ACADEMIA ROMÂNĂ
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ
„SIMION STOILOW”

CONTRIBUŢII LA STUDIUL PROPRIETĂŢILOR ANALITICE ALE FUNCŢIILOR ARITMETICE – UTILIZAREA e-DIVIZORILOR

TEZĂ DE DOCTORAT

Coordonator ştiinţific:
Prof. univ. dr. **TOMA ALBU**

Doctorand:
NICUŞOR MINCULETE

Bucureşti
Februarie 2012

Contribuţii la studiul proprietăţilor analitice ale funcţiilor aritmetice – utilizarea e-divizorilor

Teză de doctorat

În memoria Profesorului Laurenţiu Panaitopol

Cuprins

PREFAŢĂ

Scopul acestei lucrări este de a studia o secţiune a *Teoriei numerelor*, secţiune ce se referă la funcţiile aritmetice multiplicative care utilizează divizorii exponenţiali. Tema a fost aleasă împreună cu profesorul Laurenţiu Panaitopol. Dumnealui a considerat că această temă, deşi apăruse cu 30 de ani înaintea discuţiei noastre, nu a fost tratată destul, mai ales pe partea de inegalităţi, menite să caracterizeze legătura dintre aceste funcţii aritmetice.

Ideea aprofundării temei prin legarea ei de inegalităţi s-a cristalizat treptat, în paralel cu preocupările mele pentru inegalităţi în general şi având ca bază de cercetare o lucrare referitoare la inegalităţile geometrice, lucrare pe care am publicat-o în anul 2003. Dar a trece la inegalităţi între funcţiile aritmetice era cu totul altceva, datorită faptului că multe dintre aceste funcţii erau greu de controlat din punctul de vedere al comportamentului lor pentru diverse valori. A fost, însă, o provocare. Drept urmare, tema primului meu referat în cadrul doctoratului a avut titlul *Inegalităţi în Teoria numerelor*.

Centrul de greutate al tezei este bazat pe studierea, rafinarea şi descoperirea unor inegalităţi noi între funcţiile aritmetice cunoscute şi alte funcţii aritmetice mai puţin cunoscute.

Majoritatea funcţiilor aritmetice studiate se refereau la divizorii naturali ai unui număr sau la divizorii unitari ai unui număr natural. Profesorul Laurenţiu Panaitopol a considerat că este necesar să trecem la o altă categorie de divizori, şi anume la divizorii exponenţiali, ca să putem aprofunda şi completa unele proprietăţi ale acestora. Metodele de cercetare au fost similare cu cele utilizate pentru analiza funcţiilor generate de divizorii naturali şi divizorii unitari ai unui număr natural. Nu am avut acces la absolut toate lucrările care se refereau la divizorii exponenţiali; profesorul Panaitopol m-a ajutat foarte mult prin materialele pe care mi le-a pus la dispoziţie cu generozitate, orientându-mi căutările către diferite articole. Toate discuţiile purtate cu profesorul Panaitopol aveau o energie pozitivă deosebită, deoarece parcă simţeam cum se limpezesc unele lucruri şi cum se deschid ferestre către noi idei de cercetare.

Un regret al meu este că discuţiile purtate pe marginea tematicii studiate nu s-au concretizat într-un articol semnat împreună cu profesorul Panaitopol şi publicat într-o revistă de specialitate. Am considerat că nu trebuie să-i răpesc din foarte preţiosul său timp cu problemele mele. Dar, marele meu regret este că dialogurile noastre nu mai pot avea loc, deoarece dânsul ne-a părăsit pentru a ajunge într-o lume mai bună decât cea în care suntem noi. Tot dumnealui a anticipat despărţirea de noi şi ca să pot continua tema aleasă astfel încât cercetările să fie la un nivel superior m-a îndreptat către domnul profesor universitar doctor Toma Albu.

Foarte atent la detaliile tehnice, dar şi la cele ştiinţifice, domnul profesor Toma Albu a contribuit major la îmbunătăţirea calităţii acestei teze. Discuţiile noastre au avut darul de a mă mobiliza şi de a mă determina să ridic nivelul ştiinţific al lucrării. Le mulţumesc profesorului

Laurenţiu Panaitopol şi domnului profesor universitar doctor Toma Albu pentru deosebitele discuţii şi sugestii pe care mi le-au oferit pe parcursul doctoratului în calitate de coordonatori ai tezei mele de doctorat. De asemenea îi mulţumesc domnului profesor universitar doctor László Tóth pentru colaborarea fructuoasă din cadrul articolului *Exponential unitary divisors*.

Domnului conferenţiar universitar doctor Alexandru Gica şi domnului cercetător ştiinţific gradul I doctor Mihai Cipu le mulţumesc pentru răbdarea de a-mi citi teza şi pentru observaţiile şi corecturile făcute.

INTRODUCERE

Interesul pentru studierea funcţiilor aritmetice a crescut odată cu dezvoltarea unor noi domenii care le utilizează: *Criptografia* şi *Teoria codurilor*.

În această lucrare vom prezenta unele dintre aceste funcţii aritmetice cu caracterizări noi, dar în acelaşi timp introducem alte funcţii care vin să îmbogăţească domeniul funcţiilor aritmetice şi mai ales pe cel al funcţiilor aritmetice multiplicative.

De asemenea extindem câteva proprietăţi ale funcţiilor aritmetice cunoscute la noile funcţii pe care le definim în cadrul lucrării.

Cercetările multor matematicieni au creat baze de dezvoltare importante ale acestui domeniu, prin rezultatele lor deosebite obţinute în cadrul studierii funcţiilor aritmetice. Instrumentele de lucru au evoluat odată cu cercetările acestora, ajungându-se la caracterizări noi ale funcţiilor aritmetice.

Studierea multiplicativităţii funcţiilor aritmetice este foarte importantă, deoarece ne ajută la exprimarea acestora. Astfel, dacă f este o funcţie multiplicativă ($f(mn) = f(m)f(n)$, când $(m, n) = 1$) şi $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_r^{a_r} > 1$, atunci pentru calcularea lui $f(n)$ este suficient să se calculeze $f(p_i^{a_i})$, unde $i = \overline{1, r}$, de unde se deduce expresia lui f. Această observaţie ne determină ca în studierea anumitor proprietăţi ale funcţiilor multiplicative mai întâi să vedem comportarea lor pentru puteri de numere prime. Multe funcţii aritmetice se modifică într-o manieră diferită şi este greu de determinat o comportare a lor pentru un număr foarte mare. De aceea este mai util să studiem media aritmetică pentru o astfel de funcţie f, adică $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k)$. Dar suma $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ este calculată, de obicei, prin schimbarea lui n cu un număr real arbitrar x; astfel, suma care trebuie calculată devine $\sum_{n\leq x} f(n)$, sumă pe care o vom numi *comportare asimptotică a lui* f. Scopul nostru este să determinăm comportarea acesteia ca o funcţie de x, mai ales când x este suficient de mare.

În cadrul tezei prezentăm câteva rezultate referitoare la unele dintre funcţiile aritmetice care utilizează divizori exponenţiali prin studierea acestora în patru capitole.

Primul capitol are ca obiectiv tratarea unei clase de funcţii aritmetice multiplicative care a fost dată prin introducerea divizorilor exponenţiali de către M. V. Subbarao în [**55**]. P. Erdős a studiat ordinul maximal al funcţiei care se referă numărul divizorilor exponenţiali ai unui număr natural ($\tau^{(e)}$), iar J. Fabrykowski şi M. V. Subbarao, în [**9**], au obţinut ordinul maximal al funcţiei, care se referă la suma divizorilor exponenţali ai unui număr natural ($\sigma^{(e)}$).

Printre proprietăţile funcţiei $\tau^{(e)}$, studiem ecuaţia $\tau(n) = \tau^{(e)}(n)\tau^*(n)$ care ne ajută să stabilim inegalitatea $\tau(n) + 1 \geq \tau^{(e)}(n) + \tau^*(n)$, care, pe lângă inegalitatea din propoziţia 1.1.4, ne dă o evaluare a numărului e-divizorilor în comparaţie cu numărul de divizori ai unui număr.

De asemenea, analizăm exponenţii numerelor prime ce apar în descompunerea unui număr n. Ca urmare, inegalitatea $\sigma^{(e)}(n) \leq \dfrac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(4)\zeta(6)}n$, studiată în propoziţia 1.2.3, generează o proprietate a numerelor e-perfecte care stabileşte că dacă $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_r^{a_r}$ este un număr e-perfect, atunci cel puţin un exponent a_i este egal cu 2.

O altă problematică în caracterizarea e-divizorilor este studierea mediei aritmetice a e-divizorilor unui număr natural n prin aproximarea acesteia cu diverse funcţii sau combinaţii de funcţii aritmetice multiplicative. În urma cercetărilor efectuate am arătat că funcţiile aritmetice $\gamma(n), \tau(n), \gamma(n) + \dfrac{\tau^{(e)}(n)-1}{2}$ şi $\sqrt{n}$ sunt margini inferioare pentru raportul $\dfrac{\sigma^{(e)}(n)}{\tau^{(e)}(n)}$ care reprezintă reprezintă media aritmetică a e-divizorilor lui n. Nu în ultimul rând, studiem problema existenţei numerelor perfecte care sunt în acelaşi timp e-perfecte, şi problema existenţei numerelor perfecte care sunt în acelaşi timp perfecte unitare.

Subcapitolul 1.4 urmăreşte modificarea ordinului maximal dacă în loc de funcţia $\varphi^{(e)}$ avem compunerea de funcţii $f \circ \varphi^{(e)}$, unde f este o funcţie aritmetică multiplicativă.

Rezultatele prezentate în primul capitol sunt în marea lor majoritate preluate din lucrările: [**18**] N. Minculete, "Concerning some arithmetic functions which use exponential divisors", *Acta Universitatis Apulensis Mathematics-Informatics*; [**23**] N. Minculete, "On certain inequalities about arithmetic functions which use the exponential divisors" – trimisă spre publicare; [**19**] N. Minculete "Some inequalities about certain arithmetic functions", *Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series*; [**24**] N. Minculete, "Some inequalities about certain arithmetical functions which use e-divisors and the e-unitary divisors" – trimisă spre publicare; [**28**] N. Minculete şi P. Dicu "Certain aspects of some arithmetic functions in number theory", *General Mathematics*.

În al doilea capitol introducem noţiunea de *e-divizor unitar* şi studiem proprietăţile funcţiilor aritmetice definite prin e-divizori unitari. În clasa divizorilor unui număr n a fost identificată o altă subclasă de divizori ai lui n, de către R. Vaidyanathaswamy în [**65**] şi de E. Cohen în [**4**], şi anume subclasa divizorilor unitari. Mulţimea divizorilor exponenţiali a fost construită cu ajutorul divizibilităţii exponenţilor, deci, în mod similar, apare naturală construcţia unei submulţimi a mulţimii divizorilor exponenţiali utilizând divizibilitatea unitară a exponenţilor. Menţionăm faptul că o referire la *convoluţia exponenţială unitară* a fost făcută de M. V. Subbarao în [**55**], dar fără o analiză detaliată a funcţiilor definite de e-divizorii unitari, adică $\tau^{(e)*}(n)$ – numărul e-divizorilor unitari ai lui n şi $\sigma^{(e)*}(n)$ – suma e-divizorilor unitari ai lui n. Observăm că mulţimea e-divizorilor unitari ai unui număr natural n este inclusă în mulţimea divizorilor exponenţiali ai lui n.

Printre rezultatele obţinute enumerăm calcularea ordinului maximal şi comportările asimptotice ale funcţiilor $\tau^{(e)*}(n)$ şi $\sigma^{(e)*}(n)$.

Tot în acest capitol am introdus noţiunea de *numere e-unitare perfecte* şi am demonstrat următoarele două proprietăţi: există o infinitate de numere e-unitare perfecte şi nu există numere impare care să fie e-unitare perfecte. O problemă deschisă la acest capitol rămâne studierea existenţei unui număr e-unitar perfect nedivizibil cu 3.

Rezultatele menţionate în al doilea capitol sunt, cele mai multe dintre ele, extrase din lucrările: [**18**] N. Minculete, "Concerning some arithmetic functions which use exponential divisors" *Acta Universitatis Apulensis Mathematics-Informatics*; [**19**] N. Minculete, "Some inequalities about certain arithmetic functions", *Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series*; [**28**] N. Minculete şi P. Dicu, "Certain aspects of some arithmetic functions in number theory", *General Mathematics*; [**30**] N. Minculete şi L. Tóth, "Exponential unitary divisors", *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis, Sectio Computatorica.*

În al treilea capitol introducem noţiunea de *divizor de ordin* k, iar obiectivul nostru este de a cerceta proprietăţile funcţiilor aritmetice definite prin divizorii de ordin k. Remarcând aplicabilitatea divizorilor unitari în multe dintre rezultatele din *Teoria numerelor* am considerat că este util să căutăm o altă mulţime de divizori care să fie inclusă în mulţimea divizorilor unitari sau să căutăm o metodă de a generaliza acest tip de divizori unitari.

Pentru a generaliza noţiunea de *divizor unitar* definim *divizorul de ordin* k al lui n. În continuare studiem funcţiile definite de divizorii de ordin k, cercetând proprietăţile lor prin comparaţie cu proprietăţile celorlalte funcţii aritmetice multiplicative analizate în teză.

Subcapitolele 3.2 si 3.3 sunt rezervate funcţiilor aritmetice care utilizează divizori exponenţiali semiproprii, care sunt, de fapt, divizori de ordinul 1. Am identificat o subclasă de divizori a clasei e-divizorilor unitari, pe care am numit-o *clasa divizorilor exponenţiali semiproprii.*

Generalizarea divizorilor unitari şi a celor exponenţiali semiproprii ne-a permis obţinerea altor clase de divizori exponenţiali, şi anume, *clasa divizorilor exponenţiali de ordin* k, pe care am descris-o în subcapitolul 3.4.

Aplicând aceleaşi metode de cercetare precum cele din capitolele anterioare, am obţinut o serie de rezultate pe care le-am preluat din lucrările: [**20**] N. Minculete, "A new class of divisors: the exponential semiproper divisors" – trimisă spre publicare; [**22**] N. Minculete, "Divisors of order k"– trimisă spre publicare; [**29**] N. Minculete şi C. Pozna, "On some properties of divisors of order k", *International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences.*

În ultimul capitol investigăm numerele armonice, numerele armonice bi-unitare şi numerele armonice exponenţiale, continuând cercetările făcute de J. Sándor în câteva lucrări la care ne vom referi în continuare.

J. Sándor prezintă în [**47**] un tabel cu toate cele 211 numere armonice bi-unitare până la 10^9. Studiind numerele armonice bi-unitare mult mai mari decât 10^9, am găsit un număr armonic bi-unitar mai mare decât 10^{94}. Am arătat că singurul număr par care este în acelaşi timp număr

perfect şi număr armonic bi-unitar este 6, iar dacă un număr n este armonic bi-unitar de forma pqt^2, atunci $n = 60$ sau $n = 90$.

J. Sándor introduce în [**46**] noţiunile de *numere armonice exponenţiale de tipul 1 şi de tipul 2*. În subcapitolul 4.3 introducem şi studiem noţiunile de *numere armonice exponenţiale de tipul 3 şi de tipul 4*, arătând că orice număr liber de pătrate este armonic exponenţial de tipurile 3 şi 4; dacă n este un număr e-unitar perfect, atunci n este armonic exponenţial de tipul 3.

Rezultatele care se înscriu în această tematică au fost extrase în mare parte din lucrarea [**25**] N. Minculete, "*Types of harmonic numbers*" – lucrare care se află în pregătire.

În partea finală a tezei enumerăm o serie de probleme deschise, legate de tematica tezei.

LISTĂ DE NOTAŢII

- $\mathbb{N}$: mulţimea $\{0, 1, 2, ...\}$ a numerelor naturale
- $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$
- $\mathbb{Z}$: mulţimea numerelor întregi
- $\mathbb{R}$: mulţimea numerelor reale
- $\mathbb{C}$: mulţimea numerelor complexe
- $(\forall)$: oricare ar fi
- $(\exists)$: există
- $a|b$: a divide b
- $a \equiv b \pmod{m} : m|a - b$
- (a, b): cel mai mare divizor comun al numerelor a şi b
- $[x]$: partea întreagă a numărului real x
- $i = \overline{0, n} : \{i \in \mathbb{N} | 0 \leq i \leq n\}$
- $\varphi(n) : \ card\ \{k \in \mathbb{N} | (k, n) = 1,\ k \leq n\}$
- $|z|$: modulul numărului complex z
- $\tau(n)$: numărul divizorilor naturali ai lui n
- $\sigma(n)$: suma divizorilor naturali ai lui n
- $\mu(n)$: funcţia lui Möbius
- $\omega(n)$: numărul factorilor primi distincţi ai lui n
- $\Omega(n)$: numărul factorilor primi distincţi ai lui n împreună cu multiplicităţile lor
- $\gamma(n)$: funcţia definită prin $\gamma(1) = 1$ şi $\gamma(n) = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_r$ pentru $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_r^{\alpha_r} > 1$
- $b \parallel a : b$ este un divizor unitar al lui a, adică $\left(b, \frac{a}{b}\right) = 1$
- $\tau^*(n)$: numărul divizorilor unitari ai lui n

- $\sigma^*(n)$: suma divizorilor unitari ai lui n
- $\tau^{(e)}(n)$: numărul divizorilor exponenţiali ai lui n
- $\sigma^{(e)}(n)$: suma divizorilor exponenţiali ai lui n
- $\tau^{(e)*}(n)$: numărul e-divizorilor unitari ai lui n
- $\sigma^{(e)*}(n)$: suma e-divizorilor unitari ai lui n
- $\tau^{(e)s}(n)$: numărul divizorilor exponenţiali semiproprii ai lui n
- $\sigma^{(e)s}(n)$: suma divizorilor exponenţiali semiproprii ai lui n
- $\tau^{(k)}(n)$: numărul divizorilor de ordin k ai lui n
- $\sigma^{(k)}(n)$: suma divizorilor de ordin k ai lui n
- $\tau^{(e)(k)}(n)$: numărul divizorilor exponenţiali de ordin k ai lui n
- $\sigma^{(e)(k)}(n)$: suma divizorilor exponenţiali de ordin k ai lui n
- $f(x) = O(g(x))$: există constantele A şi B, astfel încât pentru $|x| \geq A$ avem

$$|f(x)| < Bg(x), \text{ cu } g(x) > 0$$

- $f(x) = o(g(x))$: pentru $x \to \infty$, avem $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ cu $g(x) \neq 0$, pentru x suficient de mare
- ψ: funcţia lui Dedekind, adică

$$\psi(1) = 1 \text{ şi } \psi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \text{ pentru } n > 1.$$

- $T^{(e)}(n)$: produsul tuturor divizorilor exponenţiali ai lui n
- ζ: funcţia zeta a lui Riemann
- γ: constanta lui Euler
- $\Gamma(s)$: funcţia lui Euler

CAPITOLUL 1

Funcţii aritmetice cu e-divizori

Acest capitolul tratează o clasă de funcţii aritmetice multiplicative care a fost dată prin introducerea e-divizorilor de către M. V. Subbarao în lucrarea [**55**]. La începutul lucrării studiem ecuaţia $\tau(n) = \tau^{(e)}(n)\tau^*(n)$ care ajută să stabilim inegalitatea $\tau(n) + 1 \geq \tau^{(e)}(n) + \tau^*(n)$, care, pe lângă inegalitatea din propoziţia 1.1.4, ne dă o evaluare a numărului e-divizorilor în comparaţie cu numărul de divizori ai unui număr natural n. De asemenea, analizăm exponenţii numerelor prime ce apar în descompunerea unui număr natural n. Ca urmare, inegalitatea $\sigma^{(e)}(n) \leq \dfrac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(4)\zeta(6)}n$ – studiată în propoziţia 1.2.3 – generează o proprietate a numerelor e-perfecte care arată că dacă $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_r^{a_r}$ este un număr e-perfect, atunci cel puţin un exponent a_i este egal cu 2.

O altă problematică în caracterizarea e-divizorilor are ca scop studierea mediei aritmetice a e-divizorilor unui număr natural n prin aproximarea acesteia cu diverse funcţii sau combinaţii de funcţii aritmetice multiplicative. În urma cercetărilor efectuate am arătat că funcţiile aritmetice $\gamma(n), \tau(n),\ \gamma(n) + \dfrac{\tau^{(e)}(n) - 1}{2}$ şi $\sqrt{n}$ sunt margini inferioare pentru raportul $\dfrac{\sigma^{(e)}(n)}{\tau^{(e)}(n)}$, care reprezintă media aritmetică a e-divizorilor lui n. Nu în ultimul rând, studiem problema existenţei numerelor perfecte care sunt în acelaşi timp e-perfecte, şi problema existenţei numerelor perfecte care sunt în acelasi timp perfecte unitare.

