INSTITUTE OF MATHEMATICS OF THE ROMANIAN ACADEMY
"SIMION STOILOW"

REZUMAT
AL
TEZEI DE DOCTORAT

APLICATII ALE TEORIEI POTENTIALULUI :

SUPORTUL FIN PE CONURI DE POTENTIALE

COORDONATOR STIINTIFIC
Prof. Dr. BUCUR Gheorghe

DOCTORAND
BENFRIHA Habib

-2013-

Rezumat

Lucrarea incepe cu o introducere in care sunt amintite originile teoriei potentialului, principalele etape in dezvoltarea acestei teorii precum si modalitatea in care diferite scoli matematice s-au inscris in acest proces de-a lungul timpului. Sunt amintite o parte dintre contributiile romanesti si dintre acestea este scoasa in evidenta constructia sistematica a teoriei baleajului ca instrument de lucru precum si dezvoltarea conceptului de con de potentiale introdus in acesta teorie de G. Mokobodzki.

Este intr-un fel motivata tematica acestei teze.

Capitolul 1 intitulat „Nearly saturation, balayage and fine carrier in excesive structures" este compus din cinci paragrafe. In primul este prezentat conceptul de functie supermediana si cel de functie excesive in raport cu o rezolventa proprie, submarkoviana de nuclee pe un spatiu masurabil $(X, \mathcal{B})$ si sunt amintite proprietatile de baza ale conurilor de functii supermediene si functii excesive: acestea sunt conuri de potentiale in sensul lui Mokobodzki si exista un baleaj pe conul de functii superarmonice suficient de finite ale carui valori sunt functii excesive. Este asa numita operatie de regularizare.

Printre proprietatile acestor doua conuri se aminteste celebra teorema apartinand, in cazul clasic, matematicienei R-M. Hervé care afirma ca in raport cu ordinea specifica aceste conuri sunt σ −complet reticulate.

Este prezentata urmatoarea lema de descompunere :

Lema 1.1.1 *Pentru orice functie supermediana finita $\mathscr{s}$ si orice $A \in \mathcal{B}$ exista o scriere*

$$\mathscr{s} = \mathscr{s}_A + \mathscr{s}'_A$$

unde $\mathscr{s}_A, \mathscr{s}'_A$ sunt supermediene si

$$R^A \mathscr{s}_A = \mathscr{s}_A, R^{X \setminus A} \mathscr{s}'_A = \mathscr{s}'_A$$

Procedeul de demonstratie este inspirat de metoda lui G. Mokobodzki in studiul privind subordinarea rezolventelor.

Apoi **Lema 1.2.1** al carui enunt aminteste de teoreme de capacitabilitate a multimilor $K_{\sigma\delta}$:

Fie $(\mathscr{s}_n)_n$ un sir de functii finite supermediene si pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, fie $(\mathscr{s}_{nm})_{nm}$ un sir de functii supermediene specific crescator la $\mathscr{s}_n$. Atunci avem

1. $\curlyvee_n \mathscr{s}_n = \curlyvee_n \mathscr{s}_n$ *unde* $t_n =: \curlyvee_{i,j \leq n} \mathscr{s}_{i,j}$
2. $\curlywedge_n \mathscr{s}_n = sup\{\mathscr{s}_\sigma / \sigma \in \sum \mathbb{N}\}$

in care $\sum \mathbb{N}$ este multimea tuturor sirurilor de numere naturale iar pentru fiecare $\sigma = (m_n)_n$ am notat $\mathscr{s}_\sigma = \curlywedge_n \mathscr{s}_{nm_n}$.

Lema 1.2.2 are un enunt similar dar functiile $\mathscr{s}_n$ sunt excesive.

In paragraful 3 intitulat "Pseudo-balayages associated with supermedian functions" pentru fiecare functie supermediana finita $\mathscr{s}$ asociem urmatorul operator pe conul $\mathcal{S}$ al functiilor supermediene

$$B_{\mathscr{s}}(t) \coloneqq \sup_t D_t$$

unde

$$D_t \coloneqq \{u \in \mathcal{S}/u \leq t \;\; and\; u \preccurlyeq \alpha s \;\; for\; some\; \alpha > 0\}$$

Propozitia 1.3.1 Afirma ca aplicatia B_s este un pseudobaleaj pe $\mathcal{S}$ care invariaza s si ca printre operatorii additivi, crescatori si contractivi pe $\mathcal{S}$ care invariaza s, operatorul B_s este cel mai mic .

