ACADEMIA ROMÂNĂ

INSTITUTUL DE MATEMATICĂ „SIMION STOILOW”

TEZĂ DE DOCTORAT

METRICI INVARIANTE ŞI DOMENII RIEMANN

Coordonator ştiinţific:
C.Ş. I Dr. Mihnea COLŢOIU

Doctorand:
Natalia GAŞIŢOI

Bucureşti, 2012

Cuprins

Introducere

Este binecunoscut faptul că pentru o mare parte a subiectelor abordate în cadrul analizei complexe multidimensionale, de exemplu, pentru problema prelungirii analitice a funcţiilor, nu putem restricţiona cercetările doar pentru cazul submulţimilor din $\mathbb{C}^n$ şi ar trebui considerate domeniile care acoperă $\mathbb{C}^n$, domeniile Riemann. Studiul domeniilor Riemann a fost iniţiat de către matematicienii germani Hans Grauert şi Reinhold Remmert.

În această teză sunt investigate domeniile Riemann, în special, în contextul cercetării problemei Levi, căreia după anul 1953, graţie lucrărilor lui Kiyoshi Oka, i s-a acordat un interes sporit. Importante contribuţii în acest domeniu au fost aduse şi de şcoala românească, în special, prin lucrările Profesorului Mihnea Colţoiu.

Metricile invariante constituie un alt subiect abordat în această lucrare. În anul 1926 Constantin Carathéodory a definit (semi)metrica c_M a unei varietăţi complexe M, considerând în acest scop, familia aplicaţiilor olomorfe ale acestei varietăţi în discul unitate. Întrucât distanţa Carathéodory a discului unitate coincide cu metrica Poinaré, aceasta este prima dintre generalizările, pentru cazul multidimensional, a metricii Poincaré. Cu şapte ani mai târziu, Stefan Bergman, defineşte o altă (semi)metrică pe varietăţile complexe, care, de asemenea, pe discul unitate se identifică cu metrica Poincaré. Mai târziu, în anul 1967, Shoshichi Kobayashi, observă că pentru definirea unei metrici pe o varietate complexă M ar fi natural de a utiliza familia aplicaţiilor discului unitate în M. (Semi)metrica Kobayashi, fiind şi ea o generalizare a metrici Poincaré, este invariantă în raport cu aplicaţiile biolomorfe, la fel ca şi (semi)metricile Carathéodory şi Bergman.

Aceste metrici invariante şi-au găsit numeroase aplicaţii în diverse direcţii de cercetare în analiza complexă, în special în definirea şi studiul funcţiilor normale de mai multe variabile complexe. Anumite subiecte legate de aplicaţiile metricilor invariante la studiul funcţiilor normale de mai multe variabile sunt investigate în această teză.

Structura tezei. Primul capitol este dedicat problemei despre proiectivitatea imaginii unui spaţiu algebric proiectiv.

Cel de-al doilea capitol prezintă un studiu al domeniilor Riemann (neramificate). Atenţia principală este acordată investigării problemei Levi pentru eclatatul lui $\mathbb{C}^{n+1}$ de-a lungul unui subspaţiu liniar şi problemei Levi pentru domeniile Riemann peste eclatatul lui $\mathbb{C}^{n+1}$ în origine.

Al treilea capitol este dedicat descrierii metricilor invariante Carathéodory, Bergman şi Kobayashi şi studiului funcţiilor normale de mai multe variabile complexe. Este evidenţiată o clasă largă de domenii pentru care există aplicaţia extremală pentru seminorma Kobayashi. Pentru astfel de domenii este obţinut un criteriu de normalitate a unei aplicaţii olomorfe. În ultima parte a acestui capitol se studiază domeniile mărginite din $\mathbb{C}^n$ astfel încât fiecare punct din frontiera lor este punct peak şi pentru aplicaţiile olomorfe definite pe domeniile de acest tip se stabileşte un criteriu de existenţa a limitei $\mathcal{K}$–admisibile într-un punct frontieră în care ea are limită radială.

Cu o profundă recunoştinţă îi adresez cele mai calde şi sincere mulţumiri conducătorului de doctorat, Domnului Profesor Mihnea Colţoiu pentru sprijinul constant, îndrumare, încurajare, ajutorul acordat şi numeroase discuţii în decursul ultimilor ani.

Ţin să exprim sincere mulţumiri şi o deosebită recunoştinţă Domnului Profesor Cezar Joiţa, care m-a susţinut mult şi mi-a oferit permanent sfaturi valoroase şi îndrumare competentă. Îmi exprim recunoştinţa şi le aduc sincere mulţumiri referenţilor ştiinţifici, Domnului Profesor Mihai Tibăr şi Domnului Profesor Constantin Costara pentru timpul şi efortul alocat parcurgerii manuscrisului tezei de doctorat şi pentru observaţiile constructive făcute.

Adresez calde mulţumiri conducerii Institutului de Matematică „Simion Stoilow" al Academiei Române pentru susţinerea şi sprijinul financiar de care am beneficiat pe întreg parcursul stagiului doctoral.

Capitolul 1

Despre imaginea unui spaţiu algebric proiectiv

Domeniile Riemann neramificate au fibre zero dimensionale. În această secţiune vom studia o clasă de morfisme cu fibre echidimensionale de dimensiune k. Anume, vom demonstra că dacă X este un spaţiu algebric proiectiv, Y un spaţiu complex compact normal şi $p : X \to Y$ este un morfism cu fibre echidimensionale, atunci Y este de asemenea algebric proiectiv.

O varietate complexă n-dimensională se numeşte *Kähleriană* dacă ea admite o metrică Hermitiană a cărei $(1,1)$-formă ω este închisă.

Un spaţiu complex compact ireductibil X de dimensiune n se numeşte *spaţiu Moishezon* dacă gradul de transcendenţă $a(X)$ peste $\mathbb{C}$ al corpului funcţiilor meromorfe pe X este egal cu dimensiunea spaţiului X, adică există n funcţii global meromorfe algebric independente.

Pe un spaţiu algebric proiectiv X, orice funcţie meromorfă este raţională, adică este reprezentabilă sub formă de cât a două polinoame şi deci $a(X) = \dim X$, prin urmare X este un spaţiu Moishezon.

Observăm că, dacă X şi Y sunt varietăţi analitice complexe, astfel încât X este o varietate Kähleriană şi $p : X \to Y$ este un morfism propriu surjectiv, atunci, în general, nu rezultă că Y este de asemenea o varietate Kähleriană. De exemplu, H. Hironaka [48] a arătat că dacă Y este o varietate complexă compactă (redusă şi ireductibilă) care este de tip Moishezon, atunci există o varietate proiectivă X (şi deci Kähleriană) şi un morfism bimeromorf propriu $p : X \to Y$.

Prin urmare, ipotezele că X este o varietate Kähleriană şi $p : X \to Y$ este un morfism propriu surjectiv, nu sunt suficiente pentru a putea afirma că Y este de asemenea o varietate Kähleriană.

J. Varouchas [74] a demonstrat că în ipoteza suplimentară, ca morfismul p să fie echidimensional se poate conclude că Y este Kähleriană.

Teorema 1.1 ([74], Théorème 2). *Fie X, Y două varietăţi analitice complexe astfel încât X este Kähleriană şi $p : X \to Y$ este un morfism propriu şi surjectiv astfel încât fiecare fibră $p^{-1}(y)$, $y \in Y$ este de dimensiune $m = dimX - dimY$. Atunci Y este varietate Kähleriană.*

Teorema 1.1 a fost extinsă în [75] (Theorem 3) pentru cazul spaţiilor complexe cu singularităţi (cu ipoteza suplimentară de platitudine a morfismului).

B. Moishezon în [61] (Teorema 2) a demonstrat că imaginea unui spaţiu Moishezon printr-o aplicaţie olomorfă este de asemenea Moishezon. În aceeaşi lucrare, se arată că o varietate Moishezon este o varietate algebrică proiectivă dacă şi numai dacă ea este Kähleriană.

Un rezultat similar nu are loc pentru spaţiile cu singularităţi, un spaţiu Moishezon singular nu este în general proiectiv chiar dacă el este spaţiu Kählerian (a se vedea, de exemplu [40], [62]).

Fie $p : X \to Y$ un morfism cu fibre echidimensionale ale spaţiilor complexe compacte X şi Y şi fie X un spaţiu algebric proiectiv. Ne va preocupa problema de determinare a condiţiilor suficiente în care Y ar fi de asemenea algebric proiectiv.

Dacă spaţiile X şi Y sunt netede, atunci din rezultatele menţionate mai sus rezultă că Y este de asemenea spaţiu algebric proiectiv.

Vom arăta că dacă X este un spaţiu algebric proiectiv, Y este un spaţiu complex compact normal şi $p : X \to Y$ este un morfism cu fibre echidimensionale, atunci Y este de asemenea algebric proiectiv. Menţionăm că, în cazul când fibrele lui p sunt 0-dimensionale, adică p este o aplicaţie de acoperire ramificată, acest rezultat a fost obţinut de către R. Remmert şi T. Van de Ven în [67]. Pentru cazul când fibrele lui p au dimensiune constantă pozitivă şi în plus, dacă Y are singularităţi izolate, acest rezultat a fost demonstrat de către C. Horst în [49] aplicând o versiune analitică a criteriului lui Chevalley.

Remarcăm că ipoteza de normalitate este esenţială, după cum se poate vedea din [46] (Exerciţiul 7.13, pag. 171) şi [49].

Să notăm în continuare cu $\mathbb{P}_{\nu,n}$ spaţiul proiectiv care parametrizează polinoamele omogene, $F \in \mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$, de gradul ν şi pentru un polinom $F \in \mathbb{P}_{\nu,n}$ notăm mulţimea zerourilor cu

$$Z(F) := \{[z_0 : \cdots : z_n] \in \mathbb{P}^n \mid F(z_0, \dots, z_n) = 0\}.$$

Lema 1.1 ([18]). *Dacă C este o submulţime analitică închisă în $\mathbb{P}^n$ de dimensiune pozitivă $\dim C \geq 1$, atunci mulţimea $\{F \in \mathbb{P}_{\nu,n} \mid \dim(Z(F) \cap C) = \dim(C)\}$ este o reuniune finită de subspaţii liniare din $\mathbb{P}_{\nu,n}$ de codimensiune cel puţin egală cu $\nu + 1$.*

Demonstraţie. Fie C_j, $j = 1, \ldots, k$ componentele ireductibile ale lui C cu $\dim C_j = \dim C$. Dar atunci avem că

$$\{F \in \mathbb{P}_{\nu,n} \mid \dim(Z(F) \cap C) = \dim(C)\} = \bigcup_{j=1}^{k} \{F \in \mathbb{P}_{\nu,n} \mid Z(F) \supset C_j\}$$

şi fiecare $\{F \in \mathbb{P}_{\nu,n} \mid Z(F) \supset C_j\}$, $j = 1, \ldots, k$ este un subspaţiu liniar al lui $\mathbb{P}_{\nu,n}$.

Pentru a demonstra afirmaţia referitoare la codimensiune, observăm că dacă $A_1, \ldots, A_{\nu+1}$ sunt $\nu + 1$ puncte distincte din C_j pentru orice j fixat, atunci mulţimea

$$\{F \in \mathbb{P}_{\nu,n} \mid F(A_l) = 0,\ l = \overline{1, \nu+1}\}$$

are codimensiunea cel puţin $\nu+1$ în $\mathbb{P}_{\nu,n}$. Într-adevăr, deoarece $F(A_l) = 0$ este o ecuaţie liniară în $\mathbb{P}_{\nu,n}$, este suficient să arătăm că pentru fiecare $k \leq \nu$ se poate găsi un polinom omogen F, de gradul ν astfel încât

$$F(A_1) = 0, \ldots, F(A_k) = 0 \quad \text{şi} \quad F(A_{k+1}) \neq 0.$$

Cu acest scop notăm cu $G_l(z_0, z_1 \ldots, z_n)$, $l = 1, \ldots, k$ polinoamele omogene de gradul 1, astfel încât

$$G_l(A_l) = 0 \ \text{ şi } \ G_l(A_i) \neq 0 \ \text{ pentru } \ i \neq l, \quad i = 1, \ldots, k+1.$$

Punem $F = G_1^{i_1} \cdots G_k^{i_k}$, unde $i_1, \ldots, i_k \geq 1$ sunt numere naturale astfel încât $i_1 + \cdots + i_k = \nu$. În mod evident

$$\{F \in \mathbb{P}_{\nu,n} \mid F(A_l) = 0,\ l = \overline{1, \nu+1}\} \supset \{F \in \mathbb{P}_{\nu,n} \mid Z(F) \supset C_j\}$$

şi deci $\{F \in \mathbb{P}_{\nu,n} \mid Z(F) \supset C_j\}$ are codimensiunea cel puţin $\nu + 1$, ceea ce demonstrează afirmaţia.

□

Să notăm cu $C_{n,k,d}$ varietatea Chow care parametrizează subvarietăţile de gradul d de dimensiune k din $\mathbb{P}^n$. Se cunoaşte că $C_{n,k,d}$ este o varietate quasi-proiectivă şi că mulţimea de incidenţă $\{(X, z) \in C_{n,k,d} \times \mathbb{P}^n \mid z \in X\}$ este o submulţime algebrică din $C_{n,k,d} \times \mathbb{P}^n$ (a se vedea, de exemplu, [69]).

Teorema 1.2 ([18]). *Fie n, k şi d numere naturale nenule, $n, k, d \geq 1$. Atunci există un număr $\nu_0 \in \mathbb{Z}$, $\nu_0 \geq 1$ astfel încât pentru orice $\nu \in \mathbb{Z}$, $\nu \geq \nu_0$ se poate găsi un polinom omogen $F \in \mathbb{C}[z_0, z_1, \ldots, z_n]$ cu proprietatea că mulţimea $Z(F) \subset \mathbb{P}^n$ nu conţine nici o subvarietate din $\mathbb{P}^n$ de dimensiune k şi de gradul cel mult d.*

Demonstraţie. Pentru $1 \leq j \leq d$ notăm

$$H_j := \{(X, F) \in C_{n,k,j} \times \mathbb{P}_{\nu,n} \mid \dim(Z(F) \cap X) = k\}.$$

Vom demonstra că H_j este o submulţime algebrică închisă din $C_{n,k,j} \times \mathbb{P}_{\nu,n}$. Pentru aceasta considerăm

$$\tilde{H}_j = \{(X, z, F) \in C_{n,k,j} \times \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}_{\nu,n} \mid z \in X,\ F(z) = 0\}.$$

Observăm că $\tilde{H}_j = \tilde{H}_j' \cap \tilde{H}_j''$, unde

$$\tilde{H}_j' = \{(X, z) \in C_{n,k,j} \times \mathbb{P}^n \mid z \in X\} \times \mathbb{P}_{\nu,n}$$

şi

$$\tilde{H}_j'' = C_{n,k,j} \times \{(z, F) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}_{\nu,n} \mid F(z) = 0\}.$$

Întrucât $\tilde{H}_j'$ şi $\tilde{H}_j''$ sunt submulţimi algebrice închise din $C_{n,k,j} \times \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}_{\nu,n}$, rezultă că şi $\tilde{H}_j$, de asemenea, este o submulţime algebrică închisă din $C_{n,k,j} \times \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}_{\nu,n}$.

Notăm cu $\pi_j : C_{n,k,j} \times \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}_{\nu,n} \to C_{n,k,j} \times \mathbb{P}_{\nu,n}$ proiecţia canonică.

Deoarece spaţiul $\mathbb{P}^n$ este compact, deducem că π_j este o aplicaţie proprie. Dacă notăm cu $\tilde{\pi}_j : \tilde{H}_j \to C_{n,k,j} \times \mathbb{P}_{\nu,n}$ restricţia lui π_j la $\tilde{H}_j$, atunci avem că $\tilde{\pi}_j$ este de asemenea o aplicaţie proprie. Dar atunci, din semicontinuitatea dimensiunii fibrelor în topologia Zariski (a se vedea, de exemplu, [76], pag. 240), rezultă că

$$\{(X, F) \in C_{n,k,j} \times \mathbb{P}_{\nu,n} \mid \dim \tilde{\pi}_j^{-1}(X, F) \geq k\}$$

este o submulţime analitică din $C_{n,k,j} \times \mathbb{P}_{\nu,n}$.

Totuşi $\pi_j^{-1}(X, F) = \{X\} \times (Z(F) \cap X) \times \{F\}$ şi prin urmare $\dim \tilde{\pi}_j^{-1}(X, F) \leq k$. Astfel deducem că

$$\{(X, F) \in C_{n,k,j} \times \mathbb{P}_{\nu,n} \mid \dim \tilde{\pi}_j^{-1}(X, F) \geq k\} = H_j$$

şi în aşa fel H_j este o submulţime analitică închisă din $C_{n,k,j} \times \mathbb{P}_{\nu,n}$ după cum s-a afirmat mai sus.

Notăm cu $p_{1,j} : H_j \to C_{n,k,j}$ proiecţia canonică pe primul cofactor şi cu $p_{2,j} : H_j \to \mathbb{P}_{\nu,n}$ proiecţia canonică pe al doilea cofactor. Din Lema 1.1 rezultă că fibrele lui $p_{1,j}$ au dimensiunea cel mult egală cu $\dim(\mathbb{P}_{\nu,n}) - \nu - 1$ şi astfel

$$\dim(H_j) \leq \dim C_{n,k,j} + \dim(\mathbb{P}_{\nu,n}) - \nu - 1.$$

Dacă vom alege $\nu \geq \max\{\dim C_{n,k,j} \mid j = 1 \ldots, d\}$, atunci vom avea $\dim(H_j) < \dim \mathbb{P}_{\nu,n}$. Proiecţiile $p_{2,j}$ nu sunt necesar proprii, dar totuşi putem conclude că dimensiunea Hausdorff a lui $\bigcup_{j=1}^{d} p_{2,j}(H_j)$ este cel mult egală cu $2n - 2$ în $\mathbb{P}_{\nu,n}$. Astfel aproape pentru toate polinoamele

$F \in \mathbb{P}_{\nu,n}$ vom avea că $Z(F)$ nu conţine nici o componentă ireducibilă a lui X de dimensiune k pentru orice $X \in C_{n,k,j}$ cu $j \le d$.

□

Pentru următorul rezultat vom considera că X este o submulţime analitică închisă din $\mathbb{P}^n$, Y este un spaţiu complex compact redus şi $p : X \to Y$ este un morfism surjectiv. Pentru un punct $y \in Y$ fixat vom nota fibra corespunzătoare cu $X_y := p^{-1}(y)$. Dacă $\dim X_y = m$ notăm cu $X_y^{(m)}$ totalitatea tuturor componentelor ireductibile ale lui X_y de dimensiune m.

Lema 1.2 ([18]). *Dacă pentru $y \in Y$, fibrele X_y ale lui p au toate aceeaşi dimensiune m, atunci există un număr întreg d astfel încât $\deg X_y^{(m)} \le d$ pentru orice $y \in Y$.*

Demonstraţie. Să demonstrăm mai întâi că dacă $y_0 \in Y$ este un punct arbitrar fixat, atunci se poate găsi o vecinătate U a lui y_0 şi un număr întreg d_U astfel încât $\deg X_y^{(m)} \le d_U$ pentru orice $y \in U$.

Într-adevăr, fie L un subspaţiu liniar al lui $\mathbb{P}^n$ astfel încât $\dim L = n - m - 1$ şi $L \cap X_{y_0} = \emptyset$. Pentru o anumită vecinătate conexă U suficient de mică a lui y_0, avem că $L \cap X_y = \emptyset$ pentru toţi $y \in U$. Notăm $X(U) = p^{-1}(U)$.

Observăm că $\mathbb{P}^n \setminus L$ are structura unui fibrat vectorial olomorf $\pi : \mathbb{P}^n \setminus L \to \mathbb{P}^m$ şi pentru orice $y \in U$ restricţia lui π la $X_y^{(m)}$, $\pi\mid_{X_y^{(m)}} : X_y^{(m)} \to \mathbb{P}^m$ este o acoperire ramificată de gradul $d_y = \deg X_y^{(m)}$. Să considerăm aplicaţia analitică $G : X(U) \to \mathbb{P}^m \times U$, $G(x) = (\pi(x), p(x))$. Observăm că G este un morfism surjectiv finit propriu. Prin urmare există un număr întreg d_U astfel încât $d_y \le d_U$ pentru orice $y \in U$.

Din compacitatea lui Y rezultă imediat concluzia lemei.

□

Acum putem demonstra rezultatul principal al acestui capitol, enunţat mai sus.

Teorema 1.3 ([18]). *Fie X şi Y spaţii complexe compacte reduse şi $p : X \to Y$ o aplicaţie olomorfă surjectivă. Admitem că X este algebric proiectiv, Y este normal şi că toate fibrele lui p au aceeaşi dimensiune. Atunci spaţiul Y este algebric proiectiv.*

Demonstraţie. Vom demonstra afirmaţia prin inducţie în raport cu dimensiunile fibrelor lui p. Dacă p are fibre discrete, acest rezultat a fost demonstrat în [67].

Admitem că afirmaţia teoremei este adevărată pentru orice morfism astfel încât fiecare fibră are dimensiunea $k-1$, $k \ge 1$ şi considerăm o aplicaţie olomorfă surjectivă proprie $p : X \to Y$ astfel încât fibra $X_y := p^{-1}(y)$ are dimensiunea k pentru fiecare $y \in Y$.

Fie $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ o incluziune a lui X. Atunci din Lema 1.2 rezultă că putem găsi un număr întreg pozitiv d astfel încât $\deg X_y^{(k)}$ este cel mult d pentru fiecare $y \in Y$. Aplicăm Teorema

1.2 şi deducem că putem găsi un polinom omogen $F \in \mathbb{C}[z_0, z_1, \ldots, z_n]$ de un grad suficient de mare astfel încât mulţimea $Z(F)$ să nu conţină nici o componentă ireductibilă de dimensiune k a unei fibre a lui p. Atunci pentru fiecare punct $y \in Y$ avem că $Z(F) \cap X_y \neq \emptyset$ şi că $\dim Z(F) \cap X_y = k - 1$. Dacă notăm cu $X_1 := Z(F) \cap X$ şi notăm cu $p_1 : X_1 \to Y$ restricţia lui p la X_1, atunci lui p_1 îi putem aplica ipoteza inductivă şi deducem astfel că Y este algebric proiectiv.

$\square$

Capitolul 2

Domenii Riemann

În acest capitol sunt studiate domeniile Riemann (neramificate), sunt descrise noţiunea de punct frontieră accesibil al unui domeniu Riemann (cu ajutorul teoriei filtrelor, precum şi cu ajutorul şirurilor) şi unele proprietăţi ale domeniilor Riemann extinse.

Se explică construcţia eclatatului spaţiului $\mathbb{C}^{n+1}$ în origine şi a eclatatului de-a lungul unui subspaţiu liniar. Se investighează problema Levi pentru eclatatul lui $\mathbb{C}^{n+1}$ de-a lungul unui subspaţiu liniar şi problema Levi pentru domeniile Riemann peste eclatatul lui $\mathbb{C}^{n+1}$ în origine.

2.1 Domenii Riemann neramificate. Frontiera accesibilă a domeniilor Riemann

În această secţiune se vor introduce unele noţiuni şi rezultate referitoare la domeniile Riemann, care reprezintă un analog multidimensional al suprafeţelor Riemanniene. Sursele principale citate sunt [31], [39] şi [41].

