# CURRICULUM VITAE

Cristian Bereanu

## 1 Studii efectuate

• Mai 2013
Abilitare, Institutul de Matematica "Simion Stoilow" al Academiei Romane.
Titlul tezei: Boundary value problems with $\phi$-Laplacians.
Comisia: C. LEFTER (presedinte), G. MOROSANU, A. PETRUSEL.

• Decembrie 2006
Doctorat in Matematica, Université catholique de Louvain.
Titlul dizertatiei: Topological degree methods for some nonlinear problems.
Memebrii juriului: J. MAWHIN (conducator), P. HABETS (presedinte), M. WILLEM, C. FABRY, G. DINCA, F. ZANOLIN.

• Februarie 2002
Masterat, Universitatea din Bucuresti, coordonator G. DINCA.
Dizertatia: Metode topologice si variationale in studiul unor clase de ecuatii neliniare.

• Iunie 2000
Licenta in matematica, Universitatea din Bucuresti, coordonator R. CRISTESCU.
Lucrarea de licenta: Reprezentari integrale ale unor operatori liniari.

## 2 Experienta profesionala

• Septembrie 2002 - Septembrie 2008
**Asistent** - Departamentul de Matamatica, Univ. catholique de Louvain.

• Octombrie 2008 - prezent
**Cercetator stiintific (C.S.)** - Institutul de Matematica "Simion Stoilow" al Academiei Romane.

## 3 Granturi ca director

• Octombrie 2011 - Octombrie 2014
"Critical point theory and degree theory for relativistic Laplacians", PN II / RU - TE - 2011 - 3 - 0157, 750 000 RON.

• Septembrie 2011 - Februarie 2012
GENIL grant YTR-2011-7 (Spain), 12 000 EURO.

• Iunie 2009 - Iunie 2011
"Topological and variational methods in the study of some discrete or continuous boundary value problems", PN II / RP-3/2008, 430 000 RON.

# 4 Premii

Premiul "Gheorghe Titeica" al Academiei Romane pe anul 2010.

# 5 Vizite stiintifice

1. Sep 2011-Feb 2012, Universidad de Granada, Spain.
2. Nov, 22-30, 2010, Universidad de Granada, Spain.
3. Oct 25 2010 - Nov 05 2010, West University, Timisoara.
4. Nov 18 2009 - Dec 02 2009, Univ. catholique de Louvain, Belgium.
5. Oct 25 2009 - Nov 07 2009, West University, Timisoara.
6. Mar, 27-30, 2008, West University, Timisoara.
7. Mar, 26-30, 2007, Universidad de Granada, Spain.

# 6 Expuneri

1. August 29th - September 1st, 2013, Anniversary Conference Faculty of Sciences - 150 years, "Dirichlet Problems with the Mean Curvature Operator in Minkowski Space", Bucuresti, Romania.
2. August 26-30, 2013, Equadiff 13, "Dirichlet Problems with the Mean Curvature Operator in Minkowski Space", Praga, Cehia.
3. June 27-30, 2013, Joint International Meeting of the American Math. Society and the Romanian Math. Society, "Variational methods for the relativistic pendulum", Alba Iulia, Romania.
4. 09-10 May, 2013, Workshop for Young Researchers in Mathematics, 'Dirichlet Problems with the Mean Curvature Operator in Minkowski Space", Constanta, Romania.
5. Feb 7, 2012, "Positive radial solutions for Dirichlet problems with mean curvature operators in Minkowski space", Universidad de Granada, Spain.
6. Sep 20, 2011, "Multiple solutions for periodic problems with singular $\phi$-Laplacians", Universidad de Granada, Spain.
7. Nov 25, 2010, "Szulkin critical point theory for nonlinear perturbations of singular $\phi$- Laplacians", Universidad de Granada, Spain.
8. Oct 26, 2010, "Periodic solutions of pendulum like perturbations of singular and bounded $\phi$- Laplacians", West University, Timisoara.
9. Oct 14-17, 2010, Colloquium on Differential Equations and Integration Theory, "Periodic solutions of pendulum like perturbations of singular and bounded

$\phi$- Laplacians", Krtiny, Czech Republic.
10. Aug 26-31, 2010, 10-eme Colloque Franco-Roumain, "Periodic solutions of pendulum like perturbations of singular and bounded $\phi$- Laplacians", Poitiers, France.
11. Nov 20, 2009, "Periodic solutions of nonlinear telegraph equations", Univ. catholique de Louvain, Louvain la Neuve, Belgium.
12. Nov 5-7, 2009, The 12th Symposium of Mathematics and its Applications, "Periodic solutions of nonlinear telegraph equations", Timisoara.
13. May 14-17, 2009, Romanian-German Symposium on Mathematics and its Applications, "Periodic solutions of nonlinear telegraph equations", Sibiu.
14. Apr 8, 2009, "Grad topologic, probleme neliniare cu $\phi$-Laplacieni si aplicatii in dinamica populatiilor, geometrie si relativitate", conferinta lunara IMAR, Bucuresti.
15. Sep 10, 2008, Nonlinear Differential Equations, "Leray-Schauder degree for some nonlinear problems with $\phi$-Laplacian", invited speaker, Belgium.
16. Jul 3, 2007, Al 6-lea Congres al matematicienilor romani, "Some applications of Mawhin continuation theorem", Bucuresti.
17. Sep 4, 2006, International Confference on Applied Analysis and Differential Equations, "Boundary value problems with $\phi$-Laplacian", Iasi.

