Memoriu de activitate

Sebastian M. Burciu

Interesele mele de cercetare includ grupurile quantice, algebrele Hopf si categoriile tensoriale. Principalele mele proiecte de cercetare sunt centrate pe studiul teoriei de reprezentari ale algebrelor Hopf finit dimensionale si pe cel al categoriilor de fuziune.

Algebrele Hopf sunt obiecte matematice introduse relativ recent. Ele au aparut pentru prima oara intr-o lucrare de topologie a lui H. Hopf in 1941 iar bazele teoriei algebrelor Hopf au fost puse in 1965 intr-un articol al lui J. Milnor si J. C. Moore din Annals of Mathematics [30]. Publicarea cartii lui Sweedler [38] a fost punctul de inceput al studiului algebrelor Hopf ca o parte abstracta a algebrei. O interesanta monografie asupra acestui subiect se gaseste in [1].

Odata cu aparitia articolului lui Drinfeld [22] si a lucrarilor imediate atat ale sale precum si a altor matematicieni, acest domeniu a inregistrat o schimbare radicala atat in termeni de metode cat si de interactiune cu alte ramuri ale matematicii. Progresul facut in intelegerea structurii algebrelor Hopf si a teoriei lor de reprezentari a fost imens si a cunoscut o stransa legatura cu alte domenii ale matematicii ca de exemplu teoria nodurilor, topologie, teoria conforma a campurilor, teoria categoriilor, combinatoricii etc.

Un studiu sistematic al categoriilor de fuziune a fost recent initiat de Etingof, Drinfeld, Gelaki, Nikshych si Müger (vezi [27, 25, 21, 26, 33]). Este un subiect cu o activitate foarte intensa in prezent si numeroase rezultate remarcabile au fost deja obtinute. Categoriile braided de fuziune sunt de o importanta centrala in acest studiu. Centrul Drinfeld a unei categorii de fuziune este o categorie braided modulara. Este important de mentionat ca orice categorie braided da nastere la o solutie a Ecuatiei Quantum Yang Baxter pe fiecare din obiectele sale. Aceasta ecuatie este importanta in statistica mecanica si fizica teoretica.

Importanta fundamentala a algebrelor Hopf semisimple consta din faptul ca dau nastere la categorii de fuziune prin categoriile lor de reprezentari. Categoriile de fuziune apar in numeroase domenii ale matematicii si fizicii, ca teoria conforma a campurilor, algebrele de operatori, teoria reprezentarilor grupurilor cuantice si altele. (vezi de exemplu [2], [17] si referintele pe care acestea le contin). De exemplu in topologie categoriile de fuziune dau invarianti de varietati 3 dimensionale si links, vezi [39].

Algebrele Hopf semisimple au un comportament similar algebrelor grupale de grupuri finite. In acest sens au fost transferate numeroase proprietati de la categoria de reprezentari ale grupurilor finite la cele de reprezentari ale algebre Hopf semisimple. De exemplu, relatiile de ortogonalitate intre reprezentari au fost recent generalizate de catre Zhu in [42]. Mai mult, Nikshych, Etingof si Ostrik au introdus notiunile de categorii de fuziune nilpotente si solvabile generalizand astfel notiunile corespunzatoare din teoria grupurilor. Tendinta actuala in doemeniu este de clasificare a categoriilor de fuziune in functie de categoriile de reprezentari de grupuri finite si de algebre duale celor grupale.

Mai jos voi descrie proiectele mele deja realizate, impreuna cu unele directii de cercetare viitoare.

1. Partea I: Algebre Hopf semisimple

1. Cea de a sasea conjectura a lui Kaplansky. Prima parte a tezei mele de doctorat trateaza cea de a sasea conjectura a lui Kaplansky pentru algebrele Hopf semisimple care este deschisa din 1975.

Daca H este o algebra Hopf semisimpla peste un corp $\Bbbk$ algebric inchis, aceasta conjectura afirma ca dimensiunea unui modul ireductibil paste H divide dimensiunea lui H. In cazul algebrelor grupale de grupuri finite aceasta conjectura este cunoscuta ca Teorema Frobenius vezi, [19, 37]. Pentru unele cazuri particulare de algebre Hopf semisimple aceasta conjectura a fost demonstrata pentru toate H-modulele sale ireductibile. Cel mai cunoscut este cazul algebrelor Hopf quasitriangulare unde o prima demonstratie a conjecturii a fost data in 1988 de catre Etingof si Gelaki in [23]. O demonstratie mai simpla folosind ecuatia claselor pentru algebre Hopf a fost data in 2001 de catre Schneider in [36]. Reamintim ca o algebra Hopf A se numeste quasitriangulara in cazul in care categoria sa de reprezentari $\mathrm{Rep}(A)$ este braided.

