

## MEMORIU DE ACTIVITATE

Activitatea mea de cercetare este axată în principal pe studiul ecuațiilor de evoluție nonliniare provenind din fizică și din mecanica fluidelor geofizice, interesându-mă în mod special de studiul caracterului bine pus al modelelor matematice considerate precum și de regularitatea și comportamentul asimptotic al soluțiilor. M-am interesat în mod deosebit de studiul diferitelor modele din oceanografie și din meteorologie, cum ar fi ecuațiile primitive, ecuațiile  $\delta$ -primitive, ecuațiile Boussinesq, precum și al ecuațiile Euler descriind comportamentul fluidelor incompresibile sau ecuațiile Saint-Venant utilizate în descrierea comportamentului lacurilor de profunzime mică.

O altă direcție de cercetare pe care am abordat-o în timpul studiilor doctorale a fost studiul controlului robust și optimal pentru ecuațiile sin-Gordon.

În timpul studiilor postdoctorale la Universitatea din Geneva, unde am lucrat sub îndrumarea profesorului Martin Gander, m-am interesat de problema găsirii algoritmilor numerici adaptați care să permită calculul în paralel (având la dispoziție mai multe procesoare) al soluției ecuațiilor diferențiale ordinale de ordin doi.

Începând cu 2007 m-am apropiat tematic de subiectele de cercetare predominante în echipa de ecuații diferențiale cu derivate parțiale a Laboratorului de Matematică al Universității din Poitiers. Astfel, am început să studiez, din punct de vedere teoretic și numeric, modele matematice descriind fenomene de tranziție și de separare de fază pentru aliajele binare.

În cele ce urmează voi detalia principalele subiecte de cercetare:

### 1. ECUAȚIILE PRIMITIVE

Ecuațiile primitive descriu mișcarea oceanului și a atmosferei și sunt obținute pornind de la legile generale de conservare ale fizicii, folosind aproximarea Boussinesq și hidrostatică. Acest model este format din: ecuația de conservare a momentului orizontal, ecuația hidrostatică, ecuația de conservare a masei, ecuația salinității, a temperaturii și ecuația de stare:

$$(1a) \quad \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{v}^* + w^* \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial z^*} + f \mathbf{k} \times \mathbf{v}^* + \frac{1}{\rho_{\text{ref}}} \nabla p^* = \mu_v^* \Delta_h^* \mathbf{v}^* + \nu_v^* \frac{\partial^2 \mathbf{v}^*}{\partial z^{*2}},$$

$$(1b) \quad \frac{\partial p_{\text{full}}^*}{\partial z^*} = -\rho_{\text{full}}^* g,$$

$$(1c) \quad \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0,$$

$$(1d) \quad \frac{\partial T}{\partial t^*} + (\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) T + w^* \frac{\partial T}{\partial z^*} = \mu_T \Delta_h^* T + \nu_T \frac{\partial^2 T}{\partial z^{*2}},$$

$$(1e) \quad \frac{\partial S}{\partial t^*} + (\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) S + w^* \frac{\partial S}{\partial z^*} = \mu_S \Delta_h^* S + \nu_S \frac{\partial^2 S}{\partial z^{*2}},$$

$$(1f) \quad \rho_{\text{full}}^* = \rho_{\text{ref}} [1 - \beta_T (T - T_{\text{ref}}) + \beta_S (S - S_{\text{ref}})].$$

Aici  $\mathbf{v}^* = (u^*, v^*)$  este viteza orizontală,  $w^*$  viteza verticală,  $p_{\text{full}}^*$  presiunea,  $\rho_{\text{full}}^*$  densitatea,  $T$  temperatura și  $S$  salinitatea. Asterixurile desemnează cantitățile dimensionale și  $\rho_{\text{ref}}$ ,  $T_{\text{ref}}$ ,  $S_{\text{ref}}$  desemnează valori de referință pentru densitate, temperatură și salinitate;  $g$  este accelerația gravitațională și  $f$  este parametrul lui Coriolis.

Interesul practic al acestor ecuații, care sunt punctul de plecare în meteorologie și climatologie, a determinat mulți matematicieni să le studieze din punct de vedere matematic precum și din punct de vedere al analizei numerice. Amintim aici munca de pionerat a lui Lions, Temam și Wang din articolele [LTWa], [LTWb].