Definiţia 2.1 ([31]). Vom numi *domeniu Riemann peste* $\mathbb{C}^n$ o pereche (X, p), unde X este un spaţiu Hausdorff, iar $p : X \to \mathbb{C}^n$ este o aplicaţie local homeomorfă, adică pentru orice punct $x \in X$ există o vecinătate $U = U(x)$, astfel încât $p(U)$ este deschis în $\mathbb{C}^n$ şi $p\,|_U \colon U \to p(U)$ este homeomorfism.

Aplicaţia p se numeşte *proiecţie* şi este continuă şi deschisă.

În particular, mulţimea $p(X)$ este un deschis în $\mathbb{C}^n$. Pentru orice punct $z \in p(X)$ mulţimea $p^{-1}(z)$ este discretă.

Orice domeniu $G \subset \mathbb{C}^n$ poate fi identificat cu un domeniu Riemann luând în calitate de proiecţie aplicaţia identică $p = \mathrm{id}_G$.

Dacă în Definiţia 2.1 vom înlocui spaţiul $\mathbb{C}^n$ cu o varietate n-dimensională M, atunci vom obţine noţiunea de domeniu Riemann peste M.

Cu ajutorul proiecţiei p pe spaţiul X în mod natural se induce o structură de varietate complexă n-dimensională. Pentru aceasta este suficient de a acoperi X cu domenii U_α suficient de mici astfel încât $p\mid_{U_\alpha}$ să fie homeomorfism şi de introdus $z^\alpha = p(x)$, $x \in U_\alpha$ drept coordonate locale în U_α. Relaţiile de compatibilitate ale atlasului $\{(U_\alpha, z^\alpha)\}$ sunt aplicaţii identice şi deci biolomorfe, prin urmare acesta este un atlas complex.

Fie $p : X \to \mathbb{C}^n$ un domeniu Riemann peste $\mathbb{C}^n$. Să definim pe X funcţia distanţă la frontieră. Întrucât aplicaţia p este local homeomorfă, pentru orice punct $x \in X$ se poate găsi un număr pozitiv $\varepsilon > 0$ şi o vecinătate deschisă $U(x;\varepsilon)$ a acestui punct pe care p o aplică homeomorf pe polidiscul $\Delta(p(x);\varepsilon) \subset \mathbb{C}^n$.

Definiţia 2.2 ([41]). Fie $p : X \to \mathbb{C}^n$ un domeniu Riemann şi $x \in X$ un punct arbitrar. Vom numi *distanţa* $d_X(x)$ de la punctul $x \in X$ la fronitera ∂X, supremumul tuturor $\varepsilon > 0$ pentru care există o vecinătate $U(x;\varepsilon)$ astfel încât $p\mid_{U(x;\varepsilon)}: U(x;\varepsilon) \to \Delta(p(x);\varepsilon)$ este homeomorfism,

$$d_X(x) := \sup\{\varepsilon > 0 \mid \text{există}\, U(x;\varepsilon) \subset X \text{ a.î. } p\mid_{U(x;\varepsilon)}: U(x;\varepsilon) \to \Delta(p(x);\varepsilon) \,\text{este homeomorfism}\}.$$

Mulţimea $\{x \in X \mid d_X(x) = \infty\}$ este deschisă şi închisă în X şi constă dintr-un anumit număr de componente homeomorfe cu spaţiul $\mathbb{C}^n$. În cele ce vor urma vom considera că $d_X(x)$ este finită pentru toţi $x \in X$.

Definiţia 2.3 ([41]). Fie $p : X \to \mathbb{C}^n$ un domeniu Riemann neramificat. O funcţie $f : X \to \mathbb{C}$ se numeşte *olomorfă într-un punct* $x \in X$ dacă pentru orice $0 < \varepsilon < d_X(x)$ funcţia $f \circ p^{-1}$ este olomorfă pe polidiscul $\Delta(p(x);\varepsilon)$. Funcţia f se numeşte *olomorfă pe* X dacă ea este olomorfă în fiecare punct $x \in X$.

Să descriem în continuare noţiunea de punct frontieră accesibil al unui domeniu Riemann, care a fost introdusă în [39] de către H. Grauert şi R. Remmert cu ajutorul teoriei filtrelor.

Definiţia 2.4 ([39]). Fie X un spaţiu topologic. Un *filtru* $\mathfrak{R}$ pe X este o familie de submulţimi nevide din X, astfel încât pentru orice două elemente M_1 şi M_2 din $\mathfrak{R}$ există o mulţime $N \in \mathfrak{R}$ aşa încât $N \subset M_1 \cap M_2$.

De exemplu, pentru un punct $x_0 \in X$ un sistem fundamental de vecinătăţi în X este un filtru.

Definiţia 2.5 ([31]). Un punct $x_0 \in X$ se numeşte *punct de acumulare* pentru filtrul $\mathfrak{R}$ dacă $x_0 \in \overline{M}$ pentru orice $M \in \mathfrak{R}$.

Un punct x_0 se numeşte *limita* filtrului $\mathfrak{R}$ dacă fiecare element al unui sistem fundamental de vecinătăţi ale lui x_0 conţine un element din $\mathfrak{R}$.

Dacă X este un spaţiu Hausdorff, atunci un filtru pe X poate avea cel mult un punct limită. Dacă un filtru pe X are limita x_0, atunci x_0 este unicul punct de acumulare al acestui filtru.

Definiţia 2.6 ([31]). Fie X un domeniu Riemann neramificat peste $\mathbb{C}^n$, $p : X \to \mathbb{C}^n$. Un *punct frontieră accesibil* al lui X este un filtru $\mathfrak{R}$ de mulţimi deschise conexe $U \subset X$ cu următoarele proprietăţi:

1. Filtrul $\mathfrak{R}$ nu are nici un punct de acumulare în X.
2. Filtrul de mulţimi $p(U)$, $U \in \mathfrak{R}$ are limita $z_0 \in \mathbb{C}^n$.
3. Pentru orice vecinătate deschisă conexă $V = V(z_0) \subset \mathbb{C}^n$ există exact o singură componentă conexă a lui $p^{-1}(V)$ care se conţine în $\mathfrak{R}$; toate domeniile $U \in \mathfrak{R}$ pot fi obţinute în acest mod, adică pentru orice $U \in \mathfrak{R}$ există o vecinătate $V = V(z_0)$ astfel încât U este o componentă conexă a lui $p^{-1}(V)$.

Totalitatea punctelor frontieră accesibile ale domeniului Riemann (X, p) se numeşte *frontiera accesibilă a domeniului* şi se va nota cu $\breve{\partial} X$.

Punctele frontieră accesibile pot fi descrise şi cu ajutorul şirurilor. Să considerăm familia $\mathcal{S}$ a tuturor şirurilor $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ de puncte din X care au următoarele proprietăţi:

(a) Şirul $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ nu are punct de acumulare în X.

(b) Şirul imaginilor $\{p(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ are limita $z_0 \in \mathbb{C}^n$.

(c) Pentru orice vecinătate deschisă conexă $V = V(z_0) \subset \mathbb{C}^n$ se poate găsi un rang $k_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât pentru orice $k \geq k_0$ şi orice $l \geq k_0$ punctele x_k şi x_l pot fi unite cu un drum continuu $\gamma_{k,l} : [0,1] \to X$, astfel încât

$$p \circ \gamma([0,1]) \subset V, \quad \gamma_{k,l}(0) = x_k \quad \text{şi} \quad \gamma_{k,l}(1) = x_l.$$

Două şiruri $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ şi $\{x'_k\}_{k=1}^{\infty}$ din $\mathcal{S}$ se numesc *echivalente* dacă:

1) $\lim\limits_{k\to\infty} p(x_k) = \lim\limits_{k\to\infty} p(x'_k) = z_0 \in \mathbb{C}^n$.

2) Pentru orice vecinătate deschisă conexă $V = V(z_0) \subset \mathbb{C}^n$ se poate găsi un rang $k_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât pentru orice $k \geq k_0$ şi orice $l \geq k_0$ punctele x_k şi x'_l pot fi unite cu un drum continuu $\gamma_{k,l} : [0,1] \to X$, astfel încât

$$p \circ \gamma([0,1]) \subset V, \quad \gamma_{k,l}(0) = x_k \quad \text{şi} \quad \gamma_{k,l}(1) = x'_l.$$

Vom nota clasa de echivalenţă a astfel de şiruri cu σ_{z_0}.

Definiţia 2.7. Fie (X, p) un domeniu Riemann. Vom numi *punct frontieră accesibil* pentru X o clasă de echivalenţă $\sigma_{z_0} = [x_k]$.

Chiar în cazul când X este un domeniu din $\mathbb{C}^n$, frontiera accesibilă $\breve{\partial} X$ poate să difere de frontiera topologică ∂X. Totodată, un punct frontieră accesibil poate fi limita a două şiruri inechivalente.

Vom nota domeniul Riemann extins cu $\breve{X} := X \cup \breve{\partial} X$ şi vom defini o topologie pe $\breve{X}$ în felul următor.

Dacă $x \in X$, atunci se consideră vecinătăţile din topologia lui X. Dacă $x_0 \in \breve{\partial} X$ este un punct frontieră accesibil, atunci vecinătatea $\breve{U}$ a punctului x_0 se defineşte în felul următor:

Considerăm o mulţime deschisă conexă $U \subset X$ astfel încât:

(i) U conţine aproape toate punctele oricărui şir $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ din clasa de echivalenţă $x_0 = \sigma_{z_0}$.

(ii) Există o vecinătate deschisă conexă $V = V(z_0) \subset \mathbb{C}^n$ astfel încât U este o componentă conexă a lui $p^{-1}(V)$.

Apoi adăugăm la U toate punctele frontieră accesibile $x = \sigma_z$ astfel încât aproape toate punctele oricărui şir din σ_z sunt conţinute în U şi z este un punct de acumulare pentru $p(U)$.

Prelungim la $\breve{X}$ aplicaţia p, definind aplicaţia de proiecţie $\breve{p} : \breve{X} \to \mathbb{C}^n$ astfel:

$$\breve{p}(x) := \begin{cases} p(x), & \text{dacă } \; x \in X, \\ \lim\limits_{k \to \infty} p(x_k), & \text{dacă } \; x = [x_k] \in \breve{\partial} X. \end{cases}$$

Remarca 2.1. *Orice şir de puncte $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ din X care satisface condiţiile (b) şi (c) de mai sus are un punct de acumulare în $\breve{X}$.*

Într-adevăr, dacă $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ are un punct de acumulare în X, atunci afirmaţia este trivială. Dacă însă şirul $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ nu are nici un punct de acumulare în X, atunci el defineşte o clasă de şiruri echivalente, adică un punct frontieră accesibil $x = [x_k] \in \breve{\partial} X$.

În [72] se arată că domeniile X şi $\breve{X}$ posedă baze numărabile de mulţimi deschise. Domeniul Riemann $\breve{X}$ este regulat.

În cele ce vor urma, vom avea nevoie de următoarele proprietăţi ale domeniilor Riemann extinse ale căror demonstraţii le vom reaminti.

Propoziţia 2.1. *a) Domeniul Riemann extins $\breve{X}$ este un spaţiu Hausdorff.*

b) Aplicaţia $\breve{p} : \breve{X} \to \mathbb{C}^n$ este continuă pe $\breve{X}$.

Demonstraţie. a) Deoarece X este un spaţiu Hausdorff trebuie să verificăm doar că orice punct din X se separă de orice punct din $\breve{\partial} X$ şi orice două puncte din $\breve{\partial} X$ pot fi separate.

Deoarece nici un şir din $x_0 \in \breve{\partial} X$ nu are puncte de acumulare în X deducem că orice punct din X se separă de orice punct din $\breve{\partial} X$.

Fie $x_0 \neq y_0$ două puncte din $\breve{\partial} X$. Dacă $\breve{p}(x_0) \neq \breve{p}(y_0)$, atunci afirmaţia este trivială. Dacă însă $\breve{p}(x_0) = \breve{p}(y_0)$, atunci considerăm o vecinătate V_0 a punctului z_0, astfel încât pentru orice şiruri $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in x_0$ şi $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \in y_0$ să avem că $\lim\limits_{k\to\infty} p(x_k) = \lim\limits_{k\to\infty} p(y_k) = z_0 \in \mathbb{C}^n$ şi pentru orice rang $k \in \mathbb{N}^*$ se pot găsi indicii $k_0 > k$ şi $l_0 > k$ astfel încât punctele x_{k_0} şi y_{l_0} nu pot fi unite în X cu un drum continuu proiecţia căruia să se conţină în V_0. Fie $\breve{U}_0$ o vecinătate a lui x_0 astfel încât U_0 să fie o componentă conexă a vecinătăţii $V_0' \subset V_0$ a lui z_0. Evident că $y_0 \notin \breve{U}_0$. Şi fie $\breve{W}_0$ o vecinătate a lui y_0 astfel încât W_0 să fie o componentă conexă a vecinătăţii $V_0'' \subset V_0$ a lui z_0. Avem că $x_0 \notin \breve{W}_0$. Să ne convingem că $\breve{U}_0 \cap \breve{W}_0 = \emptyset$. Într-adevăr, dacă admitem contrariul, putem fixa un punct x în $U_0 \cap W_0$ şi considera k atât de mare încât punctele x_{k_0} şi y_{l_0} să se conţină în U_0 şi W_0 corespunzător. Atunci putem uni cu un drum continuu în U_0 punctele x_{k_0} şi x, precum şi în W_0 punctele x şi y_{l_0}. În rezultat obţinem un drum continuu în X care uneşte x_{k_0} şi y_{l_0}, proiecţia căruia se conţine în V_0, ceea ce contrazice ipoteza. Deci $\breve{U}_0 \cap \breve{W}_0 = \emptyset$. Prin urmare $\breve{X}$ este un spaţiu Hausdorff.

b) Evident că $\breve{p}\mid_X = p$ şi deci este continuă. Fie $x_0 \in \breve{\partial} X$ şi să arătăm că $\breve{p}$ este continuă în x_0. Fie V o vecinătate arbitrară a punctului $z_0 = \breve{p}(x_0)$ şi fie V_1 o altă vecinătate deschisă conexă a lui z_0, astfel încât $\overline{V_1} \subset V$.

Notăm cu U componenta conexă a lui $p^{-1}(V_1)$ care conţine aproape toate punctele din $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \sigma_{z_0}$. Adăugăm la U punctele σ_z cu $z \in \overline{V_1}$. Obţinem o vecinătate a lui z_0, fie $\breve{U}$, pentru care avem $\breve{p}(\breve{U}) \subset V$. Deci $\breve{p}$ este continuă în x_0 şi cum x_0 a fost fixat în mod arbitrar în $\breve{\partial} X$, deducem că $\breve{p}$ este continuă pe $\breve{X}$.

$\square$

Propoziţia 2.2. *Fie $p : X \to \mathbb{C}^n$ un domeniu Riemann neramificat. Pentru orice punct $x_0 \in \breve{\partial} X$ există un drum continuu $\alpha : [0,1] \to \breve{X}$ astfel încât $\alpha(1) = x_0$ şi $\alpha([0,1)) \subset X$.*

Demonstraţie. Fie $z_0 = \breve{p}(x_0) \in \mathbb{C}^n$ şi fie $V = V(z_0) \subset \mathbb{C}^n$ o vecinătate deschisă şi conexă a lui z_0 care defineşte o vecinătate $\breve{U}$ a punctului x_0, adică $\breve{U} \cap X = U$ este o componentă conexă a lui $p^{-1}(V)$.

Fie $\{V_s\}_{s=0}^{\infty}$ un şir de vecinătăţi deschise conexe ale lui z_0 cu $V_{s+1} \subset V_s \subset V$ pentru toţi $s = 0, 1, \ldots$ şi care formează o bază de vecinătăţi a lui z_0. Notăm cu U_s componenta conexă a lui $p^{-1}(V_s)$ care se conţine în U. Evident că pentru toţi $s = 0, 1, \ldots$ avem $U_{s+1} \subset U_s$. Pentru fiecare $s \geq 0$ fixăm arbitrar câte un punct $x_s \in U_s$. Orice două puncte x_s şi x_{s+1} pot fi unite cu un drum continuu $\alpha_s : \left[1 - \frac{1}{2^s}, 1 - \frac{1}{2^{s+1}}\right] \to U_s$ cu $\alpha_s\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) = x_s$ şi $\alpha_s\left(1 - \frac{1}{2^{s+1}}\right) = x_{s+1}$. Definim drumul $\alpha : [0, 1] \to \breve{X}$ în felul următor,

$$\alpha \mid_{\left[1-\frac{1}{2^s}, 1-\frac{1}{2^{s+1}}\right]} = \alpha_s, \quad s = 0, 1, \ldots \quad \text{şi} \quad \alpha(1) = x_0.$$

Continuitatea drumului α pe $[0, 1)$ este evidentă. Să verificăm că α este continuu şi în $t = 1$. Conform definiţiei topologiei în $\breve{X}$, pentru orice vecinătate $\breve{U}^* \subset \breve{X}$ a punctului $x_0 \in \breve{\partial} X$ există o vecinătate deschisă conexă $V^* = V^*(z_0) \subset \mathbb{C}^n$ astfel încât $U^* = \breve{U}^* \cap X$ este o componentă conexă a lui $p^{-1}(V^*)$. Deoarece $\{V_s\}_{s=0}^{\infty}$ este o bază de vecinătăţi a lui z_0, se va găsi un rang s_0 suficient de mare astfel încât pentru toţi $s > s_0$ să avem $V_s \subset V^*$. Dar atunci $\breve{U}_s \subset \breve{U}^*$. Prin urmare $\alpha\left(\left[1 - \frac{1}{2^s}, 1\right]\right) \subset \breve{U}^*$ pentru orice $s > s_0$, ceea ce demonstrează afirmaţia.

$\square$

Propoziţia 2.3 ([24]). *Fie T un spaţiu topologic local conex şi $S \subset T$ o submulţime nicăieri densă şi care nicăieri nu disconectează T. Fie $p : X \to M$ un domeniu Riemann peste o varietate complexă M şi $\tau : T \setminus S \to X$ o aplicaţie continuă astfel încât $p \circ \tau$ se prelungeşte la o aplicaţie continuă pe tot spaţiul T. Atunci τ în mod unic se prelungeşte la o aplicaţie continuă $\breve{\tau} : T \to \breve{X}$.*

Observăm că, dacă vom lua în calitate de T segmentul $[0, 1]$, iar $S = \{1\}$ vom obţine următorul rezultat.

Propoziţia 2.4. *Fie $p : X \to M$ un domeniu Riemann peste o varietate complexă M. Dacă $\alpha : [0, 1) \to X$ este un drum continuu în X astfel încât $p \circ \alpha$ poate fi prelungită la o aplicaţie continuă de la segmentul $[0, 1]$ în M, atunci şi drumul α în mod unic poate fi prelungit în $\breve{X}$ la un drum $\breve{\alpha} : [0, 1] \to \breve{X}$.*

Propoziţiile (2.2) şi (2.4) argumentează denumirea de „accesibile” pentru punctele x din $\breve{\partial} X$.

2.2 Eclatatul spaţiului $\mathbb{C}^{n+1}$ de-a lungul unui subspaţiu liniar

În prima parte a acestei secţiuni vom descrie succint construcţia eclatatului spaţiului $\mathbb{C}^{n+1}$ în origine, iar în partea a doua vom explica construcţia eclatatului lui $\mathbb{C}^{n+1}$ de-a lungul unui subspaţiu liniar, urmând în special sursele [46] şi [69].

Fie $z_0, z_1, \ldots, z_n$ coordonatele euclidiene în $\mathbb{C}^{n+1}$ şi $[\xi_0 : \xi_1 : \ldots : \xi_n]$ coordonatele omogene în spaţiul proiectiv $\mathbb{P}^n$. Notăm cu $\omega : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n$ proiecţia canonică, care fiecărei drepte d_z, care trece prin punctul z şi origine, îi asociază un element $\xi = \omega(z) = [z]$ al spaţiului $\mathbb{P}^n$, iar un element $\xi \in \mathbb{P}^n$, la rândul său, determină dreapta $l(\xi) = \omega^{-1}(\xi) \cup \{0\}$ astfel încât $d_z = l(\omega(z))$.

Vom considera produsul $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{P}^n$. Submulţimile închise în $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{P}^n$ sunt definite de anularea de sisteme de polinoame de variabile z_i, ξ_j, omogene în raport cu variabilele ξ_j.

Definiţia 2.8 ([46]). Vom numi *eclatatul lui* $\mathbb{C}^{n+1}$ *în originea* O submulţimea închisă $\tilde{\mathbb{C}}^{n+1}$ din $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{P}^n$, definită de sistemul de ecuaţii

$$z_i \xi_j = z_j \xi_i,\ i, j = 0, 1, \ldots, n. \tag{2.1}$$

Relaţiile (2.1) pot fi scrise şi în forma $z \in l(\xi)$, adică relaţiile care definesc eclatatul $\tilde{\mathbb{C}}^{n+1}$ exprimă relaţia de incidenţă

$$\{(z, \xi) \in \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{P}^n \mid z \in l(\xi)\}.$$

Pe eclatatul $\tilde{\mathbb{C}}^{n+1}$ în mod natural se defineşte un morfism $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$, ca fiind restricţia la $\tilde{\mathbb{C}}^{n+1}$ a aplicaţiei de proiecţie pe primul cofactor $\mathrm{pr}_1 : \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{C}^{n+1}$, anume $\pi(z, [\xi]) = z$. Astfel, avem

$$\begin{tikzcd} \tilde{\mathbb{C}}^{n+1} \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{P}^n \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ & \mathbb{C}^{n+1} \end{tikzcd}$$

Să enumărăm unele proprietăţi ale aplicaţiei π.

1. Dacă $P \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{O\}$, atunci $\pi^{-1}(P)$ constă dintr-un singur punct.

Într-adevăr, fie $P = (p_0, p_1, \ldots, p_n)$ cu $p_i \neq 0$ pentru un anumit $i = 0, 1, \ldots, n$. Dacă $P \times [\xi_0 : \xi_1 : \ldots : \xi_n] \in \pi^{-1}(P)$, atunci pentru toţi $j = 0, 1, \ldots, n$ avem

$$p_i \xi_j = p_j \xi_i,\ j = 0, 1, \ldots, n \quad \Longleftrightarrow \quad \xi_j = \frac{p_j}{p_i} \xi_i,\ j = 0, 1, \ldots, n.$$

Aşadar, punctul $[\xi_0 : \xi_1 : \ldots : \xi_n]$ în $\mathbb{P}^n$ este unic determinat şi anume $[\xi_0 : \xi_1 : \ldots : \xi_n] = [p_0 : p_1 : \ldots : p_n]$. Deci, $\pi^{-1}(P) = P \times [p_0 : p_1 : \ldots : p_n]$ constă dintr-un singur punct. Astfel, pentru orice punct $P \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{O\}$ putem pune $\psi(P) = P \times [p_0 : p_1 : \ldots : p_n]$, adică putem defini un morfism $\psi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{O\} \to \tilde{\mathbb{C}}^{n+1} \setminus \pi^{-1}(O)$, invers morfismului π. Prin urmare, $\tilde{\mathbb{C}}^{n+1} \setminus \pi^{-1}(O)$ este izomorf cu $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{O\}$. Punctul O se numeşte *centrul eclatatului.*

2. În originea $O = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{C}^{n+1}$ ecuaţiile (2.1) sunt satisfăcute pentru orice valori $\xi_i, i = 0, 1, \ldots, n$. Prin urmare, $\pi^{-1}(O)$ constă din toate punctele de forma $\{O\} \times Q$, unde $Q = [\xi_0 : \xi_1 : \ldots : \xi_n] \in \mathbb{P}^n$, fără nici o restricţie suplimentară. Prin urmare, $\pi^{-1}(O) \cong \mathbb{P}^n$, adică fibra peste O este izomorfă cu $\mathbb{P}^n$. Preimaginea originii, $E = \pi^{-1}(O) \subset \tilde{\mathbb{C}}^{n+1}$, se numeşte *divizorul excepţional al eclatatului.*

3. Punctele din $\pi^{-1}(O)$ sunt într-o corespondenţă bijectivă cu mulţimile dreptelor care trec prin origine în $\mathbb{C}^{n+1}$.