Pentru o alta clasa de algebre Hopf semisimple, numite semisolvabile, conjectura a sasea a lui Kaplansky a fost demonstrata in [31].

O versiune echivalenta a acestei conjecturi afirma ca daca H este o algebra Hopf finit-dimensionala cosemisimpla atunci dimensiunea unui H-comodul simplu M divide dimensiunea lui H. S-a aratat in [32] ca daca M are dimensiune 2, atunci dimensiunea lui H trebuie sa fie para, ceea ce arata ca a sasea conjectura Kaplansky este adevarata pentru comodulelele simple de dimensiune 2. Rezultatul foloseste proprietati ale inelui Grothendieck a unei algebre Hopf cosemisimple si rezultate de teoria algebrica a numerelor. Folosirea de tehnici similare celor din [32], mi-a permis sa arat in articolul [5] ca aceasta conjectura este adevarata pentru un comodul simplu de dimensiune 3, sub ipoteza suplimentara ca H are dimensiune impara.

De remarcat este faptul ca Etingof, Nikshch si Ostrik au propus recent, in [26], o versiune mai generala a acestei conjecturi pentru categoriile de fuziune. Conjectura afirma ca daca S este un obiect simplu al unei categorii de fuziune $\mathcal{C}$ atunci $\mathrm{FPdim}(S)$ divide $\mathrm{FPdim}(\mathcal{C})$, unde FPdim reprezinta dimensiunea Frobenius-Perron a obiectelor si categoriei $\mathcal{C}$. Daca se considera $\mathcal{C} = \mathrm{Rep}(H)$, categoria de reprezentari a unei algebra Hopf semisimple, atunci se obtine conjectura precedenta a lui Kaplansky.

Rezultatele privind descrierea obiectelor simple ale unei categorii echivariantizate, obtinute impreuna cu S. Natale in [16], arata ca aceasta proprietate de divizibilitate se transmite de la o categorie de fuziune cu actiunea unui grup la categoria echivariantizata. In viitor intentionez studiul acestor clase de categorii de fuziune echivariantizate care sunt de asemenea braided.

2. Teorie de tip Clifford pentru algebre Hopf semisimple. In articolul [7] am reusit o generalizare a unei parti din teoria Clifford pentru grupuri finite la algebrele Hopf semisimple.

Astfel s-au adus contributii noi la intelegerea reprezentarilor algebrelor Hopf semisimple. Spunem ca teoria Clifford functioneaza pentru o extindere $B \subset A$ *relativ la caracterul* α daca teoria Clifford definita in [35] functioneaza pentru stabilizatorul $\mathrm{Z}_A(\alpha)$ al lui α in A, definit in [7]. Combinand [7, Proposition 2.9] cu [7, Theorem 2.11] am obtinut urmatorul rezultat (vezi si [11]):

Teorema 1.1. *Fie $B \subset A$ o extindere normala de algebre Hopf semisimple si M o B-reprezentare ireductibila cu caracter $\alpha \in \mathrm{Irr}(B)$. Atunci urmatoarele sunt echivalente:*

(1) *Corespondenta Clifford are loc pentru extensia $B \subset A$ relativ la caracterul α.*
(2) *Urmatoarea egalitate are loc:*

$$m_B(\alpha,\ \alpha \uparrow_B^A \downarrow_B^A) = m_B(\alpha,\ \alpha \uparrow_B^{Z_A(\alpha)} \downarrow_B^{Z_A(\alpha)}).$$

Aici $m_B(-,-)$ este forma de multiplicitate pe $\mathrm{Rep}(B)$. In [7] am aratat ca pentru extinderile cocentrale aceste conditii sunt indeplinite mereu. O parte a acestei teorii Clifford a fost apoi generalizata pentru categorii de fuziune de catre autor si S. Natale in articolul [16].

Utilizarea conditiei necesare si suficiente pe care am obtinut-o in articolul [7] pentru ca teoria Clifford sa functioneze pentru extinderile normale de algebre Hopf semisimple, a permis intr-un recent preprint [11] trimis spre publicare sa dau o descriere a reprezentarilor simple de peste dublul quantic Drinfeld $D(H)$ al unei algebre Hopf semisimple H. In cazul $H = \Bbbk G$, reprezentarile simple peste $D(G)$ au o descriere bine cunoscuta ca reprezentari induse de la centralizatoarele elementelor lui G (a se vedea [20] de exemplu). Se poate arata ca aceste reprezentari pot fi obtinute folosind teoria Clifford pentru extinderi adecvate de algebre Hopf. Importanta acestei descrieri este in obtinerea de noi solutii pentru Equatia Quantum Yang Baxter.