# 7 Rezultate semnificative

## 7.1 Probleme Dirichlet cu operatorul curburii medii in spatiul Minkowski

Fie $M$ o varietate de codimensiune unu in spatiul Minkowski si presupunem ca $M$ este graficul unei functii netede $v : \Omega \to \mathbb{R}$ cu $\Omega$ un domeniu in $\{(x,t) : x \in \mathbb{R}^N, t = 0\} \simeq \mathbb{R}^N$. Avem $|\nabla v| < 1$, si curbura medie $H$ in punctul $(x, v(x))$, $x \in \Omega$ verifica ecuatia

$$\mathcal{M}v := \operatorname{div}\left(\frac{\nabla v}{\sqrt{1-|\nabla v|^2}}\right) = NH(x,v) \quad \text{in} \quad \Omega.$$

Studiul solutiilor intregi (adica $\Omega = \mathbb{R}^N$) a fost initiat in articolele Cheng, Yau *(Ann. Math. 104 (1976))* si Treibergs *(Invent. Math. 66 (1982))*. Daca $H$ continua, $\Omega$ marginit si verifica unele conditii de regularitate, atunci se arata in Bartnik, Simon *(Comm. Math. Phys. 87 (1982-83))* ca ecuatia de mai sus are cel putin o solutie $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap W^{2,2}(\Omega)$ cu $u = 0$ pe $\partial\Omega$. Solutia se obtine prin maximizarea functionalei nenetede asociate problemei. Norma din spatiul Sobolev $H_0^1(\Omega)$ este inlocuita cu masura Minkowski $u \mapsto \int_\Omega \sqrt{1-|\nabla u|^2}$, pusa in evidenta in Flaherty *(Proc. Natl. Acad. Sci. USA 76 (1979))*.

- C. Bereanu, P. Jebelean, P.J. Torres, Positive radial solutions for Dirichlet problems with mean curvature operators in Minkowski space, **J. Functional Analysis** 264 (2013) 270-287.

In prima parte a acestui articol studiem, utilizand gradul Leray-Schauder, problema Dirichlet

$$\mathcal{M}v + f(|x|, v) = 0 \quad \text{in} \quad \mathcal{B}(R), \quad v = 0 \quad \text{pe} \quad \partial\mathcal{B}(R), \tag{1}$$

unde $\mathcal{B}(R) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < R\}$ si $f : [0, R] \times [0, \alpha) \to \mathbb{R}$ este o functie continua, pozitiva pe $(0, R] \times (0, \alpha)$. Aratam ca (1) are cel putin o solutie radiala si pozitiva in conditiile in care $f$ este superliniara in 0 in raport cu $\phi(s) = s/\sqrt{1-s^2}$, adica

$$\lim_{s \to 0} \frac{f(r, s)}{s} = \infty \quad \text{uniform in raport cu} \quad r \in [0, R] \tag{2}$$

si $R < \alpha$. In particular, daca $0 \le q < 1 \le p$ si $\lambda > 0$, atunci problema

$$\mathcal{M}v + \lambda v^q + v^p = 0 \quad \text{in} \quad \mathcal{B}(R), \quad v = 0 \quad \text{pe} \quad \partial\mathcal{B}(R),$$

are cel putin o solutie radiala pozitiva pentru orice $R > 0$. In cazul clasic, utilizand metoda sub si supra solutiilor, a fost aratat de catre Ambrosetti, Brezis si Cerami *(J. Functional Analysis 122 (1994))* ca problema

$$\Delta v + \lambda v^q + v^p = 0 \quad \text{in} \quad \mathcal{B}(R), \quad v = 0 \quad \text{pe} \quad \partial\mathcal{B}(R),$$

admite solutie pozitiva daca si numai daca $0 < \lambda \le \Lambda$ pentru un anume $\Lambda > 0$ $(0 < q < 1 < p)$.

