

MEMORIU DE ACTIVITATE GABRIEL BĂDIȚOIU

În 2 iulie 2003, am susținut teza de doctorat “Contribuții la studiul submersiilor Riemann” la Facultatea de Matematică și Informatică a Universității București. Teza a fost realizată sub îndrumarea regretatului Profesor Stere Ianuș, iar titlul de doctor mi-a fost acordat prin ordinul MEC nr. 3876/19.05.2004.

În aprilie 2007, am susținut o altă teză de doctorat cu titlul “Sisteme Integrabile și diagrame Feynman” la Boston University, Departamentul de Matematică și Statistică. Această teza a fost realizată sub îndrumarea Profesorului Steven Rosenberg. Menționez că nu am solicitat recunoașterea oficială de către statul român a doctoratului obținut la Boston.

În cele ce urmează voi face o scurtă prezentare a evoluției mele profesionale și științifice. Astfel voi face o motivare și o descriere a celor mai importante rezultate obținute în publicațiile mele. Participările și prezentările la conferințe și seminarii, sunt indicate succint în Curriculum Vitae. Voi începe cu o motivare a rezultatelor obținute în teza de doctorat de la Boston și în lucrarea mea în colaborare cu Steven Rosenberg din Comm. Math. Phys.

O idee fundamentală în teoria sistemelor integrabile este construcția unei forme de tip Lax, pentru că ecuațiile de tip Lax pot fi adesea rezolvate mai mult sau mai puțin explicit. Pentru că nu există o procedură generală de a obține ecuații de tip Lax, această construcție poate fi făcută caz după caz. Când ecuațiile pot fi interpretate ca fluxuri coadjuncte pe o algebra Lie semisimplă \mathfrak{h} , pentru anumite ecuații din mecanica clasică se pot construi sisteme integrabile Hamiltoniene și forme de tip Lax asociate. Astfel descompunerea Riemann-Hilbert pe grupul de bucle asociat LH dă o soluție a ecuației de tip Lax. În studiul asupra algebrei Hopf construită pentru facilitarea calculelor integralelor Feynman, Connes și Kreimer au obținut independent o descompunere Riemann-Hilbert a grupului de caractere, descompunere dată de regularizarea dimensională a unei teorii de câmp cuantic. Cum lucrarea lor importantă a stârnit interesul multora, este natural să ne întrebăm dacă există un sistem integrabil asociat factorizării Connes-Kreimer-Riemann-Hilbert. Totuși, algebra Lie de caractere infinitezimale din teoria Connes-Kreimer este departe de a fi semisimplă, în fapt este pro-nilpotentă. În teza de doctorat de la Boston, sunt în măsură să rezolv această problemă și să construiesc o ecuație de tip Lax pe algebra Lie a teoriei Connes-Kreimer. Avem două abordări, ambele motivate de algebra Hopf a lui Connes și Kreimer a grafurilor Feynman 1PI. În prima abordare, prin analogie cu

calculul integralelor Feynman facut prin trunchierea până la un anumit număr de bucle, considerăm o trunchiere a algebrei Hopf la o algebra Hopf finit generată si producem o ecuatie de tip Lax pe o bucată finit dimensională. În anumite cazuri (a se vedea exemplul din lucrarea din Comm. Math. Phys), aceste ecuații Lax se dovedesc a fi sisteme integrabile. In cea de-a doua abordare construim ecuații Lax asociate unor aplicații Ad-covariante pe toată algebra Hopf si facem legatura dintre aceste ecuații de tip Lax si fluxul grupului de renormalizare.