3. Cosete duble pentru algebrele Hopf semisimple. Fie H o algebra Hopf semisimpla si K, L doua subalgebre Hopf ale lui H. Notiunea de cosete duble relativ la K si L a fost introdusa de catre author in [8]. Aceasta notiune a aparut ca o continuare naturala a studiului facut de Nichols si Richmond in [32]. Pentru a putea scrie aceste cosete a fost nevoie de folosirea teoremei Frobenius-Perron pentru matrici cu intrari nonnegative, aplicata anumitor operatori definiti pe inelul de caractere al algebrei Hopf semisimple H. Aceasta a fost realizata prin definirea unei relatii de echivalenta pe multimea subcoalgebrelor simple ale lui H. In cazul cosetelor unilaterale (doar stangi sau drepte) aceasta relatie de echivalenta coincide cu relatia introdusa in [32]. Recent impreuna cu A. Bruguières, am reusit generalizarea acestei notiuni la categorii de fuziune arbitrare. Astfel in [15] am definit notiunea de coset dublu relativ la doua subcategorii de fuziune si am aratat principalele proprietati ale acestor cosete.

Se poate arata ca produsul a doua caractere corespunzatoare a doua cosete duble este o combinatie liniara de cosete duble. Deci aceastea formeaza o subalgebra a inelului Grothendieck care generalizeaza notiunea de algebra Hecke relativa la cosetele duble generate de doua subgrupuri ale unui grup finit dat, vezi de exemplu [19, Section 18.2] .

Ca directii viitoare de cercetare se va investiga structura acestor algebre de tip Hecke. Este de asteptat ca aceastea sa aiba legatura cu descrierea descompunerii produsului tensorial de categorii de bimodule peste categorii de fuziune, vezi [28] pentru cazul particular al dublului quantic Drinfeld al unui grup finit.

4. Descompunere de tip Mackey pentru algebrele Hopf semisimple. Avand o descompunere in cosete duble pentru algebrele Hopf semisimple, asa cum a fost descrisa anterior, se pune in mod natural problema descompunerii de tip Mackey pentru reprezentari induse de la diferite subalgebre Hopf.

In teoria reprezentarilor de grupuri, teorema de descompunere de tip Mackey este aplicata in demonstratiile celor mai importante rezultate, vezi e.g. [37]. O astfel de descompunere, similara descompunerii de tip Mackey pentru reprezentari de grupuri finite, conduce la un studiu mai detaliat al teoriei caracterelor algebrelor Hopf semisimple. De fapt, in literatura de specialitate se poate vedea ca aceasta teorema este ingredientul principal din teoria grupurilor care inca lipseste in teoria algebrelor Hopf semisimple. In articolul [13] s-a propus o generalizare a acestei teoreme pentru algebrele Hopf semisimple obtinandu-se urmatorul rezultat:

Teorema 1.2. *Fie K si L doua subalgebre Hopf a algebrei Hopf semisimple H. Pentru orice M un K-modul finit dimensional are loc un epimorfism canonic de L-module:*

$$\oplus_{C\in L\backslash H/K}(L\otimes_{L\cap\, {}^{C}K}\ {}^{C}M)\xrightarrow{\pi_M} M\uparrow_K^H\downarrow_L^H$$

dat pe componente prin $l\otimes_{L\cap\, {}^{C}K} v\mapsto lv$ pentru orice $l\in L$ si orice $v\in\ {}^{C}M$.

Aici modulul conjugat ${}^{C}M$ ieste definit prin ${}^{C}M := CK\otimes_K M$ iar subalgebra Hopf conjugata este definita in [13]. Daca $L=\Bbbk G$ epimorfismul de mai sus devine izomorfism obtinanduse o versiune completa de descompunere Mackey:

Teorema 1.3. *Fie $K\subseteq H$ o subalgebra Hopf a algebrei Hopf semisimple H si M un K-modul finit dimensional. Atunci pentru orice subgrup $G\subseteq G(H)$ are loc un izomorfism canonic de $\Bbbk G$-module:*

$$M\uparrow_K^H\downarrow_{\Bbbk G}^H\xrightarrow{\delta_M}\bigoplus_{C\in kG\backslash H/K}(\Bbbk G\otimes_{\Bbbk G_C}\ {}^{C}M).$$

Aici $G(H)$ este grupul de elemente grouplike al lui H si subgrupul $G_C\subseteq G$ este determinat de $\Bbbk G\cap\ {}^{C}K=\Bbbk G_C$. Modulul conjugat ${}^{C}M$ este definit prin ${}^{C}M := CK\otimes_K M$.

