Institutul de Matematica al Academiei Romane
"Simion Stoilow"

Teza de doctorat
Rezumat

Topologie algebrica necomutativa - Actiuni si relatii de echivalenta sofice

Liviu Păunescu

Profesor Coordonator: Şerban Stratilă

Cuprins

1 Introducere

Aceasta teza isi propune in principal prezentarea obiectelor sofice (grup sofic, relatie de echivalenta sofica) intr-un context de algebre de operatori. Pentru acest lucru vom avea nevoie de urmatoarele exemple de algebre von Neumann: algebra grupala, produse incrucisate si constructia Feldman- Moore. Definitiile obiectelor sofice vor fi prezentate folosind ultraproduse de algebre von Neumann. Demonstratiile rezultatelor obtinute vor combina teoreme de algebre von Neumann cu tehnici permise de ultraproduse, in principal argumente diagonale.

1.1 Algebre von Neumann

O *algebra von Neumann* este o $*$-algebra de operatori marginiti pe un spatiu Hilbert care este inchisa in topologia slab operatoriala si contine operatorul identitate. Inseamna ca $\mathcal{B}(H)$ este o algebra von Neumann, asa cum sunt si algebrele de matrici, un caz particular pentru H finit dimensional.

Ne vor interesea doar algebrele care au o *urma finita*, adica o functionala liniara pozitiva, fidela $Tr : M \to \mathbb{C}$ astfel incat $Tr(1) = 1$ si $Tr(xy) = Tr(yx)$ pentru orice $x, y \in M$. Exemple sunt algebrele matriciale sau algebrele grupale $L(G)$, inchiderea slaba in $\mathcal{B}(L^2(G))$ a algebrei generata de operatori de translatie la stanga $\lambda(g)$. Urma pe $L(G)$ este definita de relatiile $Tr(\lambda_e) = 1$ si $Tr(\lambda_g) = 0$ pentru $g \neq e$.

In afara de algebrele grupale, exemple de algebre von Neumann finite apar in mod natural asociate unei actiuni sau relatii de echivalenta. Vom lucra doar cu actiuni *p.m.p.*, adica actiuni pe spatii de probabilitate ce pastreaza masura. Fie deci (X, μ) un spatiu standard de probabilitate si fie $\alpha : G \to Aut(X, \mu)$ o actiune ce pastreaza masura. Produsul incrucisat algebric este:

$$L^\infty(X) \rtimes_\alpha^{alg} G = \{ \sum_{finita} a_g u_g : a_g \in L^\infty(X), g \in G\}.$$

Structura de $*$-algebra este urmatoarea:

$$u_g u_h = u_{gh},\ u_g a u_g^* = \alpha(g)(a), \quad u_g^* = u_{g^{-1}},$$

unde multiplicarea in $L^\infty(X)$ se pastreaza si in interiorul produsului incrucisat. Urma este definita de:

$$Tr(\sum a_g u_g) = \int_X a_e d\mu.$$

Algebra von Neumann $L^\infty(X) \rtimes_\alpha G$ este inchiderea slaba a algebrei $L^\infty(X) \rtimes_\alpha^{alg} G$ in reprezentarea GNS a perechii $(L^\infty(X) \rtimes_\alpha^{alg} G, Tr)$.

In afara de produse incrucisate vom avea nevoie si de constructia Feldman-Moore. Aceasta asociaza unei relatii de echivalenta o pereche Cartain $A \subset M(E)$, unde $M(E)$ este o algebra von Neumann, iar A este o subalgebra maximal abeliana. Nu vom prezenta in acest rezumat constructia. Notam doar ca pentru o relatie de echivalenta generata de o actiune libera α, perechea $A \subset M(E)$ este izomorfa cu $L^\infty(X) \subset L^\infty(X) \rtimes_\alpha G$.

O algebra von Neumann M este *hiperfinita* daca contine un lant crescator de algebre finit dimensionale a caror reuniune este slab densa in M. Murray si von Neumann au demonstrat ca, pana la izomorfism, exista un singru factor de tip II_1 hiperfinit. Vom nota acest factor cu R. Alain Connes a demonstrat ca algebra grupala $L(G)$ este hiperfinita daca si numai daca G este amenabil.

