Institutul de Matematica al Academiei Romane
"Simion Stoilow"

Teza de doctorat

Topologie algebrica necomutativa - Actiuni si relatii de echivalenta sofice

Liviu Păunescu

Profesor Coordonator: Şerban Stratilă

Anul universitar 2011–2012

Cuprins

0.1 Introducere

Grupurile sofice au fost definite de Gromov in contextul dinamicii simbolice. Motivatia a fost notiunea de surjunctivitate (vezi [Gr]). Un grup G este *surjunctiv* daca pentru orice multime finita discreta A shiftul pe A^G nu contine un subshift propriu izomorf cu el insusi. Gromov a aratat ca orice grup sofic are aceasta proprietate. Numele de ”sofic” apartine lui B. Weiss si a fost folosit prima data in [We].

Grupurile amenabile si grupurile residual finite sunt exemple de grupuri sofice. Elek si Szabo au aratat in [El-Sz3] ca aceasta clasa de grupuri este inchisa la urmatoarele constructii: produse directe, subgrupuri, limite inverse, limite directe, produse libere, extensii amenabile.

In afara de *Conjectura lui Gottschalk* (care spune ca orice grup este surjunctiv), exista si alte conjecturi despre clasa grupurilor numarabile care sunt adevarate pentru grupurile sofice. Elek si Szabo au demonstrat *conjectura lui Kaplansky* pentru grupurile sofice. Articole bune de introducere in domeniu sunt [Pe] si [Pe-Kw].

In [El-Li], Elek si Lippner au introdus notiunea de *relatie de echivalenta sofica.* Au aratat ca relatiile arborabile sunt sofice, precum si relatiile ce se obtin din shifturile Bernoulli ale grupurilor sofice. La fel ca in cazul grupurilor unele conjecturi despre relatii de echivalenta sunt adevarate pentru relatiile sofice. Elek si Lippner au demonstrat *Measure-Theoretic Determinant Conjecture a lui Lück, Sauer si Wegner* pentru relatii de echivalenta sofice. Nu stim un exemplu de relatie care sa nu fie sofica.

In aceasta teza vom prezenta aceste notiuni intr-un context de algebre de operatori. Vom pleca de la o problema centrala in teoria algebrelor de operatori si anume *Conjectura de scufundare a lui Connes.* Aceasta spune ca orice algebra von Neumann finita, separabila se scufunda intr-o ultraputere a factorului fiperfinit (ceea ce vom nota cu R^ω). Studiul acestei conjecturi pentru algebrele grupale a condus la notiunea de *grup hiperliniar*, o notiune similara cu cea de grup sofic. In spirirtul acestei discutii este natural sa intrebam cand un cross produs se scufunda in R^ω. Aceasta intrebara a condus la notiunea de *actiune sofica.* Studiind proprietatile acestei notiuni ajungem in mod natural la definitia *relatiei de echivalenta sofice.*

Structura acestei teze este dupa cum urmeaza. Primul capitol este de introducere. Amintim lucruri legate de algebre von Neumann, ultraproduse, produse incrucisate. In sectiunea 0.1.3 prezentam cateva idei din [Ca-Pa]. Capitolul al doilea este dedicat definitiilor de actiune si relatie de echivalenta sofica, in timp ce capitolul al treilea contine rezultatele pe care le-am obtinut in timpul studiilor doctorale. Aceste rezultate sunt continute si in articolul [Pă], articol publicat in *Journal of Functional Analysis*

Cuvinte de multumire

Multumesc mult profesorului coordonator Şerban Stratilă pentru increderea si oportunitatile oferite si incurajarile constante. Vreau sa multumesc profesorului Florin Rădulescu pentru multe discutii si idei. Multumiri speciale prietenului si colegului mei Valerio Capraro pentru ca m-a adus in domeniul conjecturii de scufundare a lui Connes si pentru studiul lui a acestei conjecturi de pe urma caruia am beneficiat. Sunt foarte recunoscator profesorului Stefaan Vaes pentru numeroase remarci si corectii si pentru cateva demonstratii mult mai usoare incluzand propozitiile 0.2.17, 0.3.3 si 0.3.11. Bucati din aceasta teza au fost scrise in timpul vizitei mele in Leuven in primavara anului 2010. De asemenea multumirile mele sunt si pentru Damien Gaboriau si Ken Dykema pentru multe comentarii legate de teza.

0.1.1 Algebre von Neumann

O *algebra von Neumann* este o $*$-algebra de operatori marginiti pe un spatiu Hilbert care este inchisa in topologia slab operatoriala si contine operatorul identitate. Inseamna ca $\mathcal{B}(H)$ este o algebra von Neumann, asa cum sunt si algebrele de matrici, un caz particular pentru H finit dimensional.

O algebra von Neumann se numeste *factor* daca centrul ei contine doar scalarii $\mathbb{C} \cdot 1$. Factorii sunt caramizile algebrelor von Neumann, asa cum von Neumann a demonstrat-o in 1949 (vezi [Di] pentru o demonstratie). Descompunerea unei algebre in factori este in esenta, unica.

La celalalt capat al spectrului se afla algebrele von Neumann abeliene. O algebra de acest tip este izomorfa cu $L^\infty(X)$ pentru un spatiu cu masura (X, μ).

Ne vor interesea doar algebrele care au o *urma finita*, adica o functionala liniara pozitiva, fidela $Tr : M \to \mathbb{C}$ astfel incat $Tr(1) = 1$ si $Tr(xy) = Tr(yx)$ pentru orice $x, y \in M$. Exemple sunt algebrele matriciale sau algebrele grupale $L(G)$, inchiderea slaba in $\mathcal{B}(L^2(G))$ a algebrei generata de operatori de translatie la stanga $\lambda(g)$. Urma pe $L(G)$ este definita de relatiile $Tr(\lambda_e) = 1$ si $Tr(\lambda_g) = 0$ pentru $g \neq e$. Un factor care are o astfel de urma se numeste *factor de tip* II_1. Algebra grupala $L(G)$ este factor daca si numai daca grupul G este *ICC* (clasele de conjugare sunt infinite). Vom vedea mai tarziu cum sa asociem o algebra von Neumann unei actiuni sau relatii de echivalenta.

O algebra von Neumann M este *hiperfinita* daca contine un lant crescator de algebre finit dimensionale a caror reuniune este slab densa in M. Murray si von Neumann au demonstrat ca, pana la izomorfism, exista un singru factor de tip II_1 hiperfinit. Vom nota acest factor cu R. In articolul clasic [Co], Alain Connes a demonstrat ca algebra grupala $L(G)$ este hiperfinita daca si numai daca G este amenabil. Un exemplu de grup amenabil, ICC este S_∞^{fin}, deci $R = L(S_\infty^{fin})$.

$$S_\infty^{fin} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} | f \text{ bijectiva si } \exists k \in \mathbb{N} \text{ astfel incat } f(n) = n \; \forall n > k\}.$$

0.1.2 Ultraproduse si conjectura lui Connes

Inainte de a prezenta enuntul conjecturii de scufundare a lui Connes avem nevoie sa intelegem ce inseamna un ultraprodus cu urma. Un prim exemplu de ultraprodus poate fi considerat constructia numerelor reale. Mutimea numerelor reale este prin definitie multimea sirurilor Cauchy de numere rationale factorizate la multimea sirurilor convergente la zero. Definitia aceasta este greu de generalizat, din cauza notiunii de sir Cauchy. Vom evita aceasta notiune print-un instrument tehnic foarte puternic, acela de *ultrafiltru*. Fie ω un ultrafiltru liber pe $\mathbb{N}$. Numerele reale pot fi definite acum ca multimea sirurilor marginite de numere rationale, factorizata la multimea sirurilor convergente la zero fata de ω. Aceasta definitie poate fi generalizata.

Example 0.1.1. Fie $(G_i, d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ un sir de grupuri (nu neaparat numarabile) cu metrici biinvariante ($d_i(x, y) = d_i(zx, zy) = d_i(xz, yz)$ pentru orice $x, y, z \in G_i$). Definim:

$$\begin{aligned} \mathcal{G} =& \{x \in \Pi_i G_i : \sup_i d_i(x_i, e) < \infty\}; \\ \mathcal{N}_\omega =& \{x \in \mathcal{G} : \lim_{i \to \omega} d_i(x_i, e) = 0\}. \end{aligned}$$

Datorita proprietatii de biinvarianta, $\mathcal{N}_\omega$ este un subgrup normal a lui $\mathcal{G}$ (biinvarianta este esentiala vezi [Pe-Kw], pagina 9, examplul 3.2). Acum definim ultraprodusul de grupuri metrice:

$$\Pi_{i \to \omega}(G_i, d_i) = \mathcal{G}/\mathcal{N}_\omega$$

si distanta $d(x, y) = \lim_{i \to \omega} d(x_i, y_i)$. Un argument diagonal clasic va arata ca $(\Pi_{i \to \omega}(G_i, d_i), d)$ este un spatiu complet.

Example 0.1.2. Fie $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ un sir de spatii Banach, sau algebre Banach sau C^*-algebre. Folosind metrica indusa de norma, putem construi $\Pi_{i \to \omega} A_i$ exact ca in exemplu precedent.

Verificarile ca ultraprodusul este intr-adevar un spatiu Banach/ algebra Banach/ sau o C^*-algebra sunt directe, mai putin completitudinea care este un argument diagonal.

Example 0.1.3. Pentru algebre von Neumann lucrurile sunt un pic diferite si o constructie este posibila doar pentru algebre finite unde avem o urma. Fie (M, Tr) o algebra von Neumann cu o urma finita. Inafara de norma operatoriala, M are si o *norma Hilbert-Schmidt*: $||x||_2 = Tr(x^*x)^{1/2}$. Pentru o matrice $(a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ aceasta norma este $||(a_{ij})||_2 = (\frac{1}{n}\sum_{ij}|a_{ij}|^2)^{1/2}$. Cand construim ultraprodusul trebuie sa luam in considerare si aceasta norma.

Fie (M_i, Tr) un sir de algebre von Neumann fiecare avand o urma finita. Definim

$$l^\infty(\mathbb{N}, M_i) = \{x \in \Pi_i M_i : \sup_i ||x_i|| < \infty\}$$

$$\mathcal{N}_\omega = \{x \in l^\infty(\mathbb{N}, M_i) : \lim_{i\to\omega} ||x_i||_2 = 0\} \text{ si}$$

$$\Pi_{i\to\omega} M_i = l^\infty(\mathbb{N}, M_i)/\mathcal{N}_\omega.$$

Ultraprodusul $\Pi_{i\to\omega}M_i$ este o algebra von Neumann, desi demonstratia nu este chiar triviala. Daca $x_i \in M_i$ vom nota cu $\Pi_{i\to\omega}x_i$ elementul corespunzator din ultraprodus.

Deocamdata aceasta algebra vine cu o urma definta de: $Tr(x) = \lim_{i\to\omega} Tr_{M_i}(x_i)$, unde $x = \Pi_{i\to\omega}x_i$. In cazul in care $M_i = M$ pentru toti i vom nota ultraprodusul cu M^ω si il vom numi o *ultraputere* a lui M (clasa de izomorfism poate depinde de ω).

Urmatoarea propozitie este o proprietate foarte utila a ultraproduselor.

Proposition 0.1.4. *Intr-un ultraprodus avem egalitatea:* $\mathcal{U}(\Pi_{i\to\omega}M_i) = \Pi_{i\to\omega}\mathcal{U}(M_i)$. *Deasemenea:* $(\Pi_{i\to\omega}\mathcal{U}(M_i), ||\cdot||_2) = \Pi_{i\to\omega}(\mathcal{U}(M_i), ||\cdot||_2)$ *(ultraprodus de grupuri metrice ca in exemplul0.1.1).*

Demonstraţie. Deoarece orice sir de unitari e marginit, a doua egalitate se deduce din defnitii. Incluziunea $\Pi_{i\to\omega}\mathcal{U}(M_i) \subset \mathcal{U}(\Pi_{i\to\omega}M_i)$ e triviala. Fie acum $u = \Pi_{i\to\omega}u_i \in \mathcal{U}(\Pi_{i\to\omega}M_i)$. Deoarece M_i este o algebra von Neumann putem considera descompunerea polara $u_i = v_i|u_i|$, unde v_i este o izometrie partiala. Cum M_i este o algebra von Neumann finita v_i poate fi extins la un unitar, pe care il notam tot cu v_i, astfel incat avem inca egalitatea $u_i = v_i|u_i|$. Acum:

$$(\Pi_{i\to\omega}|u_i|)^2 = \Pi_{i\to\omega}u_i^*u_i = (\Pi_{i\to\omega}u_i)^*(\Pi_{i\to\omega}u_i) = 1,$$

deci $\Pi_{i\to\omega}|u_i|$ este un element pozitiv cu patratul egal cu 1. suntem intr-o C^*-algebra deci putem deduce ca $\Pi_{i\to\omega}|u_i| = 1$. Atunci $\Pi_{i\to\omega}u_i = \Pi_{i\to\omega}v_i \in \Pi_{i\to\omega}\mathcal{U}(M_i)$. □

Aceasta propozitie arata ca $\mathcal{U}(\Pi_{i\to\omega}M_i)$ este inchis in topologia data de norma Hilbert-Schmidt (deoarece orice ultraprodus de grupuri metrice este complet). Impreuna cu ceva masinarie de algebre von Neumann se poate arata ca $\Pi_{i\to\omega}M_i$ este intr-adevar o algebra von Neumann.

In articolul lui faimos [Co], Alain Connes a enuntat urmatoarea conjectura. Multe defnitii si rezultate din acest articol sunt motivate de aceasta problema deschisa.

Question 0.1.5. *(CEP)[1976] Orice factor de tip II_1 separabil se scufunda pastrand urma intr-o ultraputere a factorului hiperfinit R^ω.*

In cele ce urmeaza toate scufundarile in ultraproduse vor fi scufundari de algebre von Neumann finite, adica vor pastra urma.

0.1.3 Un truc pentru argumente diagonale

Aceasta lucrare contine multe argumente diagonale. Unele dintre ele pot fi ocolite folosind produse de ultrafiltre. Aceste idei sunt preluate din [Ca-Pa].