Cand $\alpha = R = 1$, (2) este satisfacuta si $f$ este subliniara in 1 in raport cu $\phi(s) = s/\sqrt{1-s^2}$, adica

$$\lim_{s \to 1-} \sqrt{1-s^2} f(r, s) = 0 \quad \text{uniform in raport cu} \quad r \in [0, 1], \tag{3}$$

aratam deasemenea ca (1) are cel putin o solutie radiala si pozitiva. Conditia (2) a fost foarte mult utilizata in legatura cu existenta solutiilor radiale pozitive pentru ecuatii eliptice semiliniare Hai *(Proc. Royal Soc. Edinburgh 140A (2010))* si Wang *(J. Differential Eq. 109 (1994))*. Astfel, in cazul operatorului $p$-Laplacian, pentru care $\phi_p(s) = |s|^{p-2}s$, in general, pentru a se arata existenta solutiilor pozitive, conditia (2) este considerata impreuna cu subliniaritatea lui $f$ la infinit in raport cu $\phi_p$

$$\lim_{s \to \infty} \frac{f(r, s)}{s^{p-1}} = 0 \quad \text{uniform in raport cu} \quad r \in [0, R]. \tag{4}$$

In situatia noastra, $\phi(s) = s/\sqrt{1-s^2}$ si (4) este in mod natural inlocuita cu (3). Subliniem ca, atunci cand $R < \alpha$ ($f$ poate fi singulara in $\alpha$ dar $\alpha$ trebuie sa fie mare), conditia (2) este suficienta pentru a asigura existenta solutiilor radiale pozitive pentru (1).

In cea de a doua parte a acestei lucrari studiem, utilizand teoria punctului critic in sens Szulkin *(Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 3 (1986))*, probleme Dirichlet de tipul

$$\mathcal{M}v + \mu(|x|)p(v) = 0 \quad \text{in} \quad \mathcal{B}(R), \quad v = 0 \quad \text{pe} \quad \partial\mathcal{B}(R), \tag{5}$$

unde $\mu : [0,R] \to \mathbb{R}$ este continua, pozitiva pe $(0,R]$ si $p : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ este continua cu $p(0) = 0$ si $p(s) > 0$ pentru orice $s > 0$. Aratam ca, daca

$$R^N < N \int_0^R r^{N-1}\mu(r)P(R-r)dr,$$

unde $P$ este primitiva lui $p$ cu $P(0) = 0$, atunci problema (5) are cel putin o solutie radiala pozitiva. In consecinta, problema

$$\mathcal{M}v + v^q + \lambda u = 0 \quad \text{in} \quad \mathcal{B}(R), \quad v = 0 \quad \text{pe} \quad \partial\mathcal{B}(R),$$

are cel putin o solutie clasica radiala pentru orice $q \geq 1, \lambda > 0$ astfel incat

$$1 < \lambda \frac{R^2}{(N+1)(N+2)} + R^{q+1}\frac{\Gamma(q+1)N!}{\Gamma(N+q+2)}.$$

In cazul clasic al Laplacianului se arata in Brezis, Nirenberg *(Comm. Pure Appl. Math. 36 (1983))* ca problema

$$\Delta v + v^{\frac{N+2}{N-2}} + \lambda v = 0 \quad \text{in} \quad \mathcal{B}(R), \quad v = 0 \quad \text{on} \quad \partial\mathcal{B}(R), \quad (N \geq 4)$$

admite cel putin o solutie pozitiva radiala daca $\lambda > 0$ suficient de mic.

- C. Bereanu, P. Jebelean, P.J. Torres, Multiple positive radial solutions for a Dirichlet problem involving the mean curvature operator in Minkowski space, **J. Functional Analysis** 265 (2013) 644-659.

In acest articol studiem, utilizand gradul Leray-Schauder si metoda sub si supra solutiilor, problema la limita Dirichlet

$$\mathcal{M}v + \lambda\ [\mu(|x|)v^q] = 0 \quad \text{in} \quad \mathcal{B}(R), \quad v = 0 \quad \text{pe} \quad \partial\mathcal{B}(R), \tag{6}$$

unde $\lambda > 0$ este parametru, $q > 1$, $R > 0$, $\mu : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ este continua si strict pozitiva pe $(0,\infty)$. Utilizand rezultatul demonstrat in partea a doua a lucrarii descrise mai sus rezulta ca problema (6) are cel putin o solutie radiala pozitiva daca $\lambda$ este suficient de mare. In aceasta lucrare demonstram ca exista $\Lambda > 0$ astfel incat (6) are zero, cel putin una sau cel putin doua solutii radiale pozitive dupa cum $\lambda \in (0,\Lambda)$, $\lambda = \Lambda$ sau $\lambda > \Lambda$. In plus, $\Lambda$ este strict descrescatoare in raport cu $R$. Pentru $\mu = 1$, cazul euclidian se poate consulta in Clément, Manásevich, Mitidieri *(J. Differential Eq. 124 (1996))* si Coffman, Ziemer *(SIAM J. Math. Anal. 22 (1991))*.