În subcapitolul 1.4 urmărim cum se modifică ordinul maximal dacă în loc de funcţia $\varphi^{(e)}$ avem compunerea de funcţii $f \circ \varphi^{(e)}$, unde f este o funcţie aritmetică multiplicativă.

Rezultatele prezentate în acest capitol sunt în marea lor majoritate preluate din lucrările: [**18**] N. Minculete, "Concerning some arithmetic functions which use exponential divisors", *Acta Universitatis Apulensis Mathematics-Informatics*; [**23**] N. Minculete, "On certain inequalities about arithmetic functions which use the exponential divisors" – trimisă spre publicare; [**19**] N. Minculete "Some inequalities about certain arithmetic functions", *Annals of the University*

of Craiova, Mathematics and Computer Science Series; [**24**] N. Minculete, "Some inequalities about certain arithmetical functions which use e-divisors and the e-unitary divisors" – trimisă spre publicare; [**28**] N. Minculete şi P. Dicu, "Certain aspects of some arithmetic functions in number theory", *General Mathematics*.

1.1 Numărul de e-divizori ai unui număr natural

Fie n şi d două numere întregi. Spunem că d este un *divizor* al lui n dacă există un număr întreg q astfel încât

$$n = dq$$

şi scriem $d|n$.

Notăm prin $\sigma(n)$ suma divizorilor lui n, iar prin $\tau(n)$, numărul divizorilor lui n.

Numărul n pentru care $\sigma(n) = 2n$ este numit *număr perfect*. De exemplu 6 este un număr perfect, iar dacă n este un număr perfect par, atunci acesta poate fi scris sub forma $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$, unde $2^k - 1$ este un număr prim. Mulţi matematicieni au căutat diverse forme ale lui n pentru a caracteriza aceste numere; printre aceştia îi menţionăm pe Euler, Makowski, Luca, Rotkiewicz, Sinha, Pomerance, Sándor, Cohen, Kenney etc.

Noţiunea de *divizor unitar* a fost introdusă pentru prima dată de R. Vaidyanathaswamy în [**65**] numindu-l *block-factor*. Astfel, un divizor d al lui n este un *block-factor* când $\left(d, \frac{n}{d}\right) = 1$. Câţiva ani mai târziu, E. Cohen introduce în [**4**] terminologia actuală de *divizor unitar* pentru un block-factor.

Dacă d este un divizor unitar al lui n, atunci scriem $d \parallel n$ şi citim d divide unitar pe n. De exemplu, 4 este un divizor unitar al lui 12, deoarece $\left(4, \frac{12}{4}\right) = (4, 3) = 1$, dar 2 nu este un divizor unitar al lui 12, deoarece $\left(2, \frac{12}{2}\right) = (2, 6) = 2 \neq 1$.

Notăm prin $\sigma^*(n)$ suma divizorilor unitari ai lui n, iar prin $\tau^*(n)$, numărul divizorilor unitari ai lui n.

În anul 1966, M. V. Subbarao şi L. J. Warren au introdus în [**56**] noţiunea de număr perfect unitar. Astfel, un număr natural care satisface relaţia $\sigma^*(n) = 2n$ se numeşte *număr perfect unitar*.

Conform teoremei fundamentale a aritmeticii, orice număr natural $n > 1$ poate fi descompus în mod unic (până la o permutare a factorilor) ca produs finit de numere prime. Ca urmare, un număr natural $n > 1$ se scrie în mod unic sub forma $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_r^{a_r}$, unde $0 < p_1 < p_2 < ... < p_r$ sunt numere prime distincte şi $a_1, a_2, ..., a_r \geq 1$. Aceasta se numeşte *descompunerea canonică*.

1.1. Numărul de e-divizori ai unui număr natural

O modalitate de a crea noi funcţii aritmetice multiplicative se realizează prin introducere unor noi tipuri de divizori.

Printre aceste tipuri de divizori menţionăm *divizorul exponenţial* care a fost introdus de M. V. Subbarao în lucrarea [**55**]. Astfel, pentru un număr natural $n > 1$ descompus canonic $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_r^{a_r}$, spunem că numărul natural $d = \prod_{i=1}^{r} p_i^{b_i}$ este numit *divizor exponenţial* (sau *e-divizor*) al lui n, dacă $b_i|a_i$ pentru orice $i = \overline{1,r}$.
În acest caz, notăm $d|_{(e)}n$.

Fie $\tau^{(e)}(n)$ numărul divizorilor exponenţiali ai lui n. Prin convenţie, 1 este un divizor exponenţial al său, adică $\tau^{(e)}(1) = 1$. Observăm că 1 nu este divizor exponenţial al lui $n > 1$, iar cel mai mic divizor exponenţial al lui $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_r^{a_r} > 1$ este $p_1p_2...p_r$, unde $p_1p_2...p_r = \gamma(n)$ este funcţia numită *inima* lui n sau *radicalul* lui n.

De exemplu, dacă p este un număr prim, atunci divizorii exponenţiali ai lui p^{10} sunt p, p^2, p^5 şi p^{10}, deci

$$\tau^{(e)}(p^{10}) = \tau(10) = 4.$$

De asemenea, observăm că dacă n este un număr liber de pătrate, atunci $\tau^{(e)}(n) = 1$.
Este uşor de văzut că funcţia aritmetică $\tau^{(e)} : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ dată de $\tau^{(e)}(n) = \sum_{d|_{(e)}n} 1$ este multiplicativă şi că are loc proprietatea

$$\tau^{(e)}(n) = \tau(a_1)\tau(a_2) \cdot ... \cdot \tau(a_r), \tag{1.1.1}$$

unde $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_r^{a_r} > 1$.
În analiza comportamentului unor funcţii aritmetice pentru un argument suficient de mare utilizăm definiţia următoare:

DEFINIŢIA 1.1.0 *Fie funcţiile aritmetice $f, g, h : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}^*$ şi $a, b \in \mathbb{R}^*$. Dacă $\limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = a$ şi $\liminf_{n\to\infty} \frac{f(n)}{h(n)} = b$, atunci spunem că ordinul maximal al lui $f(n)$ este $ag(n)$, iar ordinul minimal al lui $f(n)$ este $bh(n)$.*

Definiţia de mai sus este echivalentă cu următoarele:

I) Există $\limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = a$ dacă şi numai dacă sunt îndeplinite condiţiile:

   a) Pentru $\epsilon > 0$ există un rang $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, astfel încât $f(n) < (1+\epsilon)ag(n)$ pentru orice $n \geq N(\epsilon)$;

   b) Pentru $\epsilon > 0$ există o infinitate de numere n, astfel încât $f(n) > (1-\epsilon)ag(n)$.

II) Există $\liminf_{n\to\infty} \frac{f(n)}{h(n)} = b$ dacă şi numai dacă sunt îndeplinite condiţiile:

a) Pentru $\epsilon > 0$ există un rang $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, astfel încât $f(n) > (1-\epsilon)bh(n)$ pentru orice $n \geq N(\epsilon)$;

b) Pentru $\epsilon > 0$ există o infinitate de numere n, astfel încât $f(n) < (1+\epsilon)bh(n)$.

De exemplu, în lucrarea [**1**], avem

a) Pentru $\epsilon > 0$ există un rang $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, astfel încât $\tau(n) < n^{(1+\epsilon)\ln 2/\ln\ln n}$ pentru orice $n \geq N(\epsilon)$;

b) Pentru $\epsilon > 0$ există o infinitate de numere n, astfel încât $\tau(n) > n^{(1-\epsilon)\ln 2/\ln\ln n}$.

Cu alte cuvinte, aceste inegalităţi sunt echivalente cu relaţia $\limsup_{n\to\infty} \frac{\ln\tau(n)\ln\ln n}{\ln n} = \ln 2$.

Pentru a studia suma $\sum_{k=1}^{n} f(k)$, de obicei, schimbăm n cu un număr real arbitrar x; astfel, suma care trebuie calculată devine $\sum_{n\leq x} f(n)$, sumă care se numeşte *comportare asimptotică a lui* f. Scopul nostru este să determinăm comportarea acesteia ca o funcţie de x, mai ales când x este suficient de mare.

Referitor la studiul ordinului maximal şi al comportării asimptotice pentru funcţia $\tau^{(e)}$, în lucrarea [**55**], M. V. Subbarao arată că există relaţiile următoare:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\ln\tau^{(e)}(n)\ln\ln n}{\ln n} = \frac{\ln 2}{2}, \tag{1.1.2}$$

şi

$$\sum_{n\leq x} \tau^{(e)}(n) = Ax + O\left(x^{\frac{1}{2}}\ln x\right), \tag{1.1.3}$$

unde A este o constantă pozitivă.

În continuare ne ocupăm de căutarea altor proprietăţi, pe lângă cele tratate în diverse lucrări, ale funcţiei $\tau^{(e)}$ şi ale altor funcţii aritmetice care utilizează divizori exponenţiali. De aceea, analizăm legătura care există între numărul divizorilor lui n, numărul divizorilor unitari ai lui n şi numărul e-divizorilor lui n, într-o combinaţie de tipul celei de mai jos.

PROPOZIŢIA 1.1.1 (Minculete [[**21**], Theorem 2.1]). *Ecuaţia*

$$\tau(n) = \tau^{(e)}(n)\tau^*(n), \tag{1.1.4}$$

are soluţia $n = 1$ *şi o infinitate de soluţii de forma* $n = \prod_{\substack{p|n \\ a\in\{1,3\}}} p^a$.

Demonstraţie. Pentru $n = 1$ se observă imediat că ecuaţia este verificată. Din teorema fundamentală a aritmeticii avem $n = \prod_{p|n} p^{a_p}$, însă, pentru a simplifica scrierea, utilizăm $n = \prod_{p|n} p^a$.
Pentru $n = p^a$, unde p este un număr prim, ecuaţia devine $\tau(p^a) = \tau^{(e)}(p^a)\tau^*(p^a)$, care este echivalentă cu ecuaţia

$$\frac{a+1}{2} = \tau(a), \tag{1.1.5}$$

pentru $a \geq 1$.
Această ecuaţie atipică ne conduce la ideea căutarii unei margini, superioare sau inferioare, ca o funcţie de a, mai uşor de manevrat. În [**52**], Sierpinski arată că $\tau(a) < 2\sqrt{a}$ pentru orice $a \geq 1$, ceea ce înseamnă că ecuaţia (1.1.5) implică $a + 1 < 4\sqrt{a}$, de unde rezultă că $a \in (7 - 4\sqrt{3}, 7 + 4\sqrt{3}) \cap \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ..., 13\}$.
Înlocuind aceste valori în ecuaţia (1.1.5), se obţine $a \in \{1, 3\}$, iar ţinând cont de faptul că funcţiile $\tau, \tau^{(e)}$ şi τ^* sunt multiplicative avem

$$\tau(n) = \tau\left(\prod_{\substack{p|n \\ a\in\{1,3\}}} p^a\right) = \prod_{\substack{p|n \\ a\in\{1,3\}}} \tau(p^a) = \prod_{\substack{p|n \\ a\in\{1,3\}}} (a+1) =$$

$$= \prod_{\substack{p|n \\ a\in\{1,3\}}} 2\tau(a) = \tau^*\left(\prod_{\substack{p|n \\ a\in\{1,3\}}} p^a\right)\tau^{(e)}\left(\prod_{\substack{p|n \\ a\in\{1,3\}}} p^a\right) = \tau^*(n)\tau^{(e)}(n).$$

□

Apare inevitabil întrebarea:

Mai există şi ale soluţii de altă formă pentru această ecuaţie?

Răspunsul la această întrebare poate fi dat de studierea condiţiilor în care membrul stâng al ecuaţiei (1.1.4) este mai mare decât cel din dreapta şi invers. Prin urmare, vom obţine următoarea propoziţie:

PROPOZIŢIA 1.1.2 (Minculete [[**21**], Theorem 2.1]). *a) Există o infinitate de numere n, astfel încât să avem*

$$\tau(n) > \tau^{(e)}(n)\tau^*(n), \tag{1.1.6}$$

de forma $n = \prod_{p|n} p^a$, unde $a \notin \{2, 4, 6\}$ şi cel puţin un număr prim p din descompunerea lui n are exponentul diferit de 1 şi 3;
a) Există o infinitate de numere n, astfel încât să avem

$$\tau(n) < \tau^{(e)}(n)\tau^*(n), \tag{1.1.7}$$

de forma $n = \prod_{p|n} p^a$, *unde* $a \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ *şi cel puţin un număr prim* p *din descompunerea lui* n *are exponentul diferit de 1 şi 3.*

Demonstraţie. Pentru a dovedi aceste rezultate, studiem valorile lui a pentru care are loc inegalitatea $\frac{a+1}{2} > \tau(a)$, ideea plecând de la egalitatea (1.1.5).

Din inegalitatea lui Langford, [**48**], avem $\frac{a+1}{2} \geq \frac{\sigma(a)}{\tau(a)}$ pentru orice $a \geq 1$. Ţinând cont de relaţia (1.1.5), este suficient să analizăm în ce condiţii $\frac{\sigma(a)}{\tau(a)} \geq \tau(a)$, adică pentru ce valori ale lui a are loc inegalitatea $\sigma(a) \geq \tau^2(a)$.

G. Mincu şi L. Panaitopol studiază, în [**17**], ecuaţia $\sigma(a) = \tau^2(a)$, pentru care obţin soluţiile 1 şi 3. Cum vom putea utiliza acest rezultat în demersul nostru este uşor de văzut. În cadrul rezolvării acestei ecuaţii, se arată că $\frac{\sigma(a)}{\tau^2(a)} \geq \frac{13}{9} > 1$ pentru un număr impar $a \geq 5$, de unde deducem inegalitatea $\frac{a+1}{2} > \tau(a)$.

Pentru $a = 2^m$, cu $m \geq 4$, avem $\frac{\sigma(a)}{\tau^2(a)} > 1$, adică $\frac{a+1}{2} > \tau(a)$. Dacă $a \in \{2, 4, 8\}$, atunci avem $\frac{\sigma(a)}{\tau(a)} < \tau(a)$, însă pentru $a = 8$ rezultă $\tau(8) = 3 < \frac{9}{2}$, deci $\frac{a+1}{2} > \tau(a)$, iar pentru $a \in \{2, 4\}$ obţinem $\frac{a+1}{2} < \tau(a)$.

Mai rămâne de studiat cazul $a = 2^m \cdot 3$. Astfel, avem relaţia $\frac{\sigma(2^m \cdot 3)}{\tau^2(2^m \cdot 3)} = \frac{\sigma(2^m)}{\tau^2(2^m)} > 1$ pentru $m \geq 4$. Prin simple verificări, pentru $m \in \{1, 2, 3\}$, rezultă că doar pentru $a = 6$ avem $\frac{a+1}{2} < \tau(a)$.

Cu alte cuvinte, obţinem $\frac{a+1}{2} > \tau(a)$ pentru orice $a \neq 1, 2, 3, 4, 6$, iar pentru $a \in \{2, 4, 6\}$ rezultă $\frac{a+1}{2} < \tau(a)$.

În concluzie, dacă luăm $n = \prod_{p|n} p^a$, unde $a \notin \{2, 4, 6\}$ şi există cel puţin un număr prim p în descompunerea lui n cu exponentul diferit de 1 şi 3, atunci avem

$$\tau(n) > \tau^{(e)}(n)\tau^*(n).$$

Dacă luăm $n = \prod_{p|n} p^a$, unde $a \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ şi există ce puţin un număr prim p în descompunerea lui n cu exponentul diferit de 1 şi 3, atunci obţinem

$$\tau(n) < \tau^{(e)}(n)\tau^*(n).$$

□

OBSERVAŢIA 1.1.3 *Dacă vom combina cele două tipuri de forme ale lui n, atunci deducem faptul că există situaţii când $\tau(n) > \tau^{(e)}(n)\tau^*(n)$ şi situaţii când are loc inegalitatea inversă. De pildă, pentru $n = p^2q^5$ obţinem $\tau(n) = 18 > 16 = \tau^{(e)}(n)\tau^*(n)$, iar pentru $n = p_1^2p_2^2q^5$ obţinem $\tau(n) = 54 < 64 = \tau^{(e)}(n)\tau^*(n)$.*

Observăm că dacă d este un divizor exponenţial al lui n, atunci $\dfrac{n}{d}$ nu este neapărat divizor exponenţial al lui n. Un exemplu în acest sens este următorul: pentru $n = p_1p_2^2$ avem ca divizor exponenţial pe p_1p_2, dar $p_2 = \dfrac{n}{p_1p_2}$ nu este un divizor exponenţial al lui n. Această observaţie ne determină să facem o separare a divizorilor exponenţiali şi a celor neexponenţiali. Ca urmare, obţinem câteva inegalităţi între unele funcţii aritmetice pe care le evidenţiem în propoziţiile de mai jos.

PROPOZIŢIA 1.1.4 (Minculete [[**18**], Theorem 2.3]). *Pentru orice $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_r^{a_r} > 1$ are loc inegalitatea*

$$\tau(n) \geq \tau^{(e)}(n) + \frac{\tau(n)}{\omega(n)}\left(\frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_2+1} + ... + \frac{1}{a_r+1}\right), \tag{1.1.8}$$

unde numărul factorilor primi distincţi ai lui n este $\omega(n) = r$. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $n = p$ sau $n = p^2$, unde p este un număr prim.

Demonstraţie. Pentru a demonstra inegalitatea de mai sus, va trebui să o studiem pe mai multe cazuri, şi anume:
Cazul I. Dacă $n = p_1^2p_2^2...p_r^2$, atunci avem $\tau(n) = 3^r$ şi

$$\tau^{(e)}(n) = \tau(a_1) \cdot \tau(a_2) \cdot ... \cdot \tau(a_r) = \tau^r(2) = 2^r.$$

Prin urmare, inegalitatea (1.1.8) devine

$$3^r \geq 2^r + \frac{3^r}{r} \cdot \frac{r}{3} = 2^r + 3^{r-1},$$

adică $2 \cdot 3^{r-1} \geq 2^r$, ceea ce este adevărat. Egalitatea are loc pentru $r = 1$, adică pentru $n = p^2$, unde p este un număr prim.

Cazul II. Dacă $a_j \neq 2$ pentru orice $j \in \{1, 2, ..r\}$, şi $a_k = \min\{a_j | a_j \neq 2\}$, atunci $(a_k - 1) \nmid a_k$. Prin urmare, numărul natural

$$\frac{n}{p_1^{i_1} \cdot p_2^{i_2} \cdot ... \cdot p_{k-1}^{i_{k-1}} \cdot p_k \cdot p_{k+1}^{i_{k+1}} \cdot ... \cdot p_r^{i_r}} = p_1^{a_1-i_1} \cdot p_2^{a_2-i_2} \cdot ... \cdot p_{k-1}^{a_{k-1}-i_{k-1}} \cdot p_k^{a_k-1} \cdot ... \cdot p_r^{a_r-i_r}$$

nu este divizor exponenţial al lui n pentru orice $i_j = \overline{0, a_j}$, oricare ar fi $j \in \{1, ..., r\} \setminus \{k\}$.
Aşadar, vom avea $\dfrac{\tau(n)}{a_k + 1}$ divizori neexponenţiali de acest tip.
Ca urmare, rezultă relaţia

$$\tau(n) = \sum_{d|_{(e)}n} 1 + \sum_{d\nmid_{(e)}n} 1 = \tau^{(e)}(n) + \sum_{d\nmid_{(e)}n} 1 \geq \tau^{(e)}(n) + \frac{\tau(n)}{a_k + 1},$$

deci

$$\tau(n) \geq \tau^{(e)}(n) + \frac{\tau(n)}{a_k + 1} = \tau^{(e)}(n) + \frac{\tau(n)}{\omega(n)} \cdot \frac{\omega(n)}{a_k + 1}.$$

Dar $\dfrac{\omega(n)}{a_k + 1} \geq \dfrac{1}{a_1 + 1} + \dfrac{1}{a_2 + 1} + ... + \dfrac{1}{a_r + 1}$, ceea ce înseamnă că inegalitatea din enunţ este adevărată.