Mă voi referi acum la primul caz, cel al trunchierii finit dimensionale. Un element cheie in teoria Connes-Kreimer de renormalizare perturbativă este de a reda metoda Bogoliubov-Parasiul-Hepp-Zimmermann ca o descompunere Birkhoff a grupului de caractere a unei algebre Hopf comutative de diagrame Feynman. Pentru a fi in contextul renormalizarii Connes-Kreimer, să consideram o algebra Hopf comutativă graduată si conexă. Pentru că scopul este de a construi trunchieri finit dimensionale ale algebrei Lie de caractere infinitezimale vom presupune ca algebra este de tip finit. Această presupunere este oricum satisfăcută in exemplele noastre favorite: algebra Hopf de arbori cu radacina si algebra Hopf a grafurilor Feynman 1PI. Algebra Lie trunchiată este cea naturală și evident graduarea ei este cea indusă de graduarea algebrei Hopf. Pentru a produce ecuatia Lax pentru cazul trunchiat, am folosit teorema Adler-Konstant-Symes (AKS). Teorema AKS, cunoscută și ca metoda R-matrice, furnizează o soluție a ecuației de mișcare pentru o R-paranteza Poisson si pentru o funcție Casimir definită pe dualul h^* al unei algebre Lie h , ca o factorizare Riemann-Hilbert. Când algebra Lie finit dimensională h admite o formă Ad-invariantă, simetrică si nedegenerată, putem identifica h^* cu h si ecuația de miscare poate fi scrisă in forma Lax. Cum trunchiatele noastre nilpotente nu admit astfel de forme Ad-invariante, simetrice si nedegenerata, punctul crucial este de a considera algebra Lie dubla D asociată bialgebrei Lie triviale pe h^* (adică suma directă dintre h si h^* si cu paranteza Lie pe h^* abeliana). Algebra Lie de bucle LD a lui D (dată de polinoamele in λ și λ^{-1} cu coeficienti in D) admite o splitare naturala (luând proiectia pe polinoamele in λ^{-1} fără termen liber si proiectia pe polinoamele in λ). Algebra Lie dublă are in mod natural un pairing care se extinde la Algebra Lie de bucle, si din acest motiv putem aplica teorem AKS pe LD. Gasind explicit integralele de miscare, aceasta ecuatie de tip Lax se dovedeste a fi un sistem integrabil in cateva cazuri particulare. Analiza curbei spectrale nu ne este de ajutor pentru a arata integrabilitatea.

Procesul de trunchiere nu se poate aplica caracterului regulilor Feynman, pentru ca acest caracter este o functie meromorfa (nepolinomiala in λ și λ^{-1}), asa ca înțelegerea cazului general era necesară. In timpul vizitei mele de 3 saptamani de la ESI din martie 2009 si apoi in restul vizitei mele de la Max Planck in 2009, am lucrat in continuare impreuna cu Steven Rosenberg ca sa intelegem si cazul general, infinit dimensional. Am considerat o ecuatie de tip Lax asociata unei aplicatii Ad-covariante pe algebra Lie a

caracterelor infinitezimale, și am obținut un rezultat analog teoremei AKS fără a mai avea nevoie de o formă Ad-invariantă, simetrică și nedegenerată (precum în cazul trunchiat, finit dimensional). Cazul trunchiat a fost foarte important pentru intuiție și pentru toate calculele explicite făcute în Mathematica. Pentru a da o interpretare ecuației noastre de tip Lax în termenii unei teorii de câmp cuantic, am studiat proprietatea de localitate a unor fluxuri de caractere asociate ecuației noastre de tip Lax. În teoria de câmp cuantic, caracterele locale sunt de mare interes, pentru că orice caracter local are un renormalizat care satisface ecuația (abstractă a) grupului de renormalizare. Am arătat că proprietatea de a fi local este conservată pentru o soluție a ecuației noastre de tip Lax. Cum referendul de la Comm. Math. Phys. ne-a cerut în mod expres să facem legătura cu fluxul grupului de renormalizare, în cele din urmă am reușit să facem această legătură, și ca bonus am arătat că și funcția beta a teoriei de câmp cuantic și un caracter beta, definit de noi în mod natural, satisface o ecuație de tip Lax.

În timpul vizitei mele de 2 săptămâni de la ESI din iunie 2012, m-am întâlnit cu Profesorul Steven Rosenberg și am continuat să lucrăm împreună asupra ecuațiilor Lax și a bialgebrelor Lie. În particular, într-o lucrare în lucru, încercăm să folosim rezultate ale lui Etingof-Kazhdan pentru a explora proprietățile de functorialitate ale construcției noastre.

Voi face acum o motivare și o descriere a rezultatelor mele din teoria submersiilor Riemann, însă mai întâi voi spune câteva cuvinte despre începuturile carierei mele de matematician. Primii pași în teoria submersiilor Riemann i-am făcut sub îndrumarea regretatului Profesor Stere Ianus cu lucrarea de licență “Clasificarea unor submersii Riemann”, ce conținea o explicație pe încheietură a rezultatelor lui Escobales și Ranjan de clasificare a submersiilor Riemann cu fibre total geodezice de la sfere și spații proiective complexe, și apoi cu lucrarea de dizertație “Submersii Riemann între spații omogene”.