Definition 0.1.6. Fie ω, ϕ ultrafiltre pe $\mathbb{N}$. Definim *ultrafiltrul produs* $\omega\otimes\phi$ pe $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ prin:

$$F \in \omega\otimes\phi \Leftrightarrow \{i\in\mathbb{N} : \{j\in\mathbb{N} : (i,j)\in F\}\in\phi\}\in\omega.$$

Un calcul arata ca $\omega\otimes\phi$ este intr-adevar un ultrafiltru. Deoarece $\mathbb{N}$ este in bijectie cu $\mathbb{N}^2$, $\omega\otimes\phi$ poate fi considerat un ultrafiltru pe $\mathbb{N}$. Urmatoare propozitie se verificata usor.

Proposition 0.1.7. *Daca $\{x_i^j\}_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ este un sir marginit de numere reale atunci:*

$$\lim_{i\to\omega}(\lim_{j\to\phi} x_i^j) = \lim_{(i,j)\to\omega\otimes\phi} x_i^j.$$

Un argument diagonal inseamna alegerea intr-un mod intelegent a unei submultimi din $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Ideea acestei sectiuni este ca ultrafiltrul produs va face aceasta alegere pentru noi. Aceasta este datorita proprietatilor din propozitia precedenta. O consecinta relevanta este urmatorul rezultat.

Proposition 0.1.8. *(Propozitia 2.1 din [Ca-Pa]) Daca $\{M_i^j\}_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ este un sir de algebre von Neumann finite atunci:*

$$\Pi_{i\to\omega}(\Pi_{j\to\phi}M_i^j) = \Pi_{(i,j)\to\omega\otimes\phi}M_i^j.$$

Prezentam acum un exemplu unde un argument diagonal este ocolit.

Proposition 0.1.9. *Orice factor de tip II_1 care se scufunda in R^ω se scufunda si intr-un ultraprodus de matrici.*

Demonstraţie. Din definitia algebrei hyperfinite se vede usor faptul ca $R \subset \Pi_{k\to\omega} M_{n_k}$. Demonstratia poate fi acum terminata folosind aceasta scufundare, scufundarea initiala $M \subset R^\omega$ si un argument diagonal. O alta posibilitate este: $R^\omega \subset (\Pi_{k\to\omega} M_{n_k})^\omega \simeq \Pi_{(i,k)\to\omega\otimes\omega} M_{m_{(i,k)}}$, unde $m_{(i,k)} = n_k$. □

Aceasta propozitie ne permite sa lucram cu ultraproduse de matrici in loc de R^ω.

0.1.4 Grupuri hiperliniare

Studiul conjecturii de scufundare a lui Connes a dus la urmatoarea definitie.

Definition 0.1.10. (Rădulescu 2000) Un grup numarabil se numeste *hiperliniar* daca exista o scufundare a algebrei grupale $L(G)$ in R^ω.

Desigur, nu stim un exemplu de grup care sa nu fie hiperliniar. Acest lucru ar da un raspuns negativ conjecturii lui Connes. Folosind 0.1.4, 0.1.9 si definitia algebrei grupale obtinem urmatoarea caracterizare a grupurilor hiperliniare:

Proposition 0.1.11. *Un grup G este hiperliniar daca si numai daca exista un sir $\{n_k\}_k \subset \mathbb{N}$, $\lim_k n_k = \infty$ si un morfism de grupuri $\Theta : G \to \Pi_{k\to\omega}\mathcal{U}(n_k)$ astfel incat $Tr(\Theta(g)) = 0$ pentru orice $g \neq e$.*

Sirul n_k nu are un rol special. Daca un astfel de morfism exista pentru un sir, atunci va exista pentru orice alt sir $\{m_k\}$ atata timp cat $\lim_k m_k = \infty$. Urmatoarea teorema este datorita lui Florin Rădulescu si a unui rezultat anterior a lui Eberhard Kirchberg. Contine o tehnica utila si care va fi folosita de multe ori numita *amplificare*.

Theorem 0.1.12. *Un grup G este hiperliniar daca si numai daca exista un morfism injectiv $\Theta : G \to \Pi_{k\to\omega}\mathcal{U}(n_k)$ (adica nu ne pasa de urma).*

Demonstraţie. Vom demonsta aceasta propozitie doar in cazul in care centrul grupului este trivial (grupurile ICC au aceasta proprietate). Demonstratia in cazul general nu este grea, dar este neinteresanta acestei discutii.

Fie $\Theta : G \to \Pi_{k\to\omega}\mathcal{U}(n_k)$ un morfism injectiv. Fie $\Theta(g) = \Pi_{k\to\omega}u_g^k$ unde $u_g^k \in \mathcal{U}(n_k)$. Daca $|Tr(\Theta(g))| = 1$ atunci $||\Theta(g) - \lambda||_2 = 0$, unde $\lambda = Tr(\Theta(g))$. Acest lucru implica $\Theta(g) = \lambda$, deci $\Theta(g)$ comuta cu $\Theta(h)$ pentru orice $h \in G$. Deoarece Θ este injectiv rezulta ca g este in centrul grupului G, deci $g = e$. In final $|Tr(\Theta(g))| < 1$ pentru orice $g \neq e$.

Construim $\Theta^{(m)} = \Theta \otimes \Theta \otimes \ldots \otimes \Theta$ (de m ori produs tensorial), adica $\Theta^{(m)}(g) = \Pi_{k\to\omega}u_g^k \otimes u_g^k \otimes \ldots \otimes u_g^k$. Acesta este un morfism a lui G pe $\Pi_{k\to\omega}\mathcal{U}(n_k^m)$. Atunci $Tr(\Theta^{(m)}(g)) = Tr(\Theta(g))^m$. Rezulta ca $Tr(\Theta^{(m)}(g)) \to_{m\to\infty} 0$ pentru $g \neq e$. Un argument diagonal clasic va termina demonstratia.

Altfel, putem aplica metodele prezentate in sectiunea 0.1.3. Produsul $\omega \otimes \omega$ este un ultrafiltru pe $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Construim $\Phi : G \to \Pi_{(m,k)\to\omega\otimes\omega}\mathcal{U}(n_k^m)$ definit de $\Phi(g) = \Pi_{m\to\omega}\Theta^{(m)}(g)$. Atunci datorita Propozitiei 0.1.7, $Tr(\Phi(g)) = \lim_{m\to\omega} Tr(\Theta^{(m)}(g)) = 0$. □

0.1.5 Actiuni de grupuri si produse incrucisate

In afara de algebrele grupale, exemple de algebre von Neumann finite apar in mod natural asociate unei actiuni sau relatii de echivalenta. Vom lucra doar cu actiuni *p.m.p.*, adica actiuni pe spatii de probabilitate ce pastreaza masura. Fie deci (X, μ) un spatiu standard de probabilitate si fie $\alpha : G \to Aut(X, \mu)$ o actiune ce pastreaza masura. Produsul incrucisat algebric este:

$$L^\infty(X) \rtimes_\alpha^{alg} G = \{\sum_{finita} a_g u_g : a_g \in L^\infty(X), g \in G\}.$$

Structura de $*$-algebra este urmatoarea:

$$u_g u_h = u_{gh},\ u_g a u_g^* = \alpha(g)(a),\ \ u_g^* = u_{g^{-1}},$$

unde multiplicarea in $L^\infty(X)$ se pastreaza si in interiorul produsului incrucisat. Urma este definita de:

$$Tr(\sum a_g u_g) = \int_X a_e d\mu.$$

Algebra von Neumann $L^\infty(X) \rtimes_\alpha G$ este inchiderea slaba a algebrei $L^\infty(X) \rtimes_\alpha^{alg} G$ in reprezentarea GNS a perechii $(L^\infty(X) \rtimes_\alpha^{alg} G, Tr)$.

Un produs incrucisat contine o copie a algebrei abeliene $L^\infty(X)$ si o multime de unitari $\{u_g : g \in G\}$ care actioneaza pe algebra abeliana in modul prescris de actiunea α. Aceasta algebra este un factor daca si numai daca actiunea este ergodica. Este hiperfinita daca si numai daca G este amenabil asa cum Alain Connes a aratat in [Co].

Vom nota cu $\mathcal{U}(M)$ grupul unitarilor in algebra M. Pentru o incluziune de algebre von Neumann $A \subset M$ definim normalizatorul $\mathcal{N}_M(A)$:

$$\mathcal{N}_M(A) = \{u \in \mathcal{U}(M) : uAu^* = A\}.$$

Din definitia produsului incrucisat unitarii $\{u_g : g \in G\}$ fac parte din normalizatorul lui $L^\infty(X)$ in $L^\infty(X) \rtimes_\alpha G$. Urmatorul exemplu elementar este crucial pentru discutia noastra:

Example 0.1.13. Fie $M_n = M_n(\mathbb{C})$ o algebra de matrici. Notam cu $D_n \subset M_n$ subalgebra matricilor diagonale si cu $P_n \subset M_n$ subgrupul matricilor de permutare. Atunci:

$$\mathcal{N}_{M_n}(D_n) = \mathcal{U}(D_n) \cdot P_n.$$

Notation 0.1.14. Pentru un ultraprodus de matrici $\Pi_{k\to\omega} M_{n_k}(\mathbb{C})$ notam cu $\Pi_{k\to\omega} D_{n_k}$ si $\Pi_{k\to\omega} P_{n_k}$ submultimile corespunzatoare.

Datorita unei teoreme a lui Sorin Popa (see [Po1], Propozitia 4.3) $\Pi_{k\to\omega} D_{n_k}$ este o algebra neseparabila maximal abeliana in $\Pi_{k\to\omega} M_{n_k}(\mathbb{C})$. Poate fi aratat ca normalizatorul ei este ultraprodusul normalizatorilor:

$$\mathcal{N}(\Pi_{k\to\omega} D_{n_k}) = \mathcal{U}(\Pi_{k\to\omega} D_{n_k}) \cdot \Pi_{k\to\omega} P_{n_k}. \tag{1}$$

0.2 Obiecte sofice

Incepem studiul conjecturii lui Connes pentru produse incrucisate. Este usor de vazut ca daca o astfel de algebra $L^\infty(X) \rtimes_\alpha G$ se scufunda intr-un ultraprodus $\Pi_{k\to\omega} M_{n_k}$ atunci putem construi o sufundare $\Theta : L^\infty(X) \rtimes_\alpha G \to \Pi_{k\to\omega} M_{n_k}$ astfel incat $\Theta(L^\infty(X)) \subset \Pi_{k\to\omega} D_{n_k}$. De fapt aceasta este o proprietate a algebrelor hiperfinite.

Proposition 0.2.1. *Fie N o algebra hiperfinita impreuna cu doua scufundari $\Theta_1, \Theta_2 : N \to \Pi_{k\to\omega} M_{n_k}$. Atunci exista un unitar $u \in \mathcal{U}(\Pi_{k\to\omega} M_{n_k})$ astfel incat $\Theta_2 = Adu \circ \Theta_1$.*

Demonstraţie. (Schita) Fie $N = \overline{\cup_i N_i}^w$, unde N_i sunt algebre finit dimensionale. Se poate gasi un unitar $u_i \in \mathcal{U}(\Pi_{k\to\omega} M_{n_k})$ astfel incat $\Theta_2(x) = u_i \Theta_1(x) u_i^*$ pentru orice $x \in N_i$. Folosind un argument diagonal construim u astfel incat $\Theta_2(x) = u\Theta_1(x)u^*$, pentru orice $x \in \cup_i N_i$. $\square$

In [Ju], Kenley Jung a demonstrat reciproca acestui rezultat, daca orice doua sufundari in R^ω ale unei algebre von Neumann N sunt conjugate printr-un unitar atunci N este hiperfinita.

Ne intoarcem la problema noastra, constructia unei scufundari Θ a algebrei $L^\infty(X) \rtimes_\alpha G$ in $\Pi_{k\to\omega} M_{n_k}$. Putem considera ca $\Theta(L^\infty(X)) \subset \Pi_{k\to\omega} D_{n_k}$. Unitari in normalizatorul algebrei $\Theta(L^\infty(X))$ sunt dificil de construit. Avand in minte egalitatea (1) vom incerca sa construim elementele $\Theta(u_g)$ in grupul $\Pi_{k\to\omega} P_{n_k}$. Aceasta este o restrictie a grupului G.

0.2.1 Grupuri sofice

Definition 0.2.2. Un grup G se numeste *sofic* daca exista un sir $\{n_k\}_k \subset \mathbb{N}$, $\lim_k n_k = \infty$ si un morfism de grupuri $\Theta : G \to \Pi_{k\to\omega} P_{n_k}$ astfel incat $Tr(\Theta(g)) = 0$ pentru orice $g \neq e$.

Urmatoarea teorema datorata lui Elek si Szabo [El-Sz2], este similara cu 0.1.12.

Theorem 0.2.3. *Un grup G este sofic daca si numai daca exista un morfism injectiv $\Theta : G \to \Pi_{k\to\omega} P_{n_k}$.*

Orice grup sofic este hiperliniar, iar reciproca este o problema deschisa. In cazul permutarilor exista o legatura intre distanta Hilbert-Schmidt si distanta Hamming.

Definition 0.2.4. Pentru $\sigma, \tau \in S_n$ definim *distanta hamming normalizata* prin:

$$d_{hamm}(\sigma, \tau) = \frac{1}{n} Card\{i : \sigma(i) \neq \tau(i)\}.$$

Urmatoarea definitie este de multe ori mai usor de verificat in cazul exemplelor particulare.