Cazul III. Dacă există cel puţin un $a_j \neq 2$ şi cel puţin un $a_l = 2$, unde $j, l \in \{1, 2, ..., r\}$, atunci, fără a micşora generalitatea, renumerotăm factorii primi din descompunerea lui n şi obţinem $n = p_1^2 p_2^2 ... p_s^2 p_{s+1}^{a_{s+1}} ... p_r^{a_r}$, cu $a_{s+1}, a_{s+2}, ..., a_r \neq 2$.
Fie $a_k = \min\{a_j | j \in \{s+1, ..., r\}\}$. Atunci $(a_k - 1) \nmid a_k$ pentru că $a_k \neq 2$.
Prin urmare, oricare ar fi $j \in \{1, .., r\} \setminus \{k\}$ numărul natural

$$\frac{n}{p_1^{i_1} \cdot p_2^{i_2} \cdot ... \cdot p_{k-1}^{i_{k-1}} \cdot p_k \cdot p_{k+1}^{i_{k+1}} \cdot ... \cdot p_r^{i_r}} = p_1^{a_1 - i_1} \cdot p_2^{a_2 - i_2} \cdot ... \cdot p_{k-1}^{a_{k-1} - i_{k-1}} \cdot p_k^{a_k - 1} \cdot p_{k+1}^{a_{k+1} - i_{k+1}} \cdot ... \cdot p_r^{a_r - i_r}$$

nu este divizor exponenţial al lui n pentru orice $i_j = \overline{0, a_j}$.
Astfel, vom avea $\dfrac{\tau(n)}{a_k + 1}$ divizori neexponenţiali de acest tip. Divizorii lui n de forma $\dfrac{n}{p_1^2 p_2^{i_2} \cdot ... \cdot p_r^{i_r}} = p_2^{2 - i_2} \cdot ... \cdot p_s^{2 - i_s} \cdot p_{s+1}^{a_{s+1} - i_{s+1}} \cdot ... \cdot p_r^{a_r - i_r}$, $(\forall)\ i_2, ..., i_s \in \{0, 1, 2\}$ şi $i_j = \overline{0, a_j}$, $(\forall)\ j \in \{s+1, ..., r\}$, sunt divizori neexponenţiali ai lui n diferiţi de cei de mai sus. Aceştia sunt în număr de $\dfrac{\tau(n)}{3}$.
Aşadar, avem relaţia

$$\tau(n) = \sum_{d|_{(e)}n} 1 + \sum_{d\nmid_{(e)}n} 1 = \tau^{(e)}(n) + \sum_{d\nmid_{(e)}1} \geq \tau^{(e)}(n) + \frac{\tau(n)}{a_k + 1} + \frac{\tau(n)}{3},$$

deci

$$\tau(n) \geq \tau^{(e)}(n) + \frac{\tau(n)}{\omega(n)} \left(\frac{\omega(n)}{a_k + 1} + \frac{\omega(n)}{3} \right) > \tau^{(e)}(n) + \frac{\tau(n)}{\omega(n)} \left(\frac{r - s}{a_k + 1} + \frac{s}{3} \right) \geq$$

$$\geq \tau^{(e)}(n) + \frac{\tau(n)}{\omega(n)} \left(\frac{1}{a_{s+1} + 1} + \frac{1}{a_{s+2} + 1} + ... + \frac{1}{a_r + 1} + \frac{1}{2 + 1} + ... + \frac{1}{2 + 1} \right) =$$

$$= \tau^{(e)}(n) + \frac{\tau(n)}{\omega(n)} \left(\frac{1}{a_1 + 1} + \frac{1}{a_2 + 1} + ... + \frac{1}{a_r + 1} \right),$$

unde $\omega(n) = r$, ceea ce înseamnă că inegalitatea din enunţ este adevărată.

□

Studiind câteva inegalităţi aritmetice de tip aditiv, am observat că se repetă un anumit mod de abordare a acestora. Astfel, am obţinut următorul rezultat general:

PROPOZIŢIA 1.1.5 *Fie funcţiile multiplicative pozitive f, g, h, q care satisfac inegalităţile $h(n) \geq g(n)$ şi $q(n) \geq g(n)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, iar pentru $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$, avem relaţiile*

$$f(n_1) + g(n_1) \geq h(n_1) + q(n_1) \quad \text{şi } f(n_2) + g(n_2) \geq h(n_2) + q(n_2).$$

Dacă $(n_1, n_2) = 1$, atunci are loc inegalitatea

$$f(n_1 n_2) + g(n_1 n_2) \geq h(n_1 n_2) + q(n_1 n_2).$$

Demonstraţie. Este uşor de văzut că, utilizând multiplicativitatea funcţiilor f, g, h şi q, rezultă următoarele:

$$f(n_1 \cdot n_2) = f(n_1) \cdot f(n_2) \geq (h(n_1) + q(n_1) - g(n_1))(h(n_2) + q(n_2) - g(n_2)) =$$

$$= h(n_1)h(n_2) + h(n_1)(q(n_2) - g(n_2)) + q(n_1)q(n_2) + q(n_1)(h(n_2) - g(n_2)) - g(n_1)h(n_2) -$$

$$-g(n_1)q(n_2) + g(n_1)g(n_2).$$

Dar $h(n_1) \geq g(n_1)$ şi $q(n_1) \geq g(n_1)$, ceea ce înseamnă că inegalitatea de mai sus devine

$$f(n_1 \cdot n_2) \geq h(n_1)h(n_2) + g(n_1)(q(n_2) - g(n_2)) + q(n_1)q(n_2) +$$

$$+g(n_1)(h(n_2) - g(n_2)) - g(n_1)h(n_2) - g(n_1)q(n_2) + g(n_1)g(n_2) =$$

$$= h(n_1 n_2) + q(n_1 n_2) - g(n_1 n_2),$$

adică ceea ce trebuia demonstrat.

□

O consecinţă a propozitiilor anterioare, care stabileşte o conexiune între numărul divizorilor lui n, numărul divizorilor unitari ai lui n şi numărul e-divizorilor lui n, este următoarea:

PROPOZIŢIA 1.1.6 (Minculete [[**24**], Theorem 3.6]). *Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, are loc următoarea inegalitate:*

$$\tau(n) + 1 \geq \tau^{(e)}(n) + \tau^*(n). \tag{1.1.9}$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $n = 1$ sau $n = p^2$, unde p este un număr prim.

Demonstraţia I. Dacă $n = 1$, atunci obţinem $\tau(1) + 1 = 2 = \tau^{(e)}(1) + \tau^*(1)$.
Conform propoziţiei 1.1.2, dacă luăm $n = \prod_{p|n} p^a$, unde $a \notin \{2, 4, 6\}$ avem

$$\tau(n) \geq \tau^{(e)}(n)\tau^*(n).$$

Aceasta implică $\tau(n) + 1 \geq \tau^{(e)}(n) \cdot \tau^*(n) + 1 \geq \tau^{(e)}(n) + \tau^*(n)$, deoarece a doua inegalitate este adevărată, ţinând cont că $(\tau^{(e)}(n) - 1) \cdot (\tau^*(n) - 1) \geq 0$ şi fiecare dintre funcţiile aritmetice implicate au valorile mai mari decât 1.
Rămâne să analizăm cazul când $a \in \{2, 4, 6\}$. Prin urmare, pentru $n = p^2$ obţinem $\tau(p^2) + 1 = 4 = \tau^{(e)}(p^2) + \tau^*(p^2)$. În cazul $n = p^3$, deducem relaţia $\tau(p^3) + 1 = 5 > 4 = \tau^{(e)}(p^3) + \tau^*(p^3)$, iar pentru $n = p^4$ obţinem $\tau(p^6) + 1 = 8 > 6 = \tau^{(e)}(p^6) + \tau^*(p^6)$. În concluzie, utilizând propoziţia 1.1.5, rezultă că $\tau(n) + 1 \geq \tau^{(e)}(n) + \tau^*(n)$ pentru orice $n = \prod_{p|n} p^a$.
În plus, din această demonstraţie, sesizăm că în relaţia (1.1.9) egalitatea are loc pentru $n = 1$ şi pentru orice $n = p^2$, unde p este un număr prim.

Demonstraţia II. Dacă $n = 1$, atunci obţinem $\tau(1) + 1 = 2 = \tau^{(e)}(1) + \tau^*(1)$. Fie $n > 1$. Pentru a demonstra inegalitatea de mai sus va trebui să o studiem pe mai multe cazuri, şi anume:
Cazul I. Dacă $n = p_1^2 p_2^2 ... p_r^2$, atunci $\tau(n) = 3^r$ şi

$$\tau^{(e)}(n) = \tau(a_1) \cdot \tau(a_2) \cdot ... \cdot \tau(a_r) = \tau^r(2) = 2^r = \tau^*(n),$$

ceea ce înseamnă că inegalitatea (1.1.9) este echivalentă cu inegalitatea $3^r + 1 \geq 2 \cdot 2^r$, care este adevărată datorită utilizării inegalităţii lui Jensen, adică

$$\frac{3^r + 1}{2} \geq \left(\frac{3 + 1}{2}\right)^r = 2^r.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $r = 1$.
Cazul II. Dacă $a_k \neq 2,\ (\forall)\ k = \overline{1, r}$, atunci

$$\frac{n}{p_1}, \frac{n}{p_2}, ..., \frac{n}{p_r}, \frac{n}{p_1 p_2}, ..., \frac{n}{p_i p_j}, ..., \frac{n}{p_i p_j p_k}, ..., \frac{n}{p_1 p_2 ... p_r}$$

sunt divizori neexponenţiali ai lui n, deci aceştia sunt în număr de $2^r - 1$; ca atare, avem inegalitatea

$$\tau(n) = \sum_{d|_{(e)}n} 1 + \sum_{d\nmid_{(e)}n} 1 = \tau^{(e)}(n) + \sum_{d\nmid_{(e)}n} 1 \geq \tau^{(e)}(n) + 2^r - 1,$$

deci

$$\tau(n) \geq \tau^{(e)}(n) + 2^r - 1 \text{ sau } \tau(n) + 1 \geq \tau^{(e)}(n) + \tau^*(n).$$

Cazul III. Dacă există cel puţin un $a_k \neq 2$ şi cel puţin un $a_j = 2$, unde $j, k \in \{1, 2, ..., r\}$, atunci, fără a micşora generalitatea, renumerotăm factorii primi din descompunerea lui n şi obţinem

$$n = p_1^2 p_2^2 ... p_s^2 p_{s+1}^{a_{s+1}} ... p_r^{a_r}, \quad \text{cu } a_{s+1}, a_{s+2}, ..., a_r \neq 2.$$

Prin urmare, scriem $n = n_1 \cdot n_2$, unde $n_1 = p_1^2 p_2^2 ... p_s^2$ şi $n_2 = p_{s+1}^{a_{s+1}} ... p_r^{a_r}$, ceea ce înseamnă că $(n_1, n_2) = 1$. Aplicând propoziţia 1.1.5 pentru $f = \tau,\ g = 1,\ h = \tau^{(e)}$ şi $q = \tau^*$, demonstraţia propoziţiei este încheiată.

□

1.2 Suma e-divizorilor unui număr natural

Fie $\sigma^{(e)}(n)$ suma divizorilor exponenţiali ai lui n. Prin convenţie, 1 este un divizor exponenţial al său, adică $\sigma^{(e)}(1) = 1$. De exemplu, dacă p este un număr prim, atunci divizorii exponenţiali ai lui p^{10} sunt p, p^2, p^5 şi p^{10}, deci

$$\sigma^{(e)}(p^{10}) = p + p^2 + p^5 + p^{10}.$$

De asemenea observăm că dacă n este un număr natural liber de pătrate, atunci avem $\sigma^{(e)}(n) = n$. Este uşor de văzut că funcţia $\sigma^{(e)}(n) = \sum_{d|_{(e)}n} d$ este multiplicativă şi că are loc egalitatea

$$\sigma^{(e)}(n) = \prod_{i=1}^{r} \sigma^{(e)}(p_i^{a_i}) = \prod_{i=1}^{r} \left(\sum_{b_i | a_i} p_i^{b_i} \right). \tag{1.2.1}$$

În [[**54**], p. 466], E. G. Straus şi M. V. Subbarao au obţinut câteva rezultate referitoare la numerele *e-perfecte*. Reamintim că un număr n este un număr *e-perfect* dacă $\sigma^{(e)}(n) = 2n$. Ei arată că nu există numere e-perfecte impare şi că mulţimea $\left\{ \dfrac{\sigma^{(e)}(n)}{n} \right\}$ este densă în intervalul $[1, \infty)$.

Observăm că, dacă m este un număr liber de pătrate, iar n este un număr e-perfect astfel încât $(m, n) = 1$, atunci mn este e-perfect, deoarece

$$\sigma^{(e)}(m \cdot n) = \sigma^{(e)}(m) \cdot \sigma^{(e)}(n) = m \cdot 2n = 2mn.$$

Aceasta arată că există o infinitate de numere e-perfecte, deoarece primul număr e-perfect este 36, iar $36p$ este e-perfect, dacă p este un număr prim mai mare sau egal cu 5.

1. Funcţii aritmetice cu e-divizori

Câteva rezultate privind funcţia $\sigma^{(e)}$ sunt date de J. Fabrykowski şi M. V. Subbarao în lucrarea [[**9**], Theorem 2.1, Theorem 3.1]) şi arată că există relaţiile următoare:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sigma^{(e)}(n)}{e^{\gamma} n \ln\ln n} = \frac{6}{\pi^2}, \tag{1.2.2}$$

şi

$$\sum_{n\le x} \sigma^{(e)}(n) = Bx^2 + O(x^{1+\epsilon}), \tag{1.2.3}$$

unde B este o constantă $\approx 0,568285$, iar γ este constanta lui Euler.

LEMA 1.2.1 (Kolenick [[**14**], Lemma 2.1]) *Pentru orice număr prim p şi pentru orice $a \ge 2$, avem*

$$\frac{\sigma^{(e)}(p^a)}{p^a} \le 1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} \text{ pentru } a \ge 3$$

şi

$$\frac{\sigma^{(e)}(p^a)}{p^a} = 1 + \frac{1}{p} \text{ pentru } a = 2.$$

Pentru $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_r^{a_r}$, studiem cum influenţează exponenţii $a_i,\ i = \overline{1,r}$, natura lui n de număr e-perfect. În acest studiu, avem nevoie de următoarea propoziţie:

PROPOZIŢIA 1.2.2 (Minculete [[**23**], Theorem 2]). *Pentru orice $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_r^{a_r}$ cu $a_i \ne 2,\ (\forall)\ i = \overline{1,r}$, avem relaţiile următoare:*

$$\sigma^{(e)}(n) \le \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(4)\zeta(6)} n \tag{1.2.4}$$

şi

$$\sigma^{(e)}(n) \le \frac{9}{5} n. \tag{1.2.5}$$

Demonstraţie. Dacă $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_r^{a_r}$ cu $a_i \ne 2,\ (\forall)\ i = \overline{1,r}$, atunci $a_i = 1$ sau $a_i \ge 3$.
Prin urmare, n are următoarea formă canonică: $n = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_s \cdot p_{s+1}^{a_{s+1}} \cdot ... \cdot p_r^{a_r}$. Deci

$$\frac{\sigma^{(e)}(n)}{n} = \prod_{i=1}^{r} \frac{\sigma^{(e)}(p_i^{a_i})}{p_i^{a_i}} = \frac{\sigma^{(e)}(p_1)}{p_1} \cdot ... \cdot \frac{\sigma^{(e)}(p_s)}{p_s} \cdot \prod_{i=s+1}^{r} \frac{\sigma^{(e)}(p_i^{a_i})}{p_i^{a_i}} = \prod_{i=s+1}^{r} \frac{\sigma^{(e)}(p_i^{a_i})}{p_i^{a_i}},$$

deoarece $\sigma^{(e)}(p_i) = p_i$, pentru orice $1 \le i \le s$.

Aplicăm lema 1.2.1 şi rezultă că pentru orice număr prim p şi orice număr natural $a \ge 3$, avem

$$\frac{\sigma^{(e)}(p^a)}{p^a} \le 1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3},$$

deci

$$\frac{\sigma^{(e)}(n)}{n}=\prod_{i=s+1}^{r}\frac{\sigma^{(e)}(p_i^{a_i})}{p_i^{a_i}}\leq\prod_{i=s+1}^{r}\left(1+\frac{1}{p_i^2}+\frac{1}{p_i^3}\right)\leq\prod_{i=s+1}^{r}\left(1+\frac{1}{p_i^2}\right)\left(1+\frac{1}{p_i^3}\right)\leq$$

$$\leq\prod_{p\ prim}\left(1+\frac{1}{p^2}\right)\left(1+\frac{1}{p^3}\right)=\frac{\prod\limits_{p\ prim}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p^3}\right)^{-1}}{\prod\limits_{p\ prim}\left(1-\frac{1}{p^4}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p^6}\right)^{-1}}=\frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(4)\zeta(6)}.$$

Aşadar, obţinem inegalitatea

$$\frac{\sigma^{(e)}(n)}{n}\leq\frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(4)\zeta(6)},$$

ceea ce înseamnă că

$$\sigma^{(e)}(n)\leq\frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(4)\zeta(6)}n.$$

Dar, avem următoarele egalităţi:

$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6},\ \zeta(3)=1,2020569032...,\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}\text{ şi }\zeta(6)=\frac{\pi^6}{945},$$

prin urmare

$$\frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(4)\zeta(6)}=1,795763...\leq\frac{9}{5},$$

adică

$$\sigma^{(e)}(n)\leq\frac{9}{5}n.$$

□

COROLARUL 1.2.3 (Minculete [[**23**], Corollary 2.1]). *Dacă $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_r^{a_r}$ este un număr e-perfect, atunci cel puţin un exponent a_i este egal cu 2.*

Demonstraţie. Presupunem prin absurd că numărul $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_r^{a_r}$, cu $a_i\neq 2$ pentru orice $1\leq i\leq r$, este un număr e-perfect, deci $\sigma^{(e)}(n)=2n$. Aplicând propoziţia 1.2.3 avem $\sigma^{(e)}(n)\leq\frac{9}{5}n<2n$, deci $\sigma^{(e)}(n)<2n$, ceea ce înseamnă că am obţinut o contradicţie. În consecinţă, nu există niciun număr e-perfect de tipul $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_r^{a_r}$ cu $a_i\neq 2$ pentru orice $1\leq i\leq r$.

□

În continuare prezentăm un rezultat pe care-l dovedim utilizând propoziţia 1.2.2. Acesta caracterizează numerele e-perfecte.

