Domeniul meu de cercetare este in teoria numerelor, mai precis teoria formelor modulare si a reprezentarilor automorfe. Am lucrat la trei teme de cercetare, legate toate de grupul modular.

I. Valori centrale de L-functii automorfe

In [1], care este bazata pe teza mea de doctorat la Harvard University, sub conducerea lui Benedict Gross, am tratat L-functia Rankin asociata unei forme modulare de pondere $k \geq 0$ si de nivel N, si unui caracter χ al grupului restrans de clase H_K al unui corp patratic real K. Cadrul natural pentru definirea si studiul acestei L-functii este teoria reprezentarilor automorfe: formei modulare f ii este asociata o reprezentare adelica π_f a lui $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})/\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$, cu $\mathbb{A}$ adelele corpului $\mathbb{Q}$, si caracterul χ induce la randul sau on reprezentare diedrala π_χ a lui $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})/\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$. Unei astfel de perechi de reprezentari, Jaquet and Langlands asociaza L-functia $L(s, \pi_f \times \pi_\chi)$, care are un produs Euler in care aproape toti factorii Euler la primele p au grad 4 in p^{-s}, si care satisface o ecuatie functionala intre valorile la s si $1-s$.

Rezultatul principal din [1] presupune anumite restrictii asupra lui d_K si N, si enunta o formula explicita pentru valoarea centrala

$$L(1/2, \pi_f \times \pi_\chi) = \frac{\beta}{d_K^{k-1/2}} \left| \sum_{\mathfrak{a} \in H_K} \chi^{-1}(\mathfrak{a}) \int_{\gamma_\mathfrak{a}} f(z) Q_\mathfrak{a}(z,1)^{k-1} dz \right|^2$$

unde suma este peste ideale $\mathfrak{a}$ in grupul restrans de clase de ideale H_K, $Q_\mathfrak{a}(x,y)$ este o forma patratica Heegner de discriminant d_K asociata cu $\mathfrak{a}$ de catre Gauss, and γ_a este of segment de geodezica primitiva pe geodezica din semiplanul superior care uneste radacinile de pe axa reala ale polinomului patratic $Q_\mathfrak{a}(x,1)$. Constanta $\beta = 4$ in afara de cazul $k = 0$ (adica f este of forma Maass) cand $\beta = 2$. Demonstratia foloseste tehnici de teoria reprezentarilor automorfe, ca de exemplu reprezentarea Weil, corespondenta the Jacquet-Langlands si identitatea “leagan” a lui Kudla.

Aceasta formula are importante consecinte aritmetice si analitice. Pe partea aritmetica, a fost folosita de Bertolini si Darmon (Annals of Math., 2009) pentru a defini of L-functie p-adica in doua variabile care interpoleaza valoarile centrala $L(1/2, \pi_f \times \pi_\chi)$. Pe partea analitica, rata de crestere a valorii centrale cand discriminantul d_K tinde la infinit poate fi controlata prin inegalitati de subconvexitate datorate lui Harcos si Michel (Invent. Math. 2006), ceea ce duce la un rezultat de echidistributie pentru geodezicele $\gamma_\mathfrak{a}$ care apar in formula. Astfel obtinem o generalizare a unui rezultat al lui Duke (Invent. Math. 1988), aratand nu numai ca toate geodezicele $\{\gamma_a\}_{a \in H_K}$ devin echidistribuite cand $d_K \to \infty$, dar si geodezicele individuale “lungi” devin deasemenea echidistribuite. Acest result prezinta interes si cercetatorilor de la intersectia teoriei sistemelor dinamice cu teoria numerelor, ca in lucrarile lui Einsiedler, Lindenstrauss (medaliat Fields recent), Michel, Venkatesh (Duke Math. J. 2009, Annals of Math. 2011), care nu pot demonstra prin metode de teorie ergodica echidistributia geozicelor “lungi.”

O problema conexa pe care o rezolvam in [2] este determinarea vectorilor sferici pentru reprezentari ale lui $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, o problema lasata deschis de lucrarea de referinta a lui Jacquet si Langlands, "Automorphic forms on GL(2)". Abordarea noastra prezinta interes si prin faptul ca tratam in mod uniform determinarea vectorilor sferici atat in cazul arhimedean cat si in cel nearhimedean, urmand o sugestie a lui B.H. Gross. Calculul explicit al vectorilor sferici a gasit aplicatii in lucrari recente din domeniu (citate in lista de publicatii).