Proposition 0.2.5. *Un grup G este sofic daca si numai daca pentru orice submultime finita $F \subset G$ si orice $\varepsilon > 0$, exista $n \in \mathbb{N}$ si $\theta : F \to S_n$ astfel incat:*

- *daca $g, h, gh \in F \quad d_{hamm}(\Theta(g)\Theta(h), \Theta(gh)) < \varepsilon$;*
- *daca $g \in F,\ g \neq e \quad d_{hamm}(\Theta(g), Id) > 1/2$.*

Valoarea $1/2$ poate fi inlocuita cu orice numar real din intervalui $(0, 1)$. Folosind aceasta definitie putem observa usor ca grupurile residual finite sunt sofice. Din aceasta categorie fac parte si grupurile libere. Grupurile amenabile sunt sofice (putem folosi un sir Folner pentru a construi permutari). Asa cum am spus in introducere clasa grupurilor sofice este inchisa la urmatoarele operatii: produse directe, produse libere, subgrupuri, limite directe, limite inverse, extensii amenabile (vezi [El-Sz3]). In 2008 Andreas Thom [Th] a construit un grup hiperliniar despre care nu stim daca este sofic. Motivatia a fost constructia unui grup sofic care sa nu fie initial subamenabil (orice bucata finita din tabela de multiplicare poate fi recuperata in interiorul unui grup amenabil). In 2009 Cornulier a construit un exemplu de astfel de grup [Cor]. In momentul de fata nu stim daca grupurile Thompson F, T and V sunt hiperliniare.

0.2.2 Definitia actiuni hiperliniare si sofice

Acum introducem notiunea de actiune hiperliniara si actiune sofica.

Definition 0.2.6. O actiune α a unui grup numarabil G pe un spatiu standard de probabilitate (X, μ) se numeste *hiperliniara* daca produsul incrucisat $L^\infty(X) \rtimes_\alpha G$ se poate scufunda in R^ω.

Definition 0.2.7. O actiune α a unui grup numarabil G pe un spatiu standard de probabilitate (X, μ) se numeste *sofica* daca exista o scufundare $\Theta : L^\infty(X) \rtimes_\alpha G \to \Pi_{k\to\omega} M_{n_k}(\mathbb{C})$ astfel incat $\Theta(L^\infty(X)) \subset \Pi_{k\to\omega} D_{n_k}(\mathbb{C})$ si $\Theta(u_g) \in \Pi_{k\to\omega} P_{n_k}(\mathbb{C})$ pentru orice $g \in G$.

Proprietatea unei actiuni de a fi hiperliniara/sofica este invarianta la orbit echivalenta. Acest lucru este de fapt o proprietate a produselor incrucisate. Doua actiuni libere $\alpha : G \to Aut(X, \mu)$ si $\beta : H \to Aut(X, \mu)$ pe acelasi spatiu se numesc *orbit echivalente* daca $\alpha(G)(x) = \beta(H)(x)$ pentru aproape orice $x \in X$.

Theorem 0.2.8. *(Singer, [Si]) Fie $\alpha : G \to Aut(X, \mu)$ si $\beta : H \to Aut(X, \mu)$ doua actiuni libere pe acelasi spatiu de probabilitate. Atunci α si β sunt orbit echivalente daca si numai daca exista un izomorfism de algebre von Neumann $\Psi : L^\infty(X) \rtimes_\alpha G \to L^\infty(X) \rtimes_\beta H$ astfel incat Ψ este identitatea pe $L^\infty(X)$.*

Demonstraţie. (Schita a implicatiei directe) Fie $\{u_g : g \in G\}$ si $\{v_h : h \in H\}$ unitarii din produsele incrucisate care implementeaza actiunile α si β. Fie $p_g^h \in L^\infty(X)$ proiectia pe multimea $\{x \in X : \alpha(g)(x) = \beta(h)(x)\}$. Datorita orbit echivalentei deducem $\sum_g p_g^h = 1 \; \forall h$

si $\sum_h p_g^h = 1\ \forall g$. Definim acum $\Psi : L^\infty(X) \rtimes_\alpha G \to L^\infty(X) \rtimes_\beta H$ prin:

$$\Psi(a) = a \ \ \forall a \in L^\infty(X);$$
$$\Psi(u_g) = \sum_h p_g^h v_h \ \ \forall g \in G.$$

Observam ca $\Psi(p_g^h u_g) = p_g^h v_h$ asadar $\Psi(\sum_h p_g^h u_g) = v_h$. Rezulta ca Ψ este un izomorfism. $\square$

Urmatoarea teorema arata clar ca proprietatea de a fi sofic este o proprietate a relatiei de echivalenta, nu a actiunii.

Theorem 0.2.9. *Fie α si β doua actiuni libere orbit echivalente. Daca α este hiperliniara (sofica) atunci si β este hiperliniara (sofica).*

Demonstraţie. Fie $\Psi : L^\infty(X) \rtimes_\alpha G \to L^\infty(X) \rtimes_\beta H$ izomorfismul construit in propozitia anterioara. Existenta acestui izomorfism este suficienta pentru partea "hiperliniara" a acestei teoreme.

Fie acum $\Theta : L^\infty(X) \rtimes_\beta H \to \Pi_{k\to\omega} M_{n_k}$ o scufundare ca in defnitia 0.2.7. Vom demonstra ca $\Theta \circ \Psi$ este scufundarea ceruta pentru $L^\infty(X) \rtimes_\alpha G$.

Deoarece Ψ este identitatea pe $L^\infty(X)$ deducem ca $\Theta \circ \Psi(L^\infty(X)) \subset \Pi_{k\to\omega} D_{n_k}$. Folosind aceleasi notatii ca in propozitia precedenta, avem: $\Theta \circ \Psi(u_g) = \sum_h \Theta(p_g^h)\Theta(v_h)$. Din ipoteza $\Theta(v_h) \in \Pi_{k\to\omega} P_{n_k}$ si $\Theta(p_g^h)$ este o proiectie in $\Pi_{k\to\omega} D_{n_k}$. Din urmatoarea lema rezulta ca $\Theta \circ \Psi(u_g) \in \Pi_{k\to\omega} P_{n_k}$ si demonstratia se incheie. $\square$

Urmatoarea lema nu este grea, dar este esentiala discutiei noastre. O vom folosi de multe ori. Aceasta lema construieste elemente in $\Pi_{k\to\omega} P_{n_k}$ de care avem nevoie pentru a demonstra ca un anumit obiect este sofic.

Lemma 0.2.10. *Fie $\{e_i | i \in \mathbb{N}\}$ proiectii in $\Pi_{k\to\omega} D_{n_k}$ astfel incat $\sum_i e_i = 1$. Fie $\{u_i | i \in \mathbb{N}\}$ unitari din $\Pi_{k\to\omega} P_{n_k}$ astfel incat $v = \sum_i e_i u_i$ este un unitar. Atunci $v \in \Pi_{k\to\omega} P_{n_k}$.*

Demonstraţie. Vom prezenta mai intai ce se intampla in interiorul algebrei $M_n(\mathbb{C})$. Fie $\{e_i | i \in \mathbb{N}\}$ proiectii in D_n astfel incat $\sum_i e_i = 1$ (doar un numar finit de proiectii vor fi nenule). Fie $\{u_i | i \in \mathbb{N}\} \subset P_n$ astfel incat $v = \sum_i e_i u_i$ este unitar. Matricea v are elemente doar 0 si 1 si pe fiecare linie exact o intrare de 1. Cum pe fiecare coloana trebuie sa existe cel putin o intrare nenula pentru ca v sa fie unitar, rezulta ca v este o matrice de permutare.

Acum inapoi la cazul general. Folosind ecuatia $\sum_i e_i = 1$ construim proiectiile $e_i^k \in D_{n_k}$ astfel incat:

1. $e_i = \Pi_{k\to\omega} e_i^k$;
2. $\sum_i e_i^k = 1_{n_k}$.

Din ipoteza $u_i = \Pi_{k\to\omega} u_i^k$ unde $u_i^k \in P_{n_k}$. Daca $v^k = \sum_i e_i^k u_i^k$ atunci $v = \Pi_{k\to\omega} v^k$, dar v^k nu sunt neaparat matrici unitare. Totusi v^k este o matrice cu intrari doar 0 si 1 si exact o intrare de 1 pe fiecare linie.

Pentru a demonstra ca $v \in \Pi_{k\to\omega} P_{n_k}$ vom construi $w^k \in P_{n_k}$ astfel incat $\lim_{k\to\omega} ||v^k - w^k||_2 = 0$. Planul este sa estimam numarul de coloane in v^k ce au doar intrari de 0. Notam acest numar cu r_k. Atunci $v^{k*}v^k$ este o matrice diagonala avand r_k intrari de 0 pe diagonala. Acest lucru implica:

$$||v^{k*}v^k - Id||_2^2 \geq \frac{r_k}{n_k}.$$

Deoarece $\Pi_{k\to\omega} v^{k*}v^k = 1$ rezulta $r_k/n_k \to_{k\to\omega} 0$. Aceasta relatie reprezinta marginea superioara pe care o cautam pentru r_k. Construim acum elementele w^k. Matricea v^k are $n_k - r_k$ coloane cu cel putin o intrare nenula. Pentru fiecare dintre aceste coloane j alegem o linie i astfel incat $v^k(i,j) = 1$. Definim $w^k(i,j) = 1$. In aces mod avem $n_k - r_k$ intrari nenule w^k, toate distribuite pe linii si coloane diferite. Completam matricea w^k la o matrice de permutare alegand o bijectie intre cele r_k linii si coloane ramase. Atunci:

$$||v^k - w^k||_2^2 = \frac{2r_k}{n_k}.$$

Deoarece $r_k/n_k \to_{k\to\omega} 0$ obtinem $v = \Pi_{k\to\omega} w^k$. Acest lucru demonstreaza lema. $\square$

Teorema 0.2.9 ne obliga sa definim notiunea de relatie de echivalenta sofica. Definitia 0.2.7 impreuna cu aceasta teorema ofera o definitie pentru relatiile de echivalenta care sunt generate de o actiune libera. Din pacate nu toate relatiile de echivalenta apar in modul acesta. Pentru a defini in acest contex relatia de echivalenta sofica avem nevoie de o constructie diferita de produsul incrucisat. Avem nevoie de o constructie care asociaza o algebra von Neumann unei relatii de echivalenta. Acest lucru este subiectul urmatoarei sectiuni.

0.2.3 Constructia Feldman-Moore

Prezentam cateva lucruri din articolul [Fe-Mo]. Vom ignora cociclul de care constructia Feldman-Moore are nevoie in generalitatea ei. Fie $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un spatiu de probabilitate ca de obicei. Fie $E \subset X^2$ o relatie de echivalenta pe X astfel incat $E \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$. Vom lucra doar cu relatii de echivalenta numarabile, adica fiecare clasa de echivalenta este numarabila, si μ-invariante. Inainte de a aminti ce inseamna acest lucru vom stabili cateva notatii.

Notam cu $[E]$ *grupul total al relatiei* E, adica multimea izomorfismelor din $Aut(X, \mu)$ cu graficul in E, si cu $[[E]]$ multimea izomorfismelor partiale cu graficul in E:

$$\begin{aligned} [E] =& \{\theta : X \to X : \theta \text{ bijectie }, graph\theta \subset E\}; \\ [[E]] =& \{\phi : A \to B : A, B \subset X,\ \phi \text{ bijectie }, graph\phi \subset E\}. \end{aligned}$$

Daca X este reductibil la un spatiu finit de cardinal n si $E = X^2$ atunci $[E]$ este grupul de permutari S_n.

Definition 0.2.11. Fie E o relatie de echivalenta pe (X, μ). Atunci E se numeste μ-invarianta daca pentru orice $\phi : A \to B$, $\phi \in [[E]]$ avem $\mu(A) = \mu(B)$.

Acum putem construi algebra $M(E)$ asociata unei relatii de echivalenta.

Definition 0.2.12. O functie masurabila $a : E \to \mathbb{C}$ se numeste *finita* daca a este marginita si exista un numar natural n astfel incat:

$$\begin{aligned} Card(\{x : a(x, y) \neq 0\}) \leq n \ \forall y \in X; \\ Card(\{y : a(x, y) \neq 0\}) \leq n \ \forall x \in X. \end{aligned}$$

O functie (matrice) finita este o functie marginita avand un numar finit de intrari nenule pe fiecare linie si coloana (de asemenea si o margine superioara globala pentru acest numar). Multiplicarea acestor functii seamana cu multiplicarea clasica de matrici. Definim

$$\begin{aligned} & M_0(E) = \{a : E \to \mathbb{C} : a \text{ functie finita}\}; \\ & a \cdot b(x, z) = \sum_y a(x, y) b(y, z); \\ & a^*(x, y) = \overline{a(y, x)}. \end{aligned}$$

Definitia functii finite ne va asigura ca obtinem o $*$-algebra. Urma este defnitia in concordanta cu urma matricilor:

$$Tr(a) = \int_X a(x,x)d\mu.$$

Algebra $M(E)$ va fi inchiderea slaba a lui $M_0(E)$ in reprezentarea GNS a perechii $(M_0(E), Tr)$. Din teoria generala a algebrelor von Neumann, folosind vectorul ciclic si separator din reprezentarea GNS, putem considera elementele din $M(E)$ ca fiind functii masurabile $a : E \to \mathbb{C}$. Aceasta algebra este un factor daca si numai daca E este ergodica. Datorita unei teoreme faimoase a lui Connes-Feldman-Weiss [CFW], $M(E)$ este hiperfinita daca si numai daca E este o *relatie de echivalenta hyperfinita*, adica pana la multimi de masura 0, E este o reuniune a unui sir crescator de relatii de echivalenta finite.

Fie $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$ diagonala din E. Definim subalgebra matricilor diagonale prin:

$$A = \{a \in M(E) : supp(a) \subset \Delta\}.$$

Vom nota cu δ_x^y simbolul Kronecker delta, adica $\delta_x^y = 1$ daca $x = y$; altfel $\delta_x^y = 0$. Notatia χ_C o vom folosi pentru functia caracteristica a lui C.

Definition 0.2.13. Pentru $\theta \in [E]$ definim $u_\theta \in M(E)$ prin: $u_\theta(x,y) = \delta_x^{\theta(y)}$. Pentru $\phi \in [[E]]$, definim $v_\phi(x,y) = \chi_{dom(\phi)}(y) \cdot \delta_x^{\phi(y)}$.