Ma muult, in acelasi articol [13] am aratat ca o astfel de descompunere are loc si in cazul in care perechile de subalgebre Hopf indeplinesc o anumita conditie de compatibiliate. Practic cu aceasta compatibilitate, epimorfismul π_M de mai sus devine izomorfism. O astfel de pereche a fost denumita in articol preche de tip Mackey. De remarcat este faptul ca la momentul actual nu este cunoscut niciun exemplu de o pereche de subalgebre Hopf ale unei algebre Hopf semisimple date care sa nu fie de tip Mackey.

5. Subalgebre Hopf normale ale unei algebra Hopf, nuclee de reprezentari . Daca G este un grup finit si M o reprezentare a lui G cu caracter χ atunci *nucleul* lui M este definit prin $\ker_G(M) := \{g\in G\ \chi(g)=\chi(1)\}$, aceasta este multimea tuturor elementelor $g\in G$ care actioneaza trivial pe M. Este usor de vazut ca acest nucleu $\ker_G(M)$ este cel mai larg subgrup care actioneaza trivial pe M si este un subgrup normal al lui G. Notiunea de nucleu al unei reprezentari este foarte importanta in studiul reprezentarilor de grupuri, vezi de exemplu [29]. Constructia nucleului unei reprezentari este bazata pe inegalitatea $\chi(g)\leq\chi(1)$ care are loc prntu orice $g \in G$. In [9, Proposition 1.2] am demonstrat o inegalitate asemanatoare pentru algebrele Hopf semisimple. Mai precis am aratat $|\chi(d)| \leq \chi(1)\epsilon(d)$ pentru oricare caractere $\chi \in \mathrm{Irr}(A)$ si $d \in \mathrm{Irr}(A^*)$. Demonstratia acestei inegaliati foloseste rezultate avansate privind exponentul unei algebre Hopf semisimple, introdus recent de Etingof si Gelaki in [24]. Aceasta inegalitate a stat la baza definirii notiunii similare de *nucleul Hopf* pentru reprezentarile M ale unei algebre Hopf semisimple A. Acest nucleu este notat cu $\mathrm{HKer}_A(M)$.

Nucleul reprezentarilor de algebre Hopf semisimple satisface proprietati similare cu cele ale nucleelor de reprezentari pentru grupuri finite. Importanta acestui nucleu consta in relatia foarte stransa cu subalgebrele Hopf normale. Astfel, am aratat in [9, Theorem 2.4.] ca orice subalgebra Hopf normala a unei algebre Hopf semisimple A este nucleul unei reprezentari a lui A. Spre deosebire de teoria reprezentarilor de grupuri reciproca acestui rezultat nu este intotdeauna adevarata. In [9] am demonstrat ca nulcleul $\mathrm{Hker}_A(\chi)$ este o subalgebra Hopf normala sub ipoteza aditionala de centralitate a caracterului $\chi \in \mathcal{Z}(A^*)$. Mai mult sub aceasta ipoteza aditionala are loc o versiune generalizata a teoremei Brauer din teoria reprezentarilor grupurilor finite:

Teorema 1.4. *Fie A o algebra Hopf semisimpla peste un corp algebric inchis $\Bbbk$ de caracteristica zero si M o reprezentare a lui A. Presupunem caracterul χ al lui M sa fie central in $\mathcal{Z}(A^*)$. Atunci $\ker_H(M)$ este o subalgebra Hopf normala a lui H si reprezentarile care sunt constituenti in puterile tensoriale $M^{\otimes n}$, $n \geq 1$ ale lui M coincid cu reprezentarile algebrei Hopf cat $H//\ker_H(M)$.*

Reamintim ca rezultatul lui Brauer in teoria grupurilor spune ca daca χ este un caracter fidel (nucleu trivial) al lui G atunci oricare alt caracter ireductibil al lui G este un summand direct intr-o anumita putere tensoriala a lui χ.