1.2 Ultraproduse

Sunt mai multe tipuri de ultraproduse folosite in teza, dar cel mai important este ultraprodusul de algebre von Neumann finite, folosid urma. Fie (M, Tr) o algebra von

Neumann cu o urma finita. Inafara de norma operatoriala, M are si o *norma Hilbert-Schmidt*: $||x||_2 = Tr(x^*x)^{1/2}$. Pentru o matrice $(a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ aceasta norma este $||(a_{ij})||_2 = (\frac{1}{n}\sum_{ij}|a_{ij}|^2)^{1/2}$. Cand construim ultraprodusul trebuie sa luam in considerare si aceasta norma.

Fie (M_i, Tr) un sir de algebre von Neumann fiecare avand o urma finita. Definim

$$l^\infty(\mathbb{N}, M_i) = \{x \in \Pi_i M_i : \sup_i ||x_i|| < \infty\}$$
$$\mathcal{N}_\omega = \{x \in l^\infty(\mathbb{N}, M_i) : \lim_{i\to\omega} ||x_i||_2 = 0\} \text{ si}$$
$$\Pi_{i\to\omega} M_i = l^\infty(\mathbb{N}, M_i)/\mathcal{N}_\omega.$$

Ultraprodusul $\Pi_{i\to\omega} M_i$ este o algebra von Neumann, desi demonstratia nu este chiar triviala. Daca $x_i \in M_i$ vom nota cu $\Pi_{i\to\omega} x_i$ elementul corespunzator din ultraprodus.

Aceasta algebra vine cu o urma definta de: $Tr(x) = \lim_{i\to\omega} Tr_{M_i}(x_i)$, unde $x = \Pi_{i\to\omega} x_i$. In cazul in care $M_i = M$ pentru toti i vom nota ultraprodusul cu M^ω si il vom numi o *ultraputere* a lui M (clasa de izomorfism poate depinde de ω).

Urmatoarea propozitie este o proprietate foarte utila a ultraproduselor.

Proposition 1.1. *Intr-un ultraprodus avem egalitatea:* $\mathcal{U}(\Pi_{i\to\omega} M_i) = \Pi_{i\to\omega}\mathcal{U}(M_i)$.

1.3 Grupuri sofice

Fie $M_n = M_n(\mathbb{C})$ o algebra de matrici. Notam cu $D_n \subset M_n$ subalgebra matricilor diagonale si cu $P_n \subset M_n$ subgrupul matricilor de permutare.

Notation 1.2. Pentru un ultraprodus de matrici $\Pi_{k\to\omega} M_{n_k}(\mathbb{C})$ notam cu $\Pi_{k\to\omega} D_{n_k}$ si $\Pi_{k\to\omega} P_{n_k}$ submultimile corespunzatoare.

Definition 1.3. Un grup G se numeste *sofic* daca exista un sir $\{n_k\}_k \subset \mathbb{N}$, $\lim_k n_k = \infty$ si un morfism de grupuri $\Theta : G \to \Pi_{k\to\omega} P_{n_k}$ astfel incat $Tr(\Theta(g)) = 0$ pentru orice $g \neq e$.

Exista o legatura intre distanta Hilbert-Schmidt si distanta Hamming.

Definition 1.4. Pentru $\sigma, \tau \in S_n$ definim *distanta hamming normalizata* prin:

$$d_{hamm}(\sigma, \tau) = \frac{1}{n} Card\{i : \sigma(i) \neq \tau(i)\}.$$

Urmatoarea definitie este de multe ori mai usor de verificat in cazul exemplelor particulare.

Proposition 1.5. *Un grup G este sofic daca si numai daca pentru orice submultime finita $F \subset G$ si orice $\varepsilon > 0$, exista $n \in \mathbb{N}$ si $\theta : F \to S_n$ astfel incat:*

- *daca $g, h, gh \in F \quad d_{hamm}(\Theta(g)\Theta(h), \Theta(gh)) < \varepsilon$;*
- *daca $g \in F,\ g \neq e \quad d_{hamm}(\Theta(g), Id) > 1/2$.*

Grupurile sofice au fost definite de Gromov in contextul dinamicii simbolice. Motivatia a fost notiunea de surjunctivitate. Un grup G este *surjunctiv* daca pentru orice multime finita discreta A shiftul pe A^G nu contine un subshift propriu izomorf cu el insusi. Gromov a aratat ca orice grup sofic are aceasta proprietate. Numele de "sofic" apartine lui B. Weiss.