Corolarul 1.3.3 afirma ca daca s este excesiva atunci B_s este un operator de pseudobaleaj pe conul $\mathcal{E}$ de functii excesive.

In paragraful 4 este amintita notiunea de baleaj reprezentabil pe conul $\mathcal{E}$ de functii excesive si anume baleajul B este reprezentabil daca exista o multime bazica $b(B) \subset X$ astfel incat

$$B = B^{b(B)}$$

Apoi se introduce, prin paralelism cu terminologia utilizata in H −conuri standard de functii, notiunea de spatiu aproape saturat si anume:

Spatiul X este *aproape saturat* daca orice baleaj pe $\mathcal{E}$ este reprezentabil.

Notatie : Se noteaza cu $\mathcal{E}^0$ multimea functiilor excesive pentru care oricare ar fi minorantul specific t al sau, pseudobaleajul B_t asociat lui t este un baleaj

Pentru elementele din $\mathcal{E}^0$ se introduce notiunea de *suport fin* si anume pentru orice element $s \in \mathcal{E}^0$ notam cu $carr\ s$ baza baleajului B_s.
si demonstram urmatoarea

Propozitia 1.4.7 *Urmatoarele afirmatii sunt adevarate:*
1. *$\mathcal{E}^0$ este un con convex solid in $\mathcal{E}$ in raport cu ordinea specifica*
2. $carr\ (s_1 + s_2) = carr\ s_1 \cup carr\ s_2 \qquad \forall s_1, s_2 \in \mathcal{E}$
3. *Daca $(s_n)_n$ este un sir in $\mathcal{E}^0$ astfel incat $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$ este finita atunci $\sum_{n=1}^{\infty} s_n \in \mathcal{E}^0$ si $carr(\sum_{n=1}^{\infty} s_n)$ este inchiderea in raport cu topologia fina a multimii $\bigcup_{n=1}^{\infty} carr\ s_n$.*

Propozitia urmatoare 1.4.8 da caracterizari ale suportul fin

Pentru orice element $u \in \mathcal{E}^0$

a. $s \geq u$ *pe* $carr\ u \Longrightarrow s \geq u$ *on* X

b. Multimea $carr\ u$ este fin inchisa si $\mathcal{B}$ - masurabila

c. Daca F este o parte fin inchisa astfel incat

$$s \in \mathcal{E}, s \geq_F u \;\Longrightarrow s \geq u \;\; pe\;\; X$$

avem $carr\ u \subset F$

d. $carr u = \{x \in X/\mu\ \sigma - H - integral, \mu \leq_{\mathcal{E}} \varepsilon_x, \mu(u) = u(x) \Rightarrow \mu =_{\mathcal{E}} \varepsilon_x\}$

In ultimul paragraf 1.5 se aminteste definitia unui *element regulat* si anume functia excesiva finita s se numeste *regulata* daca pentru orice sir $(s_n)_n$ din $\mathcal{E}$ crescator la s avem

$$\bigwedge_n R(s - s_n) = 0$$

In legatura cu elementele finite regulate se arata ca pseudo-balayagele asociate sunt baleaje adica notind cu $\mathcal{E}^r$ multimea excesivelor regulate, avem

$$\mathcal{E}^r \subset \mathcal{E}^0$$

Teorema 1.5.3 arata ca si incluziunea inversa este adevarata, adica

$$\mathcal{E}^0 \subset \mathcal{E}^r$$

Observatie: In cele ce urmeaza , folosim notatia $\mathcal{E}^r$ sau $\mathcal{E}^0$ in mod aleator, dupa caz, pentru elementele regulate finite sau nu.