Nu este greu de vazut ca $u_\theta \in \mathcal{N}(A)$ pentru orice $\theta \in [E]$. Inschimb v_ϕ este o izometrie partiala din ceea ce se numeste *pseudogrupul normalizator*:

$$\mathcal{GN}_M(A) = \{v \in M \text{ izometrie partiala } : vv^*, v^*v \in A, vAv^* = vv^*A\}.$$

Unitarii din $\mathcal{GN}_M(A)$ sunt de fapt elemente din $\mathcal{N}_M(A)$, in acelasi mod in care un element din $[[E]]$ definit pe tot X-ul este un element din $[E]$. Mai general orice element $v \in \mathcal{GN}_M(A)$ este de forma $p \cdot u$, unde p este o proiectie in A si $u \in \mathcal{N}_M(A)$.

In interiorul unei algebre de matrici avem $\mathcal{N}_{M_n}(D_n) = \mathcal{U}(D_n) \cdot P_n$. Ceva similar este adevarat si pentru constructia Feldman-Moore. Orice $u \in \mathcal{N}_{M(E)}(A)$ este de forma $a \cdot u_\theta$, unde $a \in \mathcal{U}(A)$ si $\theta \in [E]$. De asemenea $u_\theta u_\psi = u_{\theta \circ \psi}$ pentru $\theta, \psi \in [E]$. Aceste proprietati fac ca grupul Weyl, adica $\mathcal{N}(A)/\mathcal{U}(A)$, sa fie izomorf cu $[E]$. Acest izomorfism este generalizarea izomorfismului dintre grupul matricilor de permutare si grupul permutarilor.

Algebra A este maximal abeliana in $M(E)$. Totodata $\mathcal{N}(A)'' = M(E)$. Aceste proprietati fac ca A sa fi o subalgebra Cartan a lui $M(E)$. Vom numi incluziunea $A \subset M(E)$ o pereche Cartain.

Motivatia pentru constructia Feldman-Moore a fost invarianta produsului incrucisat la orbit echivalenta. Urmatorul exemplu arata ca am construit intr-adevar obiectul de care aveam nevoie.

Example 0.2.14. Fie $\alpha : G \to Aut(X, \mu)$ o actiune libera. Notam cu E_α relatia de orbit echivalenta generata de α pe X. Atunci:

$$L^\infty(X) \rtimes_\alpha G \simeq M(E_\alpha).$$

0.2.4 Definitia relatiei de echivalenta sofica

Relatie de echivalenta sofica a fost definita de Gabor Elek si Gabor Lippner (see [El-Li]). Aici vom prezenta o alta defintie si in sectiunea 0.3.4 vom arata echivalenta celor doua definitii.

Definition 0.2.15. O relatie de echivalenta E se numeste *sofica* daca exista o scufundare a lui $M(E)$ in $\Pi_{k\to\omega} M_{n_k}$ astfel incat $A \subset \Pi_{k\to\omega} D_{n_k}$ si $\mathcal{N}(A) \subset \mathcal{U}(A) \cdot \Pi_{k\to\omega} P_{n_k}$.

Aceasta definitie are meritul de a fi compacta, dar in practiva vom avea nevoie de urmatorul tip de scufundari

Definition 0.2.16. Fie E o relatie de echivalenta si $A \subset M(E)$ perechea Cartan asociata. Vom numi o scufundare $\Theta : M(E) \to \Pi_{k\to\omega} M_{n_k}$ *sofica* daca $\Theta(A) \subset \Pi_{k\to\omega} D_{n_k}$ si $\Theta(u_\theta) \subset \Pi_{k\to\omega} P_{n_k}$ pentru orice $\theta \in [E]$.

Proposition 0.2.17. *O relatie de echivalenta E este sofica daca si numai daca perechea ei Cartain $A \subset M(E)$ admite o scufundare sofica.*

Demonstraţie. Fie $\Theta : M(E) \to \Pi_{k\to\omega} M_{n_k}$ o scufundare astfel incat $\Theta(A) \subset \Pi_{k\to\omega} D_{n_k}$ si $\Theta(\mathcal{N}(A)) \subset \Theta(\mathcal{U}(A)) \cdot \Pi_{k\to\omega} P_{n_k}$.

Pentru $\varphi \in [E]$ avem o descompunere unica $\Theta(u_\varphi) = \Theta(f_\varphi) v_\varphi$, unde $f_\varphi \in \mathcal{U}(A)$ and $v_\varphi \in \Pi_{k\to\omega} P_{n_k}$. Atunci:

$$\Theta(f_\psi \circ \varphi^{-1}) = \Theta(u_\varphi)\Theta(f_\psi)\Theta(u_\varphi^*) = \Theta(f_\varphi)(v_\varphi \Theta(f_\psi) v_\varphi^*)\Theta(f_\varphi^*) = v_\varphi \Theta(f_\psi) v_\varphi^*.$$

Datorita unicitatii descompunerii lui $\Theta(u_{\varphi\psi})$ avem $f_{\varphi\psi} = f_\varphi(f_\psi \circ \varphi^{-1})$. Daca χ_φ este proiectia pe multimea $\{x \in X : \varphi(x) = x\}$, atunci $\chi_\varphi u_\varphi = \chi_\varphi$ deci:

$$\Theta(f_\varphi^* \chi_\varphi) = \Theta(f_\varphi^* \chi_\varphi u_\varphi) = \Theta(\chi_\varphi) v_\varphi.$$

Proiectia lui v_φ pe $\Pi_{k\to\omega} D_{n_k}$ este o proiectie. Atunci, considerand proiectia pe $\Theta(A)$ a lui $f_\varphi^* \chi_\varphi$, rezulta ca acesta este un element pozitiv si atunci este egal cu χ_φ. Asadar, pentru orice $\varphi \in [E]$ avem $f_\varphi \chi_\varphi = \chi_\varphi$. In final am demonstrat ca:

$$\alpha(u_\varphi) = f_\varphi^* u_\varphi \text{ for all } \varphi \in [E],$$
$$\alpha(a) = a \text{ pentru orice } a \in A$$

este un automorfism bine definit a lui $M(E)$. Compunerea dintre Θ si α este scufundarea sofica ceruta de $M(E)$. $\square$

Ca o consecinta aacestui rezultat si a lemei 0.2.10, avem urmatoarea propozitie.

Proposition 0.2.18. *Fie α o actiune libera. Atunci E_α este o relatie de echivalenta sofica daca si numai daca α este o actiune sofica.*

Observation 0.2.19. Fie $\Theta = \Pi_{k\to\omega}\Theta_k$ o scufundare sofica a unei algebre von Neumann M in $\Pi_{k\to\omega} M_{n_k}$. Fie $\{r_k\}_k$ un sir de numere naturale. Atunci $\Theta \otimes 1 = \Pi_{k\to\omega}\Theta_k \otimes 1_{r_k}$ este inca o scufundare sofica a lui M in $\Pi_{k\to\omega} M_{n_k} \otimes M_{r_k} = \Pi_{k\to\omega} M_{n_k r_k}$.

Acest truc va fi folosind cand avem nevoie de sufundari in acelasi $\Pi_{k\to\omega} M_{n_k}$ (adica aceasi dimensiune a matricilor la fiecare pas).

0.3 Rezultate

0.3.1 Scufundari sofice pentru perechi Cartain hiperfinite

Scopul acestei sectiuni este sa demonstram ca daca avem o pereche Cartain $A \subset M$ si M este hiperfinita atunci orice doua scufundari sofice ale lui $A \subset M$ sunt conjugate de un ultraprodus de permutari. Punctul de plecare va fi schita demonstratiei Propozitiei 0.2.1. Mai intai vom avea nevoie sa conjugam scufundari in $\Pi_{k\to\omega} D_{n_k}$ (lema 0.3.3).

Lemma 0.3.1. *Fie e, f doua proiectii in $\Pi_{k\to\omega} D_{n_k}$ astfel incat $Tr(e) = Tr(f)$. Atunci exista un unitar $u \in \Pi_{k\to\omega} P_{n_k}$ astfel incat $f = ueu^*$.*

Demonstrație. Fie $e = \Pi_{k\to\omega} e^k$ si $f = \Pi_{k\to\omega} f^k$ astfel incat e^k si f^k sunt proiectii in D_{n_k}. Notam cu t_k numarul de intrari de 1 ale lui e^k si cu s_k numarul de intrari de 1 ale lui f^k. Atunci $\lim_{k\to\omega} t_k/n_k = Tr(e) = Tr(f) = \lim_{k\to\omega} s_k/n_k$. Alegem $p_1^k \in P_{n_k}$ astfel incat $p_1^k e^k p_1^{k*}$ are primele t_k intrari 1 pe diagonala. In acelasi fel alegem p_2^k astfel incat $p_2^k f^k p_2^{k*}$ are primele s_k intrari 1 pe diagonala. Definim $p_i = \Pi_{k\to\omega} p_i^k$ pentru $i = 1, 2$. Constructia noastra garanteaza ca $Tr(|p_1 e p_1^* - p_2 f p_2^*|) = \lim_{k\to\omega} |t_k - s_k|/n_k = 0$. Atunci $p_1 e p_1^* = p_2 f p_2^*$, deci elementul $u = p_2^* p_1$ rezolva lema. □

Lemma 0.3.2. *Fie $\{e_i\}_{i=1}^m$ si $\{f_i\}_{i=1}^m$ doua siruri de proiectii din $\Pi_{k\to\omega} D_{n_k}$ astfel incat $\sum_{i=1}^m e_i = 1 = \sum_{i=1}^m f_i$ si $Tr(e_i) = Tr(f_i)$ pentru orice $i = 1, \ldots, m$. Atunci exista un unitar $u \in \Pi_{k\to\omega} P_{n_k}$ astfel incat $f_i = u e_i u^*$ pentru orice $i = 1, \ldots, m$.*

Demonstrație. Aplicam lema precedenta pentru fiecare $i = 1, \ldots, m$ ca sa obtinem elementele $u_i \in \Pi_{k\to\omega} P_{n_k}$ astfel incat $u_i e_i u_i^* = f_i$. Fie $u = \sum_{i=1}^m u_i e_i$. Datorita lemei (0.2.10), $u \in \Pi_{k\to\omega} P_{n_k}$. Totodata $u e_i u^* = u_i e_i u_i^* = f_i$. □

Proposition 0.3.3. *Fie Θ_1, Θ_2 doua scufundari ale lui $L^\infty(X)$ in $\Pi_{k\to\omega} D_{n_k}$. Atunci exista un unitar $u \in \Pi_{k\to\omega} P_{n_k}$ astfel incat $\Theta_2(a) = u\Theta_1(a)u^*$ oricare $a \in L^\infty(X)$.*

Demonstrație. Fie A_m un sir crescator de subalgebre abeliene finit astfel incat $L^\infty(X) = (\cup_m A_m)''$. Datorita lemei precedente exista $u_m \in \Pi_{k\to\omega} P_{n_k}$ astfel incat $\Theta_2(a) = Adu_m \circ \Theta_1(a)$ for $a \in A_m$. Vom construi $u \in \Pi_{k\to\omega} P_{n_k}$ folosind un argument diagonal. Fie $u_m = \Pi_{k\to\omega} u_m^k$ cu $u_m^k \in P_{n_k}$ si $\Theta_i(a) = \Pi_{k\to\omega} \Theta_i(a)^k$ unde $\Theta_i(a)^k \in D_{n_k}$.

Prin inductie alegem multimi din ce in ce mai mici $F_m \in \omega$, $m \in \mathbb{N}$ astfel incat $||u_m^k \Theta_1(a)^k u_m^{k*} - \Theta_2(a)^k||_2 < 1/m$ pentru orice $a \in (A_m)_1$, $k \in F_m$. Definim $u^k = u_m^k$ pentru $k \in F_m \setminus F_{m+1}$ si in final $u = \Pi_{k\to\omega} u^k$. □

Suntem acum gata sa demonstram un analog al Propozitiei 0.2.1 pentru scufundari sofice.

Proposition 0.3.4. *Fie E o relatie de echivalenta hiperfinita si $A \subset M(E)$ perechea ei Cartain. Fie Θ_1, Θ_2 doua scufundari sofice ale lui $M(E)$ in $\Pi_{k\to\omega} M_{n_k}$. Atunci exista un unitar $u \in \Pi_{k\to\omega} P_{n_k}$ astfel incat $\Theta_2(x) = u\Theta_1(x)u^*$ pentru orice $x \in M(E)$.*

Demonstrație. Algebra $M(E)$ este hiperliniara. Daca folosim egalitatea $M(E) = \overline{\cup_m N_m}^w$ ca in demonstratia Propozitiei 0.2.1, nu avem nici un control pe algebrele N_m si nu putem folosi ipoteza de scufundare sofica. In schimb vom folosi proprietatile relatiei de echivalenta. Deoarece E este hiperfinita, din definitie, pana la o multime de masura 0, E este reuniunea unui sir crescator de relatii de echivalenta finite.

Folosind propozitia precedenta putem presupune ca Θ_1 si Θ_2 coincid pe A. Vom presupune mai intai ca E este ergodica, echivalent cu $M(E)$ este factorul hiperfinit. Din defnitia relatiei de echivalenta hiperfinite si constructia Feldman-Moore (vezi de asemenea si demonstratia propozitiei 4.1 din [Po2]) exista un sir crescator de algebre de matrici $\{N_m\}_{m\geq 1}$ incluse in $M(E)$, fiecare cu un set de unitati matriciale $\{e_{ij}^m\}$ astfel incat:

1. $M(E)$ este inchiderea slaba a $\cup_m N_m$;
2. $e_{ii}^m \in A$ si $\sum_i e_{ii}^m = 1$;
3. e_{ij}^m sunt de forma v_θ cu $\theta \in [[E]]$;
4. fiecare e_{rs}^p, cu $p \leq m$, este suma unor elemente de forma e_{ij}^m.