Prima direcție de cercetare în cadrul acestei tematici este reprezentată de studiul calitativ al ecuațiilor primitive, studiu ce se concentrează pe existența, unicitatea și regularitatea soluțiilor pentru modelul doi și trei dimensional. În cazul în care condițiile la frontieră sunt de tip periodic, demonstrăm existența globală în timp și unicitatea soluțiilor tari și foarte regulate (în toate spațiile Sobolev  $H^m$ ,  $m \geq 1$ ) pentru modelul doi și trei dimensional ([1], [8], [10] cf. lista de publicații). Demonstrăm de asemenea că în cazul în care forța exterioară aplicată modelului este o funcție analitică în timp cu valori într-un spațiu de tip Gevrey, atunci soluțiile ecuațiilor primitive corespunzătoare condițiilor inițiale ce sunt funcții în spațiul Sobolev  $H^1$  sunt elemente ale unui spațiu de tip Gevrey. Apartenența soluțiilor ecuațiilor primitive unui spațiu de tip Gevrey se traduce prin scăderea exponențială a coeficienților Fourier ai soluțiilor și existența unei zone disipative în spectrul soluțiilor, zonă în care energia cinetică acumulată este neglijabilă (a se vedea [3], [8], [10]).

În articolul [22] se demonstrează că pentru valori mari de timp, comportamentul asimptotic al soluțiilor este determinat de un număr finit de grade de libertate. În lucrare sunt estimate numărul de puncte, de moduri și de volume determinante necesare pentru a descrie comportamentul asimptotic al soluțiilor, rezultate importante în studiile de turbulență pentru fluidele geofizice (oceane, atmosferă).

Pentru ecuațiile primitive într-un spațiu doi dimensional, am demonstrat unicitatea retrogradă a soluțiilor într-o anumită clasă de funcții, numite  $z$ -slabe (soluții slabe pentru care derivata în direcția verticală este mărginită în  $L^2$  pentru orice moment de timp finit). Demonstrăm de asemenea unicitatea retrogradă a soluțiilor tari, atât în cazul doi cât și

trei dimensional ([11]).

A doua direcție de cercetare a ecuațiilor primitive o reprezintă studiul comportamentului asimptotic al ecuațiilor primitive în prezența unui parametru foarte mic (numărul Rossby) ce tinde spre zero. Când numărul lui Rossby, aflat în fața unui operator antisimetric, tinde la zero, soluția exactă prezintă oscilații ce pot fi îndepărtate printr-o metodă provenind din teoria renormalizării (renormalized group method). Pentru cazul doi dimensional rezultatele sunt publicate în [5] iar pentru cazul trei dimensional același tip de rezultate poate fi obținut în ciuda unor dificultăți tehnice suplimentare, rezultatele fiind în pregătire în [26] (cf. lista de publicații).

De asemenea, am studiat existența și unicitatea soluțiilor pentru un model alternativ ecuațiilor primitive, model adaptat descrierii comportamentului fluidelor geofizice. Acest model este obținut pornind de la ecuațiile primitive fără vâscozitate dar cu un termen de disipativitate slabă în ecuația hidrostatică. Modelul studiat aici a fost introdus, în scopuri diferite, de către Salmon [S] și de către Temam și Tribbia [TT]. În [TT], Temam și Tribbia demonstrează parțial caracterul bine pus al modelului, mai exact demonstrează unicitatea soluției și dependența sa continuă de datele inițiale. Articolul [4] completează demonstrația caracterului bine pus al modelului; în această lucrare considerăm cazul condițiilor la frontieră periodice și demonstrăm că pentru date inițiale în  $H^m$  cu  $m \geq 3$ , sistemul are soluții unice, locale în timp, cu valori în  $H^m$ .