TEOREMA 1.2.4 (Straus şi Subbarao [[**54**], Theorem 2.2]). *Pentru orice număr întreg $k > 1$, ecuaţia $\sigma^{(e)} = kn$ nu are nicio soluţie n impară.*

Demonstraţie. O ecuaţie $\sigma^{(e)}(n) = kn$ pentru care $n = n_1 n_2$, unde n_1 este liber de pătrate, iar $n_2 = p_1^{a_1}...p_r^{a_r}$, cu $a_i \geq 2,\ (\forall)\ i \in \{1, ..., r\}$, se reduce la rezolvarea ecuaţiei $\sigma^{(e)}(n_2) = kn_2$.
Presupunem prin absurd că 2^t este un divizor unitar al lui k şi $\sigma^{(e)}(n) = kn$ ($k = 2^t v$ şi v este un număr impar), iar n, o soluţie impară a acestei ecuaţii, unde $n = p_1^{a_1}...p_r^{a_r}$, cu $p_i \geq 3,\ a_i \geq 2$, oricare ar fi $i \in \{1, ..., r\}$. Deoarece funcţia $\sigma^{(e)}$ este multiplicativă, rezultă

$$\sigma^{(e)}(p_1^{a_1})...\sigma^{(e)}(p_r^{a_r}) = 2^t v p_1^{a_1}...p_r^{a_r},$$

ceea ce înseamnă că cel mult t termeni ai produsului din membrul stâng sunt pari şi restul sunt impari.
Fie o reordonare a numerelor prime care intră în descompunerea lui n, dată astfel $n = p_1^{a_1}...p_u^{a_u} p_{u+1}^{a_{u+1}}...p_r^{a_r}$, unde $\sigma^{(e)}(p_i^{a_i})$ este par pentru $i = \overline{1, u},\ u \leq t$, şi $\sigma^{(e)}(p_j^{a_j})$ este impar pentru $j = \overline{u+1, r}$.
Cum $\sigma^{(e)}(p_j^{a_j})$ este impar, fiind sumă de numere impare ($p_j \geq 3$), trebuie ca numărul de divizori exponenţiali ai lui $p_j^{a_j}$ să fie impar, adică $\tau^{(e)}(p_j^{a_j}) = \tau(a_j)$ este impar. Aşadar pentru $a_j = \alpha_1^{\beta_1}...\alpha_w^{\beta_w}$, avem $\tau(a_j) = (\beta_1+1)...(\beta_w+1)$, ceea ce înseamnă că toţi termenii $\beta_i,\ (\forall)\ i = \overline{1, w}$, trebuie să fie pari, adică $a_j = \alpha_1^{2\gamma_1}...\alpha_w^{2\gamma_w} = (\alpha_1^{\gamma_1}...\alpha_w^{\gamma_w})^2$. Cu alte cuvinte toţi exponenţii $a_j,\ j = \overline{u+1, r}$, sunt pătrate perfecte ≥ 2, deci $a_j \geq 4,\ (\forall)\ j = \overline{u+1, r}$.
Dacă a_j este un pătrat perfect ≥ 4, atunci cel mai mare divizor propriu al lui a_j este cel mult $\left[\frac{a_j}{2}\right]$. Aceasta înseamnă că avem

$$\sigma^{(e)}(p_j^{a_j}) \leq p_j + ... + p_j^{\left[\frac{a_j}{2}\right]} + p_j^{a_j} \leq p_j^{a_j-3} + p_j^{a_j-2} + p_j^{a_j},$$

ceea ce implică inegalitatea

$$\frac{\sigma^{(e)}(p_j^{a_j})}{p_j^{a_j}} \leq \frac{\sigma^{(e)}(p_j^4)}{p_j^4} \text{ pentru orice } j = \overline{u+1, r}.$$

În cazul în care $\sigma^{(e)}(p_i^{a_i})$ este par, avem relaţia

$$\sigma^{(e)}(p_i^{a_i}) = p_i + ... + p_i^{a_i} \leq p_i^{a_i-1} + p_i^{a_i},$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $a_i = 2$, de unde rezultă

$$\frac{\sigma^{(e)}(p_i^{a_i})}{p_i^{a_i}} \leq \frac{\sigma^{(e)}(p_i^2)}{p_i^2} \text{ pentru orice } i = \overline{1, u}.$$

Prin urmare, cumulând rezultatele anterioare, avem

$$k=\frac{\sigma^{(e)}(n)}{n}=\prod_{i=1}^{u}\frac{\sigma^{(e)}(p_i^{a_i})}{p_i^{a_i}}\prod_{j=u+1}^{r}\frac{\sigma^{(e)}(p_j^{a_j})}{p_j^{a_j}}\leq\prod_{i=1}^{u}\frac{\sigma^{(e)}(p_i^{2})}{p_i^{2}}\prod_{j=u+1}^{r}\frac{\sigma^{(e)}(p_j^{4})}{p_j^{4}}=$$

$$=\prod_{i=1}^{u}\left(1+\frac{1}{p_i}\right)\prod_{j=u+1}^{r}\left(1+\frac{1}{p_j^2}+\frac{1}{p_j^3}\right)\leq\prod_{i=1}^{u}\left(1+\frac{1}{p_i}\right)\prod_{j=u+1}^{r}\left(1+\frac{1}{p_j^2}\right)\left(1+\frac{1}{p_j^3}\right)<$$

$$<\prod_{i=1}^{u}\left(1+\frac{1}{p_i}\right)\prod_{\substack{p\ prim\\ p\neq 2,\ p_1,\ldots,p_u}}\left(1+\frac{1}{p^2}\right)\left(1+\frac{1}{p^3}\right). \tag{1.2.6}$$

Acum utilizăm relaţia lui Euler (vezi e.g. [**38**]), dată pentru funcţia lui Riemann, $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$, unde $s=a+ib$, cu $a>1$, astfel:

$$\prod_{p\ prim}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)=\frac{1}{\zeta(s)}.$$

Facem unele calcule, încercând să punem în evidenţă relaţia lui Euler, astfel:

$$\prod_{\substack{p\ prim\\ p\neq 2,p_1,\ldots,p_u}}\left(1+\frac{1}{p^2}\right)\left(1+\frac{1}{p^3}\right)=\prod_{p\ prim}\left(1+\frac{1}{p^2}\right)\prod_{p\ prim}\left(1+\frac{1}{p^3}\right)\frac{1}{\prod_{p=2,p_1,\ldots,p_u}\left(1+\frac{1}{p^2}\right)\left(1+\frac{1}{p^3}\right)}=$$

$$=\frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(4)\zeta(6)}\frac{1}{\prod_{p=2,p_1,\ldots,p_u}\left(1+\frac{1}{p^2}\right)\left(1+\frac{1}{p^3}\right)}<\frac{9}{5}\frac{4}{5}\frac{8}{9}\frac{\prod_{p=p_1,\ldots,p_u}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)}{\prod_{p=p_1,\ldots,p_u}\left(1+\frac{1}{p^2}\right)\left(1+\frac{1}{p^3}\right)\left(1-\frac{1}{p^2}\right)}<$$

$$<\frac{32}{25}\prod_{p=p_1,\ldots,p_u}\left(1-\frac{1}{p^2}\right), \tag{1.2.7}$$

deoarece utilizăm inegalitatea $\left(1+\frac{1}{p^2}\right)\left(1+\frac{1}{p^3}\right)\left(1-\frac{1}{p^2}\right)>1$ şi relaţia (1.2.4). Din relaţiile (1.2.6) şi (1.2.7) deducem inegalitatea

$$k<\frac{32}{25}\prod_{i=1}^{u}\left(1+\frac{1}{p_i}\right)\left(1-\frac{1}{p_i^2}\right)<\frac{32}{25}\left(\frac{32}{27}\right)^u<2^u\leq 2^t$$

pentru $1\leq u\leq t$, ceea ce reprezintă o contradicţie.

Mai sus am utilizat faptul că funcţia $f:\left(0,\frac{1}{3}\right]\to\mathbb{R}$, definită prin $f(x)=(1+x)(1-x^2)$, este

crescătoare pe intervalul $\left(0, \frac{1}{3}\right]$, deci $f\left(\frac{1}{p}\right) \leq f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{32}{27}$.

□

OBSERVAŢIA 1.2.5 *În [**54**], E. G. Straus şi M. V. Subbarao numesc un număr n număr e-multiperfect dacă $\sigma^{(e)}(n) = kn$ pentru $k > 2$. W. Aiello, G. E. Hardy şi M. V. Subbarao (vezi e.g [[**48**], pag. 52]) au arătat că dacă n este un număr e-multiperfect, atunci $n > 2 \cdot 10^7$ pentru $k = 3; n > 10^{85}$ pentru $k = 4; n > 10^{320}$ pentru $k = 5; n > 10^{1210}$ pentru $k = 6$.*

Se observă uşor că cel mai mic divizor exponenţial al lui n este $\gamma(n)$ şi cel mai mare este n. Ca urmare, avem $\gamma(n) \cdot s \leq d_1 + d_2 + ... + d_s = \sigma^{(e)}(n) \leq n \cdot s$ pentru orice $n \geq 1$, unde $s = \tau^{(e)}(n)$, deci

$$\gamma(n) \leq \frac{\sigma^{(e)}(n)}{\tau^{(e)}(n)} \leq n. \tag{1.2.8}$$

Dacă $T^{(e)}(n)$ este produsul tuturor divizorilor exponenţiali ai lui n, atunci, studiind o proprietate a acestuia, am obţinut o altă margine inferioară pentru raportul $\frac{\sigma^{(e)}(n)}{\tau^{(e)}(n)}$, margine pe care o descriem mai jos.

PROPOZIŢIA 1.2.6 (Minculete [[**23**], Theorem 3]). *Pentru orice $n \geq 1$, au loc următoarele inegalităţi:*

$$[\tau(n)]^{\tau^{(e)}(n)} \leq T^{(e)}(n) \leq n^{\frac{\tau^{(e)}(n)}{2}} [\gamma(n)]^{\frac{\tau^{(e)}(n)}{2}}, \ n \neq 4, \tag{1.2.9}$$

$$\left[\frac{\sigma^{(e)}(n)}{\tau^{(e)}(n)}\right]^{\tau^{(e)}(n)} \geq T^{(e)}(n) \tag{1.2.10}$$

şi

$$\tau(n) \leq \frac{\sigma^{(e)}(n)}{\tau^{(e)}(n)}. \tag{1.2.11}$$

Egalitatea are loc în relaţia (1.2.11) *dacă şi numai dacă $n = 1$ sau $n = 4$.*

Demonstraţie. Pentru $n = 1$ obţinem egalitate în relaţiile de mai sus.
Pentru $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_r^{a_r} > 1$ avem

$$T^{(e)}(n) = \prod_{d|_{(e)}n} d = p_1^{\sigma(a_1)\tau(a_2)\cdot ...\cdot \tau(a_r)} \cdot p_2^{\sigma(a_2)\tau(a_1)\cdot ...\cdot \tau(a_r)} \cdot ... \cdot p_r^{\sigma(a_r)\tau(a_1)\cdot ...\cdot \tau(a_{r-1})} =$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{r} p_i^{\frac{\sigma(a_i)}{\tau(a_i)}}\right]^{\tau^{(e)}(n)}.$$

Din [[**42**], p. 105; [**48**], p. 86] utilizăm următoarea inegalitate:

$$\sqrt{n} \leq \frac{\sigma(n)}{\tau(n)},\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*, \tag{1.2.12}$$

datorată lui S. Sivaramakrishnan şi C. S. Venkataraman. Tot în [[**42**], p. 105; [**48**], p. 86] avem inegalitatea lui E. S. Langford, care arată că

$$\frac{\sigma(n)}{\tau(n)} \leq \frac{n+1}{2},\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*. \tag{1.2.13}$$

Prin combinarea inegalităţilor (1.2.12) şi (1.2.13) deducem inegalitatea dublă următoare:

$$\sqrt{n} \leq \frac{\sigma(n)}{\tau(n)} \leq \frac{n+1}{2},\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Prin urmare, obţinem

$$p_i^{\sqrt{a_i}} \leq p_i^{\frac{\sigma(a_i)}{\tau(a_i)}} \leq p_i^{\frac{a_i+1}{2}},\ (\forall)\ i = \overline{1,r}.$$

Trecând la produs pentru toate numerele prime din descompunerea lui n, avem

$$\prod_{i=1}^{r} p_i^{\sqrt{a_i}} \leq \prod_{i=1}^{r} p_i^{\frac{\sigma(a_i)}{\tau(a_i)}} \leq \prod_{i=1}^{r} p_i^{\frac{a_i+1}{2}}. \tag{1.2.14}$$

Prin ridicare la puterea $\tau^{(e)}(n)$ în relaţia (1.2.14) obţinem inegalitatea dublă

$$\left[\prod_{i=1}^{r} p_i^{\sqrt{a_i}}\right]^{\tau^{(e)}(n)} \leq \left[\prod_{i=1}^{r} p_i^{\frac{\sigma(a_i)}{\tau(a_i)}}\right]^{\tau^{(e)}(n)} \leq \left[\prod_{i=1}^{r} p_i^{\frac{a_i+1}{2}}\right]^{\tau^{(e)}(n)}.$$

Cum

$$\left[\prod_{i=1}^{r} p_i^{\frac{a_i+1}{2}}\right]^{\tau^{(e)}(n)} = \left(\prod_{i=1}^{r} p_i^{a_i}\right)^{\frac{\tau^{(e)}(n)}{2}} \left(\prod_{i=1}^{r} p_i\right)^{\frac{\tau^{(e)}(n)}{2}} = n^{\frac{\tau^{(e)}(n)}{2}} [\gamma(n)]^{\frac{\tau^{(e)}(n)}{2}},$$

se dovedeşte a doua parte a inegalităţii (1.2.9).

Demonstrăm că pentru orice $n \geq 1$, $n \neq 4$, are loc inegalitatea $[\tau(n)]^{\tau^{(e)}(n)} \leq T^{(e)}(n)$ care este echivalentă cu inegalitatea

$$\prod_{i=1}^{r} (a_i + 1) \leq \prod_{i=1}^{r} p_i^{\frac{\sigma(a_i)}{\tau(a_i)}}. \tag{1.2.15}$$

Dacă n este un număr impar, atunci $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_r^{a_r}$ cu $p_i \geq 3,\ (\forall)\ i = \overline{1,r}$.
Este uşor de văzut că

$$3^x > x^2 + 1,\ (\forall)\ x \geq 1,$$

ceea ce înseamnă că

$$p_i^{\sqrt{a_i}} \geq 3^{\sqrt{a_i}} > a_i + 1, \ (\forall)\ i = \overline{1,r},$$

deci utilizând inegalitatea (1.2.12), obţinem

$$\prod_{i=1}^{r} p_i^{\frac{\sigma(a_i)}{\tau(a_i)}} \geq \prod_{i=1}^{r} p_i^{\sqrt{a_i}} \geq \prod_{i=1}^{r}(a_i+1) = \tau(n).$$

Dacă n este un număr par de forma $n = 2^a$ cu $a \neq 2$, atunci rezultă inegalitatea

$$2^{\frac{\sigma(a)}{\tau(a)}} \geq a + 1, \ (\forall)\ a \geq 1. \tag{1.2.16}$$

Aceasta se demonstrează uşor ţinând cont de inegalitatea (1.2.12) şi de faptul că $2^{\sqrt{a}} \geq a+1$ pentru $a \geq 19$. Pentru a dovedi inegalitatea (1.2.16) în cazurile $a \in \{1,3,4,5,...,18\}$ facem verificări directe.

Dacă n este un număr par de forma $n = 2^a \prod_{i=1}^{r-1} p_i^{a_i}$ cu $a \neq 2$ şi $p_i \geq 3$, atunci $T^{(e)}(n) = \left[2^{\frac{\sigma(a)}{\tau(a)}} \prod_{i=1}^{r-1} p_i^{\frac{\sigma(a_i)}{\tau(a_i)}}\right]^{\tau^{(e)}(n)}$.

Din relaţia (1.2.16) avem $2^{\frac{\sigma(a)}{\tau(a)}} \geq a+1$, iar prin utilizarea relaţiei (1.2.15), care este valabilă pentru numere prime impare, rezultă inegalitatea

$$2^{\frac{\sigma(a)}{\tau(a)}} \prod_{i=1}^{r-1} p_i^{\frac{\sigma(a_i)}{\tau(a_i)}} \geq (a+1)\prod_{i=1}^{r-1}(a_i+1) = \tau(n),$$

deci relaţia (1.2.9) este adevărată.

Observăm că pentru $n = 4$, relaţia (1.2.9) nu se verifică, deoarece

$$[\tau(4)]^{\tau^{(e)}(4)} = 3^2 > 8 = T^{(e)}(4).$$

Pentru $n = 2^2 \prod_{i=1}^{r-1} p_i^{a_i}$ cu cel puţin un exponent $a_i \geq 1$ şi $p_i \geq 3$, rezultă $T^{(e)}(n) = \left[2^{\frac{\sigma(2)}{\tau(2)}} \prod_{i=1}^{r-1} p_i^{\frac{\sigma(a_i)}{\tau(a_i)}}\right]^{\tau^{(e)}(n)}$.

Fie $a_1 \geq 1$. Prin utilizarea relaţiei (1.2.15), care este valabilă pentru numere prime impare, rezultă inegalitatea

$$2^{\frac{\sigma(2)}{\tau(2)}} \prod_{i=1}^{r-1} p_i^{\frac{\sigma(a_i)}{\tau(a_i)}} > 2^{\frac{3}{2}} 3^{\sqrt{a_1}} \prod_{i=2}^{r-1}(a_i+1) > 3(a_1+1)\prod_{i=2}^{r-1}(a_i+1) = \tau(n),$$

deci relaţia (1.2.8) este adevărată. Am utilizat inegalitatea

$$2\sqrt{2}\cdot 3^{x-1} > x^2 + 1, \text{ pentru orice } x \geq 1,$$

în care am luat $x = \sqrt{a_1}$.
Fie $a \in \mathbb{N}^*$ şi p un număr prim, iar $d_1, d_2, ..., d_k$ divizorii naturali ai lui a; rezultă că

$$\sigma^{(e)}(p^a) = p^{d_1} + p^{d_2} + ... + p^{d_k}.$$

Cum funcţia $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ definită prin $f(x) = p^x$ este convexă pentru $p \geq 2$, din inegalitatea lui Jensen deducem inegalitatea

$$\frac{p^{d_1} + p^{d_2} + ... + p^{d_k}}{k} \geq p^{\frac{d_1+d_2+...+d_k}{k}},$$

adică

$$\frac{\sigma^{(e)}(p^a)}{\tau(a)} \geq p^{\frac{\sigma(a)}{\tau(a)}}.$$

Aceasta este echivalentă cu relaţia

$$\sigma^{(e)}(p^a) \geq \tau(a) p^{\frac{\sigma(a)}{\tau(a)}}.$$

Prin urmare, obţinem

$$\sigma^{(e)}(n) = \sigma^{(e)}(p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot ... \cdot p_3^{a_r}) = \sigma^{(e)}(p_1^{a_1})\sigma^{(e)}(p_2^{a_2}) \cdot ... \cdot \sigma^{(e)}(p_r^{a_r}) \geq$$

$$\geq \tau(a_1) p^{\frac{\sigma(a_1)}{\tau(a_1)}} \cdot \tau(a_2) p^{\frac{\sigma(a_2)}{\tau(a_2)}} \cdot ... \cdot \tau(a_r) p^{\frac{\sigma(a_r)}{\tau(a_r)}} = \tau^{(e)}(n) \prod_{i=1}^{r} p_i^{\frac{\sigma(a_i)}{\tau(a_i)}},$$

adică

$$\frac{\sigma^{(e)}(n)}{\tau^{(e)}(n)} \geq \prod_{i=1}^{r} p_i^{\frac{\sigma(a_i)}{\tau(a_i)}}.$$

Se ştie că $T^{(e)}(n) = \left[\prod_{i=1}^{r} p_i^{\frac{\sigma(a_i)}{\tau(a_i)}} \right]^{\tau^{(e)}(n)}$, ceea ce implică inegalitatea

$$\left[\frac{\sigma^{(e)}(n)}{\tau^{(e)}(n)} \right]^{\tau^{(e)}(n)} \geq T^{(e)}(n).$$

Datorită inegalităţilor (1.2.9) şi (1.2.10), rezultă

$$[\tau(n)]^{\tau^{(e)}(n)} \leq T^{(e)}(n) \leq \left[\frac{\sigma^{(e)}(n)}{\tau^{(e)}(n)} \right]^{\tau^{(e)}(n)}, \text{ pentru } n \neq 4,$$

aşadar

$$\tau(n) \leq \frac{\sigma^{(e)}(n)}{\tau^{(e)}(n)}, \ (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*, \ n \neq 4.$$

Pentru $n = 4$ în relaţia (1.2.13) obţinem egalitate, deoarece

$$\tau(4) = 3 = \frac{6}{2} = \frac{\sigma^{(e)}(4)}{\tau^{(e)}(4)}.$$

□

Studiind existenţa altor margini inferioare ale raportului $\frac{\sigma^{(e)}(n)}{\tau^{(e)}(n)}$ în afară de marginile $\gamma(n)$ şi $\tau(n)$, pe care le ştim deja, am găsit alte două margini pe care le prezentăm mai jos:

PROPOZIŢIA 1.2.7 (Minculete [[**18**], Theorem 2.1]). *Pentru orice $n \geq 1$ are loc următoarea inegalitate*

$$\frac{\sigma^{(e)}(n)}{\tau^{(e)}(n)} \geq \gamma(n) + \frac{\tau^{(e)}(n) - 1}{2}. \tag{1.2.17}$$

Demonstraţie. Pentru $n = 1$ obţinem $\frac{\sigma^{(e)}(1)}{\tau^{(e)}(1)} = 1 = \gamma(1) + \frac{\tau^{(e)}(1) - 1}{2}$.
Pentru $n > 1$ aşezăm divizorii exponenţiali ai lui n în ordine crescătoare. Cel mai mic divizor exponenţial al lui $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_r^{a_r} > 1$ este $p_1 p_2 ... p_r = \gamma(n)$. Al doilea divizor este cel puţin $2p_1 p_2 ... p_r = 2\gamma(n) \geq \gamma(n) + 1$. Aceasta ne arată că dacă $d_1, d_2, ..., d_s$ sunt divizorii exponenţiali ai lui n, atunci este simplu de observat că $d_i \geq \gamma(n) + i - 1$ pentru toţi $i = \overline{2, s}$. Prin urmare, avem

$$\sigma^{(e)}(n) = \sum_{d|_{(e)}n} d \geq \gamma(n) + \gamma(n) + 1 + \gamma(n) + 2 + ... + \gamma(n) + s - 1 = s\gamma(n) + \frac{s(s-1)}{2}.$$

Dar $s = \tau^{(e)}(n)$ este numărul divizorilor exponenţiali ai lui n, ceea ce înseamnă că

$$\sigma^{(e)}(n) \geq \tau^{(e)}(n) \cdot \gamma(n) + \frac{\tau^{(e)}(n)(\tau^{(e)}(n) - 1)}{2}.$$

În consecinţă obţinem relaţia (1.2.17).