Elementele v_θ sunt de forma $e \cdot u_\phi$, unde e este o proiectie din A si $\phi \in [E]$. Deoarece Θ_l este sofica, obtinem ca $\Theta_l(e_{ij}^m)$ este un ultraprodus de permutari taiat cu o proiectie din $\Pi_{k\to\omega} D_{n_k}$. Definim

$$p_m = \sum_j \Theta_2(e_{j1}^m)\Theta_1(e_{1j}^m).$$

Atunci:

$$\begin{aligned} p_m p_m^* =& \sum_{i,j} \Theta_2(e_{i1}^m)\Theta_1(e_{1i}^m)\Theta_1(e_{j1}^m)\Theta_2(e_{1j}^m) \\ =& \sum_j \Theta_2(e_{j1}^m)\Theta_1(e_{11}^m)\Theta_2(e_{1j}^m) = \sum_j \Theta_2(e_{jj}^m) = 1, \end{aligned}$$

deci p_m este unitar. Folosind 0.2.10 avem $p_m \in \Pi_{k\to\omega} P_{n_k}$. Mai mult:

$$\begin{aligned} p_m\Theta_1(e_{rs}^m)p_m^* =& \sum_{i,j} \Theta_2(e_{i1}^m)\Theta_1(e_{1i}^m)\Theta_1(e_{rs}^m)\Theta_1(e_{j1}^m)\Theta_2(e_{1j}^m) \\ =& \Theta_2(e_{r1}^m)\Theta_1(e_{11}^m)\Theta_2(e_{1s}^m) = \Theta_2(e_{rs}^m). \end{aligned}$$

Am obtinut ca $p_m\Theta_1(x)p_m^* = \Theta_2(x)$ for $x \in N_m$. Folosind un alt argument diagonal construim un unitar $p \in \Pi_{k\to\omega} P_{n_k}$ astfel incat $p\Theta_1(x)p^* = \Theta_2(x)$ pentru $x \in \cup_m N_m$. Din 1, am terminat demonstratia in cazul ergodic.

Demonstratia in cazul general are aceasi schita. Singura diferenta este ca $\{N_m\}_{m\geq 1}$ sunt algebre von Neumann finit dimensionale, nu neaparat algebre de matrici. Din aceasta cauza trebuie modificata definitia elementelor p_m. Fie $N_m = N_m^1 \oplus N_m^2 \oplus \ldots \oplus N_m^t$, unde N_m^v sunt factori, adica algebre de matrici, $v = 1, \ldots, t$. Fie $\{e_{ij;v}^m\}$ un set de unitati matriciale pentru N_m^v. Definim:

$$p_m = \sum_{v=1}^{t} \sum_j \Theta_2(e_{j1;v}^m)\Theta_1(e_{1j;v}^m).$$

Calculele care arata ca p_m este unitar si $p_m\Theta_1(e_{rs}^m)p_m^* = \Theta_2(e_{rs}^m)$ sunt la fel. □

0.3.2 Shifturile Bernoulli

In [El-Li] Elek si Lippner au demonstrat ca relatiile de echivalenta generate de shifturile Bernoulli ale grupurilor sofice sunt sofice. Prezentam aici demonstratia frumoasa a lui Narutaka Ozawa din [Oz].

Theorem 0.3.5. *(Elek-Lippner) Relatiile de echivalenta generate de shifturile Bernoulli ale grupurilor sofice sunt sofice.*

Demonstraţie. (Ozawa) Fie G un grup sofic. Orice shift Bernoulli este o actiune libera. Folosind 0.2.18 trebuie doar sa demonstram ca orice shift Bernoulli a lui G este o actiune sofica.

Fie $X = \{0,1\}^G = \{f : G \to \{0,1\}\}$. Pentru elemente diferite $g_1, g_2 \ldots g_m$, definim cilindrul:

$$c_{g_1,g_2,\ldots,g_m}^{i_1,i_2,\ldots,i_m} = \{f \in X : f(g_j) = i_j \ \ \forall j = 1 \ldots m\},$$

si fie $Q_{g_1,g_2,\ldots,g_m}^{i_1,i_2,\ldots,i_m}$ proiectia pe aceasta multime. Atunci β este actiunea lui G pe X definita de: $\beta(g)c_{g_1,g_2,\ldots,g_m}^{i_1,i_2,\ldots,i_m} = c_{gg_1,gg_2,\ldots,gg_m}^{i_1,i_2,\ldots,i_m}$.

Fie $\Theta_0 : G \to \Pi_{k\to\omega}P_{n_k}$ un morfism cu $Tr(\Theta_0(g)) = 0$ pentru orice $g \neq e$. Fie $\Theta_0(g) = \Pi_{k\to\omega}p_{g;k}$ astfel incat $p_{g;k} \in P_{n_k}$. Definim $\Theta : G \to \Pi_{k\to\omega}M_{n_k} \otimes M_{2^{n_k}}$ prin $\Theta = \Theta_0 \otimes 1$. Fie Y_k o multime cu n_k elemente si identificam D_{n_k} cu $L^\infty(Y_k)$. Fie de asemenea $Z_k = \{\eta : Y_k \to \{0,1\}\}$ si identificam $D_{2^{n_k}}$ cu $L^\infty(Z_k)$. Definim acum:

$$c_{g_1,g_2,\ldots,g_m;k}^{i_1,i_2,\ldots,i_m} = \{(\xi,\eta) \in Y_{n_k} \times Z_{n_k} : \eta(p_{g_j;k}^{-1}(\xi)) = i_j,\ j = 1,\ldots,m\}.$$

Fie $Q_{g_1,g_2,\ldots,g_m;k}^{i_1,i_2,\ldots,i_m} \in D_{n_k} \otimes D_{2^{n_k}}$ functia caracteristica a lui $c_{g_1,g_2,\ldots,g_m;k}^{i_1,i_2,\ldots,i_m}$. Construim:

$\Theta(Q^{i_1,i_2,\ldots,i_m}_{g_1,g_2,\ldots,g_m}) = \Pi_{k\to\omega} Q^{i_1,i_2,\ldots,i_m}_{g_1,g_2,\ldots,g_m;k}$. Atunci:

$$\begin{aligned}
\Theta(g)\Theta(Q^{i_1,i_2,\ldots,i_m}_{g_1,g_2,\ldots,g_m})\Theta(g)^* =& \Pi_{k\to\omega}(p_{g;k}\otimes 1)Q^{i_1,i_2,\ldots,i_m}_{g_1,g_2,\ldots,g_m;k}(p^{-1}_{g;k}\otimes 1)\\
=& \Pi_{k\to\omega}\chi_{\{(\xi,\eta):(p^{-1}_{g;k}\otimes 1)(\xi,\eta)\in c^{i_1,i_2,\ldots,i_m}_{g_1,g_2,\ldots,g_m;k}\}}\\
=& \Pi_{k\to\omega}\chi_{\{(\xi,\eta):\eta(p^{-1}_{g_j;k}p^{-1}_{g;k}(\xi))=i_j,\ j=1,\ldots,m\}}\\
=_{not}& \Pi_{k\to\omega}\chi_{T_k}.\\
\Theta(Q^{i_1,i_2,\ldots,i_m}_{gg_1,gg_2,\ldots,gg_m}) =& \Pi_{k\to\omega}\chi_{\{(\xi,\eta):\eta(p^{-1}_{gg_j;k}(\xi))=i_j,\ j=1,\ldots,m\}}\\
=_{not}& \Pi_{k\to\omega}\chi_{S_k}.
\end{aligned}$$

Daca $(\xi,\eta)\in T_k\Delta S_k$ atunci pentru un $j=1,\ldots,m$ avem $p^{-1}_{g_j;k}p^{-1}_{g;k}(\xi)\neq p^{-1}_{gg_j;k}(\xi)$. Deoarece Θ_0 este un morfism $\Pi_{k\to\omega}\chi_{T_k}=\Pi_{k\to\omega}\chi_{S_k}$.

Singurul lucru ramas de calculat este urma lui $\Theta(Q^{i_1,i_2,\ldots,i_m}_{g_1,g_2,\ldots,g_m})$. Pentru acest lucru, fie $A_k=\{\xi\in Y_k : p^{-1}_{g_j;k}(\xi)$ sunt diferite pentru $j=1,\ldots,m\}$. Deoarece $Tr(\Theta_0(g))=0$ pentru $g\neq e$ avem $\lim_{k\to\omega} Card(A_k)/n_k=1$. Atunci:

$$Tr(\Theta(Q^{i_1,i_2,\ldots,i_m}_{g_1,g_2,\ldots,g_m})) = \lim_{k\to\omega} Tr(Q^{i_1,i_2,\ldots,i_m}_{g_1,g_2,\ldots,g_m;k}) = \lim_{k\to\omega}\frac{1}{n_k 2^{n_k}}(\sum_{\xi\in A_k}2^{n_k-m}+\sum_{\xi\notin A_k}v_\xi)=\frac{1}{2^m}.$$

Acest lucru va demonstra ca Θ este o scufundare a lui $L^\infty(X)\rtimes_\beta G$, demonstrand soficitatea actiunii β.

Demonstratia poate fi adaptata sa functioneze pentru orice shift Bernoulli. Pentru un shift pe un spatiu finit uniform demonstratia functioneaza la fel. Un argument diagonal demonstraza acum teorema in cazul shiftului pe spatiul $X=[0,1]^G$ (cu masura Lebesgue). Orice alt shift Bernoulli conduce la o subalgebra a algebrei $L^\infty([0,1]^G)\rtimes G$. □

Urmatoarea propozitie usoara va fi folosita in demonstratia corolarului 0.3.7.

Proposition 0.3.6. *Fie G un grup si o actiune libere pe o multime I. Atunci shiftul Bernoulli generalizat a lui G pe $\{0,1\}^I$ este sofic.*

Demonstraţie. Daca G actioneaza liber, atunci I este de forma $G\times I'$ si actiunea este o shiftare pe prima componenta. Shiftul Bernoulli generalizat pe $\{0,1\}^I$ este un shift clasic pe X^G, unde $X=\{0,1\}^{I'}$. □

O versiune mai slaba a acestui rezultat a fost obtinuta mai intai de Benoit Collins si Ken Dykema ([Co-Dy]). Independent, Elek si Szabo au demonstrat aceasta teorema folosind alte metode ([El-Sz4]).

Corollary 0.3.7. *Produse libere de grupuri sofice amalgamate peste grupuri amenabile sunt sofice.*

Demonstraţie. Fie G_1, G_2 doua grupuri sofice cu un subgrup comun amenabil H. Fie $X = \{0,1\}^{G_1 *_H G_2}$ echipat cu masura produs. Atunci G_1 si G_2 actioneaza pe X ca shifturi Bernoulli generalizate si aceste actiuni coincid cand sunt restrictionate la H. Folosind propozitia precedenta (si 0.2.19) putem construi scufundari sofice $\Theta_i : L^\infty(X) \rtimes G_i \to \Pi_{k\to\omega} M_{n_k}$ pentru $i = 1, 2$. Din propozitia (0.3.4) putem presupune ca $\Theta_1 = \Theta_2$ pe $L^\infty(X) \rtimes H$ (aici folosim faptul ca H este un grup amenabil si rezultatul clasic din [CFW]). Acum Θ_1 actioneaza pe $\Theta_i(L^\infty(X))$ shiftand cu G_1 si Θ_2 actioneaza pe acelasi spatiu shiftand cu G_2. Aceasta poza produce o reprezentare Θ a lui $G_1 *_H G_2$ pe $\Pi_{k\to\omega} P_{n_k}$. De asemenea, Θ actioneaza pe $\Theta_i(L^\infty(X))$ ca un shift Bernoulli clasic. Asadar Θ este fidela, si $G_1 *_H G_2$ este sofic. □

Corollary 0.3.8. *Fie H un grup abelian si G un grup sofic. Atunci $H \wr G$ (wreath product) este sofic.*

Demonstraţie. Acest produs $H \wr G$ este produsul semidirect intre G si H^G cu actiunea de shiftare a lui G. Vom folosi urmatoarea prezentare $< S|R >$ pentru acest grup:

$$\begin{aligned}
S =& \{f_g^h, u_g : \text{ pentru orice } h \in H \text{ si } g \in G\};\\
R =& \{f_g^e = e : \forall g \in G\} \cup \{f_g^{h_1} f_g^{h_2} = f_g^{h_1 h_2} : \forall g \in G, \forall h_1, h_2 \in H\} \cup\\
& \{f_{g_1}^{h_1} f_{g_2}^{h_2} = f_{g_2}^{h_2} f_{g_1}^{h_1} : \forall g_1, g_2 \in G, g_1 \neq g_2 \forall h_1, h_2 \in H\} \cup\\
& \{u_{g_1} u_{g_2} = u_{g_1 g_2} : \forall g_1, g_2 \in G\} \cup\\
& \{u_{g_1} f_{g_2}^h u_{g_1}^{-1} = f_{g_1 g_2}^h : \forall g_1, g_2 \in G, h \in H\}.
\end{aligned}$$

Fie mai intai cazul $\mathbb{Z}_2 \wr G$. Aplicam rezultatul lui Elek si Lippner pentru a scufunda $L(\mathbb{Z}_2^G) \rtimes_\beta G \simeq L(\mathbb{Z}_2^G \rtimes G) = L(\mathbb{Z}_2 \wr G)$ in $\Pi_{k\to\omega} M_{n_k}$. Generatorii u_g vor fi ultraproduse de permutari. In schimb, elementele de tipul f_g^h sunt unitari in $\Pi_{k\to\omega} D_{n_k}$ numai cu intrari ± 1. Construim o reprezentare sofica a grupului $\mathbb{Z}_2 \wr G$ in $\Pi_{k\to\omega} P_{2n_k}$ inlocuind o intrare de 1 cu I_2 si o intrare de -1 cu: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Consideram acum cazul general. Fie $\Theta : L^\infty(\{0,1\}^G) \rtimes G \to \Pi_{k\to\omega} M_{n_k}$ scufundarea sofica construita in ultima demonstratie. Fie $\Lambda : H \to P_{m_k}$ o scufundare sofica a lui H.

Construim $\Phi : H \wr G \to \Pi_{k\to\omega} P_{n_k} \otimes P_{m_k}$ dupa cum urmeaza:

$$\Phi(u_g) = \Theta(g) \otimes 1;$$
$$\Phi(f_g^h) = c_g^0 \otimes 1 + c_g^1 \otimes \Lambda(h).$$

Relatiile din R sunt usor de verificat (se foloseste abelianitatea lui H pentru $f_{g_1}^{h_1} f_{g_2}^{h_2} = f_{g_2}^{h_2} f_{g_1}^{h_1}$). De asemenea $Tr(\Phi(u_g)) = 0$ si $Tr(\Phi(f_g^h)) = 1/2$. Pentru a termina demonstratia trebuie sa mai verficam injectivitatea lui Φ.