Într-adevăr, o dreaptă d_P care trece prin origine în $\mathbb{C}^{n+1}$ poate fi definită parametric de ecuaţiile $z_i = p_i t, i = 0, 1, \ldots, n$, unde $P = (p_0, p_1, \ldots, p_n) \neq O$, $t \in \mathbb{C}$.

Considerăm dreapta $d'_P = \pi^{-1}(d_P \setminus \{O\}) \subset \tilde{\mathbb{C}}^{n+1} \setminus \pi^{-1}(O)$. Ea este definită parametric de ecuaţiile $z_i = p_i t$, $\xi_i = p_i t$, $t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Deoarece $[\xi_0 : \xi_1 : \ldots : \xi_n]$ sunt coordonatele omogene în $\mathbb{P}^n$, putem lua $\xi_i = p_i$ şi prin urmare dreapta d'_P se defineşte de ecuaţiile $z_i = p_i t$, $\xi_i = p_i$, $t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Aceste ecuaţii au sens şi pentru $t = 0$ şi ne dau închiderea $\overline{d'_P}$ a dreptei d'_P în eclatatul $\tilde{\mathbb{C}}^{n+1}$. Observăm că $\overline{d'_P}$ intersectează mulţimea excepţională $\pi^{-1}(O)$ într-un singur punct $[p_0 : p_1 : \ldots : p_n] \in \mathbb{P}^n$. Prin urmare, punându-i în corespondenţă dreptei d_P punctul $\omega(P) \in \mathbb{P}^n$, stabilim o corespondenţă bijectivă dintre dreptele care trec prin origine în $\mathbb{C}^{n+1}$ şi punctele mulţimii excepţionale.

4. Eclatatul $\tilde{\mathbb{C}}^{n+1}$ este conex.

Aceasta rezultă din faptul că

$$\tilde{\mathbb{C}}^{n+1} = (\tilde{\mathbb{C}}^{n+1} \setminus \pi^{-1}(O)) \cup \pi^{-1}(O),$$

şi deoarece $\tilde{\mathbb{C}}^{n+1} \setminus \pi^{-1}(O)$ este izomorf cu $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{O\}$, deducem că $\tilde{\mathbb{C}}^{n+1} \setminus \pi^{-1}(O)$ este conex. După cum am arătat mai sus, fiecare punct din $\pi^{-1}(O)$ este conţinut în închiderea unei submulţimi (a dreptei d'_P) din $\tilde{\mathbb{C}}^{n+1} \setminus \pi^{-1}(O)$, adică $\tilde{\mathbb{C}}^{n+1} \setminus \pi^{-1}(O)$ este densă în $\tilde{\mathbb{C}}^{n+1}$, de unde rezultă conexiunea lui $\tilde{\mathbb{C}}^{n+1}$.

Să descriem în continuare construcţia eclatatului de-a lungul unui subspaţiu liniar.

Fie U un polidisc $(n+1)$-dimensional şi $z = (z_0, z_1, \ldots, z_n)$ coordonatele euclidiene. Fie L un subspaţiu liniar k-dimensional definit de ecuaţiile

$$z_k = z_{k+1} = \ldots = z_n = 0.$$

Notăm cu $[\xi_k : \xi_{k+1} : \ldots \xi_n]$ coordonatele omogene în $\mathbb{P}^{n-k}$. Considerăm produsul $U \times \mathbb{P}^{n-k}$ şi în el varietatea netedă $\tilde{U} \subset U \times \mathbb{P}^{n-k}$, definită de relaţiile

$$\tilde{U} := \{(z, [\xi]) \in U \times \mathbb{P}^{n-k} \mid z_i \xi_j = z_j \xi_i,\ k \leq i, j \leq n\}.$$

Morfismul $\pi : \tilde{U} \to U$, definit ca restricţia la $\tilde{U}$ a aplicaţiei de proiecţie pe primul cofactor $\mathrm{pr}_1 : U \times \mathbb{P}^{n-k} \to U$ este un izomorfism pe $\tilde{U} \setminus \pi^{-1}(L)$, iar preimaginea oricărui punct $z \in L$ este întreg spaţiul proiectiv $\mathbb{P}^{n-k}$, adică $\pi^{-1}(L) = L \times \mathbb{P}^{n-k}$ şi se numeşte *divizorul excepţional al lui* $\tilde{U}$. Varietatea $\tilde{U}$ împreună cu aplicaţia $\pi : \tilde{U} \to U$ se numeşte *eclatatul lui U de-a lungul subspaţiului L.*

Varietatea $\tilde{U}$ poate fi acoperită cu hărţile de coordonate

$$U_j = \{(z, [\xi]) \in U \times \mathbb{P}^{n-k} \mid \xi_j \neq 0\},\ j = k, k+1, \ldots, n,$$

cu coordonatele olomorfe pe U_j definite astfel:

$$z_i^{(j)} = z_i, \quad \text{pentru} \quad i = 0, 1, \ldots, k-1;$$
$$z_i^{(j)} = \frac{\xi_i}{\xi_j} = \frac{z_i}{z_j}, \quad \text{pentru} \quad i = k, \ldots, \hat{j}, \ldots, n;$$
$$z_j^{(j)} = z_j.$$

Coordonatele $\{z_i^{(j)}\}$ sunt coordonatele euclidiene pe fiecare fibră $\pi^{-1}(P) \cong \mathbb{P}^{n-k}$ a divizorului excepţional. Se poate arăta că eclatatul $\pi : \tilde{U} \to U$ nu depinde de alegerea coordonatelor în U.

În cazul general, eclatatul unei varietăţi complexe $(n+1)$-dimensionale M de-a lungul unei subvarietăţi $X \subset M$ de dimensiune k se construieşte astfel. Considerăm în M o colecţie de polidiscuri $\{U_\alpha\}$ care acoperă varietatea X, astfel încât pe fiecare polidisc U_α, subvarietatea $U_\alpha \cap X$ poate fi definită de ecuaţiile $z_k = \ldots = z_n = 0$. Fie $\pi_\alpha : \tilde{U}_\alpha \to U_\alpha$ eclatatul lui U_α de-a lungul lui $X \cap U_\alpha$. Eclatatul $\tilde{U}$ se construieşte prin procedeul de „lipire", $\pi : \tilde{U} \to \cup U_\alpha$. Deoarece π este un izomorfism în exteriorul lui $X \cap (\cup U_\alpha)$, putem construi varietatea

$$\tilde{M} = \tilde{U} \cup_\pi (M \setminus X).$$

Varietatea $\tilde{M}$, împreună cu aplicaţia $\pi : \tilde{M} \to M$, care prelungeşte π pe $\tilde{U}$ şi este aplicaţia identică pe $M \setminus X$ se numeşte *eclatatul lui M de-a lungul subvarietăţii X,* iar mulţimea $A = \pi^{-1}(X)$ se numeşte *divizorul excepţional al eclatatului.* Astfel, divizorul excepţional, $A = \pi^{-1}(X)$, este un fibrat peste X cu fibra $\mathbb{P}^{n-k}$.

2.3 Problema Levi pentru eclatatul lui $\mathbb{C}^{n+1}$ de-a lungul unui subspaţiu liniar

În acest paragraf se va stabili o condiţie necesară şi suficientă pentru ca o submulţime deschisă local Stein a eclatatului lui $\mathbb{C}^{n+1}$ de-a lungul unui subspaţiu liniar k-dimensional al său să fie Stein.

Definiţia 2.9 ([55]). O varietate complexă X se numeşte *varietate Stein* dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:

i) Varietatea X este olomorf convexă, adică pentru orice submulţime compactă $K \subset X$ anvelopa olomorf convexă

$$\hat{K} := \{x \in X : |f(x)| \leq \sup_X |f| \quad \text{pentru orice} \quad f \in \mathcal{O}(X)\}$$

este o submulţime compactă a lui X.

ii) Varietatea X este olomorf separabilă, adică pentru orice două puncte distincte x şi y din X, se poate găsi o funcţie olomorfă $f \in \mathcal{O}(X)$ cu $f(x) \neq f(y)$.

iii) Funcţiile olomorfe pe X definesc coordonatele locale în fiecare punct, adică pentru orice punct $x \in X$ se poate găsi un sistem de funcţii olomorfe pe X, $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathcal{O}(X)$, care definesc coordonatele locale într-o vecinătate a lui x.

Faptul că X este olomorf convexă este echivalent cu satisfacerea următoarei condiţii: pentru orice şir de puncte $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, discret în X, există o funcţie olomorfă $f \in \mathcal{O}(X)$, astfel încât mulţimea $\{|f(x_k)| : k \in \mathbb{N}^*\}$ este nemărginită.

K. Oka [64] a studiat domeniile Riemann neramificate peste $\mathbb{C}^n$, $p : X \to \mathbb{C}^n$ (aici proiecţia p este local biolomorfă) şi a arătat că X este Stein dacă şi numai dacă funcţia $-\ln d_X(x)$ este plurisubarmonică pe X, unde $d_X(x)$ este funcţia distanţă la frontieră pe X.

O consecinţă importantă a rezultatelor lui K. Oka este faptul că proprietatea unui domeniu Riemann X de a fi Stein este o proprietate locală a frontierei lui X.

Definiţia 2.10. Fie X şi Y două varietăţi complexe. O aplicaţie olomorfă $p : X \to Y$ se numeşte *morfism Stein* dacă pentru orice punct $y \in Y$ există o vecinătate $V = V(y)$ astfel încât $p^{-1}(V)$ este Stein.

Dacă în particular p este aplicaţia de incluziune $i : X \to Y$ şi X este o submulţime deschisă din Y, atunci X se numeşte *local Stein în* Y dacă aplicaţia i este un morfism Stein, sau echivalent, fiecare punct frontieră $x \in \partial X$ are o vecinătate $V = V(x)$ astfel încât $V \cap X$ este Stein.

Astfel, din teorema lui K. Oka imediat rezultă că o submulţime deschisă $D \subset \mathbb{C}^n$ este Stein dacă şi numai dacă ea este local Stein.

Natural apare întrebarea, dacă acest rezultat este valabil în cazul general al unui spaţiu Stein Y în loc de $\mathbb{C}^n$.

Rezultatele obţinute de către K. Oka au servit drept impuls pentru o serie de cercetări în acest domeniu. Pe parcursul ultimilor câteva decenii, au fost stabilite diverse rezultate fundamentale referitoare la problema Levi.

O trecere în revistă a rezultatelor principale şi a problemelor deschise ce ţin de teoria spaţiilor Stein este realizată de către M. Colţoiu în [15]. Lucrarea [16] conţine o descriere detaliată a istoriei diverselor forme ale problemei Levi şi se discută problema Levi în cazul singular.

R. Fujita [32] şi A. Takeuchi [70] au demonstrat un rezultat similar cu cel al lui K. Oka pentru cazul spaţiilor proiective complexe şi anume, că un domeniu local Stein peste $\mathbb{P}^n$ este Stein ori coincide cu $\mathbb{P}^n$.

În [24] F. Docquier şi H. Grauert au studiat domeniile Riemann neramificate peste varietăţile Stein şi, în particular, au arătat că orice submulţime deschisă D local Stein a unei varietăţi Stein este Stein.

M. Colţoiu şi C. Joiţa în [19] au studiat problema Levi în cazul eclatatului şi au arătat că o submulţime deschisă local Stein a eclatatului lui $\mathbb{C}^{n+1}$ în origine este Stein atunci şi numai atunci când ea nu conţine o submulţime de forma $U \setminus A$, unde A este divizorul excepţional al eclatatului şi U este o vecinătate deschisă a lui A.

Motivaţi de această lucrare, vom investiga problema Levi în cazul eclatatului de-a lungul unui subspaţiu liniar şi anume vom arăta că în condiţii geometrice similare o submulţime deschisă local Stein D a eclatatului lui $\mathbb{C}^{n+1}$ de-a lungul unui subspaţiu liniar k-dimensional L este Stein.

Fie L un subspaţiu liniar k-dimensional al lui $\mathbb{C}^{n+1}$. Vom nota cu X eclatatul lui $\mathbb{C}^{n+1}$ de-a lungul lui L, iar cu A vom nota divizorul excepţional al lui X, anume $A = L \times \mathbb{P}^{n-k}$. Presupunem că D este o submulţime deschisă local Stein a lui X.

Vom spune că o submulţime deschisă D a eclatatului X *satisface condiţia* (P) dacă există un punct t_0 în L şi o vecinătate deschisă U a lui $t_0 \times \mathbb{P}^{n-k}$ astfel încât $U \setminus A$ este conţinută în D.

Teorema 2.1 ([35]). *O submulţime deschisă local Stein D a eclatatului X este Stein dacă şi numai dacă condiţia (P) nu este satisfăcută.*

În demonstraţia acestei afirmaţii vom aplica aceeaşi tehnică ca şi în [19]. Avem nevoie de noţiunea de punct frontieră eliminabil.

Definiţia 2.11. Fie M o varietate complexă, $A \subset M$ o submulţime analitică de codimensiune pozitivă, iar D o submulţime deschisă din $M \setminus A$. Un punct frontieră $z \in \partial D \cap A$ se numeşte *eliminabil de-a lungul lui A* dacă există o vecinătate deschisă U a punctului z astfel încât $U \setminus A$ este conţinută în D.

Un rol esenţial în demonstraţie îl are următoarea lemă, care este o generalizare a rezultatelor din [39] şi [73].

Lema 2.1 ([19], Lemma 2). *Fie M o varietate Stein şi fie A o submulţime analitică închisă de codimensiune pozitivă din M, iar $D \subset M \setminus A$ o submulţime deschisă. Dacă D este local Stein în fiecare punct $z \in \partial D \setminus A$ şi dacă nici un punct frontieră $z \in \partial D \cap A$ nu este eliminabil de-a lungul lui A, atunci D este Stein.*

Demonstraţia Teoremei 2.1. Deoarece X este eclatatul lui $\mathbb{C}^{n+1}$ de-a lungul subspaţiului liniar L, el este de fapt un fibrat în drepte olomorf peste $L \times \mathbb{P}^{n-k}$. Să notăm cu

$$\pi : X \to L \times \mathbb{P}^{n-k}$$

proiecţia corespunzătoare a fibratului vectorial.

Fie $t_1, t_2, \ldots, t_k$ funcţiile de coordonate în L şi să notăm cu $t = (t_1, t_2, \ldots, t_k) \in L$. Fie $z_0, z_1, \ldots, z_{n-k}$ funcţiile de coordonate în $\mathbb{C}^{n-k+1}$ şi vom nota

$$z = (z_0, z_1, \ldots, z_{n-k}) \in \mathbb{C}^{n-k+1} \setminus \{0\}, \quad [z] = [z_0 : z_1 : \ldots : z_{n-k}] \in \mathbb{P}^{n-k}.$$

Pentru $i = 0, 1, \ldots, n-k$ construim mulţimile

$$U_i = \{(t, [z]) \in L \times \mathbb{P}^{n-k} \mid z_i \neq 0\}.$$

Să notăm trivializările locale cu

$$\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{C}, \ i = 0, 1, \ldots, n-k.$$

Pentru orice punct $(t, [z], \lambda) \in (U_j \cap U_i) \times \mathbb{C}$ avem

$$\left(\psi_j \circ \psi_i^{-1}\right)(t, [z], \lambda) = \left(t, [z], \frac{z_j}{z_i}\lambda\right). \tag{2.2}$$

Pentru $i = 0, 1, \ldots, n-k$ considerăm mulţimile

$$W_i = \{(t, z, \lambda) \in L \times (\mathbb{C}^{n-k+1} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C} \mid z_i \neq 0\}.$$

Să definim o aplicaţie olomorfă $F : (L \times (\mathbb{C}^{n-k+1} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}) \to X$, în modul următor, pentru $(t, z, \lambda) \in W_i$ considerăm

$$F(t, z, \lambda) = \psi_i^{-1}(t, [z], z_i\lambda).$$

Observăm că pentru orice $(t, [z], \lambda) \in (U_j \cap U_i) \times \mathbb{C}$ din relaţia (2.2) rezultă că

$$(\psi_j \circ \psi_i^{-1})(t, [z], z_i\lambda) = (t, [z], z_j\lambda)$$

şi prin urmare

$$\psi_i^{-1}(t, [z], z_i\lambda) = \psi_j^{-1}(t, [z], z_j\lambda),$$

ceea ce demonstrează că aplicaţia F este bine definită. În afară de aceasta, deoarece aplicaţia

$$(t, z, \lambda) \in W_i \to (t, [z], z_i\lambda) \in U_i \times \mathbb{C}$$

este o surjecţie, deducem că $F|_{W_i} : W_i \to \pi^{-1}(U_i)$, de asemenea este surjectivă.

Vom verifica faptul că F este un fibrat local trivial peste X cu fibra $\mathbb{C}^*$ şi că funcţiile de tranziţie sunt liniare pe fiecare fibră.

Pentru $i = 0, 1, \dots, n-k$ vom nota cu

$$\Phi_i : W_i \to \pi^{-1}(U_i) \times \mathbb{C}^*, \quad \Phi_i(t, z, \lambda) = (F(t, z, \lambda), z_i)$$

şi afirmăm că Φ_i sunt trivializările locale ale acestui fibrat.

Trebuie să verificăm că aplicaţiile Φ_i sunt inversabile şi să calculăm $\Phi_j \circ \Phi_i^{-1}$. Cu acest scop, pentru fiecare $i = 0, 1, \dots, n-k$ definim aplicaţiile

$$\tilde{\Phi}_i : W_i \to (U_i \times \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*, \quad \tilde{\Phi}_i(t, z, \lambda) = ((t, [z], z_i\lambda), z_i)$$

şi

$$\chi_i : (U_i \times \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^* \to \pi^{-1}(U_i) \times \mathbb{C}^*, \quad \chi_i((t, [z], \lambda), \mu) = (\psi_i^{-1}(t, [z], \lambda), \mu).$$

Observăm că $\Phi_i = \chi_i \circ \tilde{\Phi}_i$.

Aplicaţiile $\tilde{\Phi}_i$ sunt inversabile şi pentru orice $((t, [z], \lambda), \mu) \in (U_i \times \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*$ avem

$$\tilde{\Phi}_i^{-1}((t, [z], \lambda), \mu) = \left(t, \frac{\mu}{z_i} z, \frac{\lambda}{\mu}\right). \tag{2.3}$$

Aplicaţiile χ_i de asemenea sunt inversabile şi pentru orice $(\zeta, \mu) \in \pi^{-1}(U_i) \times \mathbb{C}^*$ avem

$$\chi_i^{-1}(\zeta, \mu) = (\psi_i(\zeta), \mu). \tag{2.4}$$

Prin urmare şi aplicaţiile Φ_i sunt inversabile şi din relaţiile (2.2), (2.3) şi (2.4) rezultă că, pentru orice $(\zeta, \mu) \in \pi^{-1}(U_j \cap U_i) \times \mathbb{C}^*$, dacă $\pi(\zeta) = (t, [z])$, atunci

$$\left(\Phi_j \circ \Phi_i^{-1}\right)(\zeta, \mu) = \left(\zeta, \frac{z_j}{z_i}\mu\right)$$

şi deci Φ_i sunt trivializările locale ale lui F.

Faptul că F este un fibrat local trivial peste X cu fibra $\mathbb{C}^*$ şi cu funcţiile de tranziţie liniare este echivalent cu existenţa unui fibrat în drepte olomorf $\tilde{F} : Z \to X$, astfel încât $Z \setminus Z_0 = L \times (\mathbb{C}^{n-k+1} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}$ unde Z_0 este secţiunea nulă şi

$$F = \tilde{F}|_{L \times (\mathbb{C}^{n-k+1} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}}.$$

Fie D o submulţime deschisă din X care este local Stein, dar care nu este Stein. Atunci, conform Lemei 1 din [19], submulţimea deschisă $F^{-1}(D)$ din $L \times \mathbb{C}^{n-k+1} \times \mathbb{C}$ este local Stein în fiecare punct din $(\partial F^{-1}(D)) \setminus (L \times \{0\} \times \mathbb{C})$ şi nu este Stein. De aici, în baza Lemei 2.1 deducem că există un punct frontieră $P \in (\partial F^{-1}(D)) \cap (L \times \{0\} \times \mathbb{C})$ care este eliminabil de-a lungul lui $L \times \{0\} \times \mathbb{C}$. Prin urmare, există $t_0 \in L$ şi $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ astfel încât

$$P = (t_0, 0, \lambda_0) \in (\partial F^{-1}(D)) \cap (L \times \{0\} \times \mathbb{C}) \subset L \times \mathbb{C}^{n-k+1} \times \mathbb{C}$$

este eliminabil de-a lungul lui $L \times \{0\} \times \mathbb{C}$. Atunci, conform Definiţiei 2.11, există o $\varepsilon-$vecinătate a punctului P astfel încât

$$\begin{aligned} F^{-1}(D) \supset \{(t, z, \lambda) \in L \times (\mathbb{C}^{n-k+1} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C} : \|t - t_0\| < \varepsilon, \\ |z_j| < \varepsilon, \forall j = \overline{0, n-k}, |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Vom arăta că D posedă proprietatea (P), adică că D conţine o submulţime deschisă de forma $U \setminus A$, unde A este divizorul excepţional al eclatatului X şi U este o vecinătate deschisă a lui $t_0 \times \mathbb{P}^{n-k}$.

