MEMORIU DE ACTIVITATE

IOAN LIVIU IGNAT

În anul 1997 am început studiile universitare la Facultatea de Matematică-Informatică din cadrul Universităţii din Craiova beneficiind în cei patru ani de studii de bursă de studii. În anul 1998 am beneficiat de o bursă acordată de University Honors College, University of Pittsburgh, având astfel posibilitatea de a participa la cursurile desfăşurate în cadrul departamentului de matematică al acestei universităţi. Ca membru al acestui departament am participat la concursul inter-universitar Putnam unde am obţinut o menţiune de onoare (clasarea în primii 50 de participanţi).

Activitatea de cercetare-predare s-a efectuat după cum urmează :

(1) Doctorand cu frecvenţă, Universitatea din Craiova, 01.11.2001-31.01.2004,
(2) Bursier predoctoral, proiect european "Homogenization and Multiple Scales", 25.09.2002 - 31.12.2003,
(3) Bursier predoctoral, MEC Spania, 01.01.2004-30.03.2006,
(4) Preparator, Universitatea din Craiova, 01.02.2004-31.06.2006,
(5) Profesor asistent, Universidad Autonoma de Madrid, 01.04.2006-30.08.2007,
(6) Cercetător, IMAR, 01.07.2006-05.2008,
(7) Cercetător III, IMAR, 05.2008- până în prezent.

Teza de doctorat intitulată "Propiedades cualitativas de esquemas numericos de aproximacion de ecuaciones de difusion y de dispersion" a fost susţinută în data de 15 septembrie 2006 obţinând calificativul maxim "sobresaliente cum laude". Teza de abilitare a fost susţinută în data de 31 mai 2013.

În perioada 2007-2013 am fost directorul a 3 granturi naţionale, un grant pentru reintegrarea tinerilor cercetători, unul pentru tinere echipe şi unul IDEI. În calitate de îndrumător am dirijat două teze de master a studenţilor Diana Stan şi Cristian Găvruş. Diana Stan este studentă doctorală la Universidad Autonoma de Madrid, Spania, iar Cristian Găvruş este la University of California at Berkeley. În cadrul grantului IDEI am fost responsabil cu doi studenţi postdoctorali: Denisa Stancu Dumitru şi Cristian Cazacu.

Activitatea mea de cercetare se dedică studiului schemelor numerice de aproximare pentru EDP neliniare, probleme relaţionate cu aproximarea numerică a problemelor de control, precum şi studiului asimptotic al unor modele nelocale. Mai concret, se doreşte a se studia modul in care discretizările numerice ale ecuaţiilor ce descriu procese de dispersie şi difuzie afectează proprietăţi bine cunoscute ale modelelor continue, cum ar fi de: propagarea energiei, comportamentul asimptotic al soluţiilor, proprietăţi dispersive, etc. Acestea sunt subiecte de interes nu numai în ceea ce priveşte analiza clasică a schemelor numerice, dar care au şi consecinţe importante din punctul de vedere al problemelor de control, al problemelor inverse sau al aproximării numerice a ecuaţiilor neliniare. De asemenea, se analizează comportamentul soluţiilor la infinit.

Cercetarea efectuată s-a materializat prin publicarea unui număr de 23 articole (22 deja publicate şi unul sub tipar). Un număr de incă 5 lucrări sunt trimise spre publicare. Lista detaliată a lucrărilor se găseşte anexată.

În continuare voi detalia câteva din rezultatele principale obţinute.

Ecuaţii de evoluţie nelocale. Acest subiect a fost analizat începând cu anul 2007 după terminarea tezei de doctorat. S-au analizat diferite tipuri de ecuaţii ce includ operatori nelocali. Modelul de pornire este următorul $u_t = J * u - u$ unde J este o funcţie regulată de masă unitară. Un comportament asimptotic ce conţine primii k termeni în dezvoltarea asimptotică a fost obţinut în [10].

În articolul [9] am introdus un model de convecţie-difuzie nelocală $u_t = J * u - u + G * u^q - u^q$. Pentru acest model au fost analizate proprietăţile de existenţă, unicitate şi stabilitate. Comportamentul asimptotic al soluţiilor a fost obţinut folosind proprietăţile semigrupului liniar şi metode de analiză Fourier. Metode energetice pentru ecuaţii de evoluţie nelocale au fost obţinute în articolul [11]. Punctul cheie al acestui ultim articol a fost următorul rezultat: asumând anumite condiţii asupra funcţiei $J(\cdot,\cdot)$, orice funcţie $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$ poate fi descompusă ca $u = v + w$ astfel încât:

$$\|\nabla v\|^p_{L^p(\mathbb{R})^d} + \|w\|^p_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C(J,p) \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} J(x,y)|u(x)-u(y)|^p dxdy.$$

Mai mult decât atât, normele L^p ale lui v şi w pot fi controlate de norma L^p a lui u după cum urmează

$$\|v\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|w\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C(J,p)\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

În articolele [7], [6] am dezvoltat o metodă de scaling pentru obţinerea primului termen în comportamentul asimptotic al unor ecuaţii de evoluţie nelocale. Principalul rezultat este următorul criteriu de compacitate.