Capitul 2 intitulat „ The specific multiplication in excessive structure" porneste cu urmatoarea definitie:

O rezolventa de nuclee pe spatiul masurabil $(X, \mathcal{B})$ se va numi *rezolventa standard* daca :

a. $\mathcal{V}$ este o rezolventa proper submarkoviana
b. $\mathcal{E}$ conul de de excesive este min-stabil si contine functiile constante positive.
c. Exista o distanta d pe X astfel incat topologia asosiata τ_d este inclusa in topologia fina τ.
d. $\mathcal{B}$ este σ −algebra generata de τ_d i.e. $\mathcal{B} = \sigma(\tau_d)$
e. Spatiul $(X, \mathcal{B})$ este aproape saturat in raport cu $\mathcal{E}$ adica orice baleaj pe $\mathcal{E}$ este reprezentabil

In primil paragraf sunt amintite proprietati de universal quasi-marginere ale elementelor excesive regulate si lema de descompunere

$$s = s_A + s'_A \quad A \in \mathcal{B}$$

pentru $s \in \mathcal{E}^0$ in care

$$s_A, s'_A \in \mathcal{E},\ R^A s_A = s_A,\ R^{X\setminus A} s'_A = s'_A$$

In paragraful al doila se demonstreaza o lema care asigura o anumita unicitate a descompunerii precedente

Lema 2.2.1 *Pentru orice element excesiv regulat* p *si orice multime deschisa* G *din* τ_d *exista doua elemente* p_G *si* p'_G *in* $\mathcal{E}^r$ *astfel incat*

$$p_G + p'_G = p, \qquad carr\, p'_G \subset X \setminus G$$

$$p_G \wedge q = 0 \quad \forall q \in \mathcal{E}^r \ cu\ carr\, q \subset X \setminus G$$

O asemenea descompunere este unica. Mai mult exista un sir $(p_n)_n$ *in* $\mathcal{E}^r$ *crescator specific la* p_G *si un sir* $(F_n)_n$ *de multimi inchise in topologia* τ_d*astfel incat*

$$F_n \subset \mathring{F}_{n+1} \subset G \quad \text{ si } R^{F_n} p_n = p_n$$

In paragraful 2.3 se dezvolta un calcul al restrictei specifice.

Nota: In cele urmeaza elementul p'_D din leme 2.2 se va nota cu p_F unde $F = X \setminus D$. Deci vom avea

$p = p_G + p_F$; $p_G, p_F \in \mathcal{E}, carr\, p_F \subset F, p_G \wedge q = 0$ pentru orice $q \in \mathcal{E}^r$ cu $carr\, q \subset F$

Propozitia 2.3.1

a. *Fie* $p \in \mathcal{E}^r$ *si* $\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2 \in \tau_d$, $\mathrm{G}_1 \subset \mathrm{G}_2$. *avem*

$$p_{\mathrm{G}_1} \preccurlyeq p_{\mathrm{G}_2}$$

b. *Daca* $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2$ *sunt inchise* $\mathrm{F}_1 \subset \mathrm{F}_2$, *atunci*

$$p_{\mathrm{F}_1} \preccurlyeq p_{\mathrm{F}_2}$$

c. *Pentru orice sir* $(\mathrm{G}_n)_n$ *de multimi deschise (resp. orice sir* $(\mathrm{F}_n)_n$ *de multimi inchise) ale lui X, avem*

$$p_{\bigcup_1^\infty \mathrm{G}_n} = \curlyvee_n p_{\mathrm{G}_n} \ (resp. p_{\bigcap_1^\infty \mathrm{F}_n} = \curlywedge_n p_{\mathrm{F}_n})$$

d. *Pentru orice* $\mathrm{G} \in \tau_d$ *avem*

$$p_{\mathrm{G}} = \curlyvee \{q \in \mathcal{E}/q \preccurlyeq p, carr\ q \subset \mathrm{G}\} = \curlyvee \{p_{\mathrm{F}}/\mathrm{F} = \overline{\mathrm{F}} \subset \mathrm{G}\}$$

si exista un sir crescator $(\mathrm{F}_n)_n$ *de multimi inchise astfel incat sirul,* $(p_{\mathrm{F}_n})_n$ *este specific crescator la* p_{G}