II. Perioade de forme modulare

In [4], impreuna cu V. Pasol construim o theorie a polinoamelor de perioade pentru forme modulare pentru subgrupuri de index finit in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, generalizand ce se stia in cazul grupului modular prin lucrarea lui Kohnen and Zagier, "Modular forms with rational periods" (1984). Pe langa spatiul polinoamelor de perioade asociat formelor cuspidale, introducem spatiu de polinoame de perioade (extinse) asociate formelor Eisenstein, si demonstram ca produsul scalar Petersson extins la spatiul tuturor formelor modulare se poate exprima ca o asociere pe spatiul polioamelor de perioade (extinse). Astfel generalizam of formula demonstrata pentru $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ de catre Haberland (1983) si Kohnen and Zagier (1984), si imbunatatita intr-o lucrare precedenta a candidatului [3]. Printre rezultatele din [4] mentionam:

1. o teorie a operatorilor Hecke pe spatiul de polinoame de perioade extins,
2. formule explicite pentru coeficientii Fourier al unei form proprii pentru operatorii Hecke in functie de polinomul ei de perioade,
3. calculul numeric al polinoamelor de perioade,
4. determinarea explicita a inversei aplicatiei Eichler-Shimura, si
5. determinarea relatiilor suplimentare satisfacute de polinoamle de perioade ale formelor cuspidale, determinate de Kohnen si Zagier pentru $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

In [5], impreuna cu V. Pasol dam o demonstratie algebrica a unei relatii satisfacute de operatorii Hecke care actioneaza pe polinoamele de perioade, si care este o reflectia a echivariantei Hecke a asocierii pe spatiul de polinoame de perioade care care corespunde produsului Petersson pe formele modulare. Ca o consecinta neasteptata a acestei demonstratii, am descoperit doua serii theta asociate unei forme patratice indefinite, care pot fi vazute ca analoage ale seriei theta Jacobi asociate formei definite suma de patru patrate. Ca o aplicatie elementara, obtinem ca daca $p > 2$ este un numar prim, numarul de solutii intregi ale ecuatii

$$x^2 + z^2 - y^2 - t^2 = p, \text{ cu } x, z > |y|, |t|,$$

este exact $p-3$. Acesta poate fi vazut ca un analog al rezultatului lui Jacobi despre numarul de reprezentari ale unui intreg pozitiv ca suma de patru patrate.

In [6], impreuna cu V. Pasol definim o extindere naturala a produsului Petersson la intreg spatiul de forme modulare pentru $\Gamma_1(N)$, de pondere $k \geq 2$. Aratam ca aceast produs Petersson extins este nedenerat cand $k \geq 3$, dar poate fi degenerat cand $k = 2$. Acest rezultat fundamental are consecinte in teoria polinoamelor de perioade ale formelor modulare din [4], generalizand un result al lui Zagier obtinut pentru $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ (J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 1981).

In timpul lucrului la aceste lucrari am beneficiat de conversatii cu Don Zagier in cadrul vizitelor intreprinse la Institutul Max Planck Institute din Bonn (in 2008, 2010, 2012, si 2013). In prezent lucrez la doua lucrari in colaborare cu Don Zagier:

1. O demonstratie elementara a formulei de urma Eichler-Selberg pentru urma operatorilor Hecke pe spatiul de forme modulare pentru intreg grupul modular. Demonstratia se bazeaza pe proprietati ale operatorilor Hecke pe spatiul de polinoame de perioade, si isi are originea intr-o idee a lui Don Zagier din 1992, pe care o facem mai precisa in aceasta lucrare.

2. O generalizare a metodei precedente pentru a obtine formule de urme pentru o clasa larga de operatori dati de coseturi duble, actionanat pe forme modular pentru subgrupuri de congruenta. In aceasta lucrare folosim teoria polinoamelor de perioade din [4]. Pentru $\Gamma_0(N)$, obtinem cele mai simple formule de urma din literatura pentru Hecke si Atkin-Lehner operators, fara a presupune nici o restrictie asupra indicelor operatorilor implicati.

III. 2-corelatia unghiurilor din latici hiperbolice

O problema de interes larg in teoria numerelor este statistica diverselor siruri, asociate in mod frecvent unor probleme geometrice. De exemplu, o conjectura surprinzatoare a lui Montgomery (Proc. Symp. Pure Math. 1973), demonstrata partial de Rudnick si Sarnak (Duke Math. J. 1996), este ca zerourile functie zeta a lui Riemann pe dreapta critica au aceleasi statistici locale ca cele provenind din Ansamblul Unitar Gaussian din teoria matricilor aleatoare. Diferentele locale intr-un sir de numere–diferentele consecutive sau n-corelatiile–sunt masuri mai fine ale regularitatii distributiei lor in intervale mici decat a sti ca sunt uniform distribuite. Spre deosebire de distributia uniforma, care poate fi stabilita prin tehnici binecunoscute ca de exemplu criteriul lui Weyl, gasirea statisticilor diferentelor locale in secvente care apar natural este o problema dificila, iar tehnicile de abordare sunt variate. De exemplu, Elkies si McMullen (Duke Math. J. 2004) calculeaza distributia diferentelor consecutinve in sirul partilor fractionare $\{\sqrt{n}\}$ mod 1, folosind metode ergodice: teorema lui Ratner despre curenti unipotenti. Rudnick, Sarnak si Zaharescu (Invent. Math. 2001) trateaza sirul de parti fractionare $\{n^2\alpha\}$, pentru α irational satisfacand o conditie diofantica. Autorii inainte mentionati conjectureaza ca acest sir are diferente locale ca ale unui proces Poisson, si stabilesc rezultate partiale in aceasta directie folosind tehnici de numarare a punctelor laticiale in domenii, si ipoteza lui Riemann pentru curbe peste corpuri finite demonstrata de Weil.