În [17] am considerat un model mai general decât cel al ecuațiilor primitive, utilitatea acestui model venind din considerații practice în studiul fluidelor geofizice. Astfel, modelele numerice utilizate pentru a descrie circulația oceanică caută să găsească cel mai bun compromis între realitatea fizică și costul/timpul de calcul al soluției aproximative. Pe de o altă parte, ecuațiile Navier-Stokes complete, conținând toate procesele dinamice ce pot descrie într-o manieră exactă fenomenul fizic au un cost de implementare numerică foarte mare atunci când sunt considerate într-un domeniu mare, cum este cazul domeniului fizic real. Pe de altă parte, ecuațiile primitive sunt mai simple decât ecuațiile fizice complete, fiind obținute folosind aproximarea hidrostatică care ia în considerare faptul că lungimea  $L$  a domeniului fizic este mult mai mare decât profunzimea  $H$ . Raportul  $\epsilon = H/L$  este de ordinul  $10^{-3}$  pentru cazul modelelor de circulație oceanică la scară mare. În cazul utilizării acestei aproximări, în ecuațiile de conservare a momentului neglijăm termenii Coriolis conținând  $2\Omega \cos \theta$ , unde  $\vec{\Omega} = \Omega(\cos \theta, \sin \theta, 0)$  este vectorul de rotație al Pământului la latitudinea  $\theta$ . Studiile numerice ([MHPA], [WB]) arată că ecuațiile primitive în care se păstrează termenii de tip  $\Omega \cos \theta$  furnizează aproximări și rezultate mai bune; aceste ecuații se numesc ecuații primitive quasihidrostrofice. În [17] justificăm introducerea și obținerea acestui model și demonstrăm caracterul său bine pus.

În [18] studiem ecuațiile quasigeostrofice barotropice ale oceanului, în contextul în care vâscozitatea este mică. Scopul acestei lucrări este de a analiza convergența soluției modelului vâscos către soluția ecuațiilor inviscide (ecuațiile obținute atunci când vâscozitatea

este 0), când vâscozitatea tinde la 0. Departe de frontieră convergența este asigurată dar în apropierea frontierei soluția modelului vâscos nu coincide cu cea a modelului inviscid, discrepanța fiind provocată de dispariția derivatelor de ordin superior în modelul inviscid, fenomen cunoscut în literatura de specialitate sub numele de *boudary layer*. În acest articol demonstrăm existența și unicitatea soluției pentru modelul vâscos și pentru cel inviscid, ca apoi să studiem diferența dintre soluția vâscoasă și cea inviscidă când vâscozitatea tinde la 0. Pentru a compensa discrepanțele la frontieră dintre cele două soluții avem nevoie de a construi funcții corectori și de a studia structura acestor corectori. Convergența soluției corectate este demonstrată. În plus, demonstrăm și regularitatea  $C^\infty$  a soluțiilor ecuațiilor quasigeostrofice vâscoase și inviscide.

## 2. ECUAȚIILE EULER

Un alt subiect de interes în activitatea mea de cercetare l-a reprezentat studiul ecuațiilor Euler descriind comportamentul fluidelor incompresibile, considerate cu diferite condiții la frontieră. Cel puțin la nivelul înțelegerii noastre actuale, comportamentul ecuațiilor Euler în cazurile  $2D$  și  $3D$  diferă foarte mult, de aceea am considerat separat cele două cazuri, cu condiții la frontieră omogene și respectiv neomogene. În [6] am considerat cazul ecuațiilor Euler  $2D$  și  $3D$ , cu condiții la bord omogene într-un canal și am demonstrat existența și unicitatea soluției într-un spațiu de tip Hölder precum și în spații de tip Sobolev. Pentru cazul  $2D$ , demonstrăm existența globală în timp a soluției, demonstrația utilizând teorema Schauder de punct fix; proprietăți specifice ale funcției Green într-un canal sunt necesare și sunt obținute aici.

O altă întrebare interesantă est legată de caracterul bine pus al ecuațiilor Euler atunci când condițiile la frontieră sunt neomogene și când este considerat modelul  $3D$  într-un canal cu pereți neomogeni. În articolul [9] am demonstrat existența, unicitatea și regularitatea soluției în anumite spații de tip Hölder. În afară de interesul intrinsec al acestor rezultate, aceste rezultate au aplicații și în studiul de tip boundary layers în cazul ecuațiilor Navier-Stokes, când vâscozitatea tinde la zero (a se vedea, spre exemplu, [W]).