e. *Pentru orice multime inchisa* F *avem*

$$p_{\mathrm{F}} = \curlywedge \{p_{\mathrm{G}}/\mathrm{G} \text{ open}, \mathrm{F} \subset \mathrm{G}\}$$

si exista un sir descrescator $(\mathrm{G}_n)_n$ *de multimi deschise astfel incat sirul* $(p_{\mathrm{G}_n})_n$ *este specific descrescator la* p_F

f. *Pentru* $\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2 \in \tau_d$, F_1, F_2 *inchise avem*

$$p_{\mathrm{G}_1} \curlywedge p_{\mathrm{G}_2} = p_{\mathrm{G}_1 \cap \mathrm{G}_2}, \qquad p_{\mathrm{F}_1} \curlyvee p_{\mathrm{F}_2} = p_{\mathrm{F}_1 \cup \mathrm{F}_2}$$

Urmatoarea propozitie stabileste, utilizand intens proprietatile suportului fin, legatura dintre operatii algebrice cu multimi inchise sau deschise si restrictiile specifice ale elementelor regulate la astfel de multimi.

Propozitia 2.3.2

a. *Daca* $p, q \in \mathcal{E}^r$ *si* $G \in \tau_d$ *respectiv* $F = \overline{F}$ *atunci*

$$(p + q)_{\mathrm{G}} = p_{\mathrm{G}} + q_{\mathrm{G}} \ (respectiv. (p + q)_F = p_F + q_F)$$

b. *Daca* $G_i \in \tau_d$ (resp. $F_i = \overline{F_i}$) *i=1,2 si* $p \in \mathcal{E}^r$ *avem*

$$(p_{\mathrm{G}_1})_{\mathrm{G}_2} = p_{\mathrm{G}_1} \curlywedge p_{\mathrm{G}_2} = p_{\mathrm{G}_1 \cap \mathrm{G}_2},$$

$$(p_{F_1})_{F_2} = p_{F_1} \curlywedge p_{F_2} = p_{F_1 \cap F_2}, (p_{\mathrm{G}_1})_{F_1} = p_{\mathrm{G}_1} \curlywedge p_{F_1} = (p_{F_1})_{\mathrm{G}_1}$$

c. *Daca* $(p_n)_n$ *este un sir in* $\mathcal{E}^r$ *astfel incat* $\sum_n p_n \in \mathcal{E}^r$ *atunci pentru orice* $G \in \tau_d$ *(resp.* $F = \overline{F}$ *) avem*

$$\left(\sum_{n=1}^\infty p_n\right)_{\mathrm{G}} = \sum_{n=1}^\infty p_{n_{\mathrm{G}}} \ (resp. \left(\sum_{n=1}^\infty p_n\right)_F = \sum_{n=1}^\infty p_{n_F}$$

d. *Daca un sir* $(p_n)_n$*din* $\mathcal{E}^r$ *este specific crescator si majorat in* $\mathcal{E}$ *atunci pentru orice* $\mathrm{G} \in \tau_d$ *(resp.* $F = \overline{F}$ *) avem*

$$\curlyvee_n p_{n_{\mathrm{G}}} = (\curlyvee_n p_n)_{\mathrm{G}} \; (resp. \curlyvee_n p_{n_F} = (\curlyvee_n p_n)_F$$

e. *Daca un sir* $(p_n)_n$ *din* $\mathcal{E}^r$ *este specific descrescator atunci pentru orice* $\mathrm{G} \in \tau_d$ *(resp.* $F = \overline{F}$ *) avem*

$$\curlywedge_n p_{n_{\mathrm{G}}} = (\curlywedge_n p_n)_{\mathrm{G}} \; (resp. \curlywedge_n p_{n_F} = (\curlywedge_n p_n)_F$$

Remarca : In conditii mai restrictive, proprietatile restrictiei specifice au fost abordate in multe lucrari. Vom aminti [4], [7], [9], [10], [11], [12].