□

OBSERVAŢIA 1.2.8 *a) Cum $\tau^{(e)}(n) \geq 1$ rezultă că inegalitatea* (1.2.17) *ne furnizează o margine inferioară mai bună pentru raportul $\frac{\sigma^{(e)}(n)}{\tau^{(e)}(n)}$ decât cea din relaţia* (1.2.8).
b) Dacă n este un număr liber de pătrate, atunci $\sigma^{(e)}(n) = n = \gamma(n)$ şi $\tau^{(e)}(n) = 1$. Aşadar, obţinem egalitate în relaţia (1.2.17).
Dacă n nu este liber de pătrate, atunci în demonstraţia propoziţiei 1.2.7 folosim faptul că al doilea divizor este cel puţin $2\gamma(n) \geq \gamma(n) + 1$. Egalitatea are loc pentru $\gamma(n) = 1$, deci $n = 1$. Cu alte cuvinte, egalitatea în relaţia (1.2.17) *are loc doar când n este un număr liber de pătrate sau pentru $n = 1$.*

PROPOZIŢIA 1.2.9 (Minculete [[**21**], Theorem 2.5]). *Pentru orice $n \geq 1$, are loc următoarea inegalitate:*

$$\sqrt{n} \leq \frac{\sigma^{(e)}(n)}{\tau^{(e)}(n)}. \tag{1.2.18}$$

Demonstraţie. În cazul în care $n = 1$ obţinem egalitate în relaţia (1.2.18). Fie $n \geq 2$. Pentru $n = p$, unde p este un număr prim, devine $\sqrt{p} \leq p$, ceea ce este adevărat. În continuare analizăm cazul în care $n = p^a$, cu $a \geq 2$, deoarece ne interesează numărul de divizori ai lui a. Dacă a este un număr prim, atunci a are doi divizori. În această situaţie, inegalitatea (1.2.18) devine $2\sqrt{p^a} \leq p^a + p$, care este adevărată, deoarece $0 < (\sqrt{p^a} - 1)^2 + p - 1$. Dacă a este un număr compus, atunci $a \geq 4$ şi notăm divizorii lui a în ordine crescătoare, în modul următor: $1 = d_1 < d_2 < ... < d_s = a$, unde $s = \tau(a) \geq 3$, $d_2 \geq 2$ şi $d_{s-1} \leq a - 2$. Este uşor de dovedit că

$$p^a \geq p^{a-1} + p^{a-2} + ... + p,$$

unde p este un număr prim şi $a \geq 1$. Observăm că printre numerele $1, 2, 3, ..., a - 2$ se găsesc şi numerele $a - d_{s-1}, a - d_{s-2}, ..., a - d_2$, ceea ce înseamnă că

$$\sigma^{(e)}(p^a) = p^a + p^{d_{s-1}} + p^{d_{s-2}} + ... + p^{d_2} + p \geq$$

$$\geq p^{a-1} + p^{a-2} + ... + p + p^{d_{s-1}} + p^{d_{s-2}} + ... + p^{d_2} + p \geq$$

$$\geq p^{a-1} + p^{a-d_2} + ... + p^{a-d_{s-2}} + p^{a-d_{s-1}} + p + p^{d_{s-1}} + p^{d_{s-2}} + ... + p^{d_2} + p \geq$$

$$\geq 2(s-1)\sqrt{p^a} > s\sqrt{p^a} = \tau(a)\sqrt{p^a} = \tau^{(e)}(p^a)\sqrt{p^a}, \text{ deoarece } s \geq 3.$$

Aşadar, $\sigma^{(e)}(p^a) \geq \tau^{(e)}(p^a)\sqrt{p^a}$ pentru orice număr prim p şi orice $a \geq 1$.
Prin utilizarea teoremei fundamentale a aritmeticii, pentru $n > 1$ avem descompunerea canonică a lui n dată astfel: $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_r^{a_r}$. Prin trecerea la produs în inegalitatea de mai sus şi ţinând cont că funcţiile $\sigma^{(e)}(n)$, $\tau^{(e)}(n)$ şi $\sqrt{n}$ sunt multiplicative, deducem inegalitatea din enunţ. □

OBSERVAŢIA 1.2.10 *Făcând un bilanţ al rezultatelor de mai sus, am găsit următoarele margini inferioare pentru raportul $\frac{\sigma^{(e)}(n)}{\tau^{(e)}(n)}$, şi anume: $\gamma(n)$, $\tau(n)$, $\gamma(n) + \frac{\tau^{(e)}(n) - 1}{2}$ şi $\sqrt{n}$. Încercând o ierarhizare a acestora, observăm că pentru $n = p$, unde p este un număr prim mai mare decât 5, rezultă $\tau(n) < \sqrt{n} < \gamma(n) = \gamma(n) + \frac{\tau^{(e)}(n) - 1}{2}$. Pentru $n = p^a$ cu $a > p$, unde a este un număr prim, avem $\gamma(n) < \gamma(n) + \frac{\tau^{(e)}(n) - 1}{2} < \tau(n) < \sqrt{n}$. În concluzie, în afară de inegalitatea $\gamma(n) \leq \gamma(n) + \frac{\tau^{(e)}(n) - 1}{2}$ care se păstrează, ceilalţi doi termeni se pot intercala în funcţie de*

diferite valori ale lui n. De aceea, considerăm că trebuie evidenţiate fiecare dintre cele patru margini inferioare ale raportului $\dfrac{\sigma^{(e)}(n)}{\tau^{(e)}(n)}$.

Acum vom trece la alte tipuri de inegalităţi care descriu funcţia $\sigma^{(e)}(n)$.
Pentru a investiga problema comparaţiei dintre doi termeni ce conţin funcţia $\sigma^{(e)}(n)$ şi alte funcţii aritmetice multiplicative, avem nevoie de următoarea lemă:

LEMA 1.2.11 (Minculete [[**19**], Lemma 3.7]). *Pentru orice* $x_i > 0$ *cu* $i \in \{1, 2, ..., n\}$ *are loc inegalitatea*

$$\prod_{i=1}^{n}(1 + x_i + x_i^2) + \prod_{i=1}^{n} x_i^2 \geq \prod_{i=1}^{n}(x_i + x_i^2) + \prod_{i=1}^{n}(1 + x_i^2). \tag{1.2.19}$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $n = 1$.

Demonstraţie. În demonstrarea acestei inegalităţi aplicăm metoda inducţiei matematice. Aşadar, fie propoziţia

$$p(n): \ (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*, \prod_{i=1}^{n}(1 + x_i + x_i^2) + \prod_{i=1}^{n} x_i^2 \geq \prod_{i=1}^{n}(x_i + x_i^2) + \prod_{i=1}^{n}(1 + x_i^2).$$

Verificăm că propoziţia $p(1)$ este adevărată, adică

$$1 + x_1 + x_1^2 + x_1^2 \geq x_1 + x_1^2 + 1 + x_1^2.$$

Presupunem că propoziţia $p(k)$ este adevărată şi demonstrăm că propoziţia $p(k+1)$ este adevărată. Adică

$$\prod_{i=1}^{k+1}(1 + x_i + x_i^2) + \prod_{i=1}^{k+1} x_i^2 \geq \prod_{i=1}^{k+1}(x_i + x_i^2) + \prod_{i=1}^{k+1}(1 + x_i^2),$$

care este echivalentă cu inegalitatea

$$x_{k+1}^2\left(\prod_{i=1}^{k}(1 + x_i + x_i^2) + \prod_{i=1}^{k} x_i^2 - \prod_{i=1}^{k}(x_i + x_i^2) - \prod_{i=1}^{k}(1 + x_i^2)\right) +$$

$$+x_{k+1}\left(\prod_{i=1}^{k}(1 + x_i + x_i^2) - \prod_{i=1}^{k}(x_i + x_i^2)\right) + \prod_{i=1}^{k}(1 + x_i + x_i^2) - \prod_{i=1}^{k}(1 + x_i^2) \geq 0.$$

Conform principiului inducţiei matematice, propoziţia $p(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. □

Pe de-o parte studiem problema existenţei numerelor perfecte care sunt, în acelaşi timp, şi e-perfecte, iar pe de altă parte studiem problema existenţei numerelor perfecte care sunt, în acelaşi timp, şi perfecte unitare. Pentru acest studiu utilizăm rezultatul următor:

PROPOZIŢIA 1.2.12 (Minculete [[**24**], Theorem 3.8]). *Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc următoarea inegalitate:*

$$\sigma(n) + n \geq \sigma^{(e)}(n) + \sigma^*(n). \tag{1.2.20}$$

Demonstraţia I. Dacă $n = 1$, atunci obţinem $\sigma(1) + 1 = 2 = \sigma^{(e)}(1) + \sigma^*(1)$.
Fie d un divizor unitar al lui $n > 1$ care este şi divizor exponenţial al lui n, adică avem $\left(d, \frac{n}{d}\right) = 1$ şi $\gamma(d) = \gamma(n)$. Din faptul că $\left(d, \frac{n}{d}\right) = 1$, rezultă $\left(\gamma(d), \gamma\left(\frac{n}{d}\right)\right) = 1$ şi, cum $\gamma(d) = \gamma(n)$, deducem $\left(\gamma(n), \gamma\left(\frac{n}{d}\right)\right) = 1$, adică $\gamma\left(\frac{n}{d}\right) = 1$. Aceasta implică $d = n$.
Prin urmare, pentru orice $n > 1$, mulţimea divizorilor unitari ai lui n şi mulţimea divizorilor exponenţiali ai lui n îl au în comun doar pe n, deci rezultă inegalitatea (1.2.20).

Demonstraţia II. Dacă $n = 1$, atunci obţinem $\sigma(1) + 1 = 2 = \sigma^{(e)}(1) + \sigma^*(1)$.
Cum n se descompune în puteri de numere prime pentru $n > 1$, studiem ce se întâmplă cu această inegalitate pentru diferite forme de descompunere ale lui n. Ca urmare, va trebui să studiem relaţia (1.2.20) pe mai multe cazuri, şi anume:
Cazul I. Dacă $n = p_1^2 p_2^2 ... p_r^2$, atunci $\sigma(n) = \prod_{i=1}^{r}(1 + p_i + p_i^2)$, $\sigma^{(e)}(n) = \prod_{i=1}^{r}(p_i + p_i^2)$ şi $\sigma^*(n) = \prod_{i=1}^{r}(1 + p_i^2)$, ceea ce înseamnă că inegalitatea (1.2.20) este echivalentă cu inegalitatea

$$\prod_{i=1}^{r}(1 + p_i + p_i^2) + \prod_{i=1}^{r} p_i^2 \geq \prod_{i=1}^{r}(p_i + p_i^2) + \prod_{i=1}^{r}(1 + p_i^2).$$

Aceasta este adevărată datorită utilizării inegalităţii (1.2.19) pentru $n = r$ şi $x_i = p_i$.
Cazul II. Dacă $a_k \neq 2$, $(\forall)\ k = \overline{1, r}$, atunci

$$\frac{n}{p_1}, \frac{n}{p_2}, ..., \frac{n}{p_r}, \frac{n}{p_1 p_2}, ..., \frac{n}{p_i p_j}, ..., \frac{n}{p_i p_j p_k}, ..., \frac{n}{p_1 p_2 ... p_r}$$

sunt divizori neexponenţiali ai lui n. Aceştia sunt în număr de $2^r - 1$, iar suma lor $\psi(n) - n$. Ca urmare, avem

$$\sigma(n) = \sum_{d|_{(e)} n} d + \sum_{d \nmid_{(e)} n} d = \sigma^{(e)}(n) + \sum_{d \nmid_{(e)} n} d \geq \sigma^{(e)}(n) + \psi(n) - n.$$

Dar $\psi(n) \geq \sigma^*(n)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, deci

$$\sigma(n) \geq \sigma^{(e)}(n) + \sigma^*(n) - n, \text{ adică } \sigma(n) + n \geq \sigma^{(e)}(n) + \sigma^*(n).$$

Cazul III. Daca există cel puţin un $a_k \neq 2$ şi cel puţin un $a_j = 2$ pentru $j, k \in \{1, 2, ..., r\}$, atunci, fără a micşora generalitatea, renumerotăm factorii primi din descompunerea lui n şi obţinem $n = p_1^2 p_2^2 ... p_s^2 p_{s+1}^{a_{s+1}} ... p_r^{a_r}$ cu $a_{s+1}, a_{s+2}, ..., a_r \neq 2$.

Prin urmare, scriem $n = n_1 \cdot n_2$, unde $n_1 = p_1^2 p_2^2 ... p_s^2$ şi $n_2 = p_{s+1}^{a_{s+1}} ... p_r^{a_r}$, ceea ce înseamnă că $(n_1, n_2) = 1$. Demonstraţia propoziţiei este încheiată aplicând propoziţia 1.1.5 pentru funcţiile $f = \sigma,\ g = Id,\ h = \sigma^{(e)}$ şi $q = \sigma^*$.

□

PROPOZIŢIA 1.2.13 *Nu există numere perfecte care să fie e-perfecte, iar* 6 *este singurul număr care este în acelaşi timp perfect şi perfect unitar.*

Demonstraţie. Presupunem prin absurd că există numere perfecte care să fie e-perfecte, adică $\sigma(n) = \sigma^{(e)}(n) = 2n$. Prin aplicarea inegalităţii (1.2.20), $\sigma(n) + n \geq \sigma^{(e)}(n) + \sigma^*(n)$, rezultă $n \geq \sigma^*(n)$, care este o contradicţie, deoarece $\sigma^*(n) \geq n + 1$. Aşadar, nu există numere perfecte care să fie e-perfecte.
Presupunem că există numere perfecte care să fie perfecte unitare, adică $\sigma(n) = \sigma^*(n) = 2n$. Aplicând inegalitatea (1.2.20), rezultă $n \geq \sigma^{(e)}(n)$. Însă $\sigma^{(e)}(n) \geq n$, deci avem $\sigma^{(e)}(n) = n$, ceea ce înseamnă că n este liber de pătrate. Arătăm că singurul număr perfect liber de pătrate este numărul 6.
Fie $n = p_1 p_2 ... p_r$ cu $p_1 < p_2 < ... < p_r$. Cum n este un număr perfect, avem $\sigma(n) = 2n$ şi rezultă relaţia

$$(p_1 + 1)(p_2 + 1)...(p_r + 1) = 2p_1 p_2 ... p_r. \tag{1.2.21}$$

Dacă n este un număr impar, atunci numerele $p_1, p_2, ..., p_r$ sunt impare, iar numerele $p_1 + 1, p_2 + 1, ..., p_r + 1$ sunt pare. Prin urmare, $2^r = 2$, adică $r = 1$, de unde obţinem relaţia $p_1 + 1 = 2p_1$, care este falsă. Aceasta implică faptul că n este un număr par.
Fie $n = 2p_2 ... p_r$ cu $2 < p_2 < ... < p_r$. Relaţia (1.2.21) devine $3(p_2 + 1)...(p_r + 1) = 4p_2 ... p_r$, adică $3 | p_2 ... p_r$, deci $p_2 = 3$. Aşadar, relaţia (1.2.21) se rescrie astfel: $(p_3 + 1)...(p_r + 1) = p_3 ... p_r$. Aceasta este falsă dacă $r \geq 3$, deoarece membrul din stânga este strict mai mare decât cel din dreapta. În concluzie, 6 este singurul număr care este în acelaşi timp perfect şi perfect unitar.

□

În inegalitatea (1.2.20) reducem influenţa lui n asupra termenului din stânga al inegalităţii şi dovedim rezultatul următor:

PROPOZIŢIA 1.2.14 (Minculete [[**18**], Theorem 2.6]). *Pentru orice număr natural* $n \geq 1$, $n \neq p^2$, *unde* p *este un număr prim, are loc inegalitatea*

$$\sigma(n) + 1 \geq \sigma^{(e)}(n) + \tau(n). \tag{1.2.22}$$

Demonstraţie. Pentru $n = 1$ obţinem $\sigma(1) + 1 = 2 = \sigma^{(e)}(1) + \tau(1)$.
Dacă $\omega(n) = 1$, atunci $n = p^a$ cu $a \geq 1$ şi deducem că relaţia (1.2.22) devine egalitate pentru

$a = 1$, falsă pentru $a = 2$ şi adevărată pentru orice $a \geq 3$. Fie $n > 1$ şi $\omega(n) \geq 2$. Pentru a demonstra inegalitatea de mai sus, trebuie să analizăm mai multe cazuri, şi anume:
Cazul I. Dacă $n = p_1^2 p_2^2 ... p_r^2$ $(r \geq 2)$, atunci $\sigma(n) = \prod_{i=1}^{r}(1 + p_i + p_i^2)$, $\sigma^{(e)}(n) = \prod_{i=1}^{r}(p_i + p_i^2)$ şi $\tau(n) = 3^r$. Aceasta înseamnă că inegalitatea (1.2.22) este adevărată cu inegalitatea

$$\prod_{i=1}^{r}(1 + p_i + p_i^2) + 1 \geq \prod_{i=1}^{r}(p_i + p_i^2) + 3^r.$$

Prin utilizarea lemei 1.2.11 pentru $n = r$ şi $x_i = p_i$, avem

$$\prod_{i=1}^{r}(1 + p_i + p_i^2) + \prod_{i=1}^{r} p_i^2 \geq \prod_{i=1}^{r}(p_i + p_i^2) + \prod_{i=1}^{r}(1 + p_i^2).$$

Dar $\prod_{i=1}^{r}(1 + p_i^2) \geq 5^r - 4^r + \prod_{i=1}^{r} p_i^2$, iar $5^r - 4^r \geq 3^r - 1$, pentru $r \geq 2$. Astfel, inegalitatea din enunţ este adevărată.
Cazul II. Dacă există $a_k \geq 3$, atunci $(a_k - 1) \nmid a_k$. Prin urmare, oricare ar fi $j \in \{1, ..., r\} \setminus \{k\}$, numărul

$$\frac{n}{p_1^{i_1} \cdot p_2^{i_2} \cdot ... \cdot p_{k-1}^{i_{k-1}} \cdot p_k \cdot p_{k+1}^{i_{k+1}} \cdot ... \cdot p_r^{i_r}} = p_1^{a_1 - i_1} \cdot p_2^{a_2 - i_2} \cdot ... \cdot p_{k-1}^{a_{k-1} - i_{k-1}} \cdot p_k^{a_k - 1} \cdot p_{k+1}^{a_{k+1} - i_{k+1}} \cdot ... \cdot p_r^{a_r - i_r}$$

nu este divizor exponenţial al lui n pentru orice $i_j = \overline{0, a_j}$.
Avem $\dfrac{\tau(n)}{a_k + 1}$ divizori neexponenţiali de acest tip, iar suma tuturor acestor divizori neexponenţiali este

$$p_k^{a_k - 1} \sigma\left(\frac{n}{p_k^{a_k}}\right).$$

Prin urmare, deducem relaţia

$$\sigma(n) = \sum_{d \mid_{(e)} n} d + \sum_{d \nmid_{(e)} n} d = \sigma^{(e)}(n) + \sum_{d \nmid_{(e)} n} d \geq \sigma^{(e)}(n) + p_k^{a_k - 1} \sigma\left(\frac{n}{p_k^{a_k}}\right) \geq \sigma^{(e)}(n) + \frac{n}{p_k} + p_k^{a_k - 1}.$$

Utilizând inegalitatea lui Sierpinski, $2\sqrt{n} > \tau(n)$, avem

$$\sigma(n) \geq \sigma^{(e)}(n) + \frac{n}{p_k} + p_k^{a_k - 1} \geq \sigma^{(e)}(n) + 2\sqrt{n} - 1 >$$

$$> \sigma^{(e)}(n) + \tau(n) - 1.$$

Cazul III. Daca există cel puţin un $a_i = 1$, cel puţin un $a_j = 2$ şi cel puţin un $a_k \geq 3$, unde $i, j, k \in \{1, 2, ..., r\}$, atunci, fără a micşora generalitatea, renumerotăm factorii primi din descompunerea lui n şi obţinem

$$n = p_1 p_2 ... p_s p_{s+1}^2 p_{s+2}^2 ... p_t^2 p_{t+1}^{a_{t+1}} ... p_r^{a_r}, \text{ cu } 1 \leq s < t < r \text{ şi } a_{t+1}, a_{t+2}, ..., a_r \geq 3.$$

Prin urmare, scriem $n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$, unde $n_1 = p_1 p_2 ... p_s,\ n_2 = p_1^2 p_2^2 ... p_s^2$ şi $n_3 = p_{t+1}^{a_{t+1}} ... p_r^{a_r}$, ceea ce înseamnă că $(n_1, n_2, n_3) = 1$. Aplicând propoziţia 1.1.5 pentru $f = \sigma,\ g = 1,\ h = \sigma^{(e)}$ şi $q = \tau$, demonstraţia acestei propoziţii este incheiată.