Un prim rezultat de clasificare a submersiilor Riemann este cel obținut în colaborare cu Stere Ianus și publicat în Diff. Geom. Appl. în 2002, unde arătăm că submersiile pseudo-Riemann cu fibre total geodezice de la spațiile pseudo-hyperbolice la varietăți Riemann sunt fibrările Hopf. Deși câteva din demonstrațiile din acest articol se bazează pe ajustarea argumentelor lui Ranjan din cazul Riemann la cel pseudo-Riemannian, este de notat faptul că argumentul lui Ranjan bazat pe sirul lung de omotopie pentru calculul dimensiunii fibrei pentru fiecare posibilitate a spațiului bază nu poate fi de folos și în cazul nostru pseudo-Riemannian, pentru simplul motiv că omotopia spațiului total este egală cu omotopia fibrei, și omotopia spațiului bază este trivială. Această problemă este rezolvată în articol prin calculul dimensiunii unui anumit subspațiu al spațiului tangent pentru fiecare posibilitate a spațiului bază, subspațiu care de fapt este spațiul vectoriilor proprii al operatorului Jacobi pentru valoarea proprie -1 . La acel moment nu realizăm încă rolul pe care urma să-l aibă operatorul Jacobi pentru clasificarea în cazul general.

In articolul din Tohoku 2004, obtin clasificarea submersiilor pseudo-Riemann cu fibre total geodezice de la spatii real pseudo-hiperbolic la varietati pseudo-Riemann in ipoteza ca fie (i) fibrele sunt de dimensiune mai mică sau egală cu 3 si metricile induse pe fibre sunt negative definite, fie (ii) spațiul baza este isotropic (in sensul lui Wolf). Ca o consecinta obtin și clasificarea submersiilor pseudo-Riemann de la spatii pseudo-hiperbolic complexe si cu fibrele subvarietati complexe si total geodezice. De asemenea, arat ca (i) implica (ii). Ipoteza asupra dimensiunii fibrelor este intr-advar una ad-hoc pentru simplificarea calculelor si asa destul de laborioase. Constructia unei baze cu proprietati bune a distributiei orizontale de-al lungul unei fibre este elementul cheie din acest articol. Toate calculele tin de modul specific in care este construita aceasta baza de vectori bazici. Aceasta lucrare a fost prezentata la o conferinta de foliatii la Varsovia in 2000, la Boston University in seminarul de geometrie al doctoranzilor in 2003 si la seminarul de geometrie la Universitatea Arizona in 2007.

In cazul Riemannian, fara a face nici o presupunere asupra total-geodezicitatii fibrelor, Gromoll-Grove si Wilking au aratat ca submersiile Riemann de la sfere sunt echivalente cu o fibrare Hopf. In cazul pseudo-Riemann, situatia este complet diferita; este cunoscut ca spatiul pseudo-hiperbolic se poate scrie ca un produs warped dintre spatiul hiperbolic si o sfera. Astfel pentru orice dimensiune a spatiului total se obtin submersii pseudo-Riemann cu fibrele total ombilicale (care nu sunt total geodezice) si cu distributia orizontala integrabilă. In acest context, problema studiului submersiilor pseudo-Riemann cu fibre total ombilicale a aparut ca un pas necesar pentru o eventuala extindere a clasificarii submersiilor pseudo-Riemann.

Intrucat nu am reusit sa obtin o clasificare a submersiilor pseudo-Riemann cu fibre total ombilicale de la spatii pseudo-hiperbolic, in lucrarea mea din Math. Reports 2004, arat un rezultat global intr-un caz particular; si anume, o submersie pseudo-Riemann de la un spatiu pseudo-hiperbolic cu fibre total ombilicale si complete, cu distributia orizonatala integrabila are baza izometrică cu un spatiu hiperbolic; fibrele sunt homotetice cu sfere, si spatiul total este izometric cu un produs warped, iar functia cu care se face produsul warped e dată explicit si depinde de submersia data.

In lucrarea in colaborare cu Stere Ianus, din Rend. del Circolo Matematico di Palermo 2002, aratam ca submersiile Riemann cu fibrele total ombilicale, de dimensiune mai mare sau egala decat 2, cu curbura fibrelor ne-nula in toate punctele, definite pe varietati pseudo-Riemann cu curbura sectionala constanta sunt, in fapt, submersii Clairaut pseudo-Riemann (aici generalizam notiunea de submersie Clairaut Lorentziana aparuta intr-o lucrare a lui Allison). Se obtin si alte caracterizari ale submersiilor pseudo-Riemann cu fibrele ombilicale.