Paragraful 4 al capitolului 2 se ocupa cu extensia restrictei specifice la $\sigma -$ algebra generata de topologia τ_d. Aceasta prelungire se face in trepte

Pentru algebra $\mathcal{A}(\tau_d)$ generata de τ_d se da urmatoarea

Lema 2.4.1 *pentru orice* $A \in \mathcal{A}(\tau_d)$ *exista un sir crescator* $(F_n)_n$*de multimi inchise in* A *si exista un sir descrescator de multimi deschise* $(G_n)_n$ *care include multimea* A $(F_n \subset A \subset G_n)$ *astfel incat*

$$\curlyvee_n p_{F_n} = \sup_n \; p_{F_n} = \curlywedge_n p_{G_n} = \inf_n \; p_{G_n}$$

Pentru extensia urmatoarea se introduce restrictia specifica inferioarea respectiv restrictia specifica superiorea a elementului $p \in \mathcal{E}^r$, $p < \infty$ *astfel*

$$\underline{p}(A) = \sup\{p_F / F = \overline{F} \subset A\}$$

$$\overline{p}(A) = \inf\{p_D / D \in \tau_d, A \subset D\}$$

unde A este o submultime arbitrara din X.

Are loc urmatoarea

Lema 2.4.2

a. $\underline{p}(A) \leq \overline{p}(A) \quad \forall A \subset X$
b. *Aplicatia* $\overline{p}$ *in multimea functiilor reale pozitive pe X este numarabil subaditiva* $\overline{p}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \overline{p}\,(A_n)$ *pentru orice sirul* $(A_n)_n$ *din* $\mathcal{P}(X)$
c. *Aplicatia* $\underline{p}$ *in multimea functiilor reale pozitive pe X este numarabil superaditiva: pentru orice sirul* $(A_n)_n$ *disjuncte doua cate doua avem* $\underline{p}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \underline{p}\,(A_n)$
d. $\underline{p}(A) + \overline{p}(X \setminus A) = p$ *pentru orice* $A \subset X$
e. *Daca* $p_n \in \mathcal{E}^r$ *si* $p = \sum p_n < \infty$ *atunci* $\underline{p}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \underline{p}_n\,(A), \overline{p}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{p}\,(A)$

Teorema 2.4.3

a. *Daca* $p \in \mathcal{E}^r, p < \infty$ *atunci multimea* $\mathcal{M}_p$ *definita astfel*
$$\mathcal{M}_p = \{A \subset X / \underline{p}(A) = \overline{p}(A)\}$$
este o $\sigma-$*algebra de multimi ale lui* X *si aplicatia*
$$A \to p_A := \underline{p}(A) = \overline{p}(A)$$
este numarabil aditiva

b. *Daca* $p, q \in \mathcal{E}^r,\ p, q < \infty$ *atunci* $\mathcal{M}_{p+q} = \mathcal{M}_p \cap \mathcal{M}_q$ *si pentru orice* $A \in \mathcal{M}_{p+q}$ *avem* $(p+q)_A = p_A + q_A$

c. *Daca* $p_n \in \mathcal{E}$ *si* $p = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \in \mathcal{E}^r, p < \infty$ *atunci* $\mathcal{M}_p = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_{p_n}$ *si pentru orice* $A \in \mathcal{M}_p$ *avem*
$$p_A = \sum_{n=1}^{\infty} p_{n_A}$$

Teorema 2.4.4 *Daca* $p \in \mathcal{E}^r, p < \infty$ *atunci* $\sigma-$*algebra* $\mathcal{B}(\tau_d)$ *generata de topologia* τ_d *este inclusa in* $\mathcal{M}_p$ *si pentru orice element* $A \in \mathcal{B}(\tau_d)$ *avem* $p_A \in \mathcal{E}^r$ *si au loc urmatoarele afirmatii*
$$p_A + p_{X \setminus A} = p,$$
$$p_A = \sup\{p_F / F = \overline{F}, F \subset A\} = \inf\{p_G / G \in \tau_d, A \subset G\}$$

Remarca: Extensia la multimile boreliene a restrictei specifice, in conditii mai restrictive si cu metode diferite se gaseste in lucrari anterioare cu ar fi:
[6] theorem 3.2.12 page 103, [7], [8] theorem 3.4.6 page 92-95

Afirmatia urmatoare da informatia asupra transferului proprietatilor restrictei specifice definite initial pe multimile inchise sau deschise la multimile boreliene in raport cu distanta d.