Pentru a inlatura aceasta ipoteza aditionala si a extinde in intreaga sa generalitate rezultatul lui Brauer de la caractere centrale la caractere arbitrare am propus in [10] urmatoarea notiune de *nucleu stang (drept)*. Daca M este o reprezentare stanga a unei algebre Hopf arbitrare A atunci definim nucleul stang al lui M prin

$$\mathrm{LKer}_A(M) = \{a \in A \mid a_1 m \otimes a_2 = m \otimes a \text{ for all } m \in M\}.$$

Se poate arata ca $\mathrm{LKer}_A(M)$ este cea mai larga subalgebra coideal stanga a lui A care actioneaza trivial pe M. Mai mult $\mathrm{LKer}_A(M)$ este o subalgebra coideal stanga normala si orice astfel de subalgebra coideal stanga normala este nucleul stang al unei reprezentari. In felul acesta s-a putut generaliza de la reprezentari de grupuri la cele de algebre Hopf (arbitrare) notiunea de nucleu al unei reprezentari. Deoarece, pentru un grup finit G, algebra grupala $\Bbbk G$ este o algebra Hopf cocomutativa se poate observa ca ambele notiuni de nucleu stang si drept coincid cu cea de nucleu reamintita mai sus.

Mai mult, in acelasi articol [10] a fost demonstrata o varianta generala a Teoremei Brauer aratandu-se ca reprezentarile care sunt constituenti in puteri tensoriale $M^{\otimes n}$, $n \geq 1$ ale lui M coincid cu reprezentarile algebrei Hopf cat $A//\mathrm{LKer}_A(M)$.

Connexiuni cu notiunea de caractere *"inner faithful"* introdusa de Banica si Bichon in [3] urmeaza a fi investigate. Este de remarcat faptul ca in [3, Theorem 2.1] constructia iterativa pentru definirea imaginii Hopf a unui morfism, in cazul unui caracter central χ, coincide cu catul $A//\mathrm{LKer}_A(\chi)$. Deci in acest caz *inner faitful* inseamna cu nucleu stang trivial.

In articolul [14] am obtinut descrierea tutoror subalgebrelor Hopf normale ale unui dublu Drinfeld $D(A)$ al unei algebre Hopf semisimple A. Aceasta a permis (prin factorizarea subalgebrelor Hopf normale) obtinerea de noi exemple de algebre Hopf quasitriangulare. In particular s-a aratat ca dublul Drinfeld al unei algebre Hopf de tip Kac este de asemenea o algebra Hopf de tip Kac.

2. Partea II-a: Categorii de fuziune

5. Grupul universal de graduare al unei categorii de fuziune. Gelaki si Nikshych au introdus in [27] notiunea de grup universal de graduare al unei categorii de fuziune $\mathcal{C}$. Acesta este cel mai mare grup G pentru care categoria admite o G-graduare. Oricare alta graduare pe $\mathcal{C}$ se face printr-un grup cat al lui G.

In situatia categoriei reprezentarilor peste o algebra Hopf semisimpla A acest grup este dat de subalgebra Hopf maximala centrala $\mathcal{HZ}(A)$ a lui A prin relatia $\mathcal{HZ}(A) = \Bbbk G^*$. In [6], am demonstrat ca $\mathcal{HZ}(A)$ este nucleul reprezentarii adjuncte A_{ad} a lui A pe ea insasi. Folosind Teorema Brauer mentionata mai sus rezulta ca $\mathrm{Rep}(A)_{ad}$ este generata de reprezentarea adjuncta A_{ad}. In particular, pentru o algebra Hopf cu inelul de caractere comutativ (de exemplu, pentru algebrele Hopf quasitriangulare), am aratat ca $\mathcal{HZ}(A) = \Bbbk\bar{G}(A)$, grupul de elemente gruplike centrale ale lui A [6]. In loc. cit. a fost de asemenea studiata relatia de echivalenta de tip Rieffel [35] pentru reprezentarile dublului Drinfeld $D(A)$. In viitor intentionez efectuarea unui astfel de studiu pentru un dublul quantic arbitrar al oricarei categorii de fuziune.

6. Actiunea grupurilor finite pe categorii de fuziune. Urmatoarele trei proiecte descrise sunt in legatura cu teoria actiunilor de grupuri finite pe categorii tensoriale care de asemenea sunt denumite si G-categorii. Data fiind actiunea unui grup finit G pe o categorie tensoriala $\mathcal{C}$ se poate defini categoria echivariantizata $\mathcal{C}^G$ care este analogul subspatiului fixat R^G de actiunea unui grup G pe un inel R. Daca actiunea este prin autoechivalente tensoriale atunci $\mathcal{C}^G$ este de asemenea o categorie tensoriala.