Să notăm cu B bila deschisă

$$B_\varepsilon(t_0) = \{t \in L : \|t - t_0\| < \varepsilon\},$$

iar cu Ω_δ discul deschis punctat $\{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < |\lambda| < \delta\}$. Demonstraţia va fi completă, dacă vom arăta că pentru orice $[z] \in \mathbb{P}^{n-k}$ şi orice $i \in \{0, 1, \ldots, n-k\}$ astfel încât $(t, [z]) \in U_i$ există o mulţime deschisă V în $\mathbb{P}^{n-k}$ şi un număr pozitiv $\delta > 0$ astfel încât $(t, [z]) \in (B \times V)$ şi

$$\psi_i(D \cap \pi^{-1}(U_i)) \supset B \times V \times \Omega_\delta.$$

Fixăm în U_i în mod arbitrar un punct $(t, [\tilde{z}]) \in U_i$ astfel încât $t \in B$. Să alegem un număr pozitiv T astfel încât

$$T > \max\left\{\frac{|\tilde{z}_j|}{|\tilde{z}_i|} : j = 0, 1, \ldots, n-k\right\}.$$

Notăm cu V mulţimea deschisă din $\mathbb{P}^{n-k}$ cu proprietatea că dacă $[w] \in U_i$, atunci $[w] \in V$ şi $\max\left\{\frac{|w_j|}{|w_i|}\right\} < T$. Fixăm în mod arbitrar un punct $\lambda_1 \in \mathbb{C}^*$ astfel încât $|\lambda_1 - \lambda_0| < \varepsilon$ şi luăm $\delta \in \mathbb{R}_+$ astfel încât

$$\delta < \frac{\varepsilon}{T} \cdot |\lambda_1|.$$

Pentru a arăta că $\psi_i(D \cap \pi^{-1}(U_i))$ conţine o submulţime deschisă de forma $B \times V \times \Omega_\delta$, vom considera un punct arbitrar fixat $(t, [w], \nu)$ în $B \times V \times \Omega_\delta$. Fie $\mu = \dfrac{\nu}{\lambda_1}$ şi observăm că $\mu \neq 0$ şi

$$|\mu| = \frac{|\nu|}{\lambda_1} < \frac{\delta}{|\lambda_1|} < \frac{\varepsilon}{T}.$$

Fie $z = \dfrac{\mu}{w_i} \cdot w$. Atunci $z_i = \mu \neq 0$ şi deci $(t, z, \lambda_1) \in W_i$.

Pentru toţi $j = 0, 1, \ldots, n-k$ avem

$$|z_j| = \frac{|\mu \cdot w_j|}{|w_i|} \leq |\mu| \cdot T < \varepsilon,$$

prin urmare $(t, z, \lambda_1) \in F^{-1}(D) \cap W_i$. Astfel

$$F(t, z, \lambda_1) = \psi_i^{-1}(t, [z], z_i\lambda_1) \in (D \cap \pi^{-1}(U_i)).$$

În final obţinem

$$\psi_i(F(t, z, \lambda_1)) = (t, [z], z_i\lambda_1) = (t, [z], \mu\lambda_1) = (t, [w], \nu),$$

ceea ce demonstrează complet afirmaţia.

□

2.4 Problema Levi pentru domenii Riemann peste eclatatul lui $\mathbb{C}^{n+1}$ în origine

În această secţiune vom studia domeniile Riemann neramificate $p : X \to \tilde{\mathbb{C}}^{n+1}$ peste eclatatul lui $\mathbb{C}^{n+1}$ în origine în cazul când p este un morfism Stein şi vom determina condiţiile necesare şi suficiente pentru ca un aşa domeniu să fie Stein. Eclatatul lui $\mathbb{C}^{n+1}$ în origine poate fi privit drept un caz particular de varietate 1-convexă. O serie de rezultate recente referitoare la spaţiile de acoperire ale suprafeţelor 1-convexe pot fi găsite în lucrările [20] şi [21].

După cum am menţionat în paragraful precedent, încă în anul 1953 K. Oka [64] a obţinut soluţia problemei Levi pentru domeniile Riemann neramificate peste $\mathbb{C}^n$ din care rezultă că un domeniu neramificat $p : X \to \mathbb{C}^n$ este Stein dacă şi numai dacă p este un morfism Stein. În scurt timp după aceasta, J. E. Fornaess [28] arată că acest rezultat nu rămâne valabil şi pentru domeniile Riemann ramificate.

În 1960 F. Docquier şi H. Grauert [24] au arătat că dacă $p : Y \to X$ este un domeniu Riemann neramificat peste o varietate Stein X şi p este un morfism Stein, atunci Y este Stein.

T. Ueda [73] a investigat cazul domeniilor Riemann peste varietăţile Grassmann şi a arătat că un domeniu Riemann neramificat pseudoconvex $p : Y \to G_{n,r}$ peste o varietate Grassmann $G_{n,r}$, astfel încât există cel puţin un punct frontieră, adică Y nu este prin p homeomorf cu $G_{n,r}$, este o varietate Stein.

M. Colţoiu şi K. Diederich în [17] au studiat domeniile Riemann peste spaţiile Stein cu singularităţi izolate şi au stabilit că dacă X şi Y sunt spaţii complexe cu singularităţi izolate, $p : Y \to X$ este un domeniu Riemann neramificat, X este un spaţiu Stein şi p este un morfism Stein, atunci Y este de asemenea Stein.

Vom studia problema Levi în cazul domeniului Riemann $p : X \to \tilde{\mathbb{C}}^{n+1}$ peste eclatatul $\tilde{\mathbb{C}}^{n+1}$ al spaţiului $\mathbb{C}^{n+1}$ în origine. Anume, vom da răspuns la următoarea întrebare: Ce condiţie suplimentară trebuie să satisfacă domeniul Riemann $p : X \to \tilde{\mathbb{C}}^{n+1}$, cu p morfism Stein, pentru ca el să fie Stein?

Pentru a răspunde la această întrebare avem nevoie de următoarele noţiuni şi leme ajutătoare.

Definiţia 2.12 ([73]). Un domeniu Riemann $p : X \to \mathbb{C}^n$ se numeşte *pseudoconvex* într-un punct frontieră accesibil $x \in \breve{\partial} X$, dacă se poate găsi o vecinătate $\breve{U}$ a punctului x astfel încât $\breve{U} \cap X$ să fie o varietate Stein.

Un domeniu $p : X \to \mathbb{C}^n$ se numeşte *pseudoconvex* dacă el este pseudoconvex în toate punctele frontieră accesibile.

Definiţia 2.13 ([73]). Fie $S \subset \mathbb{C}^n$ o mulţime analitică de codimensiune pozitivă. Un punct frontieră accesibil x al domeniului Riemann $p : X \to \mathbb{C}^n$ se numeşte *eliminabil de-a lungul lui* S, dacă există o vecinătate $\breve{U}$ a punctului x astfel încât aplicaţia $\breve{p}\,|_{\breve{U}}\colon \breve{U} \to \mathbb{C}^n$ este injectivă şi $\breve{U} \cap \breve{\partial} Y$ este conţinută în $\breve{p}^{-1}(S)$.

Următoarea lemă a fost demonstrată de către T. Ueda în [73].

Lema 2.2. *Fie $S \subset \mathbb{C}^n$ o mulţime analitică de codimensiune pozitivă şi fie $p : X \to \mathbb{C}^n$ un domeniu Riemann neramificat peste $\mathbb{C}^n$. Admitem că X este pseudoconvex în fiecare punct frontieră $x \in \breve{\partial} X$ cu $\breve{p}(x) \in \mathbb{C}^n \setminus S$. Dacă nu există nici un punct frontieră eliminabil de-a lungul lui S, atunci X este Stein.*

Lema 2.3 ([36]). *Fie $S \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$ o mulţime analitică de codimensiune cel puţin egală cu 2 şi fie $p : X \to \mathbb{C}^n$ un domeniu Riemann neramificat peste $\mathbb{C}^n \setminus S$. Presupunem că X este pseudoconvex în fiecare punct frontieră x care se proiectează în $\mathbb{C}^n \setminus S$. Atunci X nu este Stein dacă şi numai dacă există o submulţime deschisă conexă $U \subset X$ şi o submulţime deschisă conexă $V \subset \mathbb{C}^n$ astfel încât $V \cap S \neq \emptyset$ şi aplicaţia $p\,|_U\colon U \to V \setminus S$ este biolomorfă.*

Demonstraţie. *1. Necesitatea.* Admitem că X nu este Stein. Atunci conform Lemei 2.2, se poate găsi un punct frontieră $x^* \in \breve{\partial} X$ eliminabil de-a lungul mulţimii S. Notăm cu $\breve{p}$ extinderea proiecţiei p la $\breve{X} = X \cup \breve{\partial} X$. În acest caz se poate găsi o vecinătate deschisă $\breve{U}_1$ a punctului x^*, $\breve{U}_1 \subset \breve{X}$, astfel încât $\breve{p}\,|_{\breve{U}_1}$ este injectivă şi $\breve{p}(\breve{U}_1 \cap \breve{\partial} X)$ e conţinut în S. Fie $\breve{U}$ o altă vecinătate deschisă a punctului x^*, astfel încât $\overline{\breve{U}} \subset \breve{U}_1$. O astfel de vecinătate $\breve{U}$ există deoarece $\breve{X}$ este regulat.

Să notăm cu $U = \breve{U} \setminus \breve{\partial} X$ şi cu $z^* = \breve{p}(x^*)$, $z^* \in S$. Pentru a demonstra afirmaţia trebuie să arătăm că există o vecinătate deschisă V a lui z^* astfel încât $V \setminus S \subset p(U)$. Admitem prin absurd că aşa o vecinătate nu există. Atunci, pentru orice vecinătate deschisă V a lui z^* avem că $p(U) \not\supset V \setminus S$. Şi deci putem găsi un şir de puncte $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\xi_k \in \mathbb{C}^n \setminus (S \cup \breve{p}(\breve{U}))$, convergent la z^*, $\lim\limits_{k\to\infty} \xi_k = z^*$.

Fie $\alpha : [0,1] \to \breve{U}$ un drum continuu astfel încât $\alpha(1) = x^*$ şi $\alpha([0,1)) \subset U$ (existenţa unui aşa drum este asigurată de Propoziţia 2.2) şi fie $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ un şir crescător de numere pozitive, $0 < s_k < 1$, $k = 1, 2, \ldots$ convergent la 1. Notăm $\zeta_k^{(0)} = p(\alpha(s_k))$, $k = 1, 2, \ldots$ şi fie $\alpha_k : [0,1] \to \mathbb{C}^n \setminus S$, $k = 1, 2, \ldots$ un drum continuu care uneşte în $\mathbb{C}^n \setminus S$ punctele $\zeta_k^{(0)}$ şi ξ_k. Prin urmare avem, $\zeta_k^{(0)} \in p(U)$, $\xi_k \notin p(U) \cup S$, $\alpha_k(0) = \zeta_k^{(0)}$ şi $\alpha_k(1) = \xi_k$. În plus, putem admite că şirul $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ de drumuri continue converge uniform la z^* pe segmentul $[0,1]$.

Să notăm cu $t_k = \inf\{t \mid t \in [0,1], \alpha_k(t) \in \partial p(U)\}$ şi cu $z_k = \alpha_k(t_k)$.

Evident că şirul $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ de asemenea converge la z^*, $z_k \notin S$ şi $\alpha_k([0,t_k)) \subset p(U)$, pentru toţi $k = 1, 2, \ldots$ Conform Propoziţiei 2.4 funcţiile continue $(p|_U)^{-1} \circ \alpha_k : [0,t_k) \to X$ pot fi extinse la funcţiile continue $\beta_k : [0,t_k] \to \breve{X}$. Fie $x_k = \beta_k(t_k)$. Atunci $p(x_k) = z_k$ şi în acelaşi timp avem că $\lim\limits_{k\to\infty} p(x_k) = z^*$ şi pentru orice ranguri k şi l punctele x_k şi x_l pot fi unite cu un drum continuu a cărui proiecţie e conţinută în V. Prin urmare, şirul $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ are un punct de acumulare $\breve{x} \in \breve{X}$. Observăm că $x_k \in \overline{\breve{U}} \setminus U$ şi deci $\breve{x} \in \overline{\breve{U}} \setminus \breve{U}$ şi $\breve{x} \neq x^*$. În acelaşi timp $\breve{p}(\breve{x}) = z^* = \breve{p}(x^*)$, dar aceasta contrazice injectivitatea lui $\breve{p}$ pe $\breve{U}_1 \supset \overline{\breve{U}}$.

2. Suficienţa. Fie U o submulţime deschisă din X şi V o submulţime deschisă conexă din $\mathbb{C}^n$ astfel încât $V \cap S \neq \emptyset$ şi $p\,|_U \colon U \to V \setminus S$ este biolomorfă.

Deoarece $V \cap S \neq \emptyset$, putem fixa un punct $z \in V \cap S$. Fie $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ un şir arbitrar de puncte $z_k \in V \setminus S$ convergent la z. Să notăm cu x_k preimaginea lui z_k, adică $x_k \in U$, $p(x_k) = z_k$ şi $\lim\limits_{k\to\infty} p(x_k) = z$.

Şirul $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ este discret în X. Într-adevăr, dacă vom admite că $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ are un punct de acumulare în X, atunci vom putea extrage un subşir $\{x_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ convergent către un anumit punct $x \in X$. Dar atunci $\lim\limits_{k\to\infty} p(x_{k_l}) = \lim\limits_{k\to\infty} p(x_k) = z$ şi totodată $\lim\limits_{l\to\infty} p(x_{k_l}) = p(x)$. Deci $p(x) = z \in S$ ceea ce contrazice faptul că $p(X) \subset \mathbb{C}^n \setminus S$.

Pentru orice funcţie olomorfă $f \in \mathcal{O}(X)$ avem că funcţia $f \circ (p\,|_U)^{-1} : V \setminus S \to \mathbb{C}$ este olomorfă şi atunci, conform celei de-a doua teoremă de extensie a lui Riemann, ea se extinde olomorf pe V. Dar atunci mulţimea $\left\{\left|(f \circ (p\,|_U)^{-1})(z_k)\right|, k = 1, 2, \ldots\right\}$ este mărginită şi prin urmare $\{|f(x_k)|, k = 1, 2, \ldots\}$ este mărginită pentru orice $f \in \mathcal{O}(X)$. Astfel concludem că X nu este olomorf convex şi deci nu este Stein.

$\square$

Să notăm cu $A = \mathbb{P}^n$ divizorul excepţional al eclatatului. Vom spune că un domeniu Riemann $p : X \to \tilde{\mathbb{C}}^{n+1}$ peste eclatatul $\tilde{\mathbb{C}}^{n+1}$ satisface *condiţia (Q)* dacă există o mulţime deschisă $G \subset X$ şi o vecinătate deschisă W a mulţimii excepţionale A astfel încât:

i) $p\mid_G$ este injectivă şi

ii) $p(G) \supset W \setminus A$.

Teorema 2.2 ([36]). *Un domeniu Riemann neramificat $p : X \to \tilde{\mathbb{C}}^{n+1}$, cu p morfism Stein, este Stein dacă şi numai dacă el nu satisface condiţia (Q).*

Demonstraţie. *1. Necesitatea.* Fie că X este Stein şi admitem prin absurd că X satisface condiţia (Q), adică există o submulţime deschisă $G \subset X$ astfel încât $p\mid_G$ este injectivă şi $p(G) \supset W \setminus A$. Fixăm un punct arbitrar $Q \in A$ şi fie $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ un şir de puncte din $W \setminus A$ convergent la Q. Evident că şirul $\{p^{-1}(q_k)\}_{k=1}^{\infty}$ este discret în G. Dar, pentru orice funcţie olomorfă $f \in \mathcal{O}(G)$ avem că $f \circ p^{-1} \in \mathcal{O}(W \setminus A)$ şi, conform teoremei lui Hartogs, se extinde la o funcţie olomorfă pe W şi prin urmare şirul valorilor $\{|f(p^{-1}(q_k))|, k = 1, 2, \ldots\}$ rămâne mărginit pentru orice funcţie $f \in \mathcal{O}(G)$. Astfel deschisul G nu este olomorf convex şi deci nu este Stein. Totodată, G fiind o submulţime deschisă local Stein din spaţiul Stein X, conform rezultatului lui F. Docquier şi H. Grauert, este Stein. Contradicţia arată că X fiind Stein nu poate avea proprietatea (Q).

Menţionăm că ipoteza de injectivitate a proiecţiei $p\mid_G$ este necesară. De exemplu, să considerăm în $\tilde{\mathbb{C}}^{n+1}$ doi deschişi Stein U_1 şi U_2 astfel încât ei nu conţin o vecinătate deschisă a mulţimii excepţionale A, dar $U = U_1 \cup U_2$ acoperă A. În acest caz, $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Muţimile $U_1 \setminus A$ şi $U_2 \setminus A$ sunt Stein, întrucât într-o varietate Stein complementara unei hipersuprafeţe rămâne Stein, în timp ce $U \setminus A$ nu este Stein. Notăm cu X_i mulţimile $X_i = \{(q, i), q \in U_i \setminus A\}, i = 1, 2$. Fie $X = X_1 \cup X_2$ reuniunea disjunctă a mulţimilor $U_1 \setminus A$ şi $U_2 \setminus A$. Atunci X este Stein şi $p(X) \supset W \setminus A$, dar aplicaţia de proiecţie $p\mid_X$ nu este injectivă.

2. Suficienţa. Admitem că domeniul Riemann $p : X \to \tilde{\mathbb{C}}^{n+1}$ satisface condiţia (Q). Notăm cu $z_0, z_1, \ldots, z_n$ coordonatele euclidiene în $\mathbb{C}^{n+1}$ şi cu $[\xi_0 : \xi_1 : \ldots : \xi_n]$ coordonatele omogene în spaţiul proiectiv complex $\mathbb{P}^n$. Eclatatul lui $\mathbb{C}^{n+1}$ în origine este varietatea

$$\tilde{\mathbb{C}}^{n+1} := \{(z, \xi) \in \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{P}^n : z_i \xi_j = z_j \xi_i, i, j = \overline{0, n}\}.$$

Vom acoperi spaţiul $\mathbb{P}^n$ cu mulţimile $U_i = \{\xi \in \mathbb{P}^n : \xi_i \neq 0\}$, $i = 0, 1, \ldots n$. Să notăm cu π proiecţia pe cel de-al doilea factor

$$\pi := \mathrm{pr}_2\mid_{\tilde{\mathbb{C}}^{n+1}} : \tilde{\mathbb{C}}^{n+1} \to \mathbb{P}^n.$$

Atunci $\pi^{-1}(\xi) = l(\xi)$ este dreapta complexă determinată de ξ. Astfel eclatatul lui $\mathbb{C}^{n+1}$ în origine este un fibrat în drepte peste spaţiul proiectiv complex.

Avem următoarele trivializări locale $\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{C}$ definite de $\psi_i(z, \xi) := (\xi, z_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Aplicaţia ψ_i este biolomorfă şi inversa ei este

$$\psi_i^{-1}([z], \lambda) = \left(\frac{\lambda}{z_i} \cdot z, [z]\right),$$

unde $[z] = [z_0 : z_1 : \ldots : z_n] \in U_i$. Astfel peste $U_{ij} = U_i \cap U_j$ avem

$$\psi_i \circ \psi_j^{-1}([z], \lambda) = \psi_i \left(\frac{\lambda}{z_j} \cdot z, [z] \right) = \left([z], \lambda \cdot \frac{z_i}{z_j} \right).$$

Putem construi un fibrat local trivial de fibră $\mathbb{C}^*$ peste eclatatul $\tilde{\mathbb{C}}^{n+1}$ şi anume

$$F : (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C} \to \tilde{\mathbb{C}}^{n+1}.$$

În lucrarea [19] a fost construit şi descris fibratul $F : (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C} \to \mathcal{O}(r)$, unde

$$F(z, \lambda) = \psi_k^{-1} \left([z], \frac{\lambda}{z_k^r} \right),$$

$\forall (z, \lambda) \in W_k = \{(z, \lambda) \in (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C} : z_k \neq 0\}$.

Întrucât eclatatul $\tilde{\mathbb{C}}^{n+1}$ poate fi identificat cu $\mathcal{O}(-1)$, fibratul în drepte olomorf de gradul -1 peste $\mathbb{P}^n$, avem $r = -1$ şi deci în acest caz pentru orice $(z, \lambda) \in W_k$ avem

$$F(z, \lambda) = \psi_k^{-1}([z], \lambda z_k) = \left(\frac{\lambda z_k}{z_k} \cdot z, [z] \right) = (\lambda \cdot z, [z]).$$

Prin urmare, aplicaţia F poate fi definită global, $F(z, \lambda) = (\lambda \cdot z, [z])$. Dar atunci, pentru orice punct $(z, [z]) \in \tilde{\mathbb{C}}^{n+1}$ avem

$$F^{-1}(z, [z]) = \left\{ \left(\frac{z}{\lambda}, \lambda \right) \middle| \lambda \in \mathbb{C}^* \right\}.$$

Să notăm cu Δ dreapta complexă $\Delta = \{0\} \times \mathbb{C} \subset \mathbb{C}^{n+2} \quad (\{0\} \in \mathbb{C}^{n+1})$.

Construim produsul fibrat Y al fibratului F şi al domeniului Riemann X şi anume

$$Y = \{(w, x) \in (\mathbb{C}^{n+2} \setminus \Delta) \times X \mid F(w) = p(x)\}.$$

Obţinem următoarea diagramă comutativă

$$\begin{array}{cccc} & Y & \xrightarrow{\tilde{F}} & X \\ & \downarrow \tilde{p} & & \downarrow p \\ \mathbb{C}^{n+2} \supset & (\mathbb{C}^{n+2} \setminus \Delta) & \xrightarrow[F]{} & \tilde{\mathbb{C}}^{n+1} \end{array}$$

Aplicaţia $\tilde{F} = \mathrm{pr}_2 \,|_Y : Y \to X$, proiecţia canonică pe al doilea factor, defineşte un fibrat principal olomorf de fibră $\mathbb{C}^*$.

Aplicaţia $\tilde{p} = \mathrm{pr}_1 \,|_Y : Y \to \mathbb{C}^{n+2} \setminus \Delta$, proiecţia canonică pe primul factor, defineşte un domeniu Riemann neramificat peste $\mathbb{C}^{n+2} \setminus \Delta$.

Deoarece $p : X \to \tilde{\mathbb{C}}^{n+1}$ este un morfism Stein, aplicaţia $\tilde{p} : Y \to \mathbb{C}^{n+2} \setminus \Delta$ de asemenea este un morfism Stein. Întrucât $(\mathbb{C}^{n+2} \setminus \Delta) \subset \mathbb{C}^{n+2}$, drept consecinţă obţinem un domeniu Riemann

$\tilde{p} : Y \to \mathbb{C}^{n+2}$ peste $\mathbb{C}^{n+2}$. Observăm că $\mathbb{C}^{n+2}$ este o varietate Stein şi $\tilde{p} : Y \to (\mathbb{C}^{n+2} \setminus \Delta)$ este un morfism Stein, dar nu se ştie dacă $\tilde{p} : Y \to \mathbb{C}^{n+2}$ este de asemenea morfism Stein, deoarece $\mathbb{C}^{n+2}$ conţine puncte de pe Δ, adică puncte din frontiera lui $(\mathbb{C}^{n+2} \setminus \Delta)$.

Conform rezultatelor lui Y. Matsushima şi A. Marimoto ([60], Théorème 4 et 5), Y este Stein dacă şi numai dacă X este Stein.

Admitem prin absurd că produsul fibrat Y nu este Stein. Atunci există un punct frontieră accesibil $y \in \breve{\partial} Y$ care este eliminabil de-a lungul lui Δ.

Atunci conform Lemei 2.3, există o vecinătate deschisă $\breve{U}$ a punctului y şi un polidisc deschis V_ε de polirază $\varepsilon > 0$ centrat într-un punct $x^* = \tilde{p}(y) = (0, \ldots, 0, \nu) \in \Delta$ astfel încât $\tilde{p} \mid_U : U \to V_\varepsilon \setminus \Delta$ este biolomorfă, unde $U = \breve{U} \setminus \breve{\partial} Y$.

Să notăm cu $G = \tilde{F}(U) \setminus p^{-1}(A)$, unde A este divizorul excepţional al eclatatului $\tilde{\mathbb{C}}^{n+1}$. Afirmăm că $p \mid_G$ este injectivă. Într-adevăr, dacă admitem contrariul, atunci obţinem următoarele. Există un punct $x \in G$ astfel încât $G \cap p^{-1}(p(x))$ are cel puţin două elemente. Fie $G \cap p^{-1}(p(x)) = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Atunci

1) $x_i \neq x_j$, $i \neq j$; $i, j = 1, 2, \ldots$.