Grupurile amenabile si grupurile residual finite sunt exemple de grupuri sofice. Elek si Szabo au aratat ca aceasta clasa de grupuri este inchisa la urmatoarele constructii: produse directe, subgrupuri, limite inverse, limite directe, produse libere, extensii amenabile.

In afara de *Conjectura lui Gottschalk* (care spune ca orice grup este surjunctiv), exista si alte conjecturi despre clasa grupurilor numarabile care sunt adevarate pentru grupurile sofice. Elek si Szabo au demonstrat *conjectura lui Kaplansky* pentru grupurile sofice.

1.4 Actiuni sofice

Definition 1.6. O actiune α a unui grup numarabil G pe un spatiu standard de probabilitate (X, μ) se numeste *sofica* daca exista o scufundare $\Theta : L^\infty(X) \rtimes_\alpha G \to \Pi_{k\to\omega} M_{n_k}(\mathbb{C})$ astfel incat $\Theta(L^\infty(X)) \subset \Pi_{k\to\omega} D_{n_k}(\mathbb{C})$ si $\Theta(u_g) \in \Pi_{k\to\omega} P_{n_k}(\mathbb{C})$ pentru orice $g \in G$.

Proprietatea unei actiuni de a fi sofica este invarianta la orbit echivalenta. Acest lucru este de fapt o proprietate a produselor incrucisate. Doua actiuni libere $\alpha : G \to Aut(X, \mu)$ si $\beta : H \to Aut(X, \mu)$ pe acelasi spatiu se numesc *orbit echivalente* daca $\alpha(G)(x) = \beta(H)(x)$ pentru aproape orice $x \in X$.

Theorem 1.7. *(Singer) Fie $\alpha : G \to Aut(X, \mu)$ si $\beta : H \to Aut(X, \mu)$ doua actiuni libere pe acelasi spatiu de probabilitate. Atunci α si β sunt orbit echivalente daca si numai daca exista un izomorfism de algebre von Neumann $\Psi : L^\infty(X) \rtimes_\alpha G \to L^\infty(X) \rtimes_\beta H$ astfel incat Ψ este identitatea pe $L^\infty(X)$.*

Theorem 1.8. *Fie α si β doua actiuni libere orbit echivalente. Daca α este hiperliniara (sofica) atunci si β este hiperliniara (sofica).*

Demonstratia acestui rezultat se bazeaza pe urmatoarea lema usoara dar esentiala. Este folosita de multe ori in teza. Aceasta lema construieste elemente in $\Pi_{k\to\omega}P_{n_k}$ de care avem nevoie pentru a demonstra ca un anumit obiect este sofic.

Lemma 1.9. *Fie $\{e_i|i \in \mathbb{N}\}$ proiectii in $\Pi_{k\to\omega}D_{n_k}$ astfel incat $\sum_i e_i = 1$. Fie $\{u_i|i \in \mathbb{N}\}$ unitari din $\Pi_{k\to\omega}P_{n_k}$ astfel incat $v = \sum_i e_i u_i$ este un unitar. Atunci $v \in \Pi_{k\to\omega}P_{n_k}$.*

1.5 Relatii de echivalenta sofice

Elek si Lippner au introdus notiunea de *relatie de echivalenta sofica.* In teza prezentam acesta notiune folosind constructia Feldman-Moore. O sectiune din teza este dedicata demonstratiei echivalentei intre cele doua definitii.

Definition 1.10. O relatie de echivalenta E se numeste *sofica* daca exista o scufundare a lui $M(E)$ in $\Pi_{k\to\omega}M_{n_k}$ astfel incat $A \subset \Pi_{k\to\omega}D_{n_k}$ si $\mathcal{N}(A) \subset \mathcal{U}(A) \cdot \Pi_{k\to\omega}P_{n_k}$.

In constructia acestei definitii s-a luat in considerare urmatoarea proprietate. Prin E_α intelegem relatia de orbit echivalenta generata de α.