Crolarul 2.4.5

a. Daca $A, B \in \mathcal{B}(\tau_d)$ *si* $p \in \mathcal{E}^r, p < \infty$ *atunci are loc relatia*
$$(p_A)_B = (p_B)_A = p_{A \cap B} = p_A \curlywedge p_B$$

b. Daca $(p_n)_n \subset \mathcal{E}^r$ *si* $p := \sum_n p_n \in \mathcal{E}^r$*. Atunci pentru orice* $A \in \mathcal{B}(\tau_d)$ *avem*
$$p_A = \sum_{n=1}^{\infty} p_{n_A}$$

Ultimul paragraf trateaza operatia de inmultire specifica dintre functiile pozitive, boreliene , marginite prin care oricare astfel de functii f si oricare element $p \in \mathcal{E}^r, p < \infty$ se asociaza un element regulat notat cu $f.p$ ale carui proprietati sunt descriese astfel

Teorema 2.5.1. *Cu notatiile mai sus definim*
$$(f.p)(x) = \int f dp^x \qquad \forall x \in X$$
unde pentru fiecare $x \in X$ *s-a notat cu* p^x *masura pozitiva pe* $\mathcal{B}(\tau_d)$ *data astfel*
$$p^x(A) = p_A(x)$$

Urmatoarele afirmatii sunt adevarate
Functia $f.p$ *este excesiva, regulata si aplicatia*

$$f \longmapsto f.p$$

defineste un necleu pe $(X, \mathcal{B}(\tau_d))$ *cu principul complet al maximului,* $1.p = p$ *si orice elemente* $s \in \mathcal{E}$ *este dominant in raport cu acest nucleu.*
Mai mult daca $p = \sum_n p_n$ *cu* $p_n \in \mathcal{E}$ *avem*

$$f.p = \sum_n f.p_n \quad \forall f \in pb\mathcal{B}$$
$$f(g.p) = (fg).p \quad \forall f, g \in pb\mathcal{B}$$

Corolar. *Daca* $f_0 > 0$ *este boreliena si* $Vf_0 < \infty$ *atunci pentru orice element regulat* $p \in \mathcal{E}$ *aplicatia*

$$f \xrightarrow{W} f.(p + Vf_0)$$

de la multimea functiilor boreliene pozitive marginite in $\mathcal{E}^r$ *este nucleu initial al unei rezolvente submarkoviene proprii echivalent cu rezolventa initiala* $\mathcal{V}$ *adica*

$$\mathcal{E}_W \equiv \mathcal{E}_{\mathcal{V}}$$

elementul p *este de aceasta data potential in raport cu noua rezolventa.*

Corolar. *Axioma de aproape continuitate este verificata de conul de potentiale* $\mathcal{E}_{\mathcal{V}}$ *daca si numai daca inmultirea specifica definita anterior*

$$(f, p) \longmapsto f.p$$

se poate extinde pentru orice element $p \in \mathcal{E}$ *dominant de un* $\mathcal{V}$ *−potential* .

In capitul 3 este dezvoltata o teorie a integralei Darboux-Stieltjes pentru functii cu valori intr-un spatiu Banach in raport cu functii reale, teorie care extinde la cazul vectorial conceptul introdus in cazul scalar de Bradley R.E [18] si dezvoltat ulterior de Ileana BUCUR [13],[14],[15].

Amintim urmatoare definitie:
Se spune ca function $f : [a, b] \rightarrow E$ (E spatiu Banach) este integrabila in sensul Darboux-Sieltjes (D-S) in raport cu o functia $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ daca exista $I \in E$ astfel incat pentru orice $\epsilon > 0$ exista d_ϵ diviziune a intervalul $[a, b]$ astfel incat

$$\|\sigma(f, g; d, \xi) - I\| < \epsilon$$

pentru orice diviziune d a intervalul $[a, b]$ mai fina decat deviziune d_ϵ si pentru orice sistem ξ de puncte intermediare ale diviziunii d. Elemente I este unic determinat si va fi numit integrala Darboux-Stieltjes a functiei f in raport cu functia g :

$$I = DS \int_a^b f\, dg$$

Propozitia 3.1.4 . *Functia* f *este D-S integrabila in raport cu* g *daca si numai daca exista un sir de divisiuni* $(d_n)_n$ *ale intervalului* $[a, b]$ *astfel incat pentru orice sir* $(d'_n)_n$ *de diviziuni mai fine (i.e.* $d_n \leq d'_n$*) si orice* ξ'_n *sistem de puncte intermediare in diviziunea* d'_n*, pentru orice* n *, sirul sumelor* $(\sigma(f, g; d'_n, \xi'_n))_n$ *converge in spatiul* E.