2) $p(x_i) = Q \in \tilde{\mathbb{C}}^{n+1} \setminus A$, pentru toţi $i = 1, 2, \ldots$.

Fie $Q = (q, [q])$, $q = (q_0, q_1, \ldots, q_n)$. Preimaginea acestui punct este

$$F^{-1}(Q) = \left\{ \left(\frac{q}{\lambda}, \lambda \right) \middle| \, \lambda \in \mathbb{C}^* \right\}.$$

Observăm că $F^{-1}(Q)$ nu intersectează $\Delta = \{0\} \times \mathbb{C}$, iar intersecţia lui $F^{-1}(Q)$ cu $V_\varepsilon \setminus \Delta$ este dată de

$$\left\{ \left| \frac{q_j}{\lambda} \right| < \varepsilon, j = 0, \ldots, n, \, \lambda \in \mathbb{C}^* \right\} \cap \{ |\lambda - \nu| < \varepsilon, \, \lambda \in \mathbb{C}^* \}$$

şi prin urmare este deschisă şi conexă. Să notăm această mulţime cu V^*.

Fie $D_i = \tilde{F}^{-1}(x_i) \cap \tilde{p}^{-1}(V^*)$, $i = 1, 2, \ldots$. Mulţimile D_i sunt deschise în $\tilde{F}^{-1}(x_i)$, nevide şi $D_i \subset U$ pentru toţi $i = 1, 2, \ldots$. Astfel $\tilde{p} \mid_{D_i}$, $i = 1, 2, \ldots$ sunt homeomorfisme şi deci $\tilde{p}(D_i)$ sunt deschise în $F^{-1}(Q)$, nevide şi disjuncte şi

$$V^* = \bigcup_i \tilde{p}(D_i).$$

Dar aceasta este imposibil întrucât V^* este conexă.

Astfel $p \mid_G$ este injectivă. În plus $F^{-1}(p(G))$ conţine o mulţime de forma $V_\varepsilon \setminus \Delta$ şi deci conform argumentelor din demonstraţia Teoremei 1 de M. Colţoiu şi C. Joiţa din [19], $p(G)$ conţine o mulţime de forma $W \setminus A$, unde A este mulţimea excepţională a eclatatului şi W este o vecinătate a lui A, ceea ce contrazice ipoteza.

$\square$

Capitolul 3

Metrici invariante şi funcţii normale

În acest capitol se studiază metricile invariante la aplicaţiile biolomorfe, în termenii cărora se definesc aplicaţiile olomorfe X–normale.

Se evidenţiază o clasă largă de domenii pentru care există aplicaţia extremală pentru (semi)norma Kobayashi. Pentru aplicaţiile olomorfe definite pe astfel de domenii se demonstrează un criteriu de normalitate şi se defineşte noţiunea de aplicaţie olomorfă $\mathcal{K}$–normală.

Sunt studiate domeniile mărginite din $\mathbb{C}^n$, pentru care fiecare punct din frontiera lor este punct peak. Este prezentat un criteriu de existenţă a limitei $\mathcal{K}$–admisibile pentru o funcţie olomorfă pe un domeniu mărginit, fiecare punct din frontiera căruia este punct peak.

3.1 Metrici invariante

Această secţiune conţine definiţiile (semi)metricilor Carathéodory, Kobayashi şi Bergman şi o scurtă trecere în revistă a unor proprietăţi de bază ale lor.

Conform teoremei lui Riemann, orice domeniu simplu conex din planul complex, diferit de întreg planul, este biolomorf cu discul unitate Δ. Încă de la începutul secolului XX a devenit clar, că în cazul multidimensional două domenii simplu conexe, de exemplu, bila şi polidiscul unitate, nu sunt biolomorfe.

Peste tot în acest capitol prin Δ vom nota discul unitate deschis din planul complex $\mathbb{C}$, adică $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Henri Poincaré a definit pe $\Delta \times \mathbb{C}$ o normă invariantă în raport cu automorfismele conforme ale discului Δ,

$$d\rho(z; v) = \frac{|v|}{1 - |z|^2}, \qquad (z; v) \in \Delta \times \mathbb{C},$$

iar lungimea Poincaré a unei curbe netede pe porţiuni $\gamma : [0, 1] \to \Delta$ calculându-se după formula

$$L_\gamma = \int_0^1 d\rho(\gamma(t); \gamma'(t))dt.$$

Există, cel puţin, trei posibilităţi de a generaliza metrica Poincaré în cazul mai multor variabile complexe. Acestea au fost propuse de către Constantin Carathéodory, în 1926 ([10]), Stefan Bergman în 1933 ([4]) şi Shoshichi Kobayashi în 1967 ([54]).

Fie M o varietate complexă de dimensiune complexă n.

Definiţia 3.1 ([10]). *Distanţa Carathéodory* c_M dintre punctele p şi q ale varietăţii complexe M este

$$c_M(p, q) = \sup_f \rho(f(p), f(q)),$$

unde marginea superioară se ia în raport cu toate funcţiile olomorfe $f : M \to \Delta$.

Să notăm cu $\mathcal{O}(\Delta, M)$ mulţimea tuturor aplicaţiilor olomorfe ale discului unitate Δ în varietatea complexă M.

Vom numi *lanţ olomorf* pe varietatea M, care uneşte punctele p şi q, o colecţie c care constă din $2k$ puncte $a_1, a_2, \ldots, a_k$ şi $b_1, b_2, \ldots, b_k$ ale discului unitate Δ şi k aplicaţii olomorfe $f_1, f_2, \ldots, f_k \in \mathcal{O}(\Delta, M)$, astfel încât

$$f_1(a_1) = p, \quad f_j(b_j) = f_{j+1}(a_{j+1}), j = 1, \ldots, k-1, \quad f_k(b_k) = q.$$

Pentru fiecare lanţ olomorf c pe M din p în q definim

$$|c| = \sum_{j=1}^{k} \rho(a_j, b_j).$$

Definiţia 3.2 ([54]). *Distanţa Kobayashi* k_M dintre punctele p şi q ale varietăţii complexe M este

$$k_M(p, q) = \inf\{|c|\},$$

unde marginea inferioară se ia în raport cu toţi k şi toate lanţurile olomorfe c pe M care unesc p şi q.

Distanţa Kobayashi k_M, precum şi distanţa Carathéodory c_M satisfac axiomele (semi)metricii şi nu cresc la aplicaţiile olomorfe, adică dacă M şi N sunt două varietăţi complexe şi $f \in \mathcal{O}(M, N)$, atunci pentru orice puncte p şi q din M avem

$$k_N(f(p), f(q)) \le k_M(p, q), \quad c_N(f(p), f(q)) \le c_M(p, q) \tag{3.1}$$

şi sunt invariante la aplicaţiile biolomorfe, adică dacă $f : M \to N$ este o aplicaţie biolomorfă, atunci pentru toţi p şi q din M au loc egalităţile

$$k_M(p,q) = k_N(f(p), f(q)), \quad c_M(p,q) = c_N(f(p), f(q)). \tag{3.2}$$

În general, (semi)metricile Kobayashi şi Carathéodory nu sunt metrici. De exemplu, pentru $M = \mathbb{C}^n$ funcţiile $k_M \equiv 0$ şi $c_M \equiv 0$. Este binecunoscut faptul că, (semi)metrica Kobayashi pe varietatea complexă M este cea mai mare dintre acele (semi)metrici care nu se măresc la aplicaţiile olomorfe $f : \Delta \to M$, iar (semi)metrica Carathéodory este cea mai mică printre acelea care nu se măresc la aplicaţiile olomorfe $f : M \to \Delta$.

Fie p un punct din varietatea M şi $v \in T_pM$ un vector tangent. H.L. Royden în [68] a introdus următoarea definiţie infinitesimală a metricii Kobayashi.

Definiţia 3.3. Vom numi *(semi)norma Kobayashi* pe varietatea complexă M funcţia $K_M(p; v)$ definită pe fibratul tangent $T(M)$ prin formula

$$K_M(p;v) = \inf \left\{ \frac{1}{r} \,\middle|\, \exists g \in \mathcal{O}(\Delta, M), g(0) = p, g'(0) = r \cdot v, r > 0 \right\}. \tag{3.3}$$

Royden a demonstrat, că (semi)norma K_M pe T_pM posedă proprietatea de contracţie la aplicaţiile olomorfe, adică dacă $f \in \mathcal{O}(M, N)$, atunci pentru orice $v \in T_pM$ avem

$$K_N(f(p); f_*(p)v) \leq K_M(p; v), \tag{3.4}$$

unde $f_*(p)v$ este diferenţiala aplicaţiei f în punctul p.

În lucrarea [68] este demonstrat următorul rezultat important.

Teorema 3.1. *Pentru orice varietate complexă M funcţia K_M este semicontinuă superior pe fibratul tangent $T(M) = \bigcup_{p \in M} T_pM$ şi*

$$k_M(p,q) = \inf_{\gamma} \int_0^1 K_M(\gamma(t); \gamma'(t))dt, \tag{3.5}$$

unde marginea inferioară se ia în raport cu toate drumurile netede $\gamma : [0,1] \to M$, care unesc punctele p şi q.

Definiţia 3.4 ([11], [12]). Vom numi *(semi)norma Carathéodory* pe varietatea complexă M funcţia $C_M(p; v)$ definită pe fibratul tangent $T(M)$ prin formula

$$C_M(p; v) = \sup_f |f_*(p)v|, \tag{3.6}$$

unde marginea superioară se ia în raport cu toate aplicaţiile olomorfe $f : M \to \Delta$ pentru care $f(p) = 0$.

Carathéodory a demonstrat, că (semi)norma C_M satisface inegalitatea triunghiului şi posedă proprietatea de contracţie.

Presupunem că varietatea M este înzestrată cu o (semi)metrică d. Lungimea unei curbe $\gamma : [0,1] \to M$ în această (semi)metrică este egală cu mărimea

$$l_d(\gamma) = \sup \sum_{k=1}^{m} d(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)),$$

unde marginea superioară se ia în raport cu toţi m şi toate diviziunile

$$T = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1\}$$

ale segmentului $[0,1]$.

Definiţia 3.5. Vom numi *distanţă interioară* în (semi)metrica d dintre punctele p şi q din M, marginea inferioară $d^i(p,q)$ a lungimilor $l_d(\gamma)$ tuturor curbelor pe M care unesc punctele p şi q.

Dacă $d \equiv d^i$, atunci (semi)metrica d se numeşte *interioară.*

H. J. Reiffen [66] a demonstrat că dacă $\gamma : [0,1] \to M$ este o curbă netedă pe M cu lungimea Carathéodory definită conform formulei

$$l_c(\gamma) = \sup \sum_{k=1}^{m} c_M(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)),$$

atunci

$$l_c(\gamma) = \int_0^1 C_M(\gamma(t); \gamma'(t))dt.$$

Astfel $c_M^i(p,q) = \inf\limits_{\gamma} l_c(\gamma)$. În caz general are loc inegalitatea

$$c_M(p,q) \leq c_M^i(p,q)$$

şi inegalitatea strictă este posibilă, deci (semi)metrica Carathéodory nu este interioară.

Spre deosebire de metrica Carathéodory, metrica Kobayashi întotdeauna este interioară.

Pentru a defini (semi)norma Bergman [5] pe o varietate complexă M considerăm o bază ortonormală completă $\omega_1, \omega_2, \ldots$ în spaţiul n–formelor olomorfe cu pătratul integrabil pe M. Forma diferenţială

$$B_M(p, \overline{q}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \omega_\nu(p) \wedge \overline{\omega_\nu(q)}$$

pentru $p, q \in M$ este independentă de alegerea bazei şi se numeşte *forma nucleului Bergman* a varietăţii M.

Într-un sistem local de coordonate $p_1, \dots, p_n$ în M putem scrie fiecare $\omega_\nu(p)$ în forma

$$\omega_\nu(p) = f_\nu(p) dp_1 \wedge \dots \wedge dp_n,$$

unde $f_\nu(p)$ este o funcţie olomorfă local definită şi deci B_M local poate fi scrisă în forma

$$B_M(p, \overline{q}) = b_M(p, q) dp_1 \wedge \dots \wedge dp_n \wedge d\overline{q_1} \wedge \dots \wedge d\overline{q_n},$$

unde $b_M(p, \overline{q}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(p) \overline{f_\nu(q)}$. Funcţia $\beta_M(p) = b_M(p, \overline{p})$ se numeşte funcţia Bergman a varietăţii M.

Definiţia 3.6. Presupunem că $\beta_M(p) > 0$ pentru orice punct $p \in M$. Vom numi *(semi)norma Bergman* pe varietatea complexă M funcţia definită de formula

$$(\mathcal{B}_M(p; v))^2 = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 \ln \beta_M(p)}{\partial p_\mu \partial \overline{p_\nu}} v_\mu \overline{v_\nu},$$

unde $v \in T_p M$, $v = \sum_{\mu=1}^{n} v_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu}$.

Remarcăm că (semi)norma Bergman este independentă de sistemul de coordonate, este pozitiv semidefinită, este invariantă la aplicaţiile biolomorfe, netedă şi Kähleriană (a se vedea [47], [50]). Spre deosebire de (semi)normele Carathéodory şi Kobayashi, (semi)norma Bergman $\mathcal{B}_M$ nu posedă proprietatea de contracţie (a se vedea Exemplul 6.1.3, [51]).

Funcţia distanţă indusă de (semi)norma Bergman este numită *distanţă Bergman.*

Menţionăm că distanţele şi (semi)normele Carathéodory, Kobayashi şi Bergman se calculează explicit foarte greu, dar comparativ, în general, se estimează mai simplu.

În cazul bilei unitate $B = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z| < 1\}$ (semi)normele Kobayashi şi Carathéodory coincid, până la înmulţirea cu o constantă, cu (semi)norma Bergman, şi pentru orice punct $p \in B$ şi orice vector $v \in \mathbb{C}^n$ avem:

$$C_B^2(p; v) = K_B^2(p; v) = \frac{|v|^2}{1 - |p|^2} + \frac{|(p, v)|^2}{(1 - |p|^2)^2}. \tag{3.7}$$

3.2 Familii normale de aplicaţii olomorfe şi aplicaţii X–normale

În această secţiune sunt discutate anumite criterii de normalitate a familiilor de aplicaţii olomorfe şi unele proprietăţi ale aplicaţiilor X–normale.

Fie M o varietate complexă de dimensiune complexă n şi N o varietate hermitiană înzestrată cu metrica hermitiană ds_N^2. Vom nota cu $\mathcal{O}(M,N)$ mulţimea tuturor aplicaţiilor olomorfe ale varietăţii M în varietatea N.

Vom spune că un şir de aplicaţii olomorfe $\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{O}(M,N)$ este *compact divergent,* dacă pentru orice submulţimi compacte $K \subset\subset M$ şi $K' \subset\subset N$ se poate găsi un rang j_0, astfel încât $f_j(K) \cap K' = \emptyset$ pentru toţi $j > j_0$.

O familie de aplicaţii olomorfe $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(M,N)$ se numeşte *normală* (în sensul lui H. Wu [77]) dacă orice şir $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ de elemente ale lui $\mathcal{F}$ conţine un subşir $\{f_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$ care ori converge uniform pe submulţimile compacte ale lui M la o aplicaţie din $\mathcal{O}(M,N)$, ori este compact divergent.

Un criteriu de normalitate pentru familiile de funcţii meromorfe de o variabilă complexă, care exprimă condiţia de mărginire locală a derivatei sferice a fost demonstrat de către F. Marty în [59].

Lema 3.1 ([59]). *O familie $\mathcal{F}$ de funcţii meromorfe în domeniul D al planului complex este normală în D atunci şi numai atunci când pentru orice submulţime compactă $K \subseteq D$ există o constantă $C = C(K) > 0$ astfel încât derivata sferică*

$$f^{\#}(z) = \frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} \leq C(K), \quad z \in K, \quad f \in \mathcal{F}$$

este local mărginită.

Teoria familiilor normale de funcţii olomorfe de mai multe variabile complexe a început să se dezvolte la sfârşitul anilor 30 ai secolului XX. În [52] Julia a demonstrat că o familie de funcţii olomorfe de mai multe variabile complexe care omite două valori este normală. H. Alexander [1] a arătat că o familie $\mathcal{F}$ de funcţii olomorfe în bila unitate deschisă $B \subset \mathbb{C}^n$ este normală atunci şi numai atunci când restricţia ei la fiecare dreaptă complexă care trece prin centrul bilei este normală. T. Nishino [63] a stabilit, că o familie de funcţii olomorfe într-un domeniu $D \subset \mathbb{C}^n$ este normală în D dacă ea este normală în raport cu fiecare variabilă. Criteriul lui Marty a fost generalizat pentru cazul multidimensional în [71], [25], [14], [43].

În cele ce vor urma vom avea nevoie de următorul caz particular al criteriului lui Marty.

Lema 3.2 ([27], Lema 2, p. 11). *Fie M o varietate complexă, cu proprietatea că pentru fiecare punct $p \in M$ există o vecinătate $U_p \subset M$ şi o constantă $c = c(U_p) > 0$ astfel încât $K_M(q;v) \geq c(U_p)|v|$ pentru toţi $(q;v) \in T(U_p) \cong U_p \times \mathbb{C}^n$, şi Y este un subspaţiu complex relativ compact al varietăţii hermitiene N cu metrica hermitiană ds_N^2.*

O familie $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(M,Y)$ este normală pe M atunci şi numai atunci când pentru orice submulţime compată K a lui M există o constantă $L(K) > 0$ astfel încât pentru orice aplicaţie $f \in \mathcal{F}$ are loc inegalitatea

$$f^* ds_N^2(p;v) \leq L(K) \cdot (K_M(p;v))^2, \tag{3.8}$$

pentru toţi $p \in K$ şi $v \in T_pM$.

În legătură cu studiul comportării la frontieră a funcţiilor meromorfe de o variabilă complexă, O. Lehto şi K. I. Virtanen au definit în [56] noţiunea de funcţie meromorfă normală.

Definiţia 3.7. O funcţie $f(z)$ meromorfă în domeniul simplu conex $D \subset \mathbb{C}$, se numeşte *normală*, dacă este normală familia de funcţii $\mathcal{F} = \{f \circ S \mid S \in \mathrm{Aut}(D)\}$.

În cazul unui domeniu multiplu conex $D \subset \mathbb{C}$, funcţia $f(z)$ se numeşte normală, dacă ea este normală pe acoperirea universală a domeniului D.

Această definiţie poate fi direct extinsă pentru cazul varietăţilor complexe n-dimensionale omogene, adică pentru acele varietăţi în care grupul automorfismelor acţionează tranzitiv.

Definiţia 3.8. Fie M o varietate complexă omogenă. O funcţie $f \in \mathcal{O}(M, \overline{\mathbb{C}})$ se numeşte *normală* pe varietatea M, dacă este normală familia de funcţii

$$\mathcal{F} = \{f \circ g \mid g \in \mathrm{Aut}(M)\}.$$

Este bine cunoscut faptul că grupul automorfismelor domeniilor simplu conexe din spaţiul $\mathbb{C}^1$ este compact, iar grupul automorfismelor domeniilor multiplu conexe din $\mathbb{C}^1$ cu ordinul de conexitate de cel puţin 2, este finit. În general, grupul automorfismelor majorităţii domeniilor din $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, este trivial (astfel de domenii sunt numite rigide) (a se vedea [7]). În felul acesta, pentru majoritatea domeniilor din spaţiul complex n–dimensional $\mathbb{C}^n$ cu $n > 1$, nu există un număr suficient de automorfisme pentru ca definiţia de mai sus a „funcţiei normale” să fie cuprinzătoare. De aceea, pentru a defini noţiunea de funcţie normală pe un domeniu arbitrar al spaţiului $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, ar trebui evitată folosirea grupului de automorfisme.

Fie X_M una din (semi)normele Carathéodory ($\mathcal{C}_M$), sau Kobayashi ($\mathcal{K}_M$), sau Bergman ($\mathcal{B}_M$) ale varietăţii M. Noţiunea de funcţie X–normală a fost introdusă de P. Dovbuş.

Definiţia 3.9 ([27]). Fie M o variatate complexă, N o varietate hermitiană cu metrica hermitiană ds_N. O aplicaţie $f \in \mathcal{O}(M, N)$ se numeşte X*–normală* pe varietatea complexă M, dacă se poate găsi o constantă $L > 0$, astfel încât

$$f^* ds_N(p; v) \leq L \cdot X_M(p; v)$$

pentru toate punctele $p \in M$ şi toţi vectorii tangenţi $v \in T_pM$.

Remarcăm, că în cazul când varietatea M este omogenă această definiţie coincide cu Definiţia 3.8 şi clasele aplicaţiilor $\mathcal{C}$–normale, $\mathcal{K}$–normale şi $\mathcal{B}$–normale coincid.

Se poate arăta că orice funcţie olomorfă şi mărginită pe o varietate complexă M este $\mathcal{C}$–normală pe M.

Pentru $p, q > 0$ se defineşte *domeniul Thullen generalizat de tip* (p, q) prin:

$$D_{pq} = \{z \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^{2/p} + |z_2|^{2/q} < 1\}.$$

K. T. Hahn şi P. Pflug în [44] au arătat că există o constantă $C_{pq} > 0$ (care depinde numai de p şi q) astfel încât

$$B_{D_{pq}}(z; v) \leq C_{pq} \cdot K_{D_{pq}}(z; v)$$

pentru orice $z \in D_{pq}$ şi $v \in \mathbb{C}^2$. Această inegalitate arată că, pe domeniile Thullen generalizate clasa funcţiilor $\mathcal{K}$–normale este mai largă decât clasa funcţiilor $\mathcal{B}$–normale.

Se ştie, că pe orice varietate complexă M (a se vedea [30]), avem

$$C_M(p; v) \leq K_M(p; v) \ \text{ pe } \ T(M).$$

K. T. Hahn [42] a demonstrat, că pe varietăţile complexe arbitrare M seminorma Carathéodory este mai mică sau egală cu seminorma Bergman

$$C_M(p; v) \leq B_M(p; v) \ \text{ pe } \ T(M).$$

De aici rezultă următoarele afirmaţii:

1. Clasele funcţiilor $\mathcal{K}$–normale şi $\mathcal{B}$–normale pe o varietate complexă M conţin clasa funcţiilor $\mathcal{C}$–normale pe această varietate.

2. Orice funcţie olomorfă şi mărginită pe o varietate complexă M este X–normală pe această varietate.

3. Dacă pe o varietate complexă M există funcţii olomorfe mărginite, atunci clasele funcţiilor X–normale pe această varietate sunt nevide.