Theorem 0.1. *Fie $1 \leq p < \infty$ şi $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ o mulţime deschisă. Fie $\rho : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ o funcţie pozitivă, regulată, cu simetrie radială şi de suport compact, şi $\rho_n(x) = n^d\rho(nx)$. Fie $\{f_n\}_{n\geq 1}$ un şir de funcţii în $L^p((0,T)\times\Omega)$ astfel încât:*

$$\int_0^T\int_\Omega |f_n(t,x)|^p dxdt \leq \ M \tag{0.1}$$

şi

$$n^p\int_0^T\int_\Omega\int_\Omega \rho_n(x-y)|f_n(t,x)-f_n(t,y)|^p dxdydt \leq M. \tag{0.2}$$

1. Dacă $\{f_n\}_{n\geq 1}$ converge slab la f în $L^p((0,T)\times\Omega)$ atunci $f \in L^p((0,T), W^{1,p}(\Omega))$ pentru $p > 1$ şi $f \in L^1((0,T), BV(\Omega))$ pentru $p = 1$.

2. Fie $p > 1$. Asumând că Ω este un domeniu regulat şi mărginit în $\mathbb{R}^d$, $\rho(x) \geq \rho(y)$ dacă $|x| \leq |y|$ şi că

$$\|\partial_t f_n\|_{L^p((0,T),W^{-1,p}(\Omega))} \leq M \tag{0.3}$$

atunci $\{f_n\}_{n\geq 1}$ este relativ compact în $L^p((0,T)\times\Omega)$.

Legat de acest subiect sunt în desfăşurare cercetări relaţionate cu comportamentul asimptotic al modelelor nelocale de convecţie-difuzie cu convecţie subcritică, caz în care metodele dezvoltate mai sus nu mai funcţionează. Este o problemă dificilă şi noi metode trebuie dezvoltate.

Probleme legate de controlabilitate. Un prim rezultat, [13], analizează problema observabilităţii uniforme pentru discretizarea cu diferenţe finite a ecuaţiei undelor într-un pătrat. Demonstrăm uniformitatea (în raport cu pasul de discretizare) observabilităţii uniforme pentru soluţiile obţinute cu ajutorul precondiţionării *two-grid* introdusă de către Glowinski în [3]. Metoda introdusă foloseşte inegalităţile uniforme pentru clasa soluţiilor filtrate spectral, *low-frequencies*, şi o descompunere spectrală diadică în variabila temporală. Ca o consecinţă, demonstrăm convergenţa metodei *two-grid* pentru calcularea controlului frontieră în cazul ecuaţiei undelor.

Într-un alt articol [8] stabilim estimări Carleman globale pentru ecuaţia căldurii şi ecuaţia Schrödinger pe o reţea. Ecuaţia căldurii este considerată pe un arbore general iar ecuaţia Schrödinger pe un arbore stelat. Inegalităţile Carleman obţinute sunt folosite pentru a demonstra stabilitatea Lipschitz pentru o problemă inversă, prin obţinerea potenţialului staţionar din măsurători pe frontieră.

Ecuaţii pe reţele. Într-o serie de lucrări [4], [2], [1] am analizat ecuaţia Schrödinger pe o structură de arbore cu ultima generaţie de ramuri formată din ramuri infinite. Am obţinut rezultate de dispersie pentru soluţia liniară şi am obţinut rezultate de bine-punere pentru câteva probleme neliniare. În articolele [4] şi [2] se consideră ecuaţia Schrödinger cu condiţii de cuplare de tip Kirchhoff. Articolul [1] consideră ecuaţii ce conţin perturbări ale operatorului laplacian cu un potenţial format dintr-un număr finit de distribuţii delta-Dirac:

$$H_\alpha = -\Delta + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \delta(x - x_j).$$

De asemenea, este considerată ecuaţia Schrödinger pe o reţea cu condiţii de cuplare de tip δ [16]. Mai precis, acest tip de cuplare este în esenţă următorul: continuitatea funcţiilor în nodurile grafului însoţită de o condiţie asupra primei derivate în aceste noduri:

$$\sum_{e \in E_v} \partial_n \mathbf{u}(v) = \alpha(v)\mathbf{u}(v).$$

Problemele analizate sunt legate de ceea ce în literatura de specialitate se numesc "quantum graphs".