Proposition 1.11. *Fie α o actiune libera. Atunci E_α este o relatie de echivalenta sofica daca si numai daca α este o actiune sofica.*

2 Rezultate

2.1 Scufundari sofice pentru perechi Cartain hiperfinite

Rezultatele importante din teza se bazeaza pe urmatoarea propozitie.

Proposition 2.1. *Fie E o relatie de echivalenta hiperfinita si $A \subset M(E)$ perechea ei Cartain. Fie Θ_1, Θ_2 doua scufundari sofice ale lui $M(E)$ in $\Pi_{k\to\omega}M_{n_k}$. Atunci exista un unitar $u \in \Pi_{k\to\omega}P_{n_k}$ astfel incat $\Theta_2(x) = u\Theta_1(x)u^*$ pentru orice $x \in M(E)$.*

2.2 Shifturile Bernoulli

Theorem 2.2. *(Elek-Lippner) Relatiile de echivalenta generate de shifturile Bernoulli ale grupurilor sofice sunt sofice.*

O versiune mai slaba a acestui rezultat a fost obtinuta mai intai de Benoit Collins si Ken Dykema. Independent, Elek si Szabo au demonstrat aceasta teorema folosind alte metode.

Corollary 2.3. *Produse libere de grupuri sofice amalgamate peste grupuri amenabile sunt sofice.*

Corollary 2.4. *Fie H un grup abelian si G un grup sofic. Atunci $H \wr G$ (wreath product) este sofic.*

2.3 Actiuni sofice

Scopul acestei sectiuni este studierea grupurilor pentru care fiecare actiune este sofica. Primul rezultat arata ca este suficient sa lucram doar cu actiuni libere.

Theorem 2.5. *Fie G un grup astfel incat orice actiune libera este sofica. Atunci orice actiune a lui G este sofica.*

Definition 2.6. Vom nota cu $\mathcal{S}$ clasa grupurilor pentru care fiecare aciune este sofica.

Desi nu putem demonstra ca fiecare grup sofic se afla in $\mathcal{S}$, vom arata cateva exemple. Primele exemple sunt grupurile amenabile.

Proposition 2.7. *Grupurile amenabile sunt in $\mathcal{S}$.*

Urmatoarea propozitie, similara cu rezultatele anterioare din teza, permite constructia altor exemple de grupuri din clasa $\mathcal{S}$.

Proposition 2.8. *Fie $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ o familie de actiuni sofice ale unor grupuri $\{G_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ pe acelasi spatiu. Fie H un subgrup comun amenabil astfel incat actiunile α_i coincid pe H. Atunci $*_H\alpha_i$ este sofica.*

Corollary 2.9. *Orice actiune a unui grup liber, inclusiv $\mathbb{F}_\infty$ este sofica.*

Urmatorul rezultat apartine lui Elek si Lippner. Teza contine o demonstratie independenta folosind constructia Feldman-Moore.

Proposition 2.10. *Orice relatie de echivalenta arborabila este sofica.*

Aceasta ultima teorema contine rezultatele pe care le-am putut obtine despre clasa $\mathcal{S}$.

Theorem 2.11. *Clasa $\mathcal{S}$ este inchisa la produse amalgamate peste grupuri amenabile si este strict mai larga decat clasa grupurilor arborabile.*

Cuvinte de multumire

Multumesc mult profesorului coordonator Şerban Stratilă pentru increderea si oportunitatile oferite si incurajarile constante. Vreau sa multumesc profesorului Florin Rădulescu pentru multe discutii si idei. Multumiri speciale prietenului si colegului mei Valerio Capraro pentru ca m-a adus in domeniul conjecturii de scufundare a lui Connes si pentru studiul lui a acestei conjecturi de pe urma caruia am beneficiat. Sunt foarte recunoscator profesorului Stefaan Vaes pentru numeroase remarci si corectii si pentru cateva demonstratii mult mai usoare. Bucati din aceasta teza au fost scrise in timpul vizitei mele in Leuven in primavara anului 2010. De asemenea multumirile mele sunt si pentru Damien Gaboriau si Ken Dykema pentru multe comentarii legate de teza.

LIVIU PĂUNESCU, *INSTITUTE of MATHEMATICS "S. Stoilow" of the ROMANIAN ACADEMY* email: liviu.paunescu@imar.ro