În ultimul caz, clasele funcţiilor X–normale ar putea conţine doar funcţii olomorfe constante. În acest context, K. Diederich şi N. Sibony în [23] au construit un exemplu de domeniu de olomorfie $D \subset \mathbb{C}^n$, pentru care $k_D(p, q) \equiv 0$ în timp ce $K_D(p; v) \not\equiv 0$. Dacă pe acest domeniu D ar exista o funcţie $\mathcal{K}$–normală f, atunci ar exista o constantă pozitivă $L > 0$, astfel încât

$$ds(f(p); f_*(p)v) \leq L \cdot K_D(p; v) \ \text{ pe } \ T(D).$$

Fixăm arbitrar două puncte p şi q în domeniul D şi integrăm ultima inegalitate de-a lungul curbei $\mathcal{C}^1$–netede $\gamma : [0, 1] \to D$, pentru care $\gamma(0) = p$ şi $\gamma(1) = q$. Luând infimumul ambilor membri ai inegalităţii obţinute în raport cu toate curbele γ cu aceste proprietăţi, obţinem

$$s(f(p), f(q)) \leq L \cdot k_D(p, q).$$

De aici rezultă că $s(f(p), f(q)) \equiv 0$, adică $f \equiv const$. Prin urmare, în acest domeniu D clasa funcţiilor $\mathcal{K}$–normale constă numai din funcţii identic constante.

3.3 Aplicaţii extremale pentru seminorma Kobayashi

În această secţiune se discută noţiunea de aplicaţie extremală pentru seminorma Kobayashi. Se arată că pentru domeniile mărginite din $\mathbb{C}^n$ pentru care fiecare punct frontieră este punct peak există aplicaţia extremală pentru seminorma Kobayashi.

Fie M o varietate complexă de dimensiune complexă n, p un punct al acestei varietăţi, iar $v \in T_pM$ un vector tangent. Seminorma Kobayashi poate fi aplicată pentru a studia proprietăţile invariante ale varietăţilor, precum şi la studierea funcţiilor olomorfe. De aici rezultă importanţa aplicaţiilor extremale $g : \Delta \to M$, care realizează infimumul în (3.3).

Definiţia 3.10. Fie $p \in M$ şi $v \in T_pM = \mathbb{C}^n$, $v \neq 0$. Vom spune că aplicaţia olomorfă $g : \Delta \to M$ este *extremală în raport cu p şi v*, dacă

$$g(0) = p, \quad g'(0) = \lambda \cdot v, \quad \text{cu} \quad \lambda > 0 \quad \text{şi} \quad K_M(p; v) = \frac{|v|}{|g'(0)|}.$$

În cazul general, pentru un punct dat $p \in M$ şi un vector dat $v \in T_pM$ nu există o aplicaţie extremală, iar în cazurile când o aşa aplicaţie există, ea poate să nu fie unică (a se vedea [55]).

Remarcăm, că totuşi în spaţiul complex $\mathbb{C}^n$ există familii largi de domenii pentru care există aplicaţiile extremale pentru seminorma Kobayashi.

Un domeniu $D \subset \mathbb{C}^n$ se numeşte strict convex, dacă împreună cu punctele $z_1, z_2 \in \overline{D}$ el conţine în interior toate punctele interioare ale segmentului care le uneşte. Sau echivalent, $D \subset \mathbb{C}^n$ se numeşte strict convex, dacă pentru el există o funcţie de definiţie $\rho : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ de clasă C^∞ astfel încât Hessianul real al lui ρ este pozitiv definit în orice punct.

L. Lempert [57] a demonstrat, că dacă $D \subset \mathbb{C}^n$ este un domeniu strict convex şi mărginit, atunci pentru toate perechile $p \in D$ şi $v \in T_pD$, $v \neq 0$ există o aplicaţie $g : \Delta \to D$, şi numai una singură, extremală în raport cu p şi v.

O aplicaţie olomorfă $g \in \mathcal{O}(\Delta, M)$ se numeşte geodezică complexă pentru metrica Kobayashi, dacă

$$k_M(g(z_1), g(z_2)) = k_\Delta(z_1, z_2) = \rho(z_1, z_2)$$

pentru toţi $z_1, z_2 \in \Delta$, adică este o izometrie pentru distanţa Kobayashi. O aplicaţie extremală pentru $K_M(p; v)$ nu este neapărat o geodezică complexă pentru metrica Kobayashi, dar dacă M este un domeniu convex mărginit în $\mathbb{C}^n$, atunci aplicaţia extremala este o geodezică complexă (a se vedea [57]).

O varietate complexă M se numeşte *taut* [77], dacă pentru orice varietate complexă N şi orice şir de aplicaţii olomorfe $f_j : N \to M$, $j = 1, 2, \ldots$ există un subşir compact divergent ori un subşir uniform convergent pe submulţimile compacte la o aplicaţie olomorfă $f : N \to M$. T. Barth [2] a arătat, că pentru ca varietatea M să fie taut este suficient ca această condiţie să fie satisfăcută în cazul când $N = \Delta$, adică o varietate M este taut dacă familia de aplicaţii olomorfe $\mathcal{O}(\Delta, M)$ este o familie normală.

Dacă varietatea M este taut, atunci aplicaţia extremală pentru toate perechile $p \in M$ şi $v \in T_pM$ există (a se vedea [51]) şi în plus, ea este o geodezică complexă pentru metrica Kobayashi [38].

O varietate complexă M se numeşte *Kobayashi hiperbolică,* dacă semimetrica Kobayashi k_M pe M este metrică. O varietate Kobayashi hiperbolică se numeşte *completă,* dacă orice bilă în metrica Kobayashi este relativ compactă în M. Orice varietate taut este Kobayashi hiperbolică.

Se verifică imediat că o varietate hiperbolică M nu poate conţine curbe întregi, adică orice aplicaţie olomorfă $f : \mathbb{C} \to M$ este constantă. Afirmaţia inversă, în general, nu are loc, dar totuşi este adevărată pentru varietăţile compacte. R. Brody în [9] a arătat că orice varietate complexă compactă care nu conţine curbe întregi este hiperbolică.

P. Kirnan [53] a demonstrat, că varietăţile Kobayashi hiperbolice complete sunt taut şi ca urmare, pentru astfel de varietăţi aplicaţia extremală există pentru orice pereche $p \in M$, $v \in T_pM$, $v \neq 0$.

Fie D un domeniu mărginit din $\mathbb{C}^n$ cu frontiera netedă şi fie $\xi \in \partial D$ un punct frontieră al acestui domeniu. Notăm cu $A(D)$ mulţimea tuturor funcţiilor olomorfe în D şi continue pe $\overline{D}$.

Definiţia 3.11. Un punct frontieră $\xi \in \partial D$ se numeşte *punct peak,* dacă există o funcţie $\psi \in A(D)$, astfel încât sunt satisfăcute condiţiile

1. $\psi(\xi) = 1$,

2. $|\psi(z)| < 1$ pentru toate punctele $z \in \overline{D} \setminus \{\xi\}$.

Această funcţie $\psi(z)$ se numeşte *funcţie peak* pe domeniul D în punctul $\xi \in \partial D$.

Fie $D \subset \mathbb{C}^n$ un domeniu cu frontiera de clasă cel puţin $\mathcal{C}^2$ în vecinătatea punctului frontieră $\xi \in \partial D$. M. Hakim şi N. Sibony [45] au demonstrat că fiecare punct strict pseudoconvex $\xi \in \partial D$ este un punct peak şi deci, fiecare punct frontieră $\xi \in \partial D$ al unui domeniu strict pseudoconvex este punct peak (a se vedea, de asemenea şi [37]).

Fie $D \subset \mathbb{C}^2$ un domeniu mărginit cu frontiera netedă şi fie $\xi \in \partial D$. Vom numi *tipul* punctului ξ în sensul lui D'Angelo şi vom nota $\tau(\xi)$, ordinul maxim de contact pe care îl poate avea un germene de varietate complexă unu-dimensională care conţine punctul ξ cu frontiera domeniului ∂D în punctul ξ. Se spune, că punctul ξ este de tip finit dacă $\tau(\xi) < \infty$ (a se vedea [22]). Dacă există numărul $N \in \mathbb{N}$, astfel încât $\tau(\xi) \leq N$ pentru toate punctele $\xi \in \partial D$, atunci se spune că *domeniul D este de tip finit.*

E. Bedford şi J. E. Fornaess [3] au demonstrat, că dacă D este un domeniu mărginit de tip finit în $\mathbb{C}^2$ cu frontiera netedă, atunci în fiecare punct frontieră ξ există funcţia peak pe D.

K. T. Hahn şi P. Pflug [44] au demonstrat că fiecare punct frontieră al domeniului Thullen generalizat D_{pq} este un punct peak în raport cu $A(D_{pq})$.

Afirmaţii analoge, pentru domenii din $\mathbb{C}^n$ cu condiţii suplimentare de netezime a frontierei, au fost obţinute de către T. Bloom [8], J. E. Fornaess şi J. McNeal [29].

Propoziţia 3.1 ([33]). *Dacă $D \subset \mathbb{C}^n$ este un domeniu mărginit, astfel încât fiecare punct din frontiera lui este punct peak, atunci pentru fiecare punct $p \in D$ şi toţi vectorii $v \in \mathbb{C}^n$ există o aplicaţie extremală pentru $K_D(p; v)$.*

Demonstraţie. Fixăm în mod arbitrar un punct $p \in D$ şi un vector tangent $v \in T_pD$, $v \neq 0$. În mod explicit, trebuie să demonstrăm existenţa unei aplicaţii olomorfe $g \in \mathcal{O}(\Delta, D)$, astfel încât

$$g(0) = p \text{ şi } K_D(p; v) = \frac{|v|}{|g'(0)|}.$$

Deoarece $K_D(p; v) = \inf \left\{ \frac{1}{r} \middle| g \in \mathcal{O}(\Delta, D), g(0) = p, g'(0) = r \cdot v, r > 0 \right\}$, în baza definiţiei marginii inferioare, pentru toate aplicaţiile $g \in \mathcal{O}(\Delta, D)$ pentru care $g(0) = p$ şi $g'(0) = r \cdot v$, $r > 0$ are loc inegalitatea

$$\frac{1}{r} \geq K_D(p; v) \tag{3.9}$$

şi pentru orice $\varepsilon > 0$ se va găsi o aplicaţie olomorfă $g_\varepsilon \in \mathcal{O}(\Delta, D)$, astfel încât

$$g_\varepsilon(0) = p, \quad g'_\varepsilon(0) = r_\varepsilon \cdot v, \quad r_\varepsilon > 0$$

şi

$$\frac{1}{r_\varepsilon} < K_D(p; v) + \varepsilon.$$

Fie $\varepsilon = \frac{1}{j}$, $j \in \mathbb{N}^*$. Atunci pentru fiecare $j \in \mathbb{N}^*$ se va găsi o aplicaţie $g_j \in \mathcal{O}(\Delta, D)$, astfel încât $g_j(0) = p$, $g'_j(0) = r_j \cdot v$, $r_j > 0$ şi

$$\frac{1}{r_j} < K_D(p; v) + \frac{1}{j}. \tag{3.10}$$

Întrucât D este un domeniu mărginit, şirul $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ este uniform mărginit pe Δ şi, prin urmare, formează o familie normală de aplicaţii. Deci, din acest şir putem extrage un subşir uniform convergent pe submulţimile compacte ale discului unitate Δ.

Fără a pierde din generalitate, putem admite, că însuşi şirul $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ converge uniform pe submulţimile compacte ale discului Δ la o anumită aplicaţie $g \in \mathcal{O}(U, \overline{D})$. Dacă notăm $\lim_{j\to\infty} r_j = r$, atunci

$$g(0) = p, \quad g'(0) = r \cdot v, r > 0.$$

Să trecem în inegalitatea (3.10) la limită cu $j \to \infty$. Obţinem

$$\frac{1}{r} \leq K_D(p; v).$$

Rămâne de demonstrat, că $g(\Delta) \subset D$, şi atunci, conform condiţiei (3.9) ultima inegalitate poate să se realizeze numai ca egalitate şi prin urmare afirmaţia va fi demonstrată.

Să presupunem, că există un punct $\lambda_0 \in \Delta$ pentru care avem $g(\lambda_0) = \xi \in \partial D$.

Întrucât g este o aplicaţie olomorfă, dacă ea nu este identic constantă, atunci în baza teoremei de unicitate, se va găsi o vecinătate a punctului λ_0, $U_{\lambda_0} = \{\lambda \in \Delta \mid |\lambda - \lambda_0| < \delta\}$, astfel încât pentru toţi $\lambda \in U_{\lambda_0} \setminus \{\lambda_0\}$ avem $g(\lambda) \neq \xi$.

Deoarece ξ este un punct frontieră, conform ipotezei, pentru el se va găsi o funcţie peak ψ pe D, pentru care

$$\psi(\xi) = 1 \ \text{ şi } \ |\psi(z)| < 1 \ \text{ pentru toţi } z \in \overline{D} \setminus \{\xi\}.$$

Fie $h = \psi \circ g$. Observăm că pentru toate punctele $\lambda \in U_{\lambda_0} \setminus \{\lambda_0\}$ avem

$$|h(\lambda)| = |\psi(g(\lambda))| = |\psi(z)| < 1,$$

iar

$$h(\lambda_0) = \psi(g(\lambda_0)) = \psi(\xi) = 1.$$

Din principiul maximului modulului rezultă că $h(\lambda) \equiv 1$ pe U_{λ_0} şi deci $g(\lambda) \equiv \xi$ pe U_{λ_0}. Conform teoremei de unicitate obţinem că $g(\lambda) \equiv \xi$ pe Δ, ceea ce contrazice faptul că $g(0) = p \in D$. Prin urmare presupunerea făcută este falsă şi deci $g(\Delta) \subset D$ ceea ce demonstrează afirmaţia.

□

Folosind ideile lui E. Poletskií şi B. Shabat [65] se poate arăta că dacă D este un domeniu mărginit din $\mathbb{C}^n$, astfel încât

$$D = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \varphi(z) < 0\},$$

unde funcţia φ este plurisubarmonică în domeniul D şi continuă pe $\overline{D}$, sau se obţine dintr-un astfel de domeniu după eliminarea unei hipersuprafeţe principale A, atunci pentru fiecare punct $p \in D$ şi toţi vectorii $v \in \mathbb{C}^n$ există o aplicaţie extremală pentru seminorma $K_D(p; v)$.

3.4 Un criteriu de $\mathcal{K}$–normalitate a aplicaţiilor olomorfe

În acest paragraf este demonstrat un criteriu de $\mathcal{K}-$normalitate a unei aplicaţii olomorfe.

Fie M o varietate complexă de dimensiune complexă n şi fie N o varietate hermitiană înzestrată cu metrica hermitiană ds_N.

În continuare vom considera că M este o varietate complexă astfel încât pentru orice punct $p \in M$ şi pentru orice vector tangent $v \in T_pM$ există o aplicaţie extremală pentru seminorma Kobayashi $K_M(p; v)$. Vom nota cu $E(M)$ mulţimea tuturor aplicaţiilor extremale.

Fie Y un subspaţiu complex relativ compact al varietăţii hermitiene N şi să notăm cu $\mathcal{O}(M, Y)$ submulţimea mulţimii $\mathcal{O}(M, N)$ pentru care $f(M) \subset Y$.

Pornind de la ideile lui K. Yosida şi K. Noshiro, care în cazul unei variabile complexe, au asociat cu fiecare funcţie f meromorfă în discul unitate $\Delta \subset \mathbb{C}$ familia de funcţii meromorfe

$$\mathcal{F} = \{f \circ g \mid g \in \mathrm{Aut}(\Delta)\}$$

şi au studiat acele funcţii pentru care această familie este normală, ulterior numite de către O. Lehto şi K. I. Virtanen funcţii normale, J. Cima şi S. Krantz în [14] pentru fiecare aplicaţie olomorfă $f \in \mathcal{O}(D, \overline{\mathbb{C}})$ au considerat familia

$$\mathcal{F} = \{f \circ h \mid h \in \mathcal{O}(\Delta, D)\}$$

şi au demonstrat că o aplicaţie $f \in \mathcal{O}(D, \overline{\mathbb{C}})$ este $\mathcal{K}$–normală în D atunci şi numai atunci, când este normală familia de aplicaţii $\mathcal{F} = \{f \circ h \mid h \in \mathcal{O}(\Delta, D)\}$.

Mai sus am arătat că clasa domeniilor cu proprietatea că, pentru orice punct al domeniului şi pentru orice vector tangent există o aplicaţie extremală pentru seminorma Kobayashi, este suficient de largă, astfel încât să putem asocia fiecărei aplicaţii $f \in \mathcal{O}(M, Y)$ familia

$$\mathcal{F} = \{f \circ g \mid g \in E(M)\}.$$

Teorema 3.2 ([34]). *Fie M o varietate complexă şi Y un subspaţiu complex relativ compact al varietăţii hermitiene N înzestrată cu metrica hermitiană ds_N. O aplicaţie olomorfă f din $\mathcal{O}(M, Y)$ este $\mathcal{K}$–normală pe varietatea complexă M atunci şi numai atunci când este normală familia de aplicaţii $\mathcal{F} = \{f \circ g \mid g \in E(M)\}$, unde $E(M)$ este mulţimea aplicaţiilor extremale pentru seminorma Kobayashi.*

Demonstraţie. *Necesitatea.* Fie că aplicaţia $f \in \mathcal{O}(M, Y)$ este $\mathcal{K}$–normală pe varietatea M. Atunci putem găsi o constantă $L > 0$, astfel încât

$$f^* ds_N(p; v) \le L \cdot K_M(p; v) \tag{3.11}$$

pentru toate punctele $p \in M$ şi toţi vectorii $v \in T_pM$.

Fixăm în mod arbitrar un punct $\lambda \in \Delta$, un vector $\xi \in T_\lambda\Delta$ şi fie g o aplicaţie extremală arbitrară, $g \in E(M)$. Fie $g(\lambda) = p \in M$ şi $g'(\lambda)\xi = v \in T_pM$. Observăm că

$$f^*ds_N(p; v) = f^*ds_N(g(\lambda); g'(\lambda)\xi) = (f \circ g)^*ds_N(\lambda, \xi),$$

şi ţinând cont de relaţia (3.11) obţinem

$$(f \circ g)^*ds_N(\lambda, \xi) \leq L \cdot K_M(p; v).$$

Deoarece $g : U \to M$ este o aplicaţie olomorfă şi seminorma Kobayashi posedă proprietatea de contracţie, avem

$$K_M(p; v) = K_M(g(\lambda); g'(\lambda)\xi) \leq K_\Delta(\lambda; \xi)$$

şi prin urmare

$$(f \circ g)^*ds_N(\lambda, \xi) \leq L \cdot K_\Delta(\lambda; \xi)$$

pentru orice aplicaţie $f \circ g \in \mathcal{F}$ şi toate punctele $\lambda \in \Delta$ şi toţi vectorii $\xi \in T_\lambda\Delta$, ceea ce conform Lemei 3.2 înseamnă că familia $\mathcal{F} = \{f \circ g \mid g \in E(M)\}$ este normală.

Suficienţa. Fie $\mathcal{F} = \{f \circ g \mid g \in E(M)\}$ o familie normală de aplicaţii pe discul Δ. În calitate de compact $K \subset \Delta$ vom lua punctul $\lambda = 0$, iar în calitate de vector tangent vom lua $\xi = 1$. Atunci, în baza Lemei 3.2 se va găsi o constantă $L > 0$, astfel încât pentru toate aplicaţiile $g \in E(M)$ va avea loc inegalitatea

$$(f \circ g)^*ds_N(0, 1) \leq L \cdot K_\Delta(0; 1) = L. \tag{3.12}$$

Fixăm arbitrar un punct $p \in M$ şi un vector $v \in T_pM$. Fie $g : \Delta \to M$ o aplicaţie extremală, astfel încât

$$g(0) = p \;\text{ şi }\; g'(0) \cdot K_M(p; v) = v.$$

Deoarece

$$(f \circ g)^*ds_N(0; 1) = f^*ds_N(g(0); g'(0) \cdot 1) = f^*ds_N\left(p; \frac{v}{K_M(p; v)}\right) =$$

$$= \frac{1}{K_M(p; v)} \cdot f^*ds_N(p; v),$$

ţinând cont de relaţia (3.12) obţinem

$$\frac{1}{K_M(p; v)} \cdot f^*ds_N(p; v) \leq L.$$

Prin urmare, pentru toate punctele $p \in M$ şi toţi vectorii $v \in T_pM$ are loc inegalitatea

$$f^*ds_N(p; v) \leq L \cdot K_M(p; v),$$

şi deci f este o funcţie $\mathcal{K}$–normală pe M.

$\square$

Ca urmare, putem accepta următoarea definiţie a aplicaţiei normale.

Definiţia 3.12. Fie M o varietate complexă şi Y un subspaţiu complex relativ compact al varietăţii hermitiene N. O aplicaţie $f \in \mathcal{O}(M, Y)$ olomorfă pe varietatea M se numeşte *normală* dacă este normală familia de aplicaţii

$$\mathcal{F} = \{f \circ g \mid g \in E(M)\}.$$

Remarcăm, că dacă $M = \Delta$, atunci această definiţie este echivalentă cu definiţia clasică, deoarece fiecare aplicaţie $g \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ este o extremală în Δ.

3.5 Un criteriu de existenţă a limitei $\mathcal{K}$–admisibile a unei funcţii meromorfe

În această secţiune se demonstrează un criteriu de existenţă a limitei $\mathcal{K}$–admisibile a unei funcţii meromorfe pe un domeniu mărginit din $\mathbb{C}^n$, pentru care fiecare punct din frontiera sa este punct peak.

Fie $\alpha > 1$ un număr arbitrar fixat şi ξ un punct frontieră al discului Δ.

Definiţia 3.13. Vom spune că o funcţie $f : \Delta \to \overline{\mathbb{C}}$ are *limita radială* $l \in \overline{\mathbb{C}}$ în punctul frontieră $\xi = e^{i\varphi}$ dacă

$$\lim_{r \to 1^-} f(re^{i\varphi}) = l.$$

Vom nota cu $\Gamma_\alpha(\xi)$ regiunea Stolz de deschidere α cu vârful în punctul $\xi \in \partial\Delta$,

$$\Gamma_\alpha(\xi) = \left\{ z \in \Delta : \frac{|z - \xi|}{1 - |z|} < \alpha \right\}.$$

În vecinătatea punctului frontieră $\xi \in \partial\Delta$, domeniul Stolz este un unghi care tinde la 0, dacă $\alpha \to 1^+$ şi tinde la π, dacă $\alpha \to +\infty$. Curbele care se apropie de punctul ξ din interiorul regiunii Stolz nu pot fi tangente la $\partial\Delta$, de aceea regiunea $\Gamma_\alpha(\xi)$ este numită *domeniu de apropiere netangenţială* cu vârful în ξ.

Definiţia 3.14. Vom spune că o funcţie $f : \Delta \to \overline{\mathbb{C}}$ are *limită netangenţială (unghiulară)* $l \in \overline{\mathbb{C}}$ în punctul ξ, dacă pentru orice $\alpha > 1$

$$\lim_{j \to \infty} f(z_j) = l,$$

pentru orice şir de puncte $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ care converge la ξ din interiorul regiunii $\Gamma_\alpha(\xi)$.

Unul din rezultatele clasice din teoria funcţiilor de o variabilă complexă este teorema lui Lindelöf.

Teorema 3.3 ([58]). *Fie f o funcţie olomorfă şi mărginită în dicul unitate $\Delta \subset \mathbb{C}$. Dacă există limita radială $l \in \mathbb{C}$*

$$\lim_{r \to 1^-} f(re^{i\varphi}) = l$$

a funcţiei f în punctul frontieră $e^{i\varphi}$, atunci f are limita netangenţială l în punctul $e^{i\varphi}$.