## 3. ALGORITMUL PARAREAL

În timpul postdoctoratului la Geneva, sub îndrumarea profesorului Martin Gander, am început să descopăr un domeniu de cercetare nefamiliar mie până la acel moment, este vorba de metodele de descompunere a domeniului. Punctul de plecare al problemelor care m-au interesat este articolul lui Lions, Maday și Turinici [LMT] unde autorii propun o paralelizare în discretizarea în timp, metodă numită *calcul parareal* și care este inspirată de algoritmi clasici de discretizare multigrid în spațiu. Această tehnică, reluată de Gander și Vanderwalle [GV] și de Farhat et al. [F03] este eficientă în cazul unei anumite clase de ecuații diferențiale ordinale precum și în cazul ecuațiilor eliptice, fiind considerabil mai rapidă decât metodele secvențiale clasice dar acesta nu este și cazul unei anumite clase de ecuații diferențiale de ordin doi sau al ecuațiilor hiperbolice. Citez aici articolul lui Farhat et al. [F06] unde autorii propun o nouă variantă a metodei de calcul parareal, variantă eficientă și în cazul în care metoda inițială nu producea speed-up. Articolul [14] are ca

punct de plecare această nouă metodă pe care o transcriem sub forma unei metode de tir multiplu și o analizăm din punct de vedere matematic.

#### 4. ECUAȚIILE SAINT-VENANT

În timpul sejurului meu, în toamna anului 2008, la Bloomington, la Institute for Scientific Computing and Applied Mathematics, am început să lucrez împreună cu profesorul Roger Temam la studierea caracterului bine pus al ecuațiilor Saint-Venant inviscide, în scopul de a găsi condiții la frontieră pentru care problema este bine pusă și care nu introduc efecte nedorite și artificiale asupra undelor ajunse la frontieră. Ecuațiile Saint-Venant sunt ecuații ce descriu comportamentul fluidelor geofizice în domenii de profunzime mică, ca spre exemplu comportamentul lacurilor de adâncime mică. În studiul modelelor descriind fenomene din meteorologie sau oceanografie, provocarea vine din faptul că domeniul fizic pentru modelul considerat este mult prea mare pentru a permite efectuarea de simulări numerice direct pe acest domeniu și astfel este nevoie ca domeniul inițial să fie descompus în sub-domenii fără semnificație particulară din punct de vedere fizic pentru care nu există condiții la frontieră dictate de legile fizicii. Dificultatea constă în alegerea unui set de condiții la frontieră pentru modelul considerat în noul domeniu de calcul. Trebuie luate în cont în primul rând considerente de ordin matematic, adică trebuie considerate condiții la frontieră care permit obținerea unei probleme bine-puse. Un alt criteriu care trebuie folosit în alegerea condițiilor este relevanța acestora din punctul de vedere al simulărilor numerice, ținându-se cont de faptul că o alegere nepotrivită a acestor condiții produce efecte indezirabile, ducând la apariția unor unde ce se reflectă la frontiera artificială a domeniului de calcul, unde ce nu sunt pertinente din punct de vedere fizic. Astfel este necesară găsirea unor condiții care să satisfacă ambele criterii (condiții cunoscute sub numele de *condiții transparente*).

În articolul [15] considerăm ecuațiile Saint-Venant pe un interval mărginit, atunci când sunt considerate condiții la frontieră de tip Dirichlet pentru viteza fluidului și Neumann pentru presiune și demonstrăm caracterul bine pus al modelului (aceste condiții corespund cazului fizic în care sunt considerate ziduri rigide la frontiera domeniului).

În articolul [20] considerăm un alt tip de condiții la frontieră pe care le studiem din punct de vedere teoretic iar în articolul [25] demonstrăm că aceste condiții sunt transparente. Condițiile considerate sunt de tip Kreiss-Lopatinski iar ecuațiile Saint-Venant înzestrate cu condițiile la frontieră propuse au un caracter bine pus, ceea ce este arătat în [20]. Rezultatele din [20] rămân valabile și atunci când nu este considerată o topografie plană pentru domeniu, acest lucru fiind demonstrat în [21].