□

1.3 Despre funcţia $\varphi^{(e)}$

J. Sándor introduce în lucrarea [**43**] funcţia $\varphi^{(e)}(n)$ care arată numărul de divizori d ai lui n, astfel încât d şi n sunt coprime exponenţial. Astfel, două numere naturale $n, m > 1$ au divizori exponenţiali comuni dacă şi numai dacă au aceiaşi factori primi în descompunere, iar pentru $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{a_i},\ m = \prod_{i=1}^{r} p_i^{b_i}$, cu $a_i, b_i \geq 1$ $(i = \overline{1,r})$, cel mai mare divizor exponenţial comun al lui n şi m este

$$(n, m)_{(e)} := \prod_{i=1}^{r} p_i^{(a_i, b_i)}.$$

Prin convenţie, $(1, 1)_{(e)} = 1$, iar $(1, m)_{(e)}$ nu există pentru $m > 1$.
Două numere naturale $n, m > 1$ sunt numite *coprime exponenţial* dacă au aceiaşi factori primi în descompunere şi $(a_i, b_i) = 1$ pentru orice $i = \overline{1,r}$. În acest caz, avem $(n, m)_{(e)} = \gamma(n) = \gamma(m)$. Prin convenţie, 1 şi 1 sunt considerate coprime exponenţial, iar 1 şi $m > 1$ nu sunt coprime exponenţial.
Este uşor de arătat că $\sigma^{(e)}(n)$ este o funcţie multiplicativă şi pentru $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{a_i} > 1$ avem

$$\varphi^{(e)}(n) = \prod_{i=1}^{r} \varphi(a_i), \tag{1.3.1}$$

unde φ este indicatorul lui Euler. Aceste noţiuni au fost tratate şi de L. Tóth în lucrarea [**60**].
J. Sándor arată în lucrarea [**43**] că

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{\ln \varphi^{(e)}(n) \ln \ln n}{\ln n} = \frac{\ln 4}{5}. \tag{1.3.2}$$

De asemenea, demonstrează câteva inegalităţi în legătură cu funcţiile $\varphi^{(e)}(n)$ şi $\tau^{(e)}(n)$.
Printre acestea, avem următoarele:
a) dacă $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_r^{a_r} > 1$, atunci

$$\varphi^{(e)}(n)\tau^{(e)}(n) \geq a_1 \cdot a_2 \cdot .... \cdot a_r; \tag{1.3.3}$$

b) dacă a_i sunt impare pentru orice $i \in \{1, ..., r\}$, atunci avem inegalitatea

$$\varphi^{(e)}(n)\tau^{(e)}(n) \geq \sigma(a_1) \cdot \sigma(a_2) \cdot ... \cdot \sigma(a_r); \tag{1.3.4}$$

c) dacă toţi exponenţii $a_i \geq 3$ sunt impari, atunci

$$\varphi^{(e)}(n)\tau^{(e)}(n) \geq \tau(n). \tag{1.3.5}$$

Reamintim că indicatorul unitar, care este similar cu indicatorul lui Euler, a fost introdus de K. Nageswara Rao, în [**34**], în modul următor:

$$\varphi^*(n) = card\{1 \leq k < n | (k,n)_* = 1\},$$

unde $(k,n)_*$ este cel mai mare divizor al lui k ce este divizor unitar al lui n. Această funcţie se dovedeşte a fi multiplicativă şi este exprimată astfel: $\varphi^*(1) = 1$ şi

$$\varphi^*(n) = (p_1^{a_1} - 1)(p_2^{a_2} - 1)...(p_r^{a_r} - 1)$$

pentru $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_r^{a_r} > 1$.
Este uşor de observat că pentru $n \geq 1$ avem inegalitatea

$$\varphi^*(n) \geq \varphi(n) \geq \varphi^{(e)}(n). \tag{1.3.6}$$

Această inegalitate ne-a determinat să analizăm cât de mare este funcţia $\varphi^*(n)$ în comparaţie cu suma dintre funcţiile $\varphi(n)$ şi $\varphi^{(e)}(n)$. Ca urmare, am obţinut următoarea propoziţie:

PROPOZIŢIA 1.3.1 *Pentru orice $n \geq 1$, are loc inegalitatea*

$$\varphi^*(n) + 1 \geq \varphi^{(e)}(n) + \varphi(n). \tag{1.3.7}$$

Egalitatea are loc pentru $n = 1$ şi pentru $n = p$, unde p este un număr prim.

Demonstraţie. Pentru $n = 1$, avem egalitate în relaţia (1.3.7). Pentru $n = p$, unde p este un număr prim, avem $\varphi^*(p) + 1 = p = \varphi^{(e)}(p) + \varphi(p)$, deci obţinem din nou egalitate. În cazul $n = p^a$ cu $a \geq 2$, avem inegalitatea
$\varphi^*(p^a)+1 = p^a \geq \varphi(a)+p^a-p^{a-1} = \varphi^{(e)}(p^a)+\varphi(p^a)$, care este adevărată, deoarece $p^{a-1} \geq a-1 \geq \varphi(a)$ pentru orice $a \geq 2$. Aplicând propoziţia 1.1.5 pentru funcţiile $f = \varphi^*, g = 1, h = \varphi^{(e)}$ şi $q = \varphi$ demonstraţia propoziţiei este încheiată.

□

PROPOZIŢIA 1.3.2 *Există relaţiile următoare:*

$$\varphi^*(n) + 1 > \varphi^{(e)}(n) + \frac{n}{2,59 \ln\ln n} \tag{1.3.8}$$

pentru orice $n \geq 31$, $n \neq 42$ şi $n \neq 210$, iar

$$\lim_{n\to\infty} \inf \frac{[\varphi^*(n) - \varphi^{(e)}(n)] \ln\ln n}{n} \geq e^{-\gamma}. \tag{1.3.9}$$

Demonstraţie. Utilizăm un rezultat al lui A. Ivić din lucrarea [**13**, Lemma 3], care arată că $\prod_{p|n} \frac{p}{p-1} < 2,59 \ln\ln n$ pentru $n \geq 31,\ n \neq 42$ şi $n \neq 210$. Cum $\frac{n}{\varphi(n)} = \prod_{p|n} \frac{p}{p-1}$, rezultă inegalitatea $\varphi(n) > \frac{n}{2,59 \ln\ln n}$ pentru $n \geq 31,\ n \neq 42$ şi $n \neq 210$. Combinând această inegalitate cu inegalitatea (1.3.7), deducem inegalitatea (1.3.8) pentru $n \geq 31,\ n \neq 42$ şi $n \neq 210$. Aplicând un rezultat al lui E. Landau din lucrarea [**51**], $\lim\inf_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)\ln\ln n}{n} = e^{-\gamma}$, şi ţinând seama de inegalitatea (1.3.7), obţinem relaţia (1.3.9).

□

PROPOZIŢIA 1.3.3 *Pentru orice $n \geq 2$, are loc inegalitatea*

$$\tau(n) \geq \varphi^{(e)}(n) + \tau^{(e)}(n). \tag{1.3.10}$$

Egalitatea are loc pentru $n = p,\ n = p^4$ şi $n = p^a$, unde p şi a sunt numere prime.

Demonstraţie. Pentru $n = p$, unde p este un număr prim, avem egalitate în relaţia (1.3.10). Fie n descompus canonic astfel: $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_r^{a_r} > 1$. Pentru $n = p^a$, inegalitatea (1.3.10) devine $\tau(p^a) \geq \varphi^{(e)}(p^a) + \tau^{(e)}(p^a)$, adică $a+1 \geq \varphi(a) + \tau(a)$ pentru $a \geq 1$, aceasta fiind o inegalitate ce apare în lucrarea [**50**]. Prin urmare, folosind faptul că funcţiile $\tau, \varphi^{(e)}$ şi $\tau^{(e)}$ sunt multiplicative, avem

$$\tau(n) = \prod_{p|n} \tau(p^a) \geq \prod_{p|n} [\varphi^{(e)}(p^a) + \tau^{(e)}(p^a)] \geq \prod_{p|n} \varphi^{(e)}(p^a) + \prod_{p|n} \tau^{(e)}(p^a) = \varphi^{(e)}(n) + \tau^{(e)}(n).$$

În relaţia $a+1 \geq \varphi(a)+\tau(a)$, avem egalitate pentru $a = 1,\ a = 4$ şi atunci când a este un număr prim. Aceasta implică faptul că, în relaţia (1.3.10), egalitatea are loc pentru $n = p$, $n = p^4$ şi $n = p^a$, unde p şi a sunt numere prime.

□

Pentru a determina ordinul maximal al unor funcţii aritmetice care se află în atenţia noastră, vom utiliza un rezultat general, pe care îl expunem mai jos.

TEOREMA 1.3.4 (D. Surynarayana şi R. Sita Rama Chandra Rao [**57**]). *Fie F o funcţie multiplicativă cu $F(p^a) = f(a)$ pentru orice putere primă p^a, unde f este o funcţie pozitivă pentru care avem $f(n) = O(n^\beta)$, unde β este un număr fixat. Atunci*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\ln F(n) \ln\ln n}{\ln n} = \sup_m \frac{\ln f(m)}{m}. \tag{1.3.11}$$

1.3. Despre funcţia $\varphi^{(e)}$

Pe lângă descrierile funcţiei $\varphi^{(e)}$, date mai sus cu ajutorul inegalităţilor, J. Sándor prezintă în [**43**] o descriere a funcţiei $\varphi^{(e)}$, calculând ordinul maximal al acestei funcţii în modul următor: $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\dfrac{\ln\varphi^{(e)}(n)\ln\ln n}{\ln n}=\dfrac{\ln 4}{5}$. În continuare, cercetăm cum se modifică ordinul maximal dacă în loc de funcţia $\varphi^{(e)}$ avem compunerea de funcţii $f\circ\varphi^{(e)}$, unde f este o funcţie aritmetică multiplicativă. Cum funcţia f trebuie să aibă o anumită formă, am ales funcţiile φ şi φ^*, obţinând propoziţia următoare:

PROPOZIŢIA 1.3.5 *Există relaţiile următoare:*

$$\lim_{n\to\infty}\sup\frac{\ln\varphi(\varphi^{(e)}(n))\ln\ln n}{\ln n}=\frac{\ln 2}{5} \tag{1.3.12}$$

şi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\varphi^*(\varphi^{(e)}(n))\ln\ln n}{\ln n}=\frac{\ln 3}{5}. \tag{1.3.13}$$

Demonstraţie. Dacă f şi g sunt două funcţii aritmetice multiplicative cu $\mathrm{Im}f\subseteq\mathbb{N}^*$, atunci $g\circ f$ este o funcţie aritmetică multiplicativă. Prin urmare, datorită faptului că $\mathrm{Im}\varphi^{(e)}\subseteq\mathbb{N}^*$, rezultă că funcţia $\varphi\circ\varphi^{(e)}$ este multiplicativă.

Fie $F(n)=\varphi(\varphi^{(e)}(n)), f(a)=\varphi(\varphi(a))$ şi $L(m)=\dfrac{\ln f(m)}{m}$. Cum $\varphi(n)\geq\sqrt{n}$ pentru orice $n\neq 2,6$ (vezi e.g. [**50**]), rezultă că $n-1\geq\varphi(\varphi(n))\geq\sqrt[4]{n}$ pentru orice $\varphi(n)\neq 2,6$, deci $\varphi(\varphi(n))=O(n^\beta)$ unde $\beta>\frac{1}{4}$ este un număr fixat. Prin urmare, aplicăm teorema 1.3.4, ceea ce înseamnă că

$$\lim_{n\to\infty}\sup\frac{\ln\varphi(\varphi^{(e)}(n))\ln\ln n}{\ln n}=\sup_m\frac{\ln\varphi(\varphi(m))}{m}.$$

Dându-i lui m valori de la 1 la 23, obţinem următoarele:
$L(1)=L(2)=L(3)=L(4)=L(6)=0,\ L(5)=\dfrac{\ln 2}{5}\approx 0,138,\ L(7)=\dfrac{\ln 2}{7},\ L(8)=\dfrac{\ln 2}{8},$
$L(9)=\dfrac{\ln 2}{9},\ L(10)=\dfrac{\ln 2}{10},\ L(11)=\dfrac{\ln 4}{11},\ L(12)=\dfrac{\ln 2}{12},\ L(13)=\dfrac{\ln 4}{13},\ L(14)=\dfrac{\ln 2}{14},$
$L(15)=\dfrac{\ln 4}{15},\ L(16)=\dfrac{\ln 4}{16},\ L(17)=\dfrac{\ln 8}{17},\ L(18)=\dfrac{\ln 6}{18},\ L(19)=\dfrac{\ln 6}{19},\ L(20)=\dfrac{\ln 8}{20},$
$L(21)=\dfrac{\ln 4}{21},\ L(22)=\dfrac{\ln 10}{22}$ şi $L(23)=\dfrac{\ln 10}{23}$. Deoarece funcţia $\dfrac{\ln m}{m}$ este descrescătoare pentru $m\geq 24$, rezultă $Ł(m)\leq\dfrac{\ln m}{m}\leq\dfrac{\ln 24}{24}\approx 0,133$. Comparând valorile respective, observăm că $\dfrac{\ln 2}{5}\approx 0,138$ este cea mai mare, deci obţinem relaţia (1.3.12).

Acum alegem $F(n)=\varphi^*(\varphi^{(e)}(n)),\ f(n)=\varphi^*(\varphi(n)),\ L(m)=\dfrac{\ln f(m)}{m}$. La fel ca mai sus avem şirul de inegalităţi $n-1\geq\varphi^*(\varphi(n))\geq\varphi(\varphi(n))\geq\sqrt{\varphi(n)}\geq\sqrt[4]{n}$ pentru orice $\varphi(n)\neq 2,6$, deci $\varphi(\varphi(n))=O(n^\beta)$, unde $\beta>0$ este un număr fixat. Ne situăm din nou în condiţiile teoremei

1.3.4, ceea ce înseamnă că obţinem relaţia

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{\ln \varphi^*(\varphi^{(e)}(n)) \ln\ln n}{\ln n} = \sup_m \frac{\ln \varphi^*(\varphi(m))}{m}.$$

Atribuindu-i lui m valori de la 1 la 10, deducem următoarele:
$L(1) = L(2) = L(3) = L(4) = L(6) = 0,\ L(5) = \frac{\ln 3}{5} \approx 0,219,\ L(7) = \frac{\ln 2}{7},\ L(8) = \frac{\ln 3}{8},$
$L(9) = \frac{\ln 2}{9}$ şi $L(10) = \frac{\ln 3}{10}$. Dar funcţia $\frac{\ln m}{m}$ este descrescătoare pentru $m \geq 11$; rezultă $L(m) \leq \frac{\ln m}{m} \leq \frac{\ln 11}{11} \approx 0,218$. Analizând valorile respective, observăm că $L(5) = \frac{\ln 3}{5} \approx 0,219$ este cea mai mare dintre valori, deci obţinem relaţia (1.3.13).

□

1.4 Inegalităţi în care intervine funcţia $\sigma_k^{(e)}$

Considerăm funcţia aritmetică $\sigma_k^{(e)}(n)$ care reprezintă suma divizorilor exponenţiali ai lui n la exponent k, $(\forall)\ k \in \mathbb{N}$, adică

$$\sigma_k^{(e)}(n) = \sum_{d|_{(e)}n} d^k. \tag{1.4.1}$$

Se observă că aceasta este o funcţie aritmetică multiplicativă şi, pentru $k = 1$, obţinem $\sigma_1^{(e)}(n) = \sigma^{(e)}(n)$, iar pentru $k = 0$ avem $\sigma_0^{(e)}(n) = \tau^{(e)}(n)$.
S. Sivaramakrishnan şi C. S. Venkataraman arată că (vezi e.g. [[**42**], p. 105; [**48**], p. 86])

$$\sqrt{n^k} \leq \frac{\sigma_k(n)}{\tau(n)}$$

pentru orice $n \geq 1$ şi $k \geq 0$. J. Sándor şi L. Tóth în lucrarea [**48**] studiază acelaşi tip de inegalitate pentru divizorii unitari, stabilind inegalitatea

$$\sqrt{n^k} \leq \frac{\sigma_k^*(n)}{\tau^*(n)}$$

pentru orice $n \geq 1$ şi $k \geq 0$.
După modelul inegalităţilor de mai sus, a apărut ideea studierii aceluiaşi tip de inegalitate pentru divizorii exponenţiali. Ca urmare, am obţinut următoarea propoziţie:

PROPOZIŢIA 1.4.1 *Pentru orice $n \geq 1$ şi $k \geq 0$ are loc următoarea inegalitate*

$$\sqrt{n^k} \leq \frac{\sigma_k^{(e)}(n)}{\tau^{(e)}(n)}. \tag{1.4.2}$$

Demonstraţie. În cazul în care $n = 1$ sau $k = 0$, obţinem egalitate în relaţia (1.4.2). Fie $n \geq 2$ şi $k \geq 1$. Pentru $n = p$, unde p este un număr prim, inegalitatea (1.4.2) devine $\sqrt{p^k} \leq p^k$, ceea ce este adevărat. În continuare, analizăm cazul în care $n = p^a$, cu $a \geq 2$, deoarece ne interesează numărul de divizori ai lui a. Dacă a este un număr prim, atunci a are doar doi divizori. În această situaţie, inegalitatea (1.4.2) devine $2\sqrt{p^{ka}} \leq p^{ka} + p^k$, care este adevărată, deoarece $0 < (\sqrt{p^{ka}} - 1)^2 + p^k - 1$. Dacă a este un număr compus, atunci $a \geq 4$ şi notăm divizorii lui a în ordine crescătoare, în modul următor: $1 = d_1 < d_2 < ... < d_{s-1} < d_s = a$, unde $s = \tau(a) \geq 3, d_2 \geq 2$ şi $d_{s-1} \leq a - 2$. Se demonstrează uşor că $p^a \geq p^{a-1} + p^{a-2} + ... + p$, de unde deducem inegalitatea $p^{ka} \geq p^{k(a-1)} + p^{k(a-2)} + ... + p^k$, deoarece $k \geq 1$. Observăm că printre numerele $1, 2, 3, ..., a - 2$ se găsesc şi numerele $a - d_{s-1}, a - d_{s-2}, ..., a - d_2$, ceea ce înseamnă că

$$\sigma_k^{(e)}(p^a) = p^{ka} + p^{kd_{s-1}} + p^{kd_{s-2}} + ... + p^{kd_2} + p^k \geq$$

$$\geq p^{k(a-1)} + p^{k(a-2)} + ... + p^k + p^{kd_{s-1}} + p^{kd_{s-2}} + ... + p^{kd_2} + p^k \geq$$

$$\geq p^{k(a-1)} + p^{k(a-d_2)} + ... + p^{k(a-d_{s-2})} + p^{k(a-d_{s-1})} + p^k + p^{kd_{s-1}} + p^{kd_{s-2}} + ... + p^{kd_2} + p^k \geq$$

$$\geq 2(s-1)\sqrt{p^{ka}} > s\sqrt{p^{ka}} = \tau(a)\sqrt{p^{ka}} = \tau^{(e)}(p^a)\sqrt{p^{ka}}, \text{ deoarece } s \geq 3.$$

Aşadar $\sigma^{(e)}(p^a) > \tau^{(e)}(p^a)\sqrt{p^{ka}}$, pentru orice număr prim p şi pentru orice $a \geq 1$.
Descompunându-l canonic pe $n > 1$, avem $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_r^{a_r}$. Prin trecere la produs după toate numerele prime din descompunerea lui n în inegalitatea de mai sus şi ţinând cont că funcţiile $\sigma^{(e)}(n)$, $\tau^{(e)}(n)$ şi $\sqrt{n}$ sunt multiplicative, deducem inegalitatea din enunţ.