Cu alte cuvinte, pentru o funcţie f olomorfă şi mărginită definită în discul unitate, existenţa limitei de-a lungul normalei garantează existenţa limitei de-a lungul oricărei curbe netangenţiale la $\partial\Delta$, în timp ce apropierea după direcţiile tangenţiale trebuie exclusă.

În lucrarea [56], O. Lehto şi K. I. Virtanen au arătat că teorema Lindelöf are loc pentru o clasă mai largă de funcţii şi anume pentru funcţiile normale în discul unitate din $\mathbb{C}$.

Pentru fiecare punct $z \in \Delta$ ei au definit „derivata sferică maximă" a funcţiei f relativ la metrica Poincaré în punctul z

$$Q_f(z) = \sup_{v \in \mathbb{C}\setminus\{0\}} \left\{ \frac{ds(f(z); f'(z)v)}{d\rho(z; v)} \right\} = (1 - |z|^2) \frac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2}$$

şi au demonstrat următorul criteriu de existenţă a limitei netangenţiale a unei funcţii meromorfe în discul unitate.

Teorema 3.4 ([56]). *Dacă o funcţie f meromorfă în discul unitate Δ are limita radială $l \in \overline{\mathbb{C}}$ în punctul $\xi \in \partial\Delta$, atunci f are limita netangenţială l în ξ atunci şi numai atunci când*

$$|Q_f(z)| < const,$$

în fiecare regiune Stolz $\Gamma_\alpha(\xi)$.

Vom încerca să generalizăm rezultatul obţinut de Lehto şi Virtanen pentru cazul multidimensional. Pentru aceasta vom folosi o generalizare potrivită a noţiunii de limită netangenţială şi anume o generalizare exprimată în termenii normei şi metricii Kobayashi.

Fie D un domeniu mărginit din $\mathbb{C}^n$ cu frontiera de clasa $\mathcal{C}^2$, iar $\xi \in \partial D$ un punct frontieră. Vom nota cu ν_ξ vectorul unitate al normalei exterioare la ∂D în ξ şi cu $N(\xi)$ segmentul de lungime euclidiană δ normal interior pentru domeniul D în punctul ξ,

$$N(\xi) = \{\xi - t\nu_\xi \in D \mid 0 < t \leq \delta\}.$$

Vom considera $\delta > 0$ suficient de mic, astfel încât $N(\xi) \subset D$.

Definiţia 3.15. Fie D un domeniu mărginit din $\mathbb{C}^n$ cu frontiera de clasa $\mathcal{C}^2$. Vom numi *domeniu $\mathcal{K}$–admisibil de deschidere $\alpha > 0$ cu vârful în punctul $\xi \in \partial D$*, mulţimea

$$\mathcal{K}_\alpha(\xi) = \{z \in D \mid k_D(z, N(\xi)) < \alpha\},$$

aici $k_D(z, N(\xi))$ este distanţa Kobayashi de la punctul $z \in D$ până la $N(\xi)$, adică

$$k_D(z, N(\xi)) = \inf\{k_D(z, w) \mid w \in N(\xi)\}.$$

Definiţia 3.16. Fie D un domeniu mărginit din $\mathbb{C}^n$ cu frontiera de clasa $\mathcal{C}^2$. Vom spune că o funcţie $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ are *limita $\mathcal{K}$–admisibilă $l \in \overline{\mathbb{C}}$ în punctul $\xi \in \partial D$*, dacă pentru orice $\alpha > 0$ şi orice şir de puncte $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ din $\mathcal{K}_\alpha(\xi)$, convergent la ξ, şirul corespunzător de valori ale funcţiei $\{f(z_j)\}_{j=1}^{\infty}$ converge la l în metrica sferică. Vom nota

$$(\mathcal{K} - \lim f)(\xi) = l.$$

Lema 3.3 ([33]). *Fie D un domeniu mărginit din $\mathbb{C}^n$ cu frontiera de clasa $\mathcal{C}^2$, iar $\xi \in \partial D$ un punct frontieră al lui. Pentru ca funcţia $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ să aibă limita $\mathcal{K}$–admisibilă $l \in \overline{\mathbb{C}}$ în punctul $\xi \in \partial D$ este necesar şi suficient ca pentru orice număr pozitiv $\varepsilon > 0$, să existe un număr $\delta > 0$, astfel încât pentru orice $\alpha > 0$ şi toate punctele $z \in \mathcal{K}_\alpha(\xi) \cap \{z \in \mathbb{C}^n : |z-\xi| < \delta\}$ să aibă loc inegalitatea*

$$s(f(z), l) < \varepsilon.$$

Demonstraţie. *Necesitatea.* Fie

$$(\mathcal{K} - \lim f)(\xi) = l,$$

atunci conform definiţiei limitei $\mathcal{K}$–admisibile, pentru fiecare număr $\alpha > 0$ şi pentru orice şir $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ de puncte din D, care converge $\mathcal{K}$–admisibil la ξ, adică astfel încât

$$z_j \in \mathcal{K}_\alpha(\xi), \quad j = 1, 2, ... \text{ şi } \quad z_j \to \xi, \quad j \to \infty$$

avem

$$\lim_{j \to \infty} s(f(z_j), l) = 0. \tag{3.13}$$

Admitem prin absurd, că afirmaţia lemei este falsă. Atunci există un număr $\varepsilon > 0$, astfel încât pentru toţi $\delta > 0$ există un punct $z \in \mathcal{K}_\alpha(\xi) \cap \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z - \xi| < \delta\}$, pentru care

$$s(f(z), l) \geq \varepsilon.$$

Fie $\{\delta_j\}_{j=1}^{\infty}$ un şir arbitrar de numere pozitive, convergent la zero, de exemplu $\delta_j = \dfrac{1}{j}$. Atunci pentru fiecare δ_j se poate găsi un punct

$$z_j \in \mathcal{K}_\alpha(\xi) \cap \{z \in \mathbb{C}^n \mid \quad |z - \xi| < \delta_j\}, \tag{3.14}$$

astfel încât $s(f(z_j), l) \geq \varepsilon$. Cum $\lim\limits_{j \to \infty} \delta_j = 0$, din condiţia (3.14) deducem că şirul $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ converge $\mathcal{K}$–admisibil la ξ şi concomitent

$$s(f(z_j), l) \geq \varepsilon, \quad j = 1, 2, ...$$

Dar aceasta contrazice condiţia (3.13). Contradiţia obţinută demonstrează necesitatea.

Suficienţa. Fixăm în mod arbitrar numărul $\varepsilon > 0$ şi $\delta > 0$, astfel încât pentru toţi $z \in \mathcal{K}_\alpha(\xi) \cap \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z - \xi| < \delta\}$ are loc inegalitatea $s(f(z), l) < \varepsilon$.

Considerăm un şir arbitrar $\{z_j\}_{j=1}^\infty$ de puncte din $\mathcal{K}_\alpha(\xi)$ care converge la ξ. Începând cu un anumit rang j_0 vom avea $|z_j - \xi| < \delta$ şi prin urmare pentru $j \geq j_0$ va avea loc inegalitatea $s(f(z_j), l) < \varepsilon$.

Deoarece $\varepsilon > 0$ a fost fixat în mod arbitrar, ultima condiţie exprimă faptul că şirul $\{f(z_j)\}_{j=1}^\infty$ converge la l şi deci

$$(\mathcal{K} - \lim f)(\xi) = l.$$

Lema este complet demonstrată.

$\square$

Ca urmare, putem accepta şi următoarea definiţie echivalentă a limitei $\mathcal{K}$–admisibile.

Definiţia 3.17. Fie D un domeniu mărginit din $\mathbb{C}^n$ cu frontiera de clasa C^2. Vom spune că funcţia $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ are limita $\mathcal{K}$–admisibilă $l \in \overline{\mathbb{C}}$ în punctul $\xi \in \partial D$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, se poate găsi un număr $\delta > 0$, astfel încât pentru orice $\alpha > 0$ şi pentru toate punctele $z \in \mathcal{K}_\alpha(\xi) \cap \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z - \xi| < \delta\}$ are loc inegalitatea

$$s(f(z), l) < \varepsilon.$$

Vom stabili legătura dintre existenţa limitei radiale şi a limitei $\mathcal{K}$–admisibile a unei funcţii meromorfe arbitrare $f \in \mathcal{O}(D, \overline{\mathbb{C}})$. Vom examina mai întâi cazul când $D = B$, $B = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z| < 1\}$.

Pentru o aplicaţie olomorfă $f : B \to \overline{\mathbb{C}}$, în fiecare punct $z \in B$ vom defini derivata sferică maximă relativ la seminorma Kobayashi

$$Q_f(z) = \sup_{v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \left\{ \frac{ds(f(z); f'(z)v)}{K_B(z; v)} \right\}.$$

Ar fi natural să presupunem că în cazul bilei unitate din $\mathbb{C}^n$ are loc o afirmaţie analoagă cu rezultatul obţinut în cazul unidimensional de O. Lehto şi K. I. Virtanen, în care convergenţa netangenţială ar fi înlocuită cu convergenţa admisibilă sau $\mathcal{K}$–admisibilă. Următorul exemplu ne convinge de faptul că acest lucru nu este adevărat.

Fie $B \subset \mathbb{C}^2$ bila unitate din $\mathbb{C}^2$ şi funcţia $f : B \to \mathbb{C}$ definită astfel

$$f(z_1, z_2) = \frac{z_2^2}{1 - z_1}.$$

Deoarece

$$|f(z_1, z_2)| = \frac{|z_2|^2}{|1 - z_1|} < \frac{1 - |z_1|^2}{|1 - z_1|} \leq \frac{(1 - |z_1|)(1 + |z_1|)}{1 - |z_1|} = 1 + |z_1| < 2,$$

funcţia f este olomorfă şi mărginită în bila B.

Fie $\lambda > 1$ şi $z^{(j)} = \left(1 - \frac{1}{\lambda j}, \frac{1}{\lambda\sqrt{j}}\right)$, $j = 1, 2, \ldots$ un şir de puncte din bila B. Observăm că

$$\lim_{j\to\infty} z^{(j)} = (1, 0) = \mathbf{1} \in \partial B.$$

Să arătăm că şirul $\{z^{(j)}\}_{j=1}^{\infty}$, $j = 1, 2, \ldots$ converge la $\mathbf{1} \in \partial B$ din interiorul unui domeniu admisibil Korányi de apropiere

$$D_\beta(\mathbf{1}) = \{z \in B \mid |1 - (z, \mathbf{1})| \leq \beta(1 - |z|)\} = \{z \in B \mid 1 - z_1 \leq \beta(1 - |z|)\},$$

care este echivalent cu domeniul $\mathcal{K}$–admisibil de apropiere.

Înlocuind coordonatele punctelor şirului dat în inegalitatea care defineşte domeniul Korányi $D_\beta(\mathbf{1})$ obţinem

$$\frac{1}{\lambda j} < \beta\left(1 - \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\lambda j}\right)^2 + \frac{1}{\lambda^2 j}}\right)$$

sau

$$\frac{1}{\lambda j} < \beta\left(1 - \frac{\sqrt{\lambda^2 j^2 - (2\lambda - 1)j + 1}}{\lambda j}\right).$$

De aici aflăm

$$\beta > \frac{1}{\lambda j - \sqrt{\lambda^2 j^2 - (2\lambda - 1)j + 1}}.$$

Să studiem funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = \lambda t - \sqrt{\lambda^2 t^2 - (2\lambda - 1)t + 1}$. Derivata ei

$$g'(t) = \lambda - \frac{2\lambda^2 t - (2\lambda - 1)}{2\sqrt{\lambda^2 j^2 - (2\lambda - 1)j + 1}},$$

de asemenea este definită pe $\mathbb{R}$ şi calculele elementare ne arată că $g'(t) \neq 0$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$. Deoarece $g'(0) = 2\lambda - \frac{1}{2} > 0$, deducem că $g'(t) > 0$ pentru toţi $t \in \mathbb{R}$ şi ca urmare funcţia $g(t)$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$. Dar atunci valorile

$$\frac{1}{\lambda j - \sqrt{\lambda^2 j^2 - (2\lambda - 1)j + 1}}$$

descresc odată cu creşterea lui j.

Pentru $j = 1$ avem

$$\beta > \frac{1}{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 2}} = n(\lambda).$$

Astfel deducem că toate punctele $z^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots$ ale şirului considerat aparţin domeniilor $D_\beta(\mathbf{1})$ cu $\beta > n(\lambda)$, ceea ce înseamnă că şirul dat converge admisibil la $\mathbf{1} \in \partial B$ şi

$$\lim_{j\to\infty} f(z^{(j)}) = \frac{1}{\lambda}.$$

Deci, deşi limita radială în punctul $\mathbf{1} \in \partial B$ a funcţiei f există şi este egală cu

$$\lim_{r \to 1^-} f(r \cdot \mathbf{1}) = 0,$$

funcţia f nu are limită admisibilă în acest punct, deoarece după punctele şirurilor $\{z^{(j)}\}_{j=1}^{\infty}$, cu $\lambda > 1$ ea are limite diferite egale cu $\frac{1}{\lambda}$.

Astfel, funcţia f este $\mathcal{K}$–normală în B şi prin urmare $Q_f(z) < const$ în toate punctele bilei B, în timp ce în punctul $\mathbf{1} = (1, 0) \in \partial B$ ea are limită radială egală cu 0 şi nu are limită admisibilă în acest punct.

Aşadar, în cazul mai multor variabile complexe, spre deosebire de cazul unei variabile, faptul că funcţia $|Q_f(z)|$ este mărginită pe întreg domeniul de definiţie nu garantează existenţa limitei $\mathcal{K}$–admisibile a unei funcţii f într-un punct frontieră arbitrar al domeniului de definiţie în care există limita radială.

În lucrarea [26], P. Dovbuş a obţinut un criteriu de existenţa a limitei $\mathcal{K}$–admisibile pentru aplicaţii olomorfe pe domenii strict pseudoconvexe din spaţiul $\mathbb{C}^n$.

Fie D un domeniu mărginit din spaţiul $\mathbb{C}^n$, pentru care în fiecare punct frontieră $\xi \in \partial D$ există o funcţie peak. Pentru astfel de domenii putem stabili un criteriu de existenţă a limitei $\mathcal{K}$–admisibile a unei funcţii $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$, analog cu cel obţinut de către P. Dovbuş în [26].

Definiţia 3.18. Vom spune că funcţia $f : D \subset \mathbb{C}^n \to \overline{\mathbb{C}}$ are *limita radială* $l \in \overline{\mathbb{C}}$ în punctul $\xi \in \partial D$ dacă

$$\lim_{t \to 0} s(f(\xi - t\nu_\xi), l) = 0.$$

Teorema 3.5 ([33]). *Fie $D \subset \mathbb{C}^n$ un domeniu mărginit, astfel încât fiecare punct din frontiera lui este punct peak. Fie $\xi \in \partial D$ un punct în care există normala exterioară ν_ξ. Dacă funcţia meromorfă $f \in \mathcal{O}(D, \overline{\mathbb{C}})$ are limita radială $l \in \overline{\mathbb{C}}$ în punctul ξ, atunci f are limita $\mathcal{K}$–admisibilă l în ξ dacă şi numai dacă*

$$(K - \lim Q_f)(\xi) = 0.$$

Înainte de a trece la demonstraţia Teoremei 3.5, vom stabili două leme ajutătoare, care ar prezenta şi un interes independent.

Notăm cu ρ metrica Poincaré a discului Δ şi cu $\overline{d_\alpha} = \{\lambda \in \Delta \mid \rho(0, \lambda) \leq \alpha\}$ discul hiperbolic închis de rază α centrat în 0.

Lema 3.4 ([33]). *Fie $D \subset \mathbb{C}^n$ un domeniu mărginit din $\mathbb{C}^n$ şi $\xi \in \partial D$ un punct frontieră de peak. Fie $h_j : \Delta \to D$, $j = 1, 2, \ldots$ un şir de aplicaţii olomorfe. Atunci pentru orice număr pozitiv $\varepsilon > 0$ şi pentru orice $\alpha > 0$ se poate găsi un număr $\delta > 0$, astfel încât dacă $|h_j(0) - \xi| < \delta$, atunci $|h_j(\lambda) - \xi| < \varepsilon$ pentru toţi $\lambda \in \overline{d_\alpha}$.*

Demonstraţie. Admitem prin absurd că afirmaţia lemei este falsă. Atunci se poate găsi un şir de aplicaţii olomorfe $h_j \in \mathcal{O}(\Delta, D)$, $j = 1, 2, \ldots$, pentru care vom nota $h_j(0) = z_j$, numerele pozitive $\varepsilon > 0$ şi $\alpha > 0$, astfel încât pentru orice $\delta > 0$, dacă $|z_j - \xi| < \delta$ atunci se poate găsi un punct $\lambda \in \overline{d_\alpha}$, satisfăcând condiţia

$$|h_j(\lambda) - \xi| \geq \varepsilon.$$

Fie $\delta = \dfrac{1}{j}$, $j \in \mathbb{N}^*$. Atunci pentru fiecare număr natural j avem $|z_j - \xi| < \dfrac{1}{j}$ şi se poate găsi un punct $\lambda_j \in \overline{d_\alpha}$, astfel încât $|h_j(\lambda_j) - \xi| \geq \varepsilon$.

Fie $\psi \in A(D)$ funcţia peak în punctul ξ pe D. Considerăm şirul de aplicaţii olomorfe

$$g_j = \psi \circ h_j, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Deoarece $|\psi(z)| < 1$ pentru toate punctele $z \in \overline{D} \setminus \{\xi\}$ şi $\psi(\xi) = 1$, avem $|g_j(\lambda)| \leq 1$ pe Δ pentru toţi j.

Aceasta înseamnă că şirul de aplicaţii $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ este uniform mărginit pe Δ şi prin urmare formează o familie normală de aplicaţii. Fie $\{g_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$ un subşir al şirului $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$, uniform convergent pe submulţimile compacte din Δ la o aplicaţie olomorfă g. Atunci

$$g(0) = \lim_{k\to\infty} g_{j_k}(0) = \lim_{k\to\infty} \psi(h_{j_k}(0)) = \lim_{k\to\infty} \psi(z_{j_k}).$$

Deoarece şirul de puncte $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ converge la ξ, subşirul lui $\{z_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de asemenea converge la ξ, iar continuitatea funcţiei ψ pe $\overline{D}$ implică

$$g(0) = \lim_{k\to\infty} \psi(z_{j_k}) = \psi(\xi) = 1.$$

Deoarece $|g_j| \leq 1$ pe discul Δ, rezultă şi $|g| \leq 1$ pe Δ şi ţinând cont de faptul că $g(0) = 1$, din teorema despre maximul modulului unei aplicaţii olomorfe deducem că $g(\lambda) \equiv 1$ pe Δ.

Prin urmare şirul $\{g_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge uniform pe $\overline{d_\alpha}$ la 1.

Deoarece $\lambda_j \in \overline{d_\alpha}, j = 1, 2, \ldots$ din şirul mărginit $\{\lambda_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$ putem extrage un subşir convergent şi fără restrângerea generalităţii putem considera că $\lambda_{j_k} \to \lambda_0$, $\lambda_0 \in \overline{d_\alpha}$.

Fie $B_\varepsilon(\xi)$ bila deschisă centrată în ξ de rază ε. Notăm cu $\overline{D_\varepsilon D} \cap (\mathbb{C}^n \setminus B_\varepsilon)$. Cum funcţia ψ este continuă pe compactul $\overline{D_\varepsilon}$ şi pe el avem $|\psi| < 1$, deducem că se va găsi $t < 1$, astfel încât $\psi| \leq t$ pe $\overline{D_\varepsilon}$. Aşa cum $|h_{j_k}(\lambda_{j_k}) - \xi| \geq \varepsilon$ avem $h_{j_k}(\lambda_{j_k}) \in \overline{D_\varepsilon}$, $k = 1, 2, \ldots$ şi atunci $|g_{j_k}(\lambda_{j_k})| = |\psi(h_{j_k}(\lambda_{j_k}))| \leq t$. Dar acesata contrazice faptul că $\{g_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge uniform pe submulţimile compacte din Δ la $g(\lambda) \equiv 1$.

Contradicţia obţinută demonstrează afirmaţia.

$\square$

Lema 3.5 ([33]). *Fie D un domeniu mărginit din spaţiul $\mathbb{C}^n$ astfel încât fiecare punct din frontiera lui este punct peak. Fie z_0 un punct interior, fixat arbitrar, al domeniului D. Atunci pentru D putem construi o exhaustiune compactă*

$$D = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} B_k^{(\nu)}[z_0],$$

unde $B_k^{(\nu)}[z_0] = \{z \in D \mid k_D(z, z_0) \leq \nu\}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ sunt bile închise centrate în z_0 de rază ν în metrica Kobayashi.

Demonstraţie. Conform construcţiei avem

$$B_k^{(1)}[z_0] \subset B_k^{(2)}[z_0] \subset \ldots \subset B_k^{(\nu)}[z_0] \subset \ldots .$$

Să arătăm, că orice bilă închisă centrată în z_0 de rază $0 < \nu < \infty$ în metrica Carathéodory

$$B_c^{(\nu)}[z_0] = \{z \in D \mid c_D(z, z_0) \leq r\}$$

e relativ compactă în D. Admitem prin absurd, că pentru un anumit ν fixat se va găsi un şir de puncte z_μ, $\mu = 1, 2, \ldots$ care sunt conţinute în $B_c^{(\nu)}[z_0]$, dar care nu are nici un punct de acumulare în D.

Deoarece domeniul D este mărginit, se va găsi cel puţin un punct de acumulare ξ al acestui şir de puncte, dar care se va afla pe frontiera ∂D. Din şirul mărginit z_μ, $\mu = 1, 2, \ldots$ putem extrage un subşir convergent la ξ şi pentru a nu complica notaţiile vom considera că $\lim\limits_{\mu \to \infty} z_\mu = \xi$.

Conform ipotezei, există o funcţie peak $\psi \in A(D)$ pentru D în punctul ξ. Să considerăm funcţia

$$\varphi_\mu(z) = \frac{\psi(z) - \psi(z_\mu)}{1 - \overline{\psi(z_\mu)} \cdot \psi(z)}.$$

Observăm că ipoteza $|\psi(z)| < 1$ pentru toţi $z \in \overline{D} \setminus \{\xi\}$, implică $|\varphi_\mu(z)| < 1$ pentru toţi $z \in D$ şi deci $\varphi_\mu \in \mathcal{O}(D, \Delta)$, şi $\varphi_\mu(z_\mu) = 0$, $\mu = 1, 2, \ldots$. Conform proprietăţii de contracţie a metricii Carathéodory, pentru toţi μ avem

$$c_D(z_\mu, z_0) \geq c_\Delta(\varphi_\mu(z_\mu), \varphi_\mu(z_0)).$$

Dar

$$c_\Delta(\varphi_\mu(z_\mu), \varphi_\mu(z_0)) = c_\Delta(0, \varphi_\mu(z_0)) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + |\varphi_\mu(z_0)|}{1 - |\varphi_\mu(z_0)|},$$

şi deci

$$c_D(z_\mu, z_0) \geq \frac{1}{2} \ln \frac{1 + |\varphi_\mu(z_0)|}{1 - |\varphi_\mu(z_0)|}. \tag{3.15}$$

Ţinând cont de faptul că pentru toţi $z \in D$

$$\lim_{\mu\to\infty} |\varphi_\mu(z)| = \lim_{\mu\to\infty} \left| \frac{\psi(z) - \psi(z_\mu)}{1 - \overline{\psi(z_\mu)} \cdot \psi(z)} \right| = \left| \frac{\psi(z) - \psi(\xi)}{1 - \overline{\psi(\xi)} \cdot \psi(z)} \right| = \left| \frac{\psi(z) - 1}{1 - \psi(z)} \right| = 1,$$

în particular avem

$$|\varphi_\mu(z_0)| \to 1, \quad \text{când} \quad \mu \to \infty.$$

Dar atunci membrul drept din relaţia (3.15) tinde la infinit când $\mu \to \infty$, ceea ce contrazice ipotezei

$$c_D(z_\mu, z_0) \leq \nu < \infty, \quad \text{pentru toţi} \quad \mu = 1, 2, \ldots.$$

Prin urmare, bila închisă $B_c^{(\nu)}[z_0]$ este relativ compactă în D pentru orice $0 < \nu < \infty$.