Un element general din $H \wr G$ este $s = f_{g_1}^{h_1} f_{g_2}^{h_2} \dots f_{g_n}^{h_n} u_g$ cu $g_1, g_2 \dots g_n$ diferite. Atunci:

$$\Phi(s) = \left(\sum_{(i_1,\dots,i_n)\in\{0,1\}^n} c_{g_1,g_2\dots g_n}^{i_1,i_2\dots i_n} \otimes \Lambda(\Pi_{i_k=1} h_k) \right) (\Theta(g) \otimes 1).$$

Presupunem ca $\Phi(s) = 1$. Atunci pentru orice $(i_1, \dots, i_n) \in \{0,1\}^n$, $\Lambda(\Pi_{i_k=1} h_k) = 1$. Acest lucru implica $h_k = e$ pentru orice k. Atunci $\Phi(u_g) = 1$, deci $u_g = e$. Rezulta ca $s = e$. □

0.3.3 Actiuni sofice

Scopul acestei sectiuni ar fi sa demonstram ca orice actiune (libera) a unui grup sofic este sofica. Acest lucru nu este stiut, dar vom demonstra acest rezultat pentru o familie de grupuri. Mai inatai sa rezolvam ambiguitatea, actiuni generale sau libere.

Theorem 0.3.9. *Fie G un grup astfel incat orice actiune libera este sofica. Atunci orice actiune a lui G este sofica.*

Demonstraţie. Fie α o actiune a lui G pe X. Fie $\beta : G \to Aut(Y)$ o actiune libera (de exemplu un shift Bernoulli). Definim $\alpha \otimes \beta : G \to Aut(X \times Y)$ prin $g(x, y) = (gx, gy)$. Cu aceasta definitie $\alpha \otimes \beta$ este o actiune libera a lui G, deci este sofica. Putem scufunda $L^\infty(X \times Y) \rtimes_{\alpha\otimes\beta} G$ in $\Pi_{k\to\omega} M_{n_k}$ intr-un mod sofic. Spatiul $L^\infty(X)$ se scufunda in $L^\infty(X \times Y)$ prin $id \otimes 1$. Aceasta scufundare se poate extinde la o scufundare a lui $L^\infty(X) \rtimes_\alpha G$ in $L^\infty(X \times Y) \rtimes_{\alpha\otimes\beta} G$, demonstrand faptul ca α este sofica. □

Definition 0.3.10. Vom nota cu $\mathcal{S}$ clasa grupurilor pentru care fiecare aciune este sofica.

Desi nu putem demonstra ca fiecare grup sofic se afla in $\mathcal{S}$, vom arata cateva exemple. Primele exemple sunt grupurile amenabile.

Proposition 0.3.11. *Orice actiune a lui $\mathbb{Z}$ este sofica.*

Demonstrație. Fie $\alpha : L^\infty(X) \to L^\infty(X)$ automorfismul care genereaza actiunea. Alegem $\Theta : L^\infty(X) \to \Pi_{k\to\omega} D_{n_k}$ o scufundare. Folosim propozitia 0.3.3 pentru Θ si $\Theta \circ \alpha$, si obtinem un unitar $u \in \Pi_{k\to\omega} P_{n_k}$ astfel incat $Adu \circ \Theta = \Theta \circ \alpha$.

Deoarece puteri de matrici de permutare sunt inca matrici de permutare, rezulta ca $u^m \in \Pi_{k\to\omega} P_{n_k}$. De asemenea $u^m \Theta(f)(u^m)^* = \Theta(\alpha^m(f))$ pentru orice $f \in L^\infty(X)$. Avem acum o scufundare Θ a produsului incrucisat algebric $L^\infty(X) \rtimes_\alpha^{alg} \mathbb{Z}$. Pentru a incheia demonstratia avem nevoie de egalitatea $Tr(u^m) = 0$ pentru orice $m \in \mathbb{Z}^*$.

Fie Λ o scufundare sofica a lui $\mathbb{Z}$ in $\Pi_{k\to\omega} P_{r_k}$ folosind doar elemente de urma 0. Definim scufundarea $\Theta \otimes \Lambda$ a lui $L^\infty(X) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ in $\Pi_{k\to\omega} M_{n_k \cdot r_k}$ prin:

$$\begin{aligned} \Theta \otimes \Lambda(T) &= \Theta(T) \otimes 1 && \text{pentru } T \in L^\infty(X) \\ \Theta \otimes \Lambda(u_g) &= \Theta(u_g) \otimes \Lambda(u_g) && \text{for } g \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Aceasta scufundare $\Theta \otimes \Lambda$ a produsului algebric respecta urma produsului incrucisat von Neumann. Folosind unicitatea reprezentarii GNS deducem ca inchiderea slaba este izomorfa cu produsul incrucisat von Neumann. □

Proposition 0.3.12. *Grupurile amenabile sunt in $\mathcal{S}$.*

Demonstrație. Fie G un grup amenabil si fie $\alpha : G \to Aut(X, \mu)$ o actiune libera. Atunci E_α este amenabila. Din [CFW] E_α este generata de o actiune β a lui $\mathbb{Z}$. Datorita propozitiei precedente *beta* este sofica. Deoarece aproape toate clasele de echivalenta ale lui E_α sunt infinite, β este libera. Folosind propozitia 0.2.9 deducem ca α este sofica. Aplicand teorema 0.3.9, rezulta $G \in \mathcal{S}$. □

Urmatoarea propozitie va marii clasa grupurilor cu aceasta proprietate.

Theorem 0.3.13. *Fie α_1 si α_2 doua actiuni sofice ale lui G_1 si G_2 pe acelasi spatiu X. Fie H, un subgrup comun amenabil a lui G_1 si G_2. Presupunem ca actiunile α_1 si α_2 coincid pe H si ca aceasta actiune a lui H pe X este libera. Atunci actiunea $\alpha_1 *_H \alpha_2$ a lui $G_1 *_H G_2$ este sofica.*

Demonstrație. Folosind 0.2.19 putem construi scufundari sofice ale celor doua produse incrucisate in acelasi ultraprodus. Fie $\Theta_i : L^\infty(X) \rtimes G_i \to \Pi_{k\to\omega} M_{n_k}$, $i = 1, 2$. Datorita 0.3.4 putem presupune ca $\Theta_1 = \Theta_2$ pe $L^\infty(X) \rtimes H$ (folosind faptul ca aceasta actiune este libera). Acum putem construi o reprezentare Θ a produsului incrucisat algebric $L^\infty(X) \rtimes^{alg} (G_1 *_H G_2)$ pe $\Pi_{k\to\omega} M_{n_k}$. Pentru a ajunge la produsul von Neumann urma fiecarui element netrivial u_g, $g \in G_1 *_H G_2$ trebuie sa fie 0. Grupurile G_1 si G_2 sunt sofice, deoarece numai grupurile sofice pot avea actiuni sofice. Atunci din 0.3.7 grupul $G_1 *_H G_2$ este sofic. Exista o scufundare Λ a lui $G_1 *_H G_2$ in $\Pi_{k\to\omega} P_{r_k}$ folosind doar elemente de urma 0. Definim scufundarea $\Theta \otimes \Lambda$ a lui $L^\infty(X) \rtimes_{\alpha_1 *_H \alpha_2} G_1 *_H G_2$ ca in propozitia 0.3.11. □

Aceleasi metode pot fi aplicate si pentru o familie numarabila de grupuri sau actiuni.

Proposition 0.3.14. *Fie $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ o familie de actiuni sofice ale unor grupuri $\{G_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ pe acelasi spatiu. Fie H un subgrup comun amenabil astfel incat actiunile α_i coincid pe H. Atunci $*_H\alpha_i$ este sofica.*

Corollary 0.3.15. *Orice actiune a unui grup liber, inclusiv $\mathbb{F}_\infty$ este sofica.*

Demonstraţie. Propozitia este un corolar al 0.3.11 si 0.3.14. □

Acum demonstram cu metodele noastre rezultatul lui Elek si Lippner: orice relatie de echivalenta arborabila este sofica.

Proposition 0.3.16. *Orice relatie de echivalenta arborabila este sofica.*

Demonstraţie. Arborabil este un anumit fel de libertate si libertatea merge bine cu soficitatea.

Fie E o relatie de echivalenta arborabila pe (X, μ). Fixam un arbore pe E, adica o multime cel mult numarabila de izomorfisme partiale Borel $\{\phi_i\}_{i\in\mathbb{N}^*} \subset [[E]]$. Pentru fiecare i avem $\phi_i = a_i\lambda_i$, unde a_i este o proiectie in $L^\infty(X)$ si $\lambda_i \in [E]$.

Definim actiunea α a lui $\mathbb{F}_\infty$ pe X astfel incat $\alpha(\gamma_i) = \lambda_i$ (unde $\{\gamma_i\}_i$ sunt generatorii lui $\mathbb{F}_\infty$). Deoarece este o actiune a unui grup liber, α is sofic.

Subalgebra von Neumann a algebrei $L^\infty(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}_\infty$ generata de $a_i u_{\gamma_i}$ este izomorfa canonic cu $M(E)$. Asadar orice scufundare sofica a lui $L^\infty(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}_\infty$ poate fi restrictionata la o scufundare sofica a lui $M(E) \subset L^\infty(X) \rtimes_\alpha \mathbb{F}_\infty$. □

Incheiem aceasta sectiune cu urmatoarea teorema.

Theorem 0.3.17. *Clasa $\mathcal{S}$ este inchisa la produse amalgamate peste grupuri amenabile si este strict mai larga decat clasa grupurilor arborabile.*

Demonstrație. Prima parte din teorema este 0.3.13 si 0.3.9. Din 0.3.16 (si din nou 0.3.9) fiecare grup arborabil este in $\mathcal{S}$.

Consideram acum grupul $G = \mathbb{Z} *_{(2,3)\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$. Nu este arborabil dar $G \in \mathcal{S}$. Acest exemplu este din [Ga].

Faptul ca $G \in \mathcal{S}$ rezulta din 0.3.11 si 0.3.13. Din toria generala a lui Gaboriau, costul lui G este $1 + 1 - 1 = 1$. In acest caz grupul este arborabil daca si numai daca este amenabil. Daca amalgamarea este facuta cum trebuie (de exemplu multiplicarea cu 2 si 3) atunci G nu este amenabil. $\square$

0.3.4 Realtii de echivalenta sofice

Prezentam acum din [El-Li] definitia originala a notiunii de relatie de echivalenta sofica.

Definition 0.3.18. Numim *un sir de baza de proiectii* pentru $L^\infty(X)$ o colectie $\{e_{i,m}\}_{1 \le i \le 2^m, m \ge 0} \subset L^\infty(X)$ cu urmatoarele proprietati:

1. $\overline{span}^w \{e_{i,m}\}_{i,m} = L^\infty(X)$;

2. $\mu(e_{i,m}) = 2^{-m}, 1 \le i \le 2^m, m \ge 0$;

3. $e_{2i-1,m} + e_{2i,m} = e_{i,m-1}, m \ge 1$.

Fie $\mathbb{F}_\infty =< \gamma_1, \gamma_2, \ldots >$. Pentru orice $r \in \mathbb{N}$ notam cu W_r submultimea cuvintelor reduse de lungime cel mult r si care contin doar primii r generatori si inversi lor. Avem $W_0 \subset W_1 \subset \ldots$ si $\mathbb{F}_\infty = \cup_{r \ge 0} W_r$.

Fie $\alpha : \mathbb{F}_\infty \curvearrowright X$ o actiune Borel si fixam $\{e_{i,r}\}_{1 \le i \le 2^r}$ un sir de baza de proiectii pentru $L^\infty(X)$. Urmatoarea defnitie ne permite sa urmarim pozitia unui punct $x \in X$ fata de multimile $\{e_{i,r}\}_{1 \le i \le 2^r}$ sub actiunea lui $W_r \subset \mathbb{F}_\infty$.

Definition 0.3.19. Fie $r \in \mathbb{N}$. O *r-vecinatate* este un multi-graf finit orienta continand:

1. un varf radacina astfel incat orice alt varf este conectat de aceasta radacina printr-un drum de lungime maxim r;

2. orice varf are o eticheta din multimea $\{1, \ldots, 2^r\}$;

3. muchiile care ies din fiecare varf au culori diferite din multimea $\{\gamma_1, \gamma_1^{-1}, \ldots, \gamma_r, \gamma_r^{-1}\}$;

4. daca muchia xy este colorata cu γ_i atunci muchia yx este colorata cu γ_i^{-1}.

Clasele de izomorfism ale acestor obiecte formeaza o multime finita pe care o notam cu $U^{r,r}$.

Pentru $G \in U^{r,r}$, notam cu R_G varful radacina a lui G. Pentru $\gamma \in W_r$ fie γR_G varful din G obtinut plecand din R_G si urmarind drumul specificat de γ (daca un astfel de drum exista). Notam cu $l(\gamma R_G)$ eticheta varfului γR_G din multimea $\{1, 2, \ldots, 2^r\}$.

Revenim acum la actiunea $\alpha : \mathbb{F}_\infty \curvearrowright X$. Pentru $x \in X$ definim $B_r^r(x) \in U^{r,r}$ folosind imaginile lui x prin actiunea lui W_r si etichetele lor fata de multimile $\{e_{i,r}\}_{1 \leq i \leq 2^r}$. Pentru $G \in U^{r,r}$ fie $T(\alpha, G) = \{x \in X : B_r^r(x) \equiv G\}$. Definim si $p_G(\alpha) = \mu(T(\alpha, G))$.

Daca α este o actiune pe un spatiu finit Y (cu masura de numarare normalizata) putem construi aceleasi obiecte atata timp cat avem submultimi $\{e_{i,r}\}_{1 \leq i \leq 2^r, r \geq 0}$ ale lui Y satisfacand aceleasi relatii de insumare. Aceste submultimi sunt necesare pentru a da etichete varfurilor. Spatiile finite cu acest gen de partitii se vor numi X*-multimi*. Acum putem da definitia.