□

Studiind o altă margine inferioară pentru raportul $\dfrac{\sigma_k^{(e)}(n)}{\tau^{(e)}(n)}$, am obţinut rezultatul următor:

PROPOZIŢIA 1.4.2 (Minculete [[**28**], Theorem 3]). *Pentru orice numere naturale $n \geq 1$, $k \geq l \geq 1$, au loc inegalităţile următoare:*

$$\sigma_k^{(e)}(n) \cdot \sigma_l^{(e)}(n) \leq \tau^{(e)}(n)\sigma_{k+l}^{(e)}(n), \tag{1.4.3}$$

$$\frac{\sigma_k^{(e)}(n)}{\sigma_l^{(e)}(n)} \geq \left(\frac{\sigma^{(e)}(n)}{\tau^{(e)}(n)}\right)^{k-l} \geq \tau^{k-l}(n) \tag{1.4.4}$$

şi

$$\tau^k(n) \leq \frac{\sigma_k^{(e)}(n)}{\tau^{(e)}(n)}. \tag{1.4.5}$$

Demonstraţie. Pentru $n = 1$, obţinem egalitate în toate relaţiile de mai sus.
Fie $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_r^{a_r} > 1$. Prin aplicarea inegalităţii lui Cebîşev pentru sisteme orientate la fel, deducem inegalitatea

$$\sigma_k^{(e)}(n) \cdot \sigma_l^{(e)}(n) = \sum_{d|_{(e)}n} d^k \cdot \sum_{d|_{(e)}n} d^l \leq \tau^{(e)}(n) \sum_{d|_{(e)}n} d^{k+l} = \tau^{(e)}(n)\sigma_{k+l}^{(e)}(n),$$

adică

$$\sigma_k^{(e)}(n) \cdot \sigma_l^{(e)}(n) \leq \tau^{(e)}(n)\sigma_{k+l}^{(e)}(n).$$

În continuare, utilizăm din lucrarea [**3**] inegalitatea

$$\frac{a_1^k + a_2^k + ... + a_n^k}{a_1^l + a_2^l + ... + a_n^l} \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right)^{k-l}, \ (\forall)\ a_1, a_2, ..., a_n > 0 \text{ şi } (\forall)\ k, l \in \mathbb{N} \text{ cu } k \geq l.$$

Prin înlocuirea termenilor $a_1, a_2, ...$ cu divizorii exponenţiali ai lui n, obţinem inegalitatea

$$\frac{\sum\limits_{d|_{(e)}n} d^k}{\sum\limits_{d|_{(e)}n} d^l} \geq \left(\frac{\sum\limits_{d|_{(e)}n} d}{\tau^{(e)}(n)}\right)^{k-l}$$

care este echivalentă cu inegalitatea

$$\frac{\sigma_k^{(e)}(n)}{\sigma_l^{(e)}(n)} \geq \left(\frac{\sigma^{(e)}(n)}{\tau^{(e)}(n)}\right)^{k-l}.$$

Am arătat în inegalitatea (1.2.11) că $\dfrac{\sigma^{(e)}(n)}{\tau^{(e)}(n)} \geq \tau(n)$ şi, cum $\dfrac{\sigma_k^{(e)}(n)}{\sigma_l^{(e)}(n)} \geq \left(\dfrac{\sigma^{(e)}(n)}{\tau^{(e)}(n)}\right)^{k-l}$, deducem inegalitatea următoare:

$$\frac{\sigma_k^{(e)}(n)}{\sigma_l^{(e)}(n)} \geq \tau^{k-l}(n).$$

În aceasta, luând $l = 0$, deducem inegalitatea (1.4.5).

□

Dacă, pe de-o parte, minorăm divizorii exponenţiali ai lui n, iar pe de altă parte majorăm divizorii exponenţiali ai lui n, atunci, referitor la funcţia $\sigma_k^{(e)}$, obţinem următoarele rezultate:

PROPOZIŢIA 1.4.3 (Minculete [[**19**], Theorem 2.1]). *Pentru orice $n \geq 1$ şi orice întreg $k \geq 0$ are loc următoarea inegalitate*

$$\sigma_k^{(e)}(n) \geq \gamma^k(n)[1^k + 2^k + ... + (\tau^{(e)}(n))^k]. \tag{1.4.6}$$

Demonstraţie. Pentru $n = 1$, avem egalitate în relaţia (1.4.6).
Dacă $n > 1$, atunci aşezăm divizorii exponenţiali ai lui n în ordine crescătoare. Cel mai mic divizor exponenţial al lui $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_r^{a_r} > 1$ este $p_1p_2...p_r = \gamma(n)$. Al doilea divizor exponenţial este cel puţin $2p_1p_2...p_r = 2\gamma(n)$. Dacă $d_1, d_2, ..., d_s$ sunt divizorii exponenţiali ai lui n, atunci este uşor de văzut că $d_i \geq \gamma(n)\cdot i$ pentru toţi $i = \overline{1,s}$. Ultima inegalitate este, de fapt, inegalitatea $n \geq \gamma(n) \cdot \tau^{(e)}(n)$, care este adevărată pentru orice $n \geq 1$. Prin urmare, avem

$$\sigma_k^{(e)}(n) = \sum_{d|_{(e)}n} d^k \geq \gamma^k(n) + (2\cdot\gamma(n))^k + (3\cdot\gamma(n))^k + ... + (s\cdot\gamma(n))^k =$$

$$= \gamma^k(n)(1^k + 2^k + ... + s^k).$$

Aşadar, deducem inegalitatea

$$\sigma_k^{(e)}(n) \geq \gamma^k(n)(1^k + 2^k + ... + s^k),$$

unde $s = \tau^{(e)}(n)$.

OBSERVAŢIA 1.4.4 *În propoziţia 1.4.3, egalitatea are loc atunci când $n = \gamma(n) \cdot \tau^{(e)}(n)$. Aceasta implică egalitatea pentru $n = 1$, $n = p_1p_2...p_r$ şi $n = 4p_2...p_r$ ($p_i \neq 2$), unde p_i este un număr prim, pentru orice $1 \leq i \leq r$.*

PROPOZIŢIA 1.4.5 *Pentru orice $n \geq 1$, au loc următoarele inegalităţi:*

$$\sigma^{(e)}(n) \leq n + n\ln\tau^{(e)}(n) \leq n\tau^{(e)}(n) \tag{1.4.7}$$

şi

$$\sigma_k^{(e)}(n) < n^k\zeta(k), k > 1. \tag{1.4.8}$$

Demonstraţie. Pentru $n = 1$, relaţile (1.4.7) şi (1.4.8) sunt adevărate.
Dacă $n > 1$, atunci cel mai mic divizor exponenţial al lui $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_r^{a_r} > 1$ este $p_1p_2...p_r = \gamma(n)$. În continuare aproximăm divizorii exponenţiali ai lui n cu valori apropiate, dar mai mari. Dacă cel mai mare divizor exponenţial al lui n este n, următorul divizor exponenţial în sens descrescător este cel mult $\frac{n}{2}$. Prin urmare, dacă $\gamma(n) = d_1, d_2, ..., d_s = n$ sunt divizorii exponenţiali ai lui n, atunci este uşor de văzut că $d_j \leq \frac{n}{j}$ pentru toţi $i = \overline{1,s}$, unde $s = \tau^{(e)}(n)$. Aşadar, avem

$$\sigma^{(e)}(n) = d_s + d_{s-1} + d_{s-2} + ... + d_1 \leq n + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + ... + \frac{n}{s} = n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{s}\right) <$$

$$< n(1 + \ln s) = n(1 + \ln\tau^{(e)}(n)),$$

deci obţinem prima parte a inegalităţii (1.4.7). Prin utilizarea inegalităţii $1+\ln x \leq x$, pentru orice $x>0$, rezultă şi partea a doua a inegalităţii (1.4.7).
Pentru $k>1$, avem relaţia

$$\sigma_k^{(e)}(n) = d_s^k + d_{s-1}^k + d_{s-2}^k + ... + d_1^k \leq n^k + \left(\frac{n}{2}\right)^k + \left(\frac{n}{3}\right)^k + ... + \left(\frac{n}{s}\right)^k =$$

$$= n^k \left(1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + ... + \frac{1}{s^k}\right) < n^k \zeta(k),$$

care este adevărată, deoarece funcţia zeta a lui Riemann este dată de $1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + ... = \zeta(k)$. Astfel, relaţia (1.4.8) este adevărată şi demonstraţia se încheie.

□

În inegalitatea (1.4.8) avem o margine superioară pentru funcţia $\sigma_k^{(e)}$. Mai jos, prezentăm un rezultat ce arată o margine inferioară pentru această funcţie.

PROPOZIŢIA 1.4.6 (Minculete [**19**], Corollary 2.1, Corollary 2.2). *Pentru orice $n \geq 1$ şi $k \geq 2$, există inegalităţile următoare:*

$$\sigma_k^{(e)}(n) > \frac{[\tau^{(e)}(n)]^2 \cdot \gamma(n)}{\zeta(k)} \tag{1.4.9}$$

şi

$$\frac{\sigma^{(e)}(n)}{\tau^{(e)}(n)} \geq \gamma(n) \cdot \frac{\tau^{(e)}(n)+1}{2} \geq \gamma(n). \tag{1.4.10}$$

Demonstraţie. Aplicăm inegalitatea lui Cauchy în modul următor:

$$\left(\frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + ... + \frac{1}{s^k}\right)(1^k + 2^k + ... + s^k) \geq s^2,$$

unde $s = \tau^{(e)}(n)$. Dar

$$\zeta(k) = \frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + ... + \frac{1}{s^k} + ... > \frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + ... + \frac{1}{s^k}.$$

Aşadar, obţinem inegalitatea $1^k + 2^k + ... + s^k \geq \frac{s^2}{\zeta(k)} = \frac{[\tau^{(e)}(n)]^2}{\zeta(k)}$.
Utilizând propoziţia 1.4.4 şi inegalitatea de mai sus, deducem inegalitatea (1.4.9).
Pentru a demonstra relaţia (1.4.10), luăm $k=1$ în propoziţia 1.4.4 şi avem

$$\sigma^{(e)}(n) \geq \gamma(n)(1+2+...+s) = \gamma(n) \cdot \frac{s(s+1)}{2} = \gamma(n) \cdot \frac{\tau^{(e)}(n)(\tau^{(e)}(n)+1)}{2},$$

deci

$$\frac{\sigma^{(e)}(n)}{\tau^{(e)}(n)} \geq \gamma(n) \cdot \frac{\tau^{(e)}(n)+1}{2}.$$

Dar $\tau^{(e)}(n) \geq 1$, ceea ce înseamnă că

$$\frac{\sigma^{(e)}(n)}{\tau^{(e)}(n)} \geq \gamma(n) \cdot \frac{\tau^{(e)}(n)+1}{2} \geq \gamma(n).$$

Astfel, demonstraţia este completă.

□

OBSERVAŢIA 1.4.7 *Din faptul că* $(\tau^{(e)}(n)-1)(\gamma(n)-1) \geq 0$, *rezultă* $\tau^{(e)}(n)\gamma(n)+1 \geq \tau^{(e)}(n)+\gamma(n)$, *adică* $\tau^{(e)}(n)\gamma(n)+\gamma(n) \geq \tau^{(e)}(n)+2\gamma(n)-1$, *ceea ce este echivalent cu* $\frac{(\tau^{(e)}(n)+1)\gamma(n)}{2} \geq \gamma(n)+\frac{\tau^{(e)}(n)-1}{2}$. *Prin această comparare, dovedim că inegalitatea (1.4.10) este o rafinare a inegalităţii (1.2.17).*

CAPITOLUL 2

Funcţii aritmetice cu e-divizori unitari

Scopul acestui capitol este de a studia funcţiile aritmetice definite prin *e-divizorii unitari*. În clasa divizorilor unui număr n a fost indentificată o altă subclasă de divizori ai lui n, de către R. Vaidyanathaswamy în [**65**] şi de E. Cohen în [**4**], şi anume, subclasa divizorilor unitari. Mulţimea divizorilor exponenţiali ai unui număr natural n a fost construită cu ajutorul divizibilităţii exponenţilor numerelor prime ce apar în descompunerea canonică a lui n. În mod similar, apare naturală construcţia unei submulţimi a mulţimii divizorilor exponenţiali utilizând divizibilitatea unitară a exponenţilor. Ca urmare, în lucrarea [**30**] am definit e-divizorul unitar.

Menţionăm faptul că o referire la *convoluţia exponenţială unitară* a fost facută de M. V. Subbarao în lucrarea [**55**], dar fără o analiză detaliată a funcţiilor descrise cu ajutorul e-divizorilor unitari, adică $\tau^{(e)*}(n)$ – numărul e-divizorilor unitari ai lui n şi $\sigma^{(e)*}(n)$ – suma e-divizorilor unitari ai lui n. Observăm că mulţimea e-divizorilor unitari ai unui număr natural n este inclusă în mulţimea e-divizorilor lui n.

Printre rezultatele obţinute, enumerăm calcularea ordinului maximal şi comportările asimptotice ale funcţiilor $\tau^{(e)*}(n)$ şi $\sigma^{(e)*}(n)$.

Tot în acest capitol am introdus noţiunea de numere *e-unitare perfecte*. Am demonstrat următoarele două proprietăţi: există o infinitate de numere e-unitare perfecte şi nu există numere impare care să fie e-unitare perfecte. O problemă deschisă la acest capitol rămâne studierea existenţei unui număr e-unitar perfect nedivizibil cu 3.

Analiza numerelor e-unitare perfecte a fost aprofundată prin utilizarea programului Maple pentru a stabili care este primul număr e-perfect care nu este e-unitar perfect, obţinând astfel numărul $17424 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 11^2$.

2. Funcţii aritmetice cu e-divizori unitari

Rezultatele menţionate în al doilea capitol sunt, cele mai multe dintre ele, extrase din lucrările: [**18**] N. Minculete, "Concerning some aritmetic functions which use exponential divisors", *Acta Universitatis Apulensis Mathematics-Informatics*; [**19**] N. Minculete, "Some inequalities about certain arithmetic functions", *Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series*; [**28**] N. Minculete şi P. Dicu, "Certain aspects of some arithmetic functions in number theory", *General Mathematics*; [**30**] N. Minculete şi L. Tóth, "Exponential unitary divisors", *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis, Sectio Computatorica.*

De asemenea, în acest capitol prezentăm mai întâi câteva rezultate despre funcţiile multiplicative care ne vor fi utile în caracterizarea funcţiilor pe care le vom studia în această secţiune.

TEOREMA 2.0.1 (Tóth [[**62**], Theorem, p. 2]). *Fie f o funcţie aritmetică multiplicativă cu valori complexe, asfel încât*

a) $f(p) = f(p^2) = ... = f(p^{l-1}), f(p^l) = f(p^{l+1}) = k$ *pentru orice număr prim* p, *unde* $l, k \geq 2,\ l, k \in \mathbb{N}$;

b) există constantele $C, m > 0$, *astfel încât* $|f(p^a)| \leq Ca^m$ *pentru orice număr prim* p *şi pentru orice* $a \geq l + 2$.

Atunci, pentru $s \in \mathbb{C}$ *avem*

i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \zeta(s) \cdot \zeta^{k-1}(ls) \cdot V(s),\ \textit{pentru}\ \mathrm{Re}s > 1,$$

unde $V(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v(n)}{n^s}$ *este absolut convergentă pentru* $\mathrm{Re}s > \frac{1}{l+2}$, *iar*

$$v(p) = v(p^2) = ... = v(p^{l+1}) = 0\ \textit{şi}\ v(p^a) = \sum_{j \geq 0} (-1)^j \binom{k-1}{j} (f(p^{a-jl}) - f(p^{a-jl-1}))$$

pentru $a \geq l + 2$,

ii)

$$\sum_{n \leq x} f(n) = C_f x + x^{\frac{1}{l}} P_{f,k-2}(\ln x) + O(x^{u_{k,l}+\epsilon})$$

pentru orice $\epsilon > 0$, *unde* $P_{f,k-2}$ *este un polinom de gradul* $k-2$, $u_{k,l} = \frac{2k-1}{3+(2k-1)l}$ *şi*

$$C_f := \prod_p \left(1 + \sum_{a=l} \frac{f(p^a) - f(p^{a-1})}{p^a}\right).$$

TEOREMA 2.0.2 (De Koninck şi Ivić [**7**]). *Fie $f(n)$ o funcţie aritmetică multiplicativă, astfel încât, pentru orice p şi $a \in \mathbb{N}^*$, avem $f(p^a) = g(a)$, unde $g(1) = 1$, $g(a) > 1$ pentru $a \geq 2$ şi $\lim\limits_{a\to\infty} \inf g(a) > 1$. Atunci avem relaţia*

$$\sum_{2\leq n\leq x} \frac{1}{\ln f(n)} = x \int_{-\infty}^{0} \left(C(t) - \frac{6}{\pi^2} \right) dt + O\left(x^{\frac{1}{2}} \ln^{\frac{1}{2}} x \right),$$

unde

$$C(t) = \prod_p \left(1 + \sum_{a=2}^{\infty} \frac{g^t(a) - g^t(a-1)}{p^a} \right).$$

TEOREMA 2.0.3 (Wirsing [[**41**], p. 195]). *Fie f o funcţie aritmetică multiplicativă, astfel încât*

1) $f(n) \geq 0$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}^*$, şi

2) pentru orice număr prim p şi pentru orice $a \geq 2$ avem $f(p^a) \leq c_1 c_2^a$, cu $c_2 < 2$.
Dacă pentru $x \to \infty$ avem

$$\sum_{p\leq x} f(p) \ln p = (s + o(1))x,$$

unde $s \geq 0$ este o constantă, atunci pentru $x \to \infty$ avem

$$\sum_{n\leq x} f(n) = \left(\frac{e^{-\gamma s}}{\Gamma(s)} + o(1) \right) \frac{x}{\ln x} \prod_{p\leq x} \left(1 + \frac{f(p)}{p} + \frac{f(p^2)}{p^2} + ... \right),$$

unde γ este constanta lui Euler, iar $\Gamma(s)$ este funcţia lui Euler.

TEOREMA 2.0.4 (Sándor şi Tóth [[**51**], Theorem 2]). *Fie g o funcţie aritmetică. Presupunem că*

i) g are valorile naturale şi $g(n) \geq 1$ pentru orice $n \geq 1$,

ii) $g(n) \geq n$ pentru orice n suficient de mare ($n \geq n_0$),

iii) pentru oricare număr prim p suficient de mare ($p \geq p_0$), avem $g(p) = p + 1$ sau g este multiplicativă şi $g(p) = p$ pentru oricare număr prim p suficient de mare ($p \geq p_0$). Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \inf \frac{\varphi(g(n)) \ln \ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \inf \frac{\varphi(g(n)) \ln \ln g(n)}{g(n)} = e^{-\gamma},$$

unde φ este indicatorul lui Euler, iar γ este constanta lui Euler.

TEOREMA 2.0.5 (Sándor şi Tóth [[**51**], Theorem 5]). *Fie h o funcţie aritmetică, astfel încât $n \leq h(n) \leq \sigma(n)$ pentru orice n suficient de mare ($n \geq n_0$). Atunci*

$$\lim_{n\to\infty} \inf \frac{h(\sigma(n))}{n} = 1,$$

unde $\sigma(n)$ este suma divizorilor naturali ai lui n.

TEOREMA 2.0.6 (Tóth şi Wirsing [[**64**], Corollary 1]). *Dacă pentru orice număr prim p avem relaţia $\rho(p) = \sup_{a\geq 0} f(p^a) \leq \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{p}}$ şi există e_p astfel încât $f(p^{e_p}) \geq 1 + \dfrac{1}{p}$, atunci are loc relaţia*

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{f(n)}{\ln\ln n} = e^{\gamma} \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \rho(p),$$

unde γ este constanta lui Euler.
Cu alte cuvinte, ordinul maximal al lui $f(n)$ este $e^{\gamma} \left(\prod_{p} \left(1 - \dfrac{1}{p}\right) \rho(p)\right) \ln\ln n$.

2.1 Numărul e-divizorilor unitari ai unui număr natural

În lucrarea [**30**] am introdus noţiunea de divizor exponenţial unitar sau e-divizor unitar pentru un număr natural.