Conform proprietăţilor metricilor Carathéodory şi Kobayashi, pentru orice două puncte $z', z'' \in D$ avem

$$c_D(z', z'') \leq k_D(z', z'').$$

Dar atunci, pentru toţi $\nu = 1, 2, \ldots$ avem

$$B_k^{(\nu)}[z_0] \subset B_c^{(\nu)}[z_0].$$

Faptul că $B_k^{(\nu)}[z_0]$ este o submulţime închisă a bilei $B_c^{(\nu)}[z_0]$ care e relativ compactă în D garantează că bilele $B_k^{(\nu)}[z_0]$ sunt relativ compacte în D pentru toţi $\nu = 1, 2, \ldots$. Deoarece distanţa Kobayashi dintre orice două puncte ale domeniului D este finită, fiecare punct $z \in D$ aparţine unei bile $B_k^{(\nu)}[z_0]$ şi deci $D = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} B_k^{(\nu)}[z_0]$.

$\square$

Demonstraţia Teoremei 3.5. *Necesitatea.* Presupunem că funcţia f are limita $\mathcal{K}$–admisibilă $l \in \overline{\mathbb{C}}$ în punctul $\xi \in \partial D$. Să demonstrăm că $(K - \lim Q_f)(\xi) = 0$. Pentru aceasta trebuie să arătăm că pentru orice număr $\alpha > 0$ şi pentru orice şir de puncte $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ din $K_\alpha(\xi)$ convergent la ξ, avem $s(Q_f(z_j), 0) \to 0$, când $j \to \infty$. Dar, întrucât

$$s(Q_f(z_j), 0) = \frac{|Q_f(z_j)|}{\sqrt{1 + |Q_f(z_j)|^2}} \leq Q_f(z_j),$$

deducem că afirmaţia va fi demonstrată dacă vom arăta că pentru orice $\alpha > 0$ şi orice şir de puncte $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ din $K_\alpha(\xi)$ convergent la ξ, avem

$$\lim_{j\to\infty} Q_f(z_j) = \lim_{j\to\infty} \left(\sup_{v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \left\{ \frac{|f'(z_j) \cdot v|}{K_D(z_j; v) \cdot (1 + |f(z_j)|^2)} \right\} \right) = 0.$$

Deoarece conform ipotezei $(K-\lim f)(\xi)=l$, în baza Lemei 3.3, pentru orice $\varepsilon>0$ există un $\delta(\varepsilon)>0$ astfel încât pentru orice $\alpha>0$ şi pentru orice $z\in K_\alpha(\xi)\cap\{z\in\mathbb{C}^n:|z-\xi|<\delta\}$ are loc inegalitatea $s(f(z),l)<\varepsilon$.

Fixăm arbitrar $\alpha>0$, un vector $v\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}$ şi un şir arbitrar de puncte $\{z_j\}_{j=1}^\infty$ din domeniul $K_{\alpha/2}(\xi)$ convergent la ξ. Conform Propoziţiei 3.1, pentru fiecare punct z_j şi pentru vectorul v există o aplicaţie extremală $g_j\in\mathcal{O}(\Delta,D)$ pentru seminorma Kobayashi $K_D(z_j;v)$, astfel încât

$$g_j(0)=z_j \quad \text{şi} \quad g_j'(0)=\frac{v}{K_D(z_j;v)}.$$

Conform proprietăţii de contracţie a semimetricii Kobayashi

$$k_D(g_j(0),g_j(\lambda))\le k_\Delta(0,\lambda)=\rho(0,\lambda),$$

pentru toate punctele $\lambda\in\Delta$ şi pentru toţi $j=1,2,\ldots$.

Deoarece $z_j\in K_{\alpha/2}(\xi)$, $j=1,2,\ldots$ şi $g_j(0)=z_j$, avem

$$k_D(g_j(0),N_\xi)=k_D(z_j,N_\xi)<\frac{\alpha}{2}.$$

Din ultimele două inegalităţi şi din inegalitatea triunghiului pentru semimetrica Kobayashi rezultă că

$$k_D(g_j(\lambda),N_\xi)\le k_D(g_j(\lambda),g_j(0))+k_D(g_j(0),N_\xi)<\rho(0,\lambda)+\frac{\alpha}{2},$$

pentru orice $j=1,2,\ldots$ şi orice $\lambda\in\Delta$.

Dacă $\lambda\in\overline{d}_{\alpha/2}$, atunci $\rho(0,\lambda)\le\dfrac{\alpha}{2}$ şi prin urmare pentru toţi $\lambda\in\overline{d}_{\alpha/2}$ şi toţi $j=1,2,\ldots$ avem

$$k_D(g_j(\lambda),N_\xi)<\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}=\alpha.$$

De aici rezultă că $g_j(\overline{d}_{\alpha/2})\subset K_\alpha(\xi)$ pentru toţi $j=1,2,\ldots$

Conform Lemei 3.4, pentru $\delta(\varepsilon)>0$, determinat mai sus, există un $\delta_1>0$ astfel încât, dacă $|g_j(0)-\xi|<\delta_1$, atunci $|g_j(\lambda)-\xi|<\delta$ pentru toţi $\lambda\in\overline{d}_{\alpha/2}$.

Cum $g_j(0)=z_j$, $j=1,2,\ldots$ şi şirul $\{z_j\}_{j=1}^\infty$ converge la ξ, deducem că există un rang $J=J(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*$, astfel încât pentru orice $j>J(\varepsilon)$ avem $|z_j-\xi|<\delta_1$. Dar atunci pentru orice $j>J(\varepsilon)$ avem

$$|g_j(\lambda)-\xi|<\delta$$

pentru toţi $\lambda\in\overline{d}_{\alpha/2}$ şi prin urmare

$$g_j(\lambda)\in K_\alpha(\xi)\cap\{z\in\mathbb{C}^n:|z-\xi|<\delta\},\ \forall j>J(\varepsilon)\ \text{ şi }\ \forall\lambda\in\overline{d}_{\alpha/2}.$$

Dar atunci, $s((f\circ g_j)(\lambda),l)<\varepsilon$ pentru toţi $j>J(\varepsilon)$ şi orice $\lambda\in\overline{d}_{\alpha/2}$.

Astfel şirul $\{(f \circ g_j)(\lambda)\}_{j=1}^{\infty}$ converge uniform pe $\overline{d}_{\alpha/2}$ la aplicaţia identic constantă. În baza teoremei lui Weierstrass, deducem că

$$\lim_{j\to\infty}(f \circ g_j)'(0) = 0.$$

Dar atunci pentru orice şir $\{z_j\}_{j=1}^{\infty} \subset K_{\alpha/2}(\xi)$ convergent la ξ şi pentru orice vector $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, avem

$$\frac{|f'(z_j)v|}{K_D(z_j; v)(1 + |f(z_j)|^2)} = \frac{|(f \circ g_j)'(0)|}{1 + |(f \circ g_j)(0)|^2} \leq |(f \circ g_j)'(0)|$$

şi deci

$$\lim_{j\to\infty} \frac{ds(f(z_j), f'(z_j)v)}{K_D(z_j; v)} = 0.$$

Prin urmare $\lim\limits_{j\to\infty} Q_f(z_j) = 0$, pentru orice $\alpha > 0$ şi orice şir $\{z_j\}_{j=1}^{\infty} \subset K_{\alpha/2}(\xi)$ convergent la ξ şi deci $(K - \lim Q_f)(\xi) = 0$.

Suficienţa. Presupunem că funcţia f are limita radială $l \in \overline{\mathbb{C}}$ în punctul ξ şi că $(K - \lim Q_f)(\xi) = 0$. Trebuie să demonstrăm că f are limita $\mathcal{K}$–admisibilă $l \in \overline{\mathbb{C}}$ în ξ .

Fixăm în mod arbitrar un punct z_0 pe segmentul normal N_ξ. Conform Lemei 3.5, domeniul D admite o exhaustiune compactă

$$D = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_k^{(j)}[z_0],$$

unde $B_k^{(j)}[z_0]$ este o bilă închisă în metrica Kobayashi cu centrul în punctul z_0 de rază j.

Considerăm un şir de puncte $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ din N_ξ, astfel încât

$$z_j \in B_k^{(j+1)}[z_0] \setminus B_k^{(j)}[z_0].$$

Astfel

$$k_D(z_j, z_0) > j$$

şi prin urmare, când $j \to \infty$ avem că $z_j \to \xi$.

Fixăm în mod arbitrar $\alpha > 0$. Fie $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ un şir de puncte din $K_\alpha(\xi)$ convergent la ξ, astfel încât

$$k_D(z_j, w_j) < \alpha.$$

Observăm că

$$k_D(w_j, z_0) \geq k_D(z_j, z_0) - k_D(z_j, w_j) > j - \alpha.$$

Fie $l_j = [j - \alpha] + 1$, atunci $k_D(w_j, z_0) > l_j$ şi prin urmare

$$w_j \in K_\alpha(\xi) \cap \left(D \setminus B_k^{(l_j)}[z_0]\right).$$

Deoarece $(K - \lim Q_f)(\xi) = 0$, pentru fiecare j există şi este finit numărul

$$\varepsilon_j = \sup\{Q_f(z) \mid z \in K_\alpha(\xi) \cap (D \setminus B_k^{(l_j)}[z_0])\}$$

şi $\varepsilon_j \to 0$ când $j \to \infty$. Astfel

$$\frac{s(f(z_j), f(w_j))}{k_D(z_j, w_j)} \leq \varepsilon_j$$

şi prin urmare

$$s(f(z_j), f(w_j)) \leq k_D(z_j, w_j)\varepsilon_j \leq \alpha\varepsilon_j.$$

Trecând la limită în ultima inegalitate cu $j \to \infty$, obţinem $\lim\limits_{j\to\infty} s(f(z_j), f(w_j)) = 0$. Conform ipotezei f are limita radială l în punctul ξ şi deci $\lim\limits_{j\to\infty} s(f(z_j), l) = 0$. Conform inegalităţii triunghiului avem

$$s(f(w_j), l) \leq s(f(w_j), f(z_j)) + s(f(z_j), l)$$

de unde deducem că

$$\lim_{j\to\infty} s(f(w_j), l) = 0$$

şi prin urmare funcţia f are limita $\mathcal{K}$–admisibilă l în punctul ξ.

$\square$

Bibliografie

[1] H. Alexander, *Holomorphic mappings from the ball and plydisc.* Math. Ann., **209** (1974), 249–256.

[2] T. Barth, *Taut and tight complex manifolds,* Proc. Amer. Math. Soc., **24** (1970), 429–431.

[3] E. Bedford, J. E. Foraess, *A construction of peak functions on weakly pseudoconvex domains.*, Ann. Math., **107** (1978), n. 3, 555–568.

[4] S. Bergman, *Über die Kernfunction eines Bereiches und ihr Verhalten am Rande,* J. Reine Angew. Math., **169** (1933), 1–42, **172** (1934), 89–128.

[5] S. Bergman, *Zur Theorie von pseudokonformen Abbildungen,* Mat. Sbornik, **43** (1936), 79–96.

[6] H. Behnke, K. Stein, *Entwicklungen analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen,* Math. Ann., **120** (1948), 430–461.

[7] H. Behnke, P. Thullen, Theorie der functionen mehrerer komplexer. Veränderlichen. Springer - Verlag, 2nd ed., Berlin - Heidelberg, 1970.

[8] T. Bloom, *C^∞ peak functions for pseudoconvex domains of strict type.* Duke Math. J., **45** (1978), 133-147.

[9] R. Brody, *Compact manifolds and hyperbolicity,* Trans. Amer. Math. Soc., **235** (1978), 213–219.

[10] C. Carathéodory, *Über eine spezialle Metrik,* die in der Theorie der analytischen Funktionen auftritt, Atti Potifica Acad. Sc., Nuovi Lincei, **80** (1927), 135–141.

[11] C. Carathéodory, *Über das Schwarzsche Lemma bei analytischen Funktionen von zwei komplexer Veränderlichen,* Math. Ann., **97** (1927), n. 1, 76–98.

[12] C. Carathéodory, *Über die Geometrie der analytischen Abbildungen, die durch analytische Funktionen von zwei Veränderliche vermittelt werden,* Abhandl. Math. Sem. Hamburg Univ., **6** (1928), n. 1/2, 96–145.

[13] H. Cartan, P. Thullen, *Zur Theorie des Singularitäten der Funktionen mehrer Komplexen Veränderlichen,* Math. Ann., **106** (1932), 617–647.

[14] J. A. Cima, S. G. Krantz, *The Lindelöf principle and normal functions of several complex variables,* Duke Math. J., **50** (1983), 303–328.

[15] M. Colţoiu, *Stein spaces. A survey,* Univ. Stud. Bologna, Geometry Seminars, 1994-1995 (Bologna) (1996), 71–79.

[16] M. Colţoiu, *The Levi problem on Stein spaces with singularities. A survey,* Rend. Mat. Appl. (7) **29** (2009), n. 3-4, 341–353.

[17] M. Colţoiu, K. Diederich, *The Levi problem for Riemann domains over Stein spaces with isolated singularities,* Math. Ann. **338** (2007), 283–289.

[18] M. Colţoiu, N. Gaşiţoi, C. Joiţa, *On the image of an algebraic projective space,* C. R. Acad. Sci. Paris, Ser I, **350** (2012), 239–241.

[19] M. Colţoiu, C. Joiţa, *The Levi problem in the blow-up,* Osaka J. Math. **47** (2010), 943-–947.

[20] M. Colţoiu, C. Joiţa, *The disk property of coverings of 1-convex surfaces,* Proc. Amer. Math. Soc. **140** (2012), 575–580.

[21] M. Colţoiu, C. Joiţa, *Convexity properties of coverings of 1-convex surfaces,* Preprint, arXiv:1110.5791v1.

[22] J. P. D'Angelo, *Finite type conditions for real hypersurfaces.* J. Differ. Geom., **14** (1979), 59–66.

[23] K. Diederich, N. Sibony, *Strange complex structure on Euclidean space.* J. Reine Angew. Math., **311/312** (1979), 397–407.

[24] F. Docquier, H. Grauert, *Levisches Problem und Rungescher Satz für Teilgebiete Steinscher Mannigfoltigkeiten.* Math. Ann. **140** (1960), 94–123.

[25] P. V. Dovbush, *Normal functions of several complex variables,* (Russian) Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. **1** (1981), 38–42.

[26] P. V. Dovbush, *On the existence of admissible limits of functions of several complex variables,* (Russian) Sibirsk. Mat. Zh. **28** (1987), 3, 73–77.

[27] P. V. Dovbuş, *Aplicaţii X – normale.* Teză de doctor habilitat, Chişinău, 2004.

[28] J. E. Fornaess, *A counter-example for the Levi problem for branched Riemann domains over* $\mathbb{C}^n$, Math. Ann. **234** (1958), 275–277.

[29] J. E. Fornaess, J. D. McNeal, *A construction of peak functions on some finite type domains.* Amer. J. of Math., **116** (1994), n. 3, 737–755.

[30] T. Franzoni, E. Vensentini, Holomorphic maps and invariant distances. North-Holland Publishing Company, Netherlands, 1980.

[31] K. Fritzsche, H. Grauert, From holomorphic functions to complex manifolds. Graduate Texts in Mathematics, 213. Springer-Verlag, New York, 2002.

[32] R. Fujita, *Domaines sans point critique intérieur sur l'espace projectif complexe,* J. Math. Soc. Japan **15** (1963), 443-–473.

[33] N. Gashitsoi, *Criterion of the existence of $\mathcal{K}$–admissible limits of holomorphic maps,* Buletinul A. Ş. a R. M., Matematica, n.3(**40**) (2002), 46–52.

[34] N. Gashitsoi, *On a criterion of normality for mappings,* Buletinul A. Ş. a R. M., Matematica. n.2, **48** (2005), 94–98.

[35] N. Gaşiţoi, *The Levi problem in the blow-up along a linear subspace,* to appear in Math. Rep. **14(64)** (2012), n. 3.

[36] N. Gaşiţoi, *The Levi problem for Riemann domains over the blow-up of* $\mathbb{C}^{n+1}$ *at the origin*, submitted to Osaka J. Math.

[37] I. Graham, *Boundary behavior of the Carathéodory and Kobayashi metrics on strongly pseudoconvex domains in $\mathbb{C}^n$ with smooth boundary.* Trans. Amer. Math. Soc., **207** (1975), 219-240.

[38] I. Graham, *Holomorphic mappings into strictly convex domains which are Kobayashi isometries at one point,* Proc. Amer. Math. Soc., **105** (1989), n. 4, 917–921.

[39] H. Grauert, R. Remmert, *Konvexität in der komplexen Analysis. Nichtholomorph-konvexe Holomorphiegebiete und Anwendungen auf die Abbildungstheorie.* Comment. Math. Helv. **31** (1956), 152–183.

[40] H. Grauert, *Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen,* Math. Ann. **146** (1962), 331–368.

[41] R. Gunning, Introduction to holomorphic functions of several variables, Vol.I: Function theory, Wadsworth and Brooks/Cole, Belmont, CA, 1990.

[42] K. T. Hahn, *Inequality between the Bergman and Carathéodory differential metrics.* Proc. Amer. Math. Soc., **68** (1978), n. 2, 193–194.

[43] K. T. Hahn, *Asymptotic behavior of normal mappings of several complex variables,* Canad. J. Math., **36** (1984), n. 4, 718–746.

[44] K. T. Hahn, P. Pflug, *The Kobayashi and Bergman metrics on generalized Thullen domains,* Proc. Amer. Math. Soc., **104** (1988), n. 1, 207–214.

[45] M. Hakim, N. Sibony, *Quelques conditions pour l'existence des fonctions pics dans des domaines pseudoconvexes,* Duke Math. J., **44** (1977), 399–406.

[46] R. Hartshorne, Algebraic geometry. Graduate Texts in Mathematics 52, Springer-Verlag, New-York Inc., 1977, xvi+496 pp.

[47] S. Helgason, Differential geometry and symmetric spaces. Academic Press, New York, 1962.

[48] H. Hironaka, *Flattening theorem in complex-analytic geometry,* Amer. J. Math., **97** (1975), n.2, 503–547.

[49] C. Horst, *Über Bilder projektiv-algebraischer Räume,* J. Reine Angew. Math. **324** (1981), 136–140.

[50] A. V. Isaev, S. Krantz, *Invariant distances and metrics in complex analysis,* Notes of the AMS, **47** (2000), n. 5, 546–553.

[51] M. Jarnicki, P. Pflug, Invariant distances and metrics in complex analysis. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1993.

[52] G. Julia, *Sur les familles de fonctions analytiques de pluseurs variables,* Acta Math., **47** (1926), 57–115.

[53] P. Kirnan, *On the relation between taut, tight and hyperbolic manifolds.* Bull. Amer. Math. Soc., **76** (1970), 49–51.

[54] S. Kobayashi, *Invariant distances on complex manifolds and holomorphic mappings,* J. Math. Soc. Japan, **19** (1967), n. 4, 460–480.

[55] S. G. Krantz, Function theory of several complex variables. 2^{nd} ed., American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[56] O. Lehto, K. I. Virtanen, *Boundary behavior and normal meromorphic functions,* Acta Math., **97** (1957), 47–65.

[57] L. Lempert, *La metrique Kobayashi et les representation des domanes sur la boule.* Bull. Soc. Math. France., **109** (1981), 427–474.

[58] E. Lindelöf, *Sur un principle générale de l'analyse et ses applications à la theorie de la représentation conforme,* Acta Soc. Sci. Fennicae, **46** (1915), 1–35.

[59] F. Marty, *Recherches sur le répartition des valeures d'une fonction méromorphe,* Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, **28** (1931), n.3, 183–261.

[60] Y. Matsushima, A. Morimoto, *Sur certains espaces fibrés holomorphes sur une variété de Stein,* Bull. Soc. Math. France **88** (1960), 137–155.

[61] B. G. Moishezon, *On $n-$dimensional compact complex manifolds having n algebraically independent meromorphic functions I,* Izv. Akad. Nauk SSSR Ser Mat., **30** (1966), 133–174.

[62] B. G. Moishezon, *Singular Kählerian spaces,* Manifolds – Tokyo 1973 (Proc. Internat. Conf., Tokyo, 1973), Univ. Tokyo Press, Tokyo (1975), 343–351.

[63] T. Nishino, *Sur une proriété des familles de fonctions analytiques de deux variables complexes,* J. Math. Kyoto Univ., **4** (1965), 255–282.

[64] K. Oka, *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, IX. Domaines finis sans point critique intérieur,* Jap. J. Math. **23** (1953), 97-–155.

[65] E. A. Poletskiı́, B. V. Shabat, *Invariant metrics.* In Encyclopædia of Mathematical Science, **9**, Several complex variables III, Ed. G.M. Khenkin, Springer, Berlin, 1989, 63–111.

[66] H. J. Reiffen, *Die differentialgeometrischen Eigenschaften der invarianten Distanzfunktion von Carathéodory,* Schr. Math. Inst. Univ. Münster, 1963, n. 26.

[67] R. Remmert, T. Van de Ven, *Über holomorphe Abbildungen projektiv-algebraischer Mannigfaltigkeiten auf komplexe Räume,* Math. Ann. **142** (1961), 453–486.

[68] H. L. Royden,*Remarks on the Kobayashi metric,* In: Several complex variables, 2 (Maryland, 1970), Lecture Notes in Math., **185** (1971), 125–137.

[69] I. R. Shafarevich, Basic algebraic geometry. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 213. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1974.

[70] A. Takeuchi, *Domaines pseudoconvexes infinis et la métrique riemannienne dans un espace projectif,* J. Math. Soc. Japan **16** (1964), 159-–181.

[71] R. M. Timoney, *Bloch functions in several complex variables I,* Bull. London Math. Soc., **12** (1980), 241–267.

[72] J. Togari, *On ramified Riemann domains,* Nagoya Math. J. **14** (1959), 173–191.

[73] T. Ueda, *Pseudoconvex domains over Grassmann manifolds,* J. Math. Kyoto Univ. **20-2** (1980), 391–394.

[74] J. Varouchas, *Stabilité de la classe des variétés Kählériennes par certains morphismes propres*, Invent. Math. **77** (1984), n. 1, 117–127.

[75] J. Varouchas, *Kähler spaces and proper open morphisms,* Math. Ann. **283** (1989), n. 1, 13–52.

[76] H. Whitney, Complex analytic varieties. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1972.

[77] H. Wu, *Normal families of holomorphic mappings,* Acta Math., **119** (1967), n. 3-4, 193–233.