Criteriul de tip Cauchy. Propzitia 3.1.5 : *Functia f este D-S integrabila in raport cu g daca si numai daca pentru orice $\epsilon > 0$ exista o diviziune d_ϵ a intervalul $[a, b]$ astfel incat*

$$\|\sigma(f, g; d', \xi') - \sigma(f, g; d'', \xi'')\| < \epsilon$$

pentru orice diviziuni d', d'' mai fine decat d_ϵ si pentru orice sisteme ξ', ξ'' de puncte intermediare in diviziunele d', d''.

In paragraful 2 se stabilesc relatii intre cele doua tipuri de integrabilitate: Riemann-Stieltjes si Darboux-Stieltjes

Se constata ca integrabilitatea in sensul Riemann Stieltjes implica integrabilitatea in sensul Darboux-Stieltjes si avem

$$(DS)\int_a^b f\, dg = (RS)\int_a^b f\, dg$$

Un examplu simplu arata ca afirmatia reciproca nu este totdeauna adevarata (**remarca 3.2.2**)

Propozitiile urmatoare arata care este motivul diferentierii celor doua concepte

Propozitia 3.2.3
a. Daca functiile f si g au un punct comun de discontinuitate de aceeasi parte (la dreapta sau la stanga acestui punct) atunci functia f nu este integrabila D-S in raport cu g .
b. Daca functiile f si g au un punct comun de discontinuitate atunci functia f nu este integrabila R-S in raport cu g.

Propozitia 3.2.4 *Daca f este integrabila D-S in raport cu g si functiile f si g nu au nici un punct comun de discontinuitate atunci f este R-S integrabila in raport cu g.*

Corolar 3.2.5. *Daca f este integrabila D-S in raport cu g si una intre functiile f sau g este continua pe $[a, b]$ atunci f este integrabila R-S in raport cu g.*

Rezoltatul urmator arata legatura dintre integrala D-S si integrala Lebesgue.

Propozitia 3.2.7 *presupunem ca functia $g: [a, b] \to \mathbb{R}$ este crescatoare si continua la stanga si notam cu μ_g masura pozitiva pe $\mathcal{B}[a, b]$ pentru care*

$$\mu_g([c, d]) = g(d) - g(c) \;\; \forall c, d \in [a, b] \;\; c < d$$

Daca functia $f: [a, b] \to E$ este marginita si integrabila D-S in raport cu g atunci functia f este Bochner integrabila in raport cu masura μ_g si avem

$$(DS)\int_a^b f\, dg = \int_a^b f\, d\mu_g$$

Propozitia 3.2.8. *da un criteriu de trecere la limita sub inegrala D-S de tip Lebesgue*

In paragraful 3 se arata ca integrabilitatea D-S este ereditara in sensul ca se transfera la orice subinterval $[c,d]$ al intervalului $[a,b]$ si ca are loc aditivitatea ca functie de interval a acestei integrala (Propozitia 3.3.1)

De asemenea formula de simetrie (formula de integrare prin parti) este valabila pentru acest nou tip de integrala (propozitia 3.3.2). Demonstratia acestei afirmatii este departe de a avea simplitatea celei similare pentru integrala R-S.