In lucrarea mea in colaborare cu Richard Escobales si Stere Ianus, consideram o foliatiie F transvers orientata pe o varietate Riemann si dam o conditie necesara si suficienta pentru ca $\kappa \wedge \chi_F$ sa fie armonica, unde κ este 1-forma curbura medie si χ_F este forma caracteristica a foilor lui F . Cazul foliatiilor bundle-like cu foi total ombilicale este studiat in detaliu.

In lucrarea recenta din Bull. Math. Soc. Sci. Math. Romania in colaborare cu Stere Ianus si Ana Maria Pastore, obtinem o caracterizare geometrică a foliatiilor izospectrale minimale Legendre pe o varietate compacta Sasaki cu curbura φ -sectional constanta. In final lucrării, calculam invariantii spectrali analizati in lucrare pentru sfera 3-dimensională cu foliatiia Legendre din Teza de doctorat a lui Jayne, si aratam ca nu exista foliatiie Legendre cu toate foile minimale pe sferile 5 si 7-dimensionale.

In lucrarea din Proc. London. Math. Soc., obtin clasificarea submersiilor cu fibre total geodezice de la un spatiu pseudo-hiperbolic la o varietate pseudo-Riemann, aratand ca aceste submersii sunt, in fapt, echivalente cu submersiile pseudo-Riemann Hopf. Elementul cheie al demonstratiei consta in a arata, cu ajutorul bazei speciale construita in lucrarea din Tohoku, ca baza este izometrica fie cu un spatiu cu curbura constanta, fie e un spatiu Osserman special, simplu conex, complet. Cum spatiile Osserman speciale, simplu conexe, complete au fost clasificate de Bonome-Castro-Gracia Rio-Helvella-Vasquez Lorenzo, obtinem astfel geometria spatiului baza. Pentru a exclude planurile octonionice din aceasta lista aratam ca tensorul de curbura al spatiului baza are o structura Clifford. Ca o consecinta a teoremei de clasificare obtinem si clasificările de la spatii pseudo-hiperbolicе complexe cand fibrele sunt varietati complexe total geodezice, sau spatii proiective para-complexe cand fibrele sunt varietati para-complexe total geodezice. În mai 2013, la conferinta de la Constanta a tinerilor cercetatori, am prezentat rezultatele din aceasta lucrare.

Dintr-o lucrare a lui Ziller din 1982, este cunoscut faptul ca toate metricile Einstein omogene pe sfere si spatiile proiective sunt de fapt metricile Einstein ale variatiilor canonice ale submersiilor Hopf. In cel mai recent preprint, demonstrez ca acelasi lucru este valabil si in cazul pseudo-Riemann, mai exact arat ca o metrica Einstein G -omogena pe un spatiu pseudo-hiperbolic real, complex sau cuaternionic, sau pe un spatiu proiectiv para-complex or para-cuaternionic este omotetica fie cu o metrica canonica, fie cu o metrica Einstein a variatiei canonice a unei submersii pseudo-Riemann Hopf, in ipoteza ca G este un subgrup conex și închis al grupului indefinit special ortogonal. Spre deosebire de cazul Riemann tratat de Ziller, dificultatea problemei in pseudo-Riemannian, consta în ne-existentia unei clasificari anterioare a grupurilor Lie G , ca mai sus, cu actiune tranzitiva si efectiva pe multimile de mai sus. Se cunoasteau doar unele cazuri particulare. Dintr-o lucrare a lui Onishchik din 1969 se stiu grupurile semisimple G , iar dintr-o lucrare a lui Wolf din 1964 se cunosc grupurile G care actioneaza tranzitiv simultan atat pe un hiperboliod nedegenerate cat si pe unul degenerat. Stabilind aceasta clasificare a grupurilor

transitive și efective pe spații pseudo-hiperbolice (adică pe hiperboloizi ne-degenerați), arată apoi că sunt satisfăcute condițiile care permit stabilirea unei T-dualități între spațiile rezultate din clasificarea noastră și analogele lor compacte, și apoi dintr-un rezultat datorat lui Kath, avem o corespondență bijectivă dintre metricile Einstein omogene pe spațiile noastre și dualele lor compacte. Din rezultatul lui Ziller rezultă că și în cazul pseudo-Riemannian toate metricile Einstein G-omogene sunt fie cele canonice, fie cele date de variația canonică a submersiilor Pseudo-Riemann Hopf.

12.09.2013,

București