6.1. Obiectele simple ale unei categorii echivariantizate. Impreuna cu S. Natale in articolul [16] am dat o descriere a obiectelor simple ale unei categorii echivariantizate $\mathcal{C}^G$. Pornind de la observatia simpla ca $\mathrm{Vec}^G \simeq \mathrm{Rep}(G)$ s-a putut defini o teorie Clifford pentru categoriile echivariantizate, analoga teoriei Clifford pentru extinderi cocentrale de algebre Hopf semisimple din [7].

Mai intai se observa ca pentru un subgrup $H \leq G$ se poate defini functorul restrictie $\mathrm{Res}_H^G : \mathcal{C}^G \to \mathcal{C}^H$. In [16] s-a construit un functor stang adjunct $\mathrm{Ind}_H^G : \mathcal{C}^H \to \mathcal{C}^G$. Daca $G_Y := \{g \in G \mid T^g(Y) \cong Y\}$ este grupul de inertie al lui $Y \in \mathcal{C}$ atunci am aratat ca orice obiect simplu al lui $\mathcal{C}^G$ care sta peste Y este de forma $\mathrm{Ind}_{G_Y}^G(M)$ unde M este un obiect simplu al categoriei $\mathcal{C}^{G_Y}$ care de asemenea sta peste Y. Acest rezultat generalizeaza teoria Clifford pentru extinderile cocentrale de algebre Hopf semisimple mentionata in sectiunea 2 a primei parti. Mai mult, similar cazului stabil de teorie Clifford pentru reprezentarile de grupuri finite, s-a aratat ca obiectele simple $M \in \mathcal{C}^{G_Y}$

care stau peste Y sunt parametrizate prin reprezentari proiective ale subgrupului G_Y admitand un cociclu prescris din actiunea lui G si notat cu α_Y. Vom nota obiectul simplu corespunzator perechii (Y, π) de mai sus cu $S_{Y,\pi}$.

A fost de asemenea demonstrata o descompunere de tip Mackey pentru categoriile de fuziune echivariantizate:

Teorema 2.1. *Fie G un grup finit actionand pe categoria abelian a $\mathcal{C}$ via $T : \underline{G} \to \underline{\mathrm{Aut}}(\mathcal{C})$. Fie K and H doua subgrupuri arbitrare ale lui G si $M \in \mathcal{C}^H$. Atunci*

$$\mathrm{Res}_K^G(\mathrm{Ind}_H^G(M)) \simeq \bigoplus_{x\in D} \mathrm{Ind}_{K\cap\, {}^xH}^K(\mathrm{Res}\,_{{}^xH\cap K}^{{}^xH}(T^x(M)))$$

unde D este o multime de elemente reprezentative pentru spatiul de cosete duble $K\backslash G/H$ si ${}^xH := xHx^{-1}$.

Aceasta descompunere de tip Mackey a permis a arata ca asocierea $H \mapsto K_i(\mathcal{C}^H)$ defineste un functor Mackey pe G unde $K_i(\mathcal{C}^H)$ reprezinta K-teoria de grad i (in sensul Quillen [34]) a categoriei $\mathcal{C}^H$. Mai mult la nivelul grupurilor Grothendieck $H \mapsto K_0(\mathcal{C}^H)$ este un functor Green. Functorii Mackey si Green pentru grupuri sunt de o importanta funadamentala in studiul reprezentarilor de grupuri, vezi [40]. Exemplul principal de astfel de functori este dat de functorul *inel de caractere* $H \mapsto R(H)$.

In viitor intentionez un studiu amanuntit al categoriilor echivariantizate $\mathcal{C}^H$ si legatura dintre ele. Avand o teorie de tip Mackey, asemenea teoriei reprezentarilor modulare pentru grupuri finite, se pot defini *varfuri si surse* pentru obiecte si de asemenea *grupuri de defect*. O corespondenta de tip Glaubermann va fi de asemenea investigata pentru astfel de categorii.

6.2. Reguli de fuziune pentru categorize de fuziune echivariantizate. Fiind date doua obiecte simple X, Y ale unei categorii de fuziune $\mathcal{C}$ produsul tensorial $X \otimes Y$ se poate descompune:

$$X \otimes Y \simeq \oplus_{Z\in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})} Z^{N_{X,Y}^Z}$$

Numerele intregi nenegative $N_{X,Y}^Z$ se numesc regulile de fuziune ale lui $\mathcal{C}$. Cunoasterea regulilor de fuziune este foarte importanta in diverse domenii ale matematicii si fizicii, de exemplu in teoria campurilor. Ele detrmina complet structura de inel al grupului Grothendieck.