In finalul acestui capital se da o aplicatie a integralei D-S in descriere dualitatii dintre H-conurile de functii crescatoare $\mathcal{E}$ si descrescatoare $\mathcal{E}^*$ semicontinue pe intervalul $[0,1]$ unde pentru orice $s \in \mathcal{E}$ avem $s(0) = 0$ si pentru orice $s^* \in \mathcal{E}^*$ avem $s^*(1) = 0$. Dualitatea (energia) dintre $\mathcal{E}$ si $\mathcal{E}^*$ este data de formula

$$[s, s^*] = (DS)\int_0^1 s^*\, ds$$

BIBLIOGRAPHY

[1] Benfriha, H., Bucur, I. and Nuică, A. Darboux-Stieltjes calculus on Banach spaces. Bulletin of the Transilvania University of Brasov Series III: Mathematics, informatics, physics, vol5(54)2012, special issue : Proceedings Of The Seventh Congress of the Romanian Mathematicians, 43-54.

[2] Benfriha, H., Bucur, I., Nuică, A. and Vlădoiu, S.: A note on the excessive functions of a resistance form. REV. ROUMAINE MATH. PURES APPL., 54 (2009), 5–6, 407–415

[3] Benfriha, H. and Bucur, I.: Nearly saturation, balayage and fine carrier in excessive structures (will be published soon)

[4] Beznea, L. and Boboc, N.: Once more about the semipolar sets and regular excessive functions. Potential Theory-ICPT 94, Walter de Gruyter 1996, pp. 255-274

[5] Beznea, L. and Boboc, N.: Balayages on excessive measures, their representation the quasi-Lindelöf property. in: Potential Analysis 7 (1997), 805-825.

[6] Beznea, L and Boboc, N.: *Potential Theory and Right Processes*. Springer Series, Mathematics and its Application, Vol. 572. Kluwer, Dordrecht, 2004.

[7] Boboc, N. and Bucur, Gh.: Cones convexes ordonés. Rev. Roum. Math. Pures et Appl. 14, 283-309(1969)

[8] Boboc, N., Bucur, Gh. and Cornea, A.: *H*-cones and potential theory. Ann. Inst. Fourier 25, 71 – 108 (1975)

[9] Boboc, N., Bucur, Gh. and Cornea, A.: Carrier theory and negligible sets on a sets on a standard H-cone of functions. Rev. Roum. Pures Appl. 25 (2), 136-197 (1980)

[10] Boboc, N., Bucur, Gh. and Cornea, A.: Order and convexity in potential theory: H-cones (lectures notes in Math. 853), Springer-Verlag 1981.

[11] Boboc, N., Constantinescu, C. and Cornea, A.: Axiomatic theory of harmonic functions, balayage. Ann. Inst. Fourier (1965), 15, 2, 37-70

[12] Boboc, N., Constantinescu, C. and Cornea, A.: Nonnegative hyperharmonic functions, balayage and natural order. Rev. Roum. Math, Pures et Appl. 13, 933-947 (1968)

[13] Bucur, I. : Some more about Riemann-Stieltjes Integral, Séminaire d'espaces linéaires ordonnés topologiques, 16 (1997)

[14] Bucur, I.: Integrability criterion for Darboux-Stieltjes Integral, Séminaire d'espaces linéaires ordonnés topologiques, 17 (1998)

[15] Bucur, I. Convergence theorem for Darboux-Stieltjes Integral, Hyperion Scientific Journal A (mathematics, Physics and Electrical Engineering), vol.2, 2001

[16] Bliedtner, H. and Hansen, W.: Simplicial cones in potential theory. Invent. math. 29, 83 – 110 (1975)

[17] Bliedtner, H. and Hansen, W.: Simplicial cones in potential theory II. (Approximation theorems). Invent. math. 46, 255 – 275 (1978)

[18] Bradley, R.E.: The Riemann –Stieltjes Integral, Missouri Journal of Math. Sci. 6, 20-28 (1994).

[19] Cornea, A., and Licea, G.: Order and potential. Resolvent families of kernels. Lecture Notes in Math. 454, Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1975

[20] Meyer, P.A.: Probability and potentials. Ginn (Blaisdell), Boston 1966

[21] Mokobodzki, G.: Structure des cônes de potentiels. in : Sem. Bourbaki 377, 1969/1970 (Lecture Notes in Math. 180), Springer Verlag 1971, pp. 239-252

[22] Mokobodzki, G.: Operateurs de subordination des resolvents (manuscript)1983

[23] Hervé, R-M: Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 12 (1962), 415-571