Definition 0.3.20. O actiune α a lui $\mathbb{F}_\infty$ se numeste *sofic* (in sensul lui Elek-Lippner) daca exista un sir de actiuni α_k ale lui $\mathbb{F}_\infty$ pe X-multimi astfel incat pentru orice $r \geq 1$ si orice $G \in U^{r,r}$ avem $lim_{k\to\infty} p_G(\alpha_k) = p_G(\alpha)$.

Definition 0.3.21. O relatie de echivalenta se numeste *sofica* daca este generata de o actiune sofica a lui $\mathbb{F}_\infty$ (toate acestea in sensul lui Elek-Lippner sense).

Pentru actiuni ale lui $\mathbb{F}_\infty$ cele doua notiuni de soficitate sunt diferite. Cu defnitia noastra orice actiune a lui $\mathbb{F}_\infty$ este sofica (conform 0.3.15). Inschimb defintiile pentru relatii de echivalenta sunt echivalente. Acest lucru il vom demonstra acum.

Proposition 0.3.22. *Fie $E \subset X^2$ o relatiei de echivalenta. Atuncin E este sofica in sensul Elek-Lippner daca si numai daca E este sofica ($M(E)$ admite o scufundare sofica in $\Pi_{k\to\omega} M_{n_k}$).*

Demonstraţie. Fie $\alpha : \mathbb{F}_\infty \curvearrowright (X, \mu)$ o actiune sofica in sensul Elek-Lippner astfel incat $E = E_\alpha$. Fie α_k un sir de actiuni pe X-multimi Y_k astfel incat $lim_{k\to\infty} p_G(\alpha_k) = p_G(\alpha)$. Notam cu n_k cardinalul lui Y_k. Vom scufunda $M(E)$ in $\Pi_{k\to\omega} M_{n_k}$. Pentru acest lucru avem nevoie de:

1. o scufundare $L^\infty(X) \subset \Pi_{k\to\omega} D_{n_k}$;

2. o reprezentare Θ a lui $\mathbb{F}_\infty$ pe $\Pi_{k\to\omega}P_{n_k}$;

3. ecuatia $Tr(f\Theta(\gamma)) = \int_{X_\gamma} f d\mu$ pentru orice $f \in L^\infty(X)$ si $\gamma \in \mathbb{F}_\infty$, unde $X_\gamma = \{x \in X : \gamma x = x\}$.

Din ipoteza Y_k sunt X-multimi, deci vin impreuna cu proiectiile $\{e^k_{i,r}\}_{i,r}$ din $L^\infty(Y_k)$. Construim $e_{i,r} = \Pi_{k\to\omega}e^k_{i,r}$. Observatia este ca $\{e_{i,r}\}_{1\leq i\leq 2^r, r\geq 0}$ formeaza un sir de proiectii de baza pentru algebra pe care o genereaza. Relatiile $e_{i,r} = e_{2i-1,r+1} + e_{2i,r+1}$ sunt automate, trebuie doar sa demonstram ca $Tr(e_{i,r}) = 2^{-r}$.

Fie $\{f_{i,r}\}_{1\leq i\leq 2^r, r\geq 0} \subset L^\infty(X)$ sirul de proiectii de baza folosit in calcularea numerelor $p_G(\alpha)$. Fixam i si r. Fie $U^{r,r}_i = \{G \in U^{r,r} : l(R_G) = i\}$, adica grafurile pentru care radacina are eticheta i. Atunci $T(\alpha, G) \subset f_{i,r}$ pentru orice $G \in U^{r,r}_i$. Mai mult: $f_{i,r} = \sqcup_{G\in U^{r,r}_i} T(\alpha, G)$. In acelasi mod avem $e^k_{i,r} = \sqcup_{G\in U^{r,r}_i} T(\alpha_k, G)$. Deoarece $\lim_{k\to\infty} p_G(\alpha_k) = p_G(\alpha)$ rezulta $Tr(e_{i,r}) = \lim_{k\to\omega} Tr(e^k_{i,r}) = Tr(f_{i,r}) = 2^{-r}$.

Identificand $e_{i,r}$ cu $f_{i,r}$ obtinem o scufundare a lui $L^\infty(X)$. Acum putem constru reprezentarea Θ a lui $\mathbb{F}_\infty$ in $\Pi_{k\to\omega}P_{n_k}$. Identificam $L^\infty(Y_k)$ cu D_{n_k}. Avem actiunile α_k ale lui $\mathbb{F}_\infty$ care sunt definite pe Y_k. Acestea impreuna construiesc reprezentarea. Vrem sa demonstram ca Θ actioneaza la fel ca α.

Fie γ un generator pentru $\mathbb{F}_\infty$. Fixam i, j si r. Fie $U^{r,r}_{i,\gamma j} = \{G \in U^{r,r} : l(R_G) = i, l(\gamma R_G) = j)\}$, multimea grafurilor in care radacina are eticheta i si varful conectat de radacina prin muchia γ are eticheta j (existenta unei astfel de muchii este o cerinta a grafului G). Este usor de vazut ca $f_{i,r} \cap \alpha(\gamma^{-1})(f_{j,r}) = \sqcup_{G\in U^{r,r}_{i,\gamma j}} T(\alpha, G)$. In acelasi fel $e^k_{i,r} \cap \alpha_k(\gamma^{-1})(e^k_{j,r}) = \sqcup_{G\in U^{r,r}_{i,\gamma j}} T(\alpha_k, G)$. Folosind ipoteza obtinem $Tr(e_{i,r} \cdot \Theta(\gamma^{-1})(e_{j,r})) = \mu(f_{i,r} \cap \alpha(\gamma^{-1})(f_{j,r}))$. Aceste relatii sunt suficiente pentru a arata ca actiunea indusa de Θ pe scufundarea lui $L^\infty(X)$ este egala cu α.

Pentru a treia cerinta fie $\gamma \in \mathbb{F}_\infty$ un element arbitrar. Este suficient sa presupunem ca f este una din proiectiile $e_{i,r}$. Avem nevoie sa demonstram ca: $Tr(e_{i,r}\Theta(\gamma)) = \mu(X_\gamma \cap e_{i,r})$. Vom folosii notatia: $\Theta(\gamma) = \Pi_{k\to\omega}\gamma_k$. Atunci $Tr(e_{i,r}\Theta(\gamma)) = lim_{k\to\infty} Tr(e^k_{i,r}\gamma_k)$. Fie $U^{r,r}_{i,\gamma} = \{G \in U^{r,r} : l(R_G) = i, \gamma R_G = R_G\}$, Adica multimea grafurilor $G \in U^{r,r}$ astfel incat radacina are eticheta i si drumul in G descris de γ, care pleaca dinradacina, se intoarce la raducina. Atunci $X_\gamma \cap e_{i,r} = \sqcup_{G\in U^{r,r}_{i,\gamma}} T(\alpha, G)$. O ecuatie similara are loc pentru punctele fixe ale lui γ_k si $e^k_{i,r}$. Deoarece $lim_{k\to\infty} p_G(\alpha_k) = p_G(\alpha)$ rezulta $Tr(e_{i,r}\Theta(\gamma)) = \mu(X_\gamma \cap e_{i,r})$ si am terminat o implicatie.

Pentru implicatia inversa vom presupune ca $M(E)$ se scufunda in $\Pi_{k\to\omega}M_{n_k}$. Vrem sa demonstram ca E este sofica in sensul Elek-Lippner.

Din 0.2.17 avem o scufundare sofica $M(E) \subset \Pi_{k\to\omega} M_{n_k}$ astfel incat $L^\infty(X) = A \subset \Pi_{k\to\omega} D_{n_k}$ si $u_\theta \subset \Pi_{k\to\omega} P_{n_k}$ pentru orice $\theta \in [E]$.

Vom nota cu d distanta Hamming normalizata pe P_{n_k}. In general γ, δ vor desemna elemente ale lui $\mathbb{F}_\infty$ si γ_i, δ_i vor reprezenta generatorii lui $\mathbb{F}_\infty$. Fie $\alpha : \mathbb{F}_\infty \curvearrowright (X, \mu)$ o actiune care genereaza relatia de echivalenta E pe X. Pentru orice element $\gamma \in \mathbb{F}_\infty$, $\alpha(\gamma)$ induce un element $u_\gamma \in \mathcal{N}(A)$ si $u_\gamma u_\delta = u_{\gamma\delta}$. Vom scrie $u_\gamma = \Pi_{k\to\omega} u_\gamma^k \in \Pi_{k\to\omega} P_{n_k}$.

Fie Y_k o multime cu n_k elemente si indentificam algebrele D_{n_k} si $L^\infty(Y_k)$. Pentru orice generator γ_i a lui $\mathbb{F}_\infty$, $u_{\gamma_i}^k \in P_{n_k}$ induce un automorfism a lui Y_k. Il vom nota cu $\alpha_k(\gamma_i)$ si extindem α_k la o actiune a lui $\mathbb{F}_\infty$.

Fie $\{e_{i,m}\}_{1\le i\le 2^m, m\ge 0} \subset L^\infty(X)$ un sir de baza de proiectii. Il vom folosi pentru a construi multimile $T(\alpha, G)$. Fie $e_{i,m} = \Pi_{k\to\omega} e_{i,m}^k$ unde $\{e_{i,m}^k\}_{i,m}$ respecta aceleasi relatii de insumare. Acum Y_k sunt X-multimi datorita proiectiilor $\{e_{i,m}^k\}_{i,m}$ deci avem ingredientele pentru a construi multimile $T(\alpha_k, G)$.

Trebuie sa aratam ca din aceste actiuni gasim un subsir care vor demonstra soficitatea lui α, adica $lim_{k\to\infty} \mu_{n_k}(T(\alpha_k, G)) = \mu(T(\alpha, G))$ pentru orice $r \in \mathbb{N}$ si $G \in U^{r,r}$ (notam cu μ_{n_k} masura de numarare normalizata pe Y_k). Avem nevoie de un subsir pentru a scapa de limita in ultrafiltru, adica pentru a obtine o limita clasica pentru multimea numarabila de obiecte cu care lucram.

Fixam $r \in \mathbb{N}$ si $\varepsilon > 0$. Observam mai intai ca este suficient sa gasim $k \in \mathbb{N}$ astfel incat $|\mu_{n_k}(T(\alpha_k, G)) - \mu(T(\alpha, G))| < \varepsilon$ pentru orice $G \in U^{r,r}$. Fenomenul este ca daca fixam un $G \in U^{r,r}$, cand facem un pas inainte de la r la $r+1$ avem $T(\alpha, G) = \cup_{G' \in U^{r+1,r+1}; G < G'} T(\alpha, G')$ (relatia $G < G'$ se defineste intr-un mod evident). Asadar $\mu(T(\alpha_{k'}, G))$ este o suma de elemnte $\mu(T(\alpha_{k'}, G'))$, dar o suma finita. Cand alegem sirul $\{\varepsilon_r\}$ trebuie sa ne asiguram ca acesta converge la 0 suficient de rapid pentru a compensa aceasta crestere.

Multimile $\{T(\alpha, G) : G \in U^{r,r}\}$ formeaza o partitie a lui X. Fie $T(\alpha, G) = \Pi_{k\to\omega} T(\alpha, G)^k$ astfel incat $\{T(\alpha, G)^k : G \in U^{r,r}\}$ este o partitie a lui Y_k. In D_{n_k} avem de asemenea proiectiile $T(\alpha_k, G)$. Stim ca $\mu_{n_k}(T(\alpha, G)^k) \to_k \mu(T(\alpha, G))$ si vrem sa aratam ca $\mu_{n_k}(T(\alpha_k, G)) \to_k \mu(T(\alpha, G))$.

Fixam acum $G \in U^{r,r}$. Avem nevoie sa intelegem ecuatiile care descriu faptul ca un punct este in $T(\alpha, G)$. Amintim ca R_G este radacina lui G; pentru $\gamma \in W_r$, γR_G este varful din G obtinut plecand de la radacina R_G si urmand drumul descris de γ (daca un astfel de drum exista). De asemenea, $l(\gamma R_G)$ este eticheta varfului γR_G din multimea $\{1, 2, \ldots, 2^r\}$. Acum putem prezenta caracterizarea lui $T(\alpha, G)$.

Un punct $x \in X$ este un element a lui $T(\alpha, G)$ daca si numai daca:

1. $\alpha(\gamma)(x) \in e_{l(\gamma R_G),r}$ pentru orice $\gamma \in W_r$ pentru care γR_G exista;

2. $\alpha(\gamma)(x) = \alpha(\delta)(x)\ \forall \gamma, \delta \in W_r,\ \gamma R_G = \delta R_G$;

3. $\alpha(\gamma)(x) \neq \alpha(\delta)(x)\ \forall \gamma, \delta \in W_r,\ \gamma R_G \neq \delta R_G$.

Prima conditie este despre etichetarea varfurilor. Celelalte doua conditii dau structura grafului G. Fie $\varepsilon_1 > 0$ astfel incat $2|U^{r,r}|(|W_r| + 2|W_r|^2)\varepsilon_1 < \varepsilon$. Vrem sa gasim un $k \in \mathbb{N}$ astfel incat pentru orice $G \in U^{r,r}$ sa avem:

$$\mu_{n_k}\left(\alpha_k(\gamma)(T(\alpha, G)^k) \setminus e^k_{l(\gamma R_G),r}\right) < \varepsilon_1 \qquad \forall \gamma \in W_r; \tag{2}$$

$$\mu_{n_k}\left(T(\alpha, G)^k \setminus \{y \in Y_k : \alpha_k(\gamma)(y) = \alpha_k(\delta)(y)\}\right) < \varepsilon_1 \quad \forall \gamma, \delta \in W_r,\ \gamma R_G = \delta R_G \tag{3}$$

$$\mu_{n_k}\left(T(\alpha, G)^k \setminus \{y \in Y_k : \alpha_k(\gamma)(y) \neq \alpha_k(\delta)(y)\}\right) < \varepsilon_1 \quad \forall \gamma, \delta \in W_r,\ \gamma R_G \neq \delta R_G \tag{4}$$

$$|\mu_{n_k}(T(\alpha, G)^k) - \mu(T(\alpha, G))| < \varepsilon/2. \tag{5}$$

Vom demonstra mai intai ca aceste conditii sunt suficiente pentru a garanta ca $|\mu_{n_k}(T(\alpha_k, G)) - \mu(T(\alpha, G))| < \varepsilon$ pentru orice $G \in U^{r,r}$. Folosind (5) trebuie doar sa demonstram ca $|\mu_{n_k}(T(\alpha_k, G)) - \mu_{n_k}(T(\alpha, G)^k)| < \varepsilon/2$.