In articlolul [16] impreuna cu S. Natale am descris regulile de fuziune ale categoriei $\mathcal{C}^G$ in functie de regulile de fuziune ale lui $\mathcal{C}$ si anumite date grup teoretice asociate actiunii lui G. Mai precis am demonstrat urmatoarea teorema:

Teorema 2.2. *Fie $U, Y, Z \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$ trei obiecte simple ale lui $\mathcal{C}$ si fie δ, π, γ reprezentari projective ireductibile ale subgrupurilor de inertie G_U, G_Y, G_Z cu cocicli asociati, α_U, α_Y si respectiv α_Z. Atunci multiplicitatea lui $S_{U,\delta}$ in produsul tensorial $S_{Y,\pi} \otimes S_{Z,\gamma}$ este data de formula*

$$\sum_{D\in G_Y\backslash G/G_Z} \sum_{\substack{1\le i\le n \\ t_i^{-1}s_i\in D \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U,\rho^{t_i}Y\otimes\rho^{s_i}Z)\neq 0}} m_{T_i}(\delta|_{T_i},\ {}^{t_i}\pi|_{T_i} \otimes {}^{s_i}\gamma|_{T_i} \otimes \tau_U^{s_i,t_i}(Y,Z)), \tag{2.3}$$

unde $(t_1, s_1), \ldots, (t_n, s_n)$ *este o multime de elemente reprezentative orbitelor actiunii diagonale a lui* G_U *pe* $G/G_Y \times G/G_Z$ *si pentru* $1 \leq i \leq n$, $T_i = G_U \cap {}^{t_i}G_Y \cap {}^{s_i}G_Z$, *unde* m_{T_i} *reprezinta forma multiplicitate a reprezentarilor projective.*

6.3. Structura inelelor Grothendieck al unui dublu quantic al unei categorii de fuziune. Cibils [18] a calculat in intregime regulile de fuziune pentru reprezentarile uni Drinfeld dublu quantic al unui grup finit G. In articolul [41] Witherspoon a aratat ca inelele Grothendieck ale extinderilor cocentrale au structura asemanatoare inelelor Grothendieck descrise de Cibils. Mai mult a aratat ca si inele de coomologie Hochschild cu coeficienti triviali ale produselor crossed $HH^*(R\#G, \Bbbk)$ au aceeasi structura. In preprintul recent [12] am aratat ca inelul Grothendieck a oricarui Drinfeld dublu quantic al unei categorii de fuziune admite o astfel de structura. Acest lucru a fost de asemenea generalizat pentru categoriile echivariantizate $\mathcal{C}^G$ unde actiunea lui G este de un tip special, numit coerent in preprintul citat. De mentionat este faptul ca inele cu structuri asemnatoare existente in literatura au fost studiate de S. Bouc. Ele includ inelele (double) *crossed Burnside rings*. S-a aratat in [4] ca aceste inele se pot obtine prin constructia Dress din alte inele de tip Green.

In viitor voi continua studiul acestor inele prin calculul idempotentilor centrali primitivi si descompunerea acestor inele in blocuri minimale. Este de remarcat faptul ca pentru categoriile de fuziune modulare (care includ toate dublurile quantice) acesti idempotenti sunt in bijectie cu obiectele simple ale categoriei si pot da informatii noi despre structura inelelor Grothendieck ale acestor categorii.

References

1. N. Andruskiewitsch and W. Ferrer Santos, The beginnings of the theory of Hopf algebras, Acta Applicandae Mathematicae **108** (2009), 2–17.
2. B. Bakalov and A. Jr Kirillov, Lectures on Tensor categories and modular functors, vol. 82, AMS, Providence, 2001.
3. Banica and J. Bichon, Inner faithful characters, Glasgow Journal of Mathematics **52** (2010), 677–703.
4. S. Bouc, Hochschild constructions for Green functors, Commun. Alg. **31** (2003), no. 1, 419–453.
5. S. Burciu, Three dimensional representations of semisimple Hopf algebras, J. Pure Appl. Alg. **194** (2004), 303–312.
6. ______, On some representations of the Drinfeld double, J. Algebra **296** (2006), 480–504.
7. ______, Clifford theory for cocentral extensions, Israel J. Math. **181** (2009), no. 1, 111–123.
8. ______, Coset decomposition for semisimple Hopf algebras, Commun. Alg. **37** (2009), no. 10, 3573 – 3585.
9. ______, Normal Hopf subalgebras of semisimple Hopf algebras, Proc. Amer. Mat. Soc. **137** (2009), 3969–3979.
10. ______, Kernels of representations and coideal subalgebras of Hopf algebras, Glasgow Mathematical Journal **54** (2012), no. 1, 107–119.
11. ______, On the irreducible representations of generalized quantum doubles, arxiv:1203.5491 (2012).
12. ______, G - functors arising from categorical group actions on abelian categories, submitted, arXiv:1305.3432 (2013).
13. ______, New examples of Green functors arising from representation theory of semisimple Hopf algebras, to appear Journal of London Math Society, arXiv:1208.1037 (2013).
14. ______, Normal Hopf algebras of Drinfeld doubles of semisimple Hopf algebras, to appear J. Pure Applied Algebra, arXiv:1005.2892 (2013).