Proprietăţi de dispersie. În cadrul acestui subiect am analizat proprietatea de dispersie pentru diferite ecuaţii de evoluţie de tip Schrödinger. Un prim rezultat este obţinut cu fosta studentă Diana Stan (în acest moment studentă doctorală la Universidad Autonoma de Madrid) pentru o ecuaţie discretă. Rezultatul obţinut [12] foloseşte rezultate clasice precum şi rezultate proprii de analiză armonică pentru integrale oscilatorii. Extensia acestui rezultat la grafuri a fost obţinut împreună cu fostul student Cristian Gavruş (în acest moment la University of California at Berkeley). Un alt rezultat obţinut împreună cu E. Zuazua şi N. Beli se referă la analiza proprietăţii de dispersie pentru ecuaţia Schrödinger şi ecuaţia undelor în cazul coeficienţilor BV. Pentru ecuaţia

$$\begin{cases} v_{tt}(t,x) - \partial_x(a(x)\partial_x v_x)(t,x) = 0, & (t,x) \in \mathbb{R}^2, \\ v(0,x) = v_0(x),\ v_t(0,x) = 0, & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{0.4}$$

avem următorul rezultat.

Theorem 0.2. *Pentru orice funcţie $a \in BV(\mathbb{R})$ ce satisface $0 < m \leq a(x) \leq M$ şi $\mathrm{Var}(\log(a)) < 2\pi$ există o constantă pozitivă $C(\mathrm{Var}(a), m, M)$ astfel încât:*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |v(t,x)|dt \leq C(\mathrm{Var}(a), m, M)\|v_0\|_{L^1(\mathbb{R})}. \tag{0.5}$$

Proprietăţi similare se pot obţine şi pentru ecuaţia Schrödinger. Rezultatele sunt obţinute combinând tehnici de propagare a undelor şi elemente de teoria analitică a numerelor.

Metode numerice pentru ecuaţia Schrödinger neliniară. În cadrul acestei teme am dezvoltat diferite metode numerice ce permit aproximarea soluţiilor ecuaţiei Schrödinger neliniară ce nu au foarte multă regularitate, de exemplu: $H^s(\mathbb{R})$ cu $0 < s < 1/2$. Punctul cheie al acestor metode constă în obţinerea de rezultate de dispersie care să fie uniforme în raport cu pasul de discretizare. Au fost introduse metode bazate în diferenţe finite împreună cu anumite metode de filtrare: "two-grid", vâscozitate numerică artificială [14], precum şi metode bazate în descompunerea operatorului neliniar [5]. De asemenea, au fost obţinute ratele de convergenţă în cazul câtorva astfel de scheme numerice [15].

References

[1] V. Banica and L. I. Ignat. Dispersion for the Schrödinger equation on the line with multiple dirac delta potentials and on delta trees. *submitted.*

[2] V. Banica and L. I. Ignat. Dispersion for the Schrödinger equation on networks. *J. Math. Phys.*, 52(8):083703, 14, 2011.

[3] R. Glowinski. Ensuring well-posedness by analogy: Stokes problem and boundary control for the wave equation. *J. Comput. Phys.*, 103(2):189–221, 1992.

[4] L. I. Ignat. Strichartz estimates for the Schrödinger equation on a tree and applications. *SIAM J. Math. Anal.*, 42(5):2041–2057, 2010.

[5] Liviu I. Ignat. A splitting method for the nonlinear Schrödinger equation. *J. Differential Equations*, 250(7):3022–3046, 2011.

[6] Liviu I. Ignat, Tatiana I. Ignat, and Denisa Stancu-Dumitru. A compactness tool for the analysis of nonlocal evolution equations. submitted.

[7] Liviu I. Ignat and Ademir Pazoto. Asymptotic behaviour for generalized Roseneau model. submitted.

[8] Liviu I. Ignat, Ademir Pazoto, and Lionel Rosier. Inverse problem for the heat equation and the schrödinger equation on a tree. *Inverse Problems*, 28(015011), 2012.

[9] Liviu I. Ignat and Julio D. Rossi. A nonlocal convection-diffusion equation. *J. Funct. Anal.*, 251(2):399–437, 2007.

[10] Liviu I. Ignat and Julio D. Rossi. Refined asymptotic expansions for nonlocal diffusion equations. *J. Evol. Equ.*, 8(4):617–629, 2008.

[11] Liviu I. Ignat and Julio D. Rossi. Decay estimates for nonlocal problems via energy methods. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 92(2):163–187, 2009.

[12] Liviu I. Ignat and Diana Stan. Dispersive properties for discrete Schrödinger equations. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 17(5):1035–1065, 2011.

[13] Liviu I. Ignat and Enrique Zuazua. Convergence of a two-grid algorithm for the control of the wave equation. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 11(2):351–391, 2009.

[14] Liviu I. Ignat and Enrique Zuazua. Numerical dispersive schemes for the nonlinear Schrödinger equation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 47(2):1366–1390, 2009.

[15] Liviu I. Ignat and Enrique Zuazua. Convergence rates for dispersive approximation schemes to nonlinear Schrödinger equations. *J. Math. Pures Appl.*, 2012.

[16] P. Kuchment. Quantum graphs. I. Some basic structures. *Waves Random Media*, 14(1):S107–S128, 2004. Special section on quantum graphs.