In articolele [7], [8] studiem 2-corelatia unghiurilor dintr-o latice hiperblica. Grupul $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ actioneaz pe semiplanul superior prin transformari Moebius si consideram laticea formata de geodezicele hiperbolice dintre un punct fixat ω si transformatele acestuia prin elemente ale unui subgroup discret, de covolum finit Γ al $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Fie M_Q multimea matricelor γ astfel incat $\gamma\omega$ este intr-o bila de raza Q centrata la ω, si fie $N_Q = \#M_Q$. Se stie ca unghiurile (cu multiplicitati) θ_γ facute de geodezicele $\omega \to \gamma\omega$ cu verticala prin ω sunt echidistribuite in intervalul $[-\pi, \pi]$ datorita lucrarii lui Selberg despre Formula de Urma. Consideram limita cand Q tinde la infinit a masurii de 2-corelatie

$$R_Q(\xi) = \frac{\#\{(\gamma, \gamma') \in M_Q^2 : \gamma \neq \gamma', |\theta_\gamma - \theta'_\gamma| < \xi/N_Q\}}{N_Q},$$

limita notata $R_2(\xi)$, si functia de 2-corelatie $g_2(\xi) = R_2'(\xi)$.

In [7] consideram cazul $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ si $\omega = i$ unitatea imaginara, si aratam ca $R_2(\xi), g_2(\xi)$ exists si sunt date de formule explicite. In cazul acesta unghiurile latices hiperbolice sunt exact unghirile facute de geodezicele reciproce pe suprafata modulara studiate de Sarnak (1995). Acesta este primul rezultat despre 2-corelatia unghiurilor unei latice hiperbolice aparut in literatura. Metoda noastra este baza pe numararea punctelor laticiale din domenii plance, si foloseste inegalitati analitice pentru sume Kloosterman.

Dezvoltand metodele din [7], in [8] dam o alta formula pentru $g_2(\xi)$, pe care o conjecturam ca este valabila pentru orice latice Γ in $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ si orice punct ω in semiplanul superior. Demonstram aceasta formula pentru Γ egal cu grupul modular, si ω un punct eliptic.

In loc de a numara perechi (γ, γ') in definitia masurii de 2-corelatie de mai sus, abordarea noastra este bazata pe a fixa o matrice M, a numara perechile $(\gamma, \gamma M)$, si a suma dupa M. Astfel formula pentru $g_2(\xi)$ ia forma unei serii infinite dupa $M \in \Gamma$. Aceasi abordare s-ar putea dovedi folositoare pentru problema 2-corelatiei pentru alte grupuri pe langa $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Rezultatele noastre au fost primite cu interes considerabil. Preprintul [7] a fost deja citat de doua or (vezi lista de publicatii), si o demonstratie a conjecturii din [8] a fost propusa foarte recent intr-un preprint al lui Kelmer si Kontorovich (arXiv:1308.0754), folosind metode spectrale.

References

[1] A.A. Popa, *Central values of Rankin L-series over real quadratic fields.* Compositio Math. 142 (2006), 811-866

[2] A.A. Popa, *Whittaker newforms for archimedean representations of GL(2)*. J. of Number Theory 128/6 (2008), 1637-1645

[3] A.A. Popa, *Rational decomposition of modular forms*. Ramanujan J. of Math. 26/3 (2011), 419-435

[4] V. Pasol, A.A. Popa, *Modular forms and period polynomials*. Proc. London Math. Soc., Online first February 2013, DOI 10.1112/plms/pdt003

[5] V. Pasol, A.A. Popa, *An algebraic property of Hecke operators and two indefinite theta series*. Forum Math., Online first February 2013, DOI 10.1515/forum-2012-0114

[6] V. Pasol, A.A. Popa, *On the Petersson scalar product of arbitrary modular forms*. Proc. Amer. Math. Soc., to appear (arXiv:1204.0502)

[7] F.P. Boca, V. Pasol, A.A. Popa, A. Zaharescu, *Pair correlation of angles between reciprocal geodesics on the modular surface*. Preprint (2011), arXiv:1102.0328

[8] F.P. Boca, A.A. Popa, A. Zaharescu, *Pair correlation of hyperbolic lattice angles*. Preprint (2013), arXiv:1302.5067