Fie $x \in (T(\alpha, G)^k \setminus T(\alpha_k, G))$ pentru un $G \in U^{r,r}$. Folosind caracterizarea lui $T(\alpha, G)$, avem:

1. $\exists \gamma \in W_r$ astfel incat $\alpha_k(\gamma)(x)$ nu are eticheta corecta, adica $l(\gamma R_G)$;

2. sau $\exists \gamma, \delta \in W_r$ astfel incat $\gamma R_G = \delta R_G$ si $\alpha_k(\gamma)(x) \neq \alpha_k(\delta)(x)$;

3. sau $\exists \gamma, \delta \in W_r$ astfel incat $\gamma R_G \neq \delta R_G$ si $\alpha_k(\gamma)(x) = \alpha_k(\delta)(x)$.

Folosind (2), (3) and (4) obtinem:

$$\mu_{n_k}(T(\alpha, G)^k \setminus T(\alpha_k, G)) < |W_r|\varepsilon_1 + 2|W_r|^2\varepsilon_1.$$

Deoarece $\{T(\alpha_k, G)\}_G$ si $\{T(\alpha, G)^k)\}_G$ sunt partitii ale lui Y_k si formula de mai sus are loc pentru orice $G \in U^{r,r}$ avem:

$$|\mu_{n_k}(T(\alpha_k, G)) - \mu_{n_k}(T(\alpha, G)^k)| < |U^{r,r}|(|W_r|\varepsilon_1 + 2|W_r|^2\varepsilon_1) < \varepsilon/2.$$

NNe intoarcem la alegerea lui k. Fie $\gamma = \gamma_{i_1}\gamma_{i_2}\ldots\gamma_{i_s} \in W_r$. Ar trebui sa consideram $\gamma = \gamma_{i_1}^{\zeta_1}\gamma_{i_2}^{\zeta_2}\ldots\gamma_{i_s}^{\zeta_s}$, unde $\zeta_j \in \{\pm 1\}$. Elementele inverse nu schimba cu nimic rationamentele noastre si vor incarca notatia. Datorita constructiei Feldman-Moore stim ca $u_\gamma = u_{\gamma_{i_1}}u_{\gamma_{i_2}}\ldots u_{\gamma_{i_s}}$. Acum din $\alpha(\gamma)(T(\alpha,G)) \subset e_{l(\gamma R),r}$ si $\alpha(\gamma)(T(\alpha,G)) = u_\gamma T(\alpha,G)u_\gamma^*$ obtinem $u_\gamma T(\alpha,G)u_\gamma^* \subset e_{l(\gamma R),r}$.

Fie $\gamma,\delta \in W_r$. Daca $\gamma R_G = \delta R_G$ atunci $\alpha(\gamma)|_{T(\alpha,G)} = \alpha(\delta)|_{T(\alpha,G)}$ deci $Tr(T(\alpha,G)u_\delta^* u_\gamma) = \mu(T(\alpha,G))$ (am considerat ca $T(\alpha,G)$ este o proiectie in $L^\infty(X) \subset \Pi_{k\to\omega}M_{n_k}$). Daca $\gamma R_G \neq \delta R_G$ atunci $Tr(T(\alpha,G)u_\delta^* u_\gamma) = 0$. Gasim $k \in \mathbb{N}$ astfel incat (5) are loc si:

$$
\begin{aligned}
&||u_\gamma^k - u_{\gamma_{i_1}}^k u_{\gamma_{i_2}}^k \ldots u_{\gamma_{i_s}}^k||_2 < \varepsilon_1/4 && \forall\gamma = \gamma_{i_1}\gamma_{i_2}\ldots\gamma_{i_s} \in W_r && (6)\\
&\mu_{n_k}\left(u_\gamma^k T(\alpha,G)^k u_\gamma^{k*} \setminus e_{l(\gamma R_G),r}^k\right) < \varepsilon_1/2 && \forall\gamma \in W_r, \forall G \in U^{r,r} && (7)\\
&\mu_{n_k}(T(\alpha,G)^k) - Tr\left(T(\alpha,G)^k u_\delta^{k*} u_\gamma^k\right) < \varepsilon_1/2 && \forall G \in U^{r,r}\forall\gamma,\delta \in W_r, \gamma R_G = \delta R_G && (8)\\
&Tr\left(T(\alpha,G)^k u_\delta^{k*} u_\gamma^k\right) < \varepsilon_1/2 && \forall G \in U^{r,r}\forall\gamma,\delta \in W_r, \gamma R_G \neq \delta R_G && (9)
\end{aligned}
$$

Din defintie $\alpha_k(\gamma) = \alpha_k(\gamma_{i_1})\alpha_k(\gamma_{i_2})\ldots\alpha_k(\gamma_{i_r})$ si $\alpha_k(\gamma_{i_j})(P) = u_{\gamma_{i_j}}^k P u_{\gamma_{i_j}}^{k*}$ pentru orice proiectie $P \in D_{n_k}$. Atunci:

$$\alpha_k(\gamma)(T(\alpha,G)^k) = \left(u_{\gamma_{i_1}}^k u_{\gamma_{i_2}}^k \ldots u_{\gamma_{i_r}}^k\right) T(\alpha,G)^k \left(u_{\gamma_{i_1}}^k u_{\gamma_{i_2}}^k \ldots u_{\gamma_{i_r}}^k\right)^*. \tag{10}$$

Obiectele u_γ^k si $u_{\gamma_{i_1}}^k u_{\gamma_{i_2}}^k \ldots u_{\gamma_{i_s}}^k$ sunt elemente in P_{n_k} si datorita (6) avem:

$$d(u_\gamma^k, u_{\gamma_{i_1}}^k u_{\gamma_{i_2}}^k \ldots u_{\gamma_{i_s}}^k) < \varepsilon_1/4.$$

Combinat cu (10), deducem ca $\mu_{n_k}\left(\alpha_k(\gamma)(T(\alpha,G)^k) \setminus u_\gamma^k T(\alpha,G)^k u_\gamma^{k*}\right) < \varepsilon_1/4$. Folosim (7) pentru a deduce ca $\mu_{n_k}\left(\alpha_k(\gamma)(T(\alpha,G)^k) \setminus e_{l(\gamma R),r}^k\right) < \varepsilon_1/4 + \varepsilon_1/2 < \varepsilon_1$, deci avem inegalitatea (2).

Fie acum $\gamma = \gamma_{i_1}\gamma_{i_2}\ldots\gamma_{i_s}$ si $\delta = \delta_{j_1}\delta_{j_2}\ldots\delta_{j_t}$ astfel incat $\gamma R_G = \delta R_G$. Folosim (6) pentru γ si δ pentru a obtine:

$$||u_\delta^{k*}u_\gamma^k - (u_{\delta_{j_1}}^k u_{\delta_{j_2}}^k \ldots u_{\delta_{j_t}}^k)^*(u_{\gamma_{i_1}}^k u_{\gamma_{i_2}}^k \ldots u_{\gamma_{i_r}}^k)||_2 < \varepsilon_1$$

La fel ca inainte, $u_\delta^{k*}u_\gamma^k$ si$(u_{\delta_{j_1}}^k \ldots u_{\delta_{j_t}}^k)^*(u_{\gamma_{i_1}}^k \ldots u_{\gamma_{i_r}}^k)$ sunt elemente in P_{n_k}, deci:

$$d\left(u_\delta^{k*}u_\gamma^k, (u_{\delta_{j_1}}^k u_{\delta_{j_2}}^k \ldots u_{\delta_{j_t}}^k)^*(u_{\gamma_{i_1}}^k u_{\gamma_{i_2}}^k \ldots u_{\gamma_{i_r}}^k)\right) < \varepsilon_1/2,$$

Restrictionand aceasta inegalitate doar la punctele fixe din multimea $T(\alpha, G)^k$, avem:

$$|Tr(T(\alpha,G)^k u_\delta^{k*} u_\gamma^k) - Tr\left(T(\alpha,G)^k (u^k_{\delta_{j_1}} u^k_{\delta_{j_2}} \dots u^k_{\delta_{j_t}})^* (u^k_{\gamma_{i_1}} u^k_{\gamma_{i_2}} \dots u^k_{\gamma_{i_r}})\right)| < \varepsilon_1/2. \quad (11)$$

Folosim (10) pentru γ si δ ca sa obtinem:

$$\mu_{n_k}\left(T(\alpha,G)^k \setminus \{y \in Y_k : \alpha_k(\gamma)(y) = \alpha_k(\delta)(y)\}\right) = \mu_{n_k}(T(\alpha,G)^k) - Tr\left(T(\alpha,G)^k (u^k_{\delta_{j_1}} u^k_{\delta_{j_2}} \dots u^k_{\delta_{j_t}})^* (u^k_{\gamma_{i_1}} u^k_{\gamma_{i_2}} \dots u^k_{\gamma_{i_r}})\right).$$

Acest lucru combinat cu (11) si (8) dau inegalitatea (3).

APresupunem acum ca $\gamma R_G \neq \delta R_G$. Atunci:

$$\mu_{n_k}(T(\alpha,G)^k \setminus \{y \in Y_k : \alpha_k(\gamma)(y) \neq \alpha_k(\delta)(y)\}) = Tr\left(T(\alpha,G)^k (u^k_{\delta_{j_1}} u^k_{\delta_{j_2}} \dots u^k_{\delta_{j_t}})^* (u^k_{\gamma_{i_1}} u^k_{\gamma_{i_2}} \dots u^k_{\gamma_{i_r}})\right).$$

Inegalitatile (11) si (9) vor implica inegalitatea (4). □

Bibliografie

[Ca-Pa] V. Capraro - L. Păunescu, *Product Between Ultrafilters and Applications to the Connes' Embedding Problem* arXiv:0911.4978 (2009), accepted to J.Oper.Theory;.

[CFW] A. Connes - J. Feldman - B. Weiss, *An amenable equivalence relation is generated by a single transformation*, Erg. Theory Dyn. Sys. 1(1981), 431-450.

[Co] A. Connes, *Classification of injective factors*, Ann. of Math. 104(1976) 73-115.

[Cor] Y. Cornulier, *A sofic group away from amenable groups*, arXiv:0906.3374 (2009).

[Co-Dy] B. Collins - K. Dykema, *Free products on sofic groups with amalgamation over monotileably amenable groups* arXiv:1003.1675 (2010).

[Di] J. Dixmier, *Von Neumann algebras*, ISBN 0-444-86308-7 (1981).

[El-Li] G. Elek - G. Lippner, *Sofic equivalence relations*, arXiv:0906.3619 (2009).

[El-Sz1] G. Elek - E. Szabo, *Sofic groups and direct finiteness*, J. Algebra 280 (2004) 426-434.

[El-Sz2] G. Elek - E. Szabo, *Hyperlinearity, essentially free actions and L2-invariants. The sofic property*, Math. Ann. 332 (2005), no. 2, 421441.

[El-Sz3] G. Elek - E. Szabo, *On sofic groups*, J. Group Theory 9 (2006), Issue 2, 161-171.

[El-Sz4] G. Elek - E. Szabo, *Sofic representations of amenable groups*, arXiv:1010.3424 (2010).

[Fe-Mo] J. Feldman - C. C. Moore, *Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras*, II. Trans. Amer. Math. Soc. 234 (1977) no. 2, 325-359.

[Ga] D. Gaboriau, *Cout des relations d'quivalence et des groupes*, Invent. Math., 139 (2000), no. 1, 41-98.

[Gr] M. Gromov, *Endomorphism of symbolic algebraic varieties*, J. Eur. Math. Soc. 1 (1999) 109-197.

[Ju] K. Jung, *Amenability, tubularity, and embeddings in R^ω*, Math. Ann. (2007)338:241-248.

[Ke-Mi] A. Kechris - B. Miller, *Topics in orbit equivalence*, Lecture Notes in Mathematics 1852 Springer Verlag.

[Oz] N. Ozawa, *Unpublished lectures notes*, available at http://people.math.jussieu.fr/˜ pisier/taka.talk.pdf

[Pă] Păunescu, L; *On Sofic Actions and Equivalence Relations*; Journal of Functional Analysis Volume 261, Issue 9, Pages 2461-2485.

[Pe] V. Pestov, *Hyperlinear and sofic groups: a brief guide*, Bull. Symbolic Logic 14 (2008) no. 4, 449480.

[Pe-Kw] V. Pestov - A. Kwiatkowska, *An introduction to hyperlinear and sofic groups*, arxiv:0911.4266 (2009).

[Po1] S. Popa, *On a Problem of R.V. Kadison on Maximal Abelian *-Subalgebras in Factors*, Inv. Math., 65 (1981), 269-281.

[Po2] S. Popa, *Notes on Cartan subalgebras in type II_1 factors*, Math. Scand., 57 (1985), 171-188.

[Ră] F. Rădulescu, *The von Neumann algebras of the non-residually finite Baumslag group $< a, b|ab^3a^{-1} = b^2 >$ embeds into R^ω*, arXiv:math/0004172v3 (2000).

[Si] I.M. Singer, *Automorphisms of finite factors*, Amer. J. Math. 77 (1955), 117- 133.

[Th] A. Thom, *Examples of hyperlinear groups without factorization property* Preprint 2008, to appear in Groups Geom. Dynam.; arXiv 0810.2180.

[We] B. Weiss, *Sofic groups and dynamical Systems*, (Ergodic theory and harmonic analysis, Mumbai, 1999) Sankyha Ser. A. 62(2000) no. 3, 350-359.

LIVIU PĂUNESCU, *INSTITUTE of MATHEMATICS "S. Stoilow" of the ROMANIAN ACADEMY* email: liviu.paunescu@imar.ro