global Anal. Geom. **21** (2002), 31–49.
- [5] Sergiu Moroianu, *Sur la limite adiabatique des fonctions η et ζ* , Comptes Rendus Math. **334** (2002), 131–134.
- [6] Sergiu Moroianu, *K-Theory of suspended pseudo-differential operators*, K-Theory **28** (2003), 167–181.
- [7] R. Lauter, Sergiu Moroianu, *Homology of pseudodifferential operators on manifolds with fibered cusps*, T. Am. Mat. Soc. **355** (2003), 3009–3046.
- [8] C. Bär, Sergiu Moroianu, *Heat Kernel Asymptotics for Roots of Generalized Laplacians*, Int. J. Math. **14** (2003), 397–412.
- [9] Sergiu Moroianu, *Adiabatic limits of eta and zeta functions of elliptic operators*, Math. Z. **246** (2004), 441–471.
- [10] Sergiu Moroianu, *Homology of adiabatic pseudo-differential operators*, Nagoya Math. J. **175** (2004), 171–221.
- [11] R. Lauter, Sergiu Moroianu, *An index formula on manifolds with fibered cusp ends*, J. Geom. Analysis **15** (2005), 261–283.
- [12] Sergiu Moroianu, *Cusp geometry and the cobordism invariance of the index*, Adv. Math. **194** (2005), 504–519.
- [13] I. Cotaescu, Sergiu Moroianu, M. Visinescu, *Gravitational and axial anomalies for generalized Euclidean Taub-NUT metrics*, J. Phys. A – Math. Gen. **38** (2005), 7005–7019.
- [14] A. Legrand, Sergiu Moroianu, *On the L^p index of spin Dirac operators on conical manifolds*, Studia Math. **177** (2006), 97–112.
- [15] Sergiu Moroianu, *On Carvalho’s K-theoretic formulation of the cobordism invariance of the index*, Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2006), 3395–3404.
- [16] Sergiu Moroianu, M. Visinescu, *L^2 -index of the Dirac operator of generalized Euclidean Taub-NUT metrics*, J. Phys. A - Math. Gen. **39** (2006), 6575–6581.
- [17] T. Banica, Sergiu Moroianu, *On the structure of quantum permutation groups*, Proc. Amer. Mat. Soc. **135** (2007), 21–29.
- [18] Sergiu Moroianu, *Fibered cusp versus d-index theory*, Rendiconti Semin. Math. Padova. **117** (2007), 193–203.
- [19] A. Moroianu, Sergiu Moroianu, *The Dirac spectrum on manifolds with gradient conformal vector fields*, (with Andrei Moroianu), J. Funct. Analysis. **253** nr. 1 (2007), 207–219.
- [20] Sergiu Moroianu, *Weyl laws on open manifolds*, Math. Annalen **340**, nr. 1 (2008), 1–21.
- [21] Sergiu Moroianu, V. Nistor, *Index and homology of pseudodifferential operators on manifolds with boundary*, Perspect. Operat. Algebras Math. Phys. (2008), 123–148.
- [22] S. Golénia, Sergiu Moroianu, *Spectral analysis of magnetic Laplacians on conformally cusp manifolds*, Ann. H. Poincaré **9** (2008), 131–179.
- [23] P. Loya, Sergiu Moroianu, J. Park, *Adiabatic limit of the eta invariant over cofinite quotients of $PSL(2, R)$* , Compositio Mat. **144** (2008), 1593–1616.
- [24] J.-M. Schlenker, Sergiu Moroianu, *Quasi-fuchsian manifolds with particles*, J. Differ. Geom. **83** (2009), 75–129.
- [25] S. Golénia, Sergiu Moroianu, *The spectrum of k-form Schrödinger Laplacians on conformally cusp manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **364** (2012), 1–29.
- [26] P. Loya, Sergiu Moroianu, J. Park, *Regularity of the eta function on manifolds with cusps*, Mathematische Zeitschrift **269** (2011), no. 3-4, 955–975.

- [27] C. Guillarmou, Sergiu Moroianu, J. Park, *Eta invariant and Selberg Zeta function of odd type over convex co-compact hyperbolic manifolds*, Adv. Math. **225** (2010), no. 5, 2464–2516.
- [28] A. Moroianu, Sergiu Moroianu, *The Dirac operator on generalized Taub-NUT spaces*, Commun. Math. Phys. **305** (2011), 641–656.
- [29] C. Guillarmou, Sergiu Moroianu, J. Park, *Bergman and Calderón projectors for Dirac operators*, preprint arXiv:1009.3179, to appear in J. Geom. Analysis.
- [30] P. Loya, Sergiu Moroianu, R. Ponge, *On the Singularities of the Zeta and Eta functions of an Elliptic Operator*, Int. J. Math. **23**, nr. 6. (2012).
- [31] C. Guillarmou, Sergiu Moroianu, *Chern-Simons line bundle on Teichmüller space*, preprint arXiv:1102.1981, acceptat in Geometry and Topology.
- [32] B. Ammann, A. Moroianu, Sergiu Moroianu, *The Cauchy problems for Einstein metrics and parallel spinors*, Commun. Math. Phys. **320**, 173–198 (2013).
- [33] C. Guillarmou, Sergiu Moroianu, J.-M. Schlenker, *The renormalized volume and uniformisation of conformal structures*, preprint arXiv 1211.6705.

INSTITUTUL DE MATEMATICĂ AL ACADEMIEI ROMÂNE, P.O. BOX 1-764, RO-014700 BUCHAREST, ROMANIA

E-mail address: moroianu@alum.mit.edu