15. S. Burciu and A. Bruguières, On normal tensor functors and coset decompositions for fusion categories, arXiv:1210.3922v2 (2013).
16. S. Burciu and S. Natale, Fusion rules of equivariantizations of fusion categories, J. Math. Phys. **54** (2013), 013511.
17. D. Calaque and P. Etingof, Lectures on tensor categories, Proceedings of Strasbourg University (2006).
18. C. Cibils, Tensor product of Hopf bimodules over a group algebra, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 1315–1321.
19. M. Curtis and I. Reiner, Representation theory of finite groups, Mathematics Lecture Note Series, W. A. Benjamin, Inc., New York, 1969.
20. R. Dijkgraaf, V. Pasquier, and P. Roche, Quasi-Hopf algebras, group cohomology and orbifold models, Nuclear Physics B (1990), 60–72.
21. V. Drinfeld, S. Gelaki, D. Nikshych, and V. Ostrik, Group-theoretical properties of nilpotent modular categories,, arXiv:0704.0195v2.
22. V. G. Drinfeld, Quantum groups,, Proc. Int. Congr. Math., Berkeley, Calif. **1** (1986), 798–820.
23. P. Etingof and S. Gelaki, Some Properties of Finite Dimensional Semisimple Hopf Algebras, Mathematical Research Letters **5** (1988), 191–197.
24. ______, On the exponent of finite dimensional Hopf Algebras, Math. Res. Lett. **6** (1999), no. 2, 131–140.
25. P. Etingof, D. Nikshych, and V. Ostrik, On fusion categories, Ann. of Math. **162** (2005), 581–642.
26. ______, Weakly group-theoretical and solvable fusion categories, Adv. Math. **226** (2011), no. 1, 176–205.
27. S. Gelaki and D. Nikshych, Nilpotent fusion categories, Adv. Math. **217** (2008), no. 3, 1053–1071.
28. J. Greenough, Relative centers and tensor products of tensor and braided fusion categories, J. Algebra **388** (2013), 374–396.
29. M. Isaacs, Character theory of finite Groups, Academis Press, New York, San Francisco, London, 1976.
30. J. W. Milnor and J. C. Moore, On the Structure of Hopf Algebras , Annals of Mathematics **81** (1965), 211–264.
31. S. Montgomery and S. Witherspoon, Irreducible Representations of Crossed Products, J. Pure Appl. Alg. **111** (1988), 381–385.
32. W. D. Nichols and M. B. Richmond, The Grothendieck group of a Hopf algebra, J. Pure Appl. Alg. **106** (1996), 297–306.
33. V Ostrik, Module categories, weak Hopf algebras and modular invariants, Transform. Groups **26** (2003), no. 8, 177–206.
34. D. Quillen, Higher algebraic K-theory I, in Waldhausen F., Algebraic K-theory of spaces, vol. 1126, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, 1985.
35. M. Rieffel, Normal subrings and induced representations, J. Alg. **24** (1979), 364–386.
36. H. J. Schneider, Some Properties of Factorizable Hopf Algebras, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), 1891–1898.
37. J-P. Serre, Linear representations of finite groups, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1976.
38. M. E. Sweedler, Hopf algebras, Mathematics Lecture Note Series, W. A. Benjamin, Inc., New York, 1969.
39. V. Turaev, Quantum invariants of knots and 3-manifolds, vol. 18, de Gruyter Studies in Math., Walter de Gruyter and Co., Berlin, 1994.
40. P. Webb, A Guide to Mackey Functors, Handbook of Algebra **2** (2000), 805–836.
41. S. Witherspoon, Products in Hochschild cohomology and Grothendieck rings of group crossed products., Adv. Math. **185** (2004), no. 1, 136–158.
42. Y. Zhu, Hopf algebras of prime dimension., Int. Math. Res. Not. **1** (1994), 53–59.