## 7.2 Pendulul relativist

Ecuatia pendulului fortat clasic cu conditii periodice este

$$u'' + \mu \sin u = h(t), \qquad u(0) - u(T) = 0 = u'(0) - u'(T),$$

unde $T, \mu > 0$ si $h : [0,T] \to \mathbb{R}$ continua. G. Hamel *(Math. Ann. 86 (1922))*, utilizand metoda directa a calculului variational, arata ca problema de mai sus admite cel putin o solutie daca $h$ are media $\overline{h} := \frac{1}{T}\int_0^T h$ nula. Dupa sase decenii Mawhin si Willem *(J. Differential Eq. 52 (1984))* arata, utilizand o generalizare a teoremei “Mountain Pass”, existenta unei a doua solutii geometric distincta (ce nu difera printr-un multiplu de $2\pi$) de cea gasita de Hamel prin minimizare. O demonstratie alternativa a acestui rezultat a fost data de catre Franks (*Ann. Math. 128 (1988)* cu erata in *Ann. Math. 164 (2006)*) utilizand o generalizare a teoremei de punct fix Poincaré - Birkhoff.

In stransa legatura cu pendulul clasic (newtonian) se afla ecuatia lui Tricomi *(Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 2 (1933))*

$$u'' + cu' + \mu \sin u = h(t), \qquad u(0) - u(T) = 0 = u'(0) - u'(T),$$

cu $c > 0$ si $T, \mu, h$ ca mai sus. O intrebare naturala este urmatoarea: ramane rezultatul lui Hamel (ori mai general, cel al lui Mawhin-Willem) valabil si pentru ecuatia Tricomi ? Raspunsul este negativ si a fost dat de catre Ortega, Serra si Tarallo (*Proc. Amer. Math. Soc. 128 (2000)*). Mai precis, se demonstreaza ca pentru orice constante strict pozitive $c, \mu, T$ exista $h$ de medie nula astfel incat ecuatia Tricomi nu admite solutii.

Pe de alta parte, in cazul pendulului fortat relativist, Torres (*Commun. Contemp. Math. 13 (2011)*) si Bereanu-Jebelean-Mawhin *(J. Dynam. Differ. Eq. 22 (2010))* arata ca raspunsul la intrebarea de mai sus este cel putin partial adevarat. Mai precis, utilizand teorema de punct fix a lui Schauder, Torres arata ca problema periodica

$$\left(\frac{u'}{\sqrt{1-u'^2}}\right)' + cu' + \mu \sin u = h(t), \quad u(0) - u(T) = 0 = u'(0) - u'(T)$$

are cel putin doua solutii geometric distincte pentru orice $c, \mu > 0$, $h$ cu $\overline{h} = 0$ si $T < 2\sqrt{3}$. Rezultatul a fost generalizat in Bereanu-Jebelean-Mawhin, utilizandu-se gradul Leray-Schauder. Mai precis, s-a inlocuit conditia asupra perioadei cu urmatoarea: $T < \pi\sqrt{3}$. In plus, am arata ca daca $T = \pi\sqrt{3}$, avem asigurata existenta a cel putin o solutie. Pentru cazul $c > 0$, Cid si Torres *(Discrete Cont. Dynam. Syst. 33 (2013))*, utilizand metoda estimarii a priori a lui Leray-Schauder, au aratat existenta a cel putin doua solutii sub ipoteza alternativa

$$2(\max H - \min H) + 2T\mu < c\pi,$$

unde $H$ este primitiva lui $h$ nula in origine.

Motivati de rezultatele de mai sus, Brezis si Mawhin *(Differential Integral Eq. 23 (2010))* au aratat ca rezultatul lui Hamel in cazul relativist ramane adevarat. Au utilizat in mod esential tehnici de minimizare pentru functionale nenetede. Demonstratii alternative ale acestui rezultat au fost date in articolele Bereanu, Jebelean, Mawhin *(Rend. Lincei Mat. Appl. 22 (2011))* si Manasevich, Ward *(Proc. Amer. Math. Soc. 140 (2012)).* In articolul Bereanu, Torres *(Proc. Amer. Math. Soc. 140 (2012))* se arata rezultatul Mawhin-Willem in contextul relativist, generalizandu-se astfel rezultatul mai sus mentionat datorat lui Brezis si Mawhin.

Pendulul $N$-dimensional clasic a fost tratat in Rabinowitz (*Trans. Amer. Math. Soc. 310 (1988)*), Mawhin (*Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire 6 (1989)*) si Felmer (*J. Differential Eq. 98 (1992)*). Analogul relativist este considerat in Mawhin (*Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. A 32 (2012)*) si Bereanu, Jebelean (*Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. A 33 (2013)*). Categoria Lusternik-Schnirelman este instrumentul principal in ambele cazuri.