Cazul a două straturi de fluid suprapuse, de densități diferite, este considerat în [23], articol în care propunem condiții la frontieră și demonstrăm că pentru acestea ecuațiile Saint-Venant pentru fluidele suprapuse formează un model bine pus. Aceste condiții sunt transparente, așa cum arată studiile numerice din [25].

În [24] sunt studiate ecuațiile Saint-Venant din punct de vedere numeric, al găririi algoritmilor numerici adaptați pentru a ilustra comportamentul acestor ecuații fără a introduce efecte artificiale produse de schemele numerice utilizate. În acest articol aplicăm ecuațiilor Saint-Venant într-un spațiu unu și doi dimensional metode multigrad pentru discretizări

de tip volum finit. Astfel, o metodă de tip multigrad este aplicată unei scheme numerice central-upwind și demonstrăm stabilitatea acestei metode numerice în cazul ecuațiilor Saint-Venant liniare. Problema alegerii corespunzătoare a condițiilor la frontieră este pusă în evidență prin ilustrarea exemplului de referință, al comportamentului solitonului Rossby la frontieră în cazul doi dimensional.

## 5. MODELE DESCRIIND FENOMENE DE SEPARARE DE FAZĂ

Datorită colaborării mele cu colegii din echipa de ecuații diferențiale cu derivate parțiale a Laboratorului de Matematică al Universității Poitiers, am început să mă apropiu de domeniul problemelor de separare de fază, fenomen ce apare în cazul aliajelor binare. Aceste fenomene sunt modelizate de către ecuațiile de tip Cahn-Hilliard și Caginalp. În [16] studiem din punct de vedere numeric ecuațiile Cahn-Hilliard cu condiții dinamice la frontieră. În această lucrare propunem o semi-discretizare în spațiu de tip element finit pentru modelul considerat și demonstrăm convergența soluției aproximative, obținută prin această schemă numerică către soluția exactă a modelului. Simulări numerice obținute cu FreeFem++ ilustrează rezultatele teoretice obținute.

## REFERENCES

- [F03] C. FARHAT, M. CHANDESRIIS, *Time-decomposed parallel time-integrators: theory and feasibility studies for fluid, structure, and fluid-structure applications*, Internat. J. Numer. Methods Engrg., 58 (2003), pp. 1397–1434.
- [F06] C. FARHAT, J. CORTIAL, C. DASTILLUNG, H. BAVESTRELLO, *Time-parallel implicit integrators for the near-real-time prediction of linear structural dynamic responses*, Internat. J. Numer. Methods Engrg., 67 (2006), pp. 697–724.
- [GV] M. J. GANDER, S. VANDERWALLE, *Analysis of the parareal time-parallel time-integration method*, SIAM J. Sci. Comput., (2007). in print.
- [LMT] J.-L. LIONS, Y. MADAY, G. TURINICI, *Résolution d'EDP par un schéma en temps "pararéel"*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 332 (2001), pp. 661–668.
- [LTWa] J.-L. LIONS, R. TEMAM, S. WANG, *New formulations of the primitive equations of the atmosphere and applications*, Nonlinearity, 5 (1992), pp. 237–288.
- [LTWb] J.-L. LIONS, R. TEMAM, S. WANG, *On the equations of the large-scale ocean*, Nonlinearity, 5 (1992), pp. 1007–1053.
- [MHPA] J. MARSHALL, C. HILL, L. PERELMAN, A. ADCROFT, *Hydrostatic, quasi-hydrostatic, and non-hydrostatic ocean modeling*, J. Geophys. Research, 102 : (1997), pp. 5733–5752.
- [S] R. SALMON, *Lectures on Geophysical Fluid Dynamics*, Oxford University Press, 1998.
- [TT] R. TEMAM, J. TRIBBIA, *Open boundary conditions for the primitive and boussinesq equations*, Journal of the Atmospheric Sciences, 60 (2003), pp. 2647–2660.
- [W] X. WANG, *Examples of boundary layers associated with the incompressible Navier-Stokes equations*, Chinese Annals of Mathematics. Series B, 31(2010), no. 5, pp. 781–792.
- [WB] A. A. WHITE, R. A. BROMLEY, *Dynamically consistent, quasi-hydrostatic equations for global models with a complete representation of the coriolis force*, Q. J. R. Meteorol. Soc., 121 (1995), pp. 399–418.