DEFINIŢIA 2.1.0 *Fie $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_r^{a_r}$ descompunerea canonică a numărului natural $n > 1$. Se numeşte divizor exponenţial unitar sau e-divizor unitar al lui n numărul natural $d = \prod_{i=1}^{r} p_i^{b_i}$ pentru care b_i este un divizor unitar al lui a_i, adică $\left(b_i, \dfrac{a_i}{b_i}\right) = 1$ pentru orice $i = \overline{1,r}$. Prin convenţie, 1 este un e-divizor unitar al său.*

În acest caz notăm $d \parallel_{(e)} n$ şi prin $\tau^{(e)*}(n)$ notăm numărul e-divizorilor unitari ai lui n. Este uşor de văzut că $\tau^{(e)*}(1) = 1$ şi că 1 nu este e-divizor unitar al lui $n > 1$, iar cel mai mic e-divizor unitar al lui $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_r^{a_r} > 1$ este $p_1 p_2 ... p_r = \gamma(n)$. De asemenea, observăm că e-divizorii unitari ai lui n se găsesc printre divizorii exponenţiali ai lui n, deci

$$\tau^{(e)*}(n) \leq \tau^{(e)}(n).$$

De exemplu, numărul $n = 2^6 \cdot 3^4$ are următorii e-divizori:

$$2 \cdot 3,\ 2^2 \cdot 3,\ 2^3 \cdot 3,\ 2^6 \cdot 3,$$

$$2 \cdot 3^2,\ 2^2 \cdot 3^2,\ 2^3 \cdot 3^2,\ 2^6 \cdot 3^2,$$
$$2 \cdot 3^4,\ 2^2 \cdot 3^4,\ 2^3 \cdot 3^4 \text{ şi } 2^6 \cdot 3^4,$$

iar e-divizorii unitari sunt următorii:

$$2 \cdot 3,\ 2^2 \cdot 3,\ 2^3 \cdot 3,\ 2^6 \cdot 3,$$
$$2 \cdot 3^4,\ 2^2 \cdot 3^4,\ 2^3 \cdot 3^4 \text{ şi } 2^6 \cdot 3^4,$$

ceea ce înseamnă că $\tau^{(e)*}(2^6 \cdot 3^4) = 4 \cdot 2 = 8$. Observăm că

$$2 \cdot 3^2,\ 2^2 \cdot 3^2,\ 2^3 \cdot 3^2 \text{ şi } 2^6 \cdot 3^2$$

nu sunt e-divizori unitari ai lui n.
Pentru $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot ... \cdot p_r^{a_r} > 1$, avem

$$\tau^{(e)*}(n) = \tau^*(a_1) \cdot \tau^*(a_2) \cdot ... \cdot \tau^*(a_r) = 2^{\omega(a_1)+\omega(a_2)+...+\omega(a_r)} \tag{2.1.1}$$

şi rezultă că funcţia aritmetică $\tau^{(e)*}(n) = \sum_{d\|_{(e)}n} 1$ este multiplicativă.
Cum funcţia ω este aditivă, iar $(a_i, a_j) = 1$ pentru toţi $1 \leq i < j \leq r$, rezultă relaţia

$$\tau^{(e)*}(n) = 2^{\omega(a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_r)},$$

iar în general, avem

$$\tau^{(e)*}(n) \geq 2^{\omega(a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_r)}. \tag{2.1.2}$$

Pentru a face o descriere a funcţiei $\tau^{(e)*}$, luăm diferite cazuri particulare pentru n. Fie $n = p^a$ cu exponentul a liber de pătrate. Dacă $d|a$, atunci $\left(d, \frac{a}{d}\right) = 1$, deci $\tau^{(e)*}(p^a) = \tau^{(e)}(p^a)$. Prin urmare, dacă $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot ... \cdot p_r^{a_r} > 1$ cu exponentul a_i liber de pătrate, $(\forall)\ i = \overline{1,r}$, atunci numărul e-divizorilor unitari ai lui n este egal cu numărul e-divizorilor lui n, adică

$$\tau^{(e)*}(n) = \tau^{(e)}(n). \tag{2.1.3}$$

L. Tóth a studiat în lucrarea [[**63**], Theorem 4, p. 155] funcţia definită astfel:

$$t^{(e)}(1) = 1 \text{ şi } t^{(e)}(n) = 2^{\omega(a_1)} \cdot 2^{\omega(a_2)} \cdot ... \cdot 2^{\omega(a_r)} \text{ pentru } n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot ... \cdot p_r^{a_r} > 1.$$

Această funcţie reprezintă numărul e-divizorilor e-liberi de pătrate, adică al e-divizorilor $d = \prod_{i=1}^{r} p_i^{b_i}$ pentru care b_i este liber de pătrate pentru orice $i = \overline{1,r}$.
Se observă uşor că această funcţie este chiar $\tau^{(e)*}(n)$, deci $\tau^{(e)*}(n) = t^{(e)}(n)$.

2. Funcţii aritmetice cu e-divizori unitari

Utilizăm, pentru funcţia $\tau^{(e)*}(n)$, rezultatele lui L. Tóth obţinute în lucrarea [**63**] pentru funcţia $t^{(e)}$ şi deducem rezultatele pe care le-am menţionat în lucrarea [**30**]. Acestea sunt următoarele:

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{\ln \tau^{(e)*}(n) \cdot \ln\ln n}{\ln n} = \frac{1}{2}\ln 2. \tag{2.1.4}$$

Adică avem:

a) Pentru $\epsilon > 0$ există un rang $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, astfel încât $\tau^{(e)*}(n) < n^{(1+\epsilon)\ln 2/2\ln\ln n}$ pentru orice $n \geq N(\epsilon)$;

b) Pentru $\epsilon > 0$ există o infinitate de numere n, astfel încât $\tau^{(e)*}(n) > n^{(1-\epsilon)\ln 2/2\ln\ln n}$.

Referitor la comportarea asimptotică a funcţiei $\tau^{(e)*}$, am obţinut relaţia

$$\sum_{n\leq x} \tau^{(e)*}(n) = Ax + Bx^{\frac{1}{2}} + O\left(x^{\frac{1}{4}+\epsilon}\right) \tag{2.1.5}$$

pentru orice $\epsilon > 0$, unde A şi B sunt constante date în felul următor:

$$A := \prod_p \left(1 + \sum_{a\geq 2} \frac{\tau^*(a) - \tau^*(a-1)}{p^a}\right) = \prod_p \left(1 + \sum_{a\geq 2} \frac{2^{\omega(a)} - 2^{\omega(a-1)}}{p^a}\right)$$

şi

$$B := \zeta\left(\frac{1}{2}\right) \prod_p \left(1 + \sum_{a\geq 4} \frac{\tau^*(a) - \tau^*(a-1) - \tau^*(a-2) + \tau^*(a-3)}{p^{\frac{a}{2}}}\right) =$$

$$= \zeta\left(\frac{1}{2}\right) \prod_p \left(1 + \sum_{a\geq 4} \frac{2^{\omega(a)} - 2^{\omega(a-1)} - 2^{\omega(a-2)} + 2^{\omega(a-3)}}{p^{\frac{a}{2}}}\right).$$

Seria Dirichlet asociată funcţiei $\tau^{(e)*}(n)$ este de forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau^{(e)*}(n)}{n^s} = \zeta(s) \cdot \zeta(2s) \cdot V(s) \text{ pentru } \mathrm{Re}s > 1, \tag{2.1.6}$$

unde $V(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v(n)}{n^s}$ este absolut convergentă pentru $\mathrm{Re}s > \frac{1}{4}$, iar

$$v(p) = v(p^2) = v(p^3) = 0 \text{ şi } v(p^a) = 2^{\omega(a)} - 2^{\omega(a-1)} - 2^{\omega(a-2)} + 2^{\omega(a-3)} \text{ pentru } a \geq 4.$$

Notăm prin $T^{(e)*}$ produsul tuturor e-divizorilor unitari ai lui n.
Este simplu de observat că pentru $n = p^a$, unde a are divizorii unitari $d_1, d_2, ..., d_s$, avem relaţia

$$T^{(e)*}(p^a) = p^{d_1} \cdot p^{d_2} \cdot ... \cdot p^{d_s} = p^{d_1+d_2+...+d_s} = p^{\sigma^*(a)}.$$

Aşadar, rezultă că

$$T^{(e)*}(n) = [t^*(n)]^{\frac{\tau^{(e)*}(n)}{2}}, \tag{2.1.7}$$

unde $t^*(1) = 1$ şi $t^*(n) = p_1^{\frac{\sigma^*(a_1)}{\tau^*(a_1)}} \cdot p_2^{\frac{\sigma^*(a_2)}{\tau^*(a_2)}} \cdot ... \cdot p_r^{\frac{\sigma^*(a_r)}{\tau^*(a_r)}}$ pentru $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot ... \cdot p_r^{a_r} > 1$.
Cum divizorii exponenţiali unitari ai lui n se află printre divizorii exponenţiali ai lui n care, la rândul lor, se află printre divizorii lui n, deducem că

$$\tau^{(e)*}(n) \leq \tau^{(e)}(n) \leq \tau(n). \tag{2.1.8}$$

J. Sándor, în lucrarea [[**50**], p. 233], arată că $\dfrac{\sigma^*(n)}{\tau^*(n)} \geq \dfrac{\sigma(n)}{\tau(n)}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Această inegalitate implică relaţia

$$t(n) \leq t^*(n) \leq n, \tag{2.1.9}$$

unde $t(1) = 1$ şi $t(n) = p_1^{\frac{\sigma(a_1)}{\tau(a_1)}} \cdot p_2^{\frac{\sigma(a_2)}{\tau(a_2)}} \cdot ... \cdot p_r^{\frac{\sigma(a_r)}{\tau(a_r)}}$ este o funcţie aritmetică studiată de J. Sándor în articolul [**45**].
Observăm că dacă n este un pătrat perfect, atunci

$$2^{\omega(n)} \leq \tau^{(e)*}(n) \leq \tau^{(e)}(n) \leq 2^{\Omega(n)}, \tag{2.1.10}$$

unde $\omega(n)$ şi $\Omega(n)$ reprezintă numărul factorilor primi distincţi ai lui n, respectiv numărul factorilor primi distincţi ai lui n împreună cu multiplicităţile lor.
De asemenea, mai observăm că dacă exponenţii $a_1, a_2, ..., a_r$ sunt numere prime, atunci avem $\tau(a_i) = 2$, $(\forall)\ i = \overline{1, r}$, deci numărul e-divizorilor unitari ai lui n este egal cu numărul e-divizorilor lui n, care este egal cu numărul divizorilor unitari ai lui n, adică

$$\tau^{(e)*}(n) = \tau^{(e)}(n) = 2^{\omega(n)} = \tau^*(n).$$

În continuare prezentăm câteva proprietăţi ale funcţiei aritmetice $\tau^{(e)*}$, ţinând seama de teoremele enunţate la începutul celui de-al doilea capitol.

PROPOZIŢIA 2.1.1 *Există următoarele relaţii:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\tau^{(e)*}(n)]^r}{n^s} = \zeta(s)\zeta^{2^r-1}(2s)V(s) \text{ pentru } \mathrm{Re}s > 1, \tag{2.1.11}$$

unde $V(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v(n)}{n^s}$ *este absolut convergentă pentru* $Res > \dfrac{1}{4}$, *iar*

$$v(p) = v(p^2) = v(p^3) = 0 \text{ şi } v(p^a) = \sum_{j \geq 0} (-1)^j \binom{2^r - 1}{j} (2^{r\omega(a-2j)} - 2^{r\omega(a-2j-1)})$$

pentru $a \geq 4$,

$$\sum_{n\leq x}(\tau^{(e)*}(n))^r = A_r x + x^{\frac{1}{2}} P_{2^r-2}(\ln x) + O(x^{u_r+\epsilon}) \tag{2.1.12}$$

pentru orice $\epsilon > 0$, *unde* P_{2^r-2} *este un polinom de gradul* $2^r - 2$, $u_r = \dfrac{2^{r+1}-1}{2^{r+2}+1}$ *şi*

$$A_r := \prod_p \left(1 + \sum_{a=2} \frac{2^{r\cdot\omega(a)} - 2^{2^{r\cdot\omega(a-1)}}}{p^a}\right).$$

Demonstraţie. În cazul $f(n) = (\tau^{(e)*}(n))^r$ cu $r \geq 1$, aplicăm teorema 2.0.1 pentru $l = 2, k = 2^r$ şi obţinem relaţiile (2.1.11) şi (2.1.12).

□

PROPOZIŢIA 2.1.2 *Există următoarea relaţie:*

$$\sum_{2\leq n\leq x} \frac{1}{\ln \tau^{(e)*}(n)} = x \int_{-\infty}^{0} \left(C(t) - \frac{6}{\pi^2}\right) dt + O\left(x^{\frac{1}{2}} \ln^{\frac{1}{2}} x\right), \tag{2.1.13}$$

unde

$$C(t) = \prod_p \left(1 + \sum_{a=2}^{\infty} \frac{2^{t\omega(a)} - 2^{t\omega(a-1)}}{p^a}\right).$$

Demonstraţie. Considerăm funcţia $f(n) = \tau^{(e)*}(n)$, ceea ce implică relaţia $f(p^a) = \tau^{(e)*}(p^a) = \tau^*(a) = 2^{\omega(a)} > 1$ pentru orice $a \geq 2$. Dar $\tau^*(1) = 1$ şi $\lim\limits_{a\to\infty} \inf 2^{\omega(a)} > 1$.
Prin urmare, condiţiile din teorema 2.0.2 sunt îndeplinite, deci obţinem relaţia (2.1.13).

PROPOZIŢIA 2.1.3 *Pentru* $x \to \infty$, *avem*

$$\sum_{n\leq x} \tau^{(e)*}(n) = \left(\frac{e^{-\gamma x}}{\Gamma(s)} + o(1)\right) \frac{x}{\ln x} \prod_{p\leq x} \left(1 + \frac{\tau^{(e)*}(p)}{p} + \frac{\tau^{(e)*}(p^2)}{p^2} + ...\right). \tag{2.1.14}$$

Demonstraţie. Este uşor de văzut că $\tau^{(e)*}(n) \geq 0$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$, iar

$$\tau^{(e)*}(p^a) = \tau^*(a) = 2^{\omega(a)}.$$

Prin utilizarea relaţiei $\tau(n) < 2\sqrt{n}$ (vezi e.g. [**38**, p. 52]), rezultă că $\tau^{(e)*}(p^a) < 2\sqrt{a}$. Se arată uşor că există constantele c_1 şi c_2, astfel încât $2\sqrt{a} \leq c_1 c_2^a$ cu $c_2 < 2$. Alegem $c_1 = 2$ şi $c_2 = \frac{3}{2}$. Prin întrebuinţarea inegalităţii lui Bernoulli, avem

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2a} = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{2a} \geq 1 + a > a,$$

adică $\left(\frac{3}{2}\right)^a > \sqrt{a}$, deci $2\sqrt{a} \leq c_1 c_2^a$. Prin urmare, avem îndeplinită şi a doua condiţie din teorema 2.0.3. Mai trebuie să arătăm că pentru $x \to \infty$ avem

$$\sum_{p \leq x} \tau^{(e)*}(p) \ln p = (s + o(1))x,$$

unde $s \geq 0$ este o constantă.
Aşadar $\sum_{p \leq x} \tau^{(e)*}(p) \ln p = \sum_{p \leq x} \ln p = \ln \prod_{p \leq x} p$. Din lema lui Finsler (vezi e.g. [[**38**], p. 76]), avem $\prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p \leq x}} p < 4^x$, deci $\ln \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p \leq x}} p < x \ln 4$. Cu alte cuvinte, rezultă că

$$\sum_{p \leq x} \tau^{(e)*}(p) \ln p = (s + o(1))x.$$

În concluzie, condiţiile din teorema 2.0.3 sunt îndeplinite, deci aceasta demonstrează relaţia (2.1.14).

□

2.2 Suma e-divizorilor unitari ai unui număr natural

Anterior am introdus noţiunea de *divizor exponenţial unitar* sau *e-divizor unitar*. Notăm prin $\sigma^{(e)*}(n)$ suma e-divizorilor unitari ai lui n. Prin convenţie, 1 este un e-divizor unitar al său, deci $\sigma^{(e)*}(1) = 1$. Observăm că e-divizorii unitari ai lui n se găsesc printre divizorii exponenţiali ai lui n, deci

$$\sigma^{(e)*}(n) \leq \sigma^{(e)}(n). \tag{2.2.1}$$

De exemplu, numărul $n = 2^6 \cdot 3^4$ are următorii e-divizori:

$$2 \cdot 3,\ 2^2 \cdot 3,\ 2^3 \cdot 3,\ 2^6 \cdot 3,$$

$$2 \cdot 3^2,\ 2^2 \cdot 3^2,\ 2^3 \cdot 3^2,\ 2^6 \cdot 3^2,$$

$$2 \cdot 3^4,\ 2^2 \cdot 3^4,\ 2^3 \cdot 3^4 \text{ şi } 2^6 \cdot 3^4,$$

iar e-divizorii unitari sunt următorii:

$$2 \cdot 3,\ 2^2 \cdot 3,\ 2^3 \cdot 3,\ 2^4 \cdot 3,$$

$$2 \cdot 3^4,\ 2^2 \cdot 3^4,\ 2^3 \cdot 3^4 \text{ şi } 2^6 \cdot 3^4,$$

ceea ce înseamnă că $\sigma^{(e)*}(2^6 \cdot 3^4) = (2 + 2^2 + 2^3 + 2^6)(3 + 3^4) = 6552$.

2. Funcţii aritmetice cu e-divizori unitari

Studiind sumele diferitelor tipuri de divizori ai unui număr natural, analizaţi până acum în lucrare, observăm că

$$\sigma^{(e)*}(n) \leq \sigma^{(e)}(n) \leq \sigma(n) \tag{2.2.2}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Este uşor de observat că pentru următoarea descompunere canonică a lui $n,\ n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot ... \cdot p_r^{a_r} > 1$, obţinem

$$\sigma^{(e)*}(n) = \prod_{i=1}^{r} \left(\sum_{d \| a_i} p_i^d \right), \tag{2.2.3}$$

care arată că funcţia aritmetică $\sigma^{(e)*}(n) = \sum_{d \|_{(e)} n} d$ este multiplicativă.

De asemenea, observăm că dacă n este liber de pătrate, atunci $\sigma^{(e)*}(n) = n$.

În continuare, studiem cazul în care n este o putere a unui număr prim pentru ca ulterior, folosind multiplicativitatea, să descriem proprietăţile funcţiei $\sigma^{(e)*}$ pentru orice număr natural.

Fie $n = p^a$ cu exponentul a liber de pătrate. Dacă $d|a$, atunci $\left(d, \frac{a}{d}\right) = 1$, deci toţi divizorii lui a sunt divizori unitari ai lui a. Prin urmare, $\sigma^{(e)*}(p^a) = \sigma^{(e)}(p^a)$, ceea ce înseamnă că pentru $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot ... \cdot p_r^{a_r} > 1$, cu toţi exponenţii a_i liberi de pătrate, obţinem egalitatea

$$\sigma^{(e)*}(n) = \sigma^{(e)}(n). \tag{2.2.4}$$

Aşadar, suma e-divizorilor unitari ai lui n este aceeaşi cu suma e-divizorilor lui n.

În mod similar cu noţiunea de număr perfect, descrisă anterior, definim *numărul e-unitar perfect* drept un număr natural n pentru care $\sigma^{(e)*}(n) = 2n$.

În cele ce urmează, cercetăm câteva dintre aspectele referitoare la numerele e-unitare perfecte. Este uşor de sesizat că dacă m este un număr liber de pătrate şi n este un număr e-unitar perfect, astfel încât $(m, n) = 1$, atunci mn este e-unitar perfect. Această proprietate este imediată, deoarece funcţia $\sigma^{(e)*}$ este multiplicativă, iar $\sigma^{(e)*}(m) = m$ şi $\sigma^{(e)*}(n) = 2n$. Ca urmare, vom avea relaţia

$$\sigma^{(e)*}(m \cdot n) = \sigma^{(e)*}(m) \cdot \sigma^{(e)*}(n) = m \cdot 2n = 2mn,$$

adică ceea ce trebuia să arătăm.

O legătură între numerele e-perfecte şi numerele e-unitare perfecte este dată de următoarea propoziţie:

PROPOZIŢIA 2.2.1 *Un număr $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot .... \cdot p_r^{a_r} > 1$ cu exponentul a_i liber de pătrate, $(\forall)\ i = \overline{1, r}$, este e-perfect dacă şi numai dacă este e-unitar perfect.*

Demonstraţie. Dacă un număr $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot ... \cdot p_r^{a_r} > 1$ cu toţi exponenţii a_i liberi de pătrate, este e-perfect, atunci, din relaţia (2.2.4), avem $\sigma^{(e)*}(n) = \sigma^{(e)}(n)$. Cum $\sigma^{(e)}(n) = 2n$, rezultă $\sigma^{(e)*}(n) = 2n$, deci n este e-unitar perfect. Reciproca se demonstrează în mod analog.

□

Câteva numere e-perfecte date de E. G. Straus şi M. V. Subbarao în lucrarea [**54**] sunt următoarele:

$$2^2 \cdot 3^2,\ 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2,\ 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2,\ 2^4 \cdot 3^2 \cdot 11^2,\ 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 11^2,\ 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13^2,$$

$$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13^2,\ 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13^2,\ 2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 139^2 \text{ şi}$$

$$2^{19} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 19^2 \cdot 37^2 \cdot 79^2 \cdot 109^2 \cdot 157^2 \cdot 313^2.$$

Conform teoremei de mai sus, şapte dintre numerele e-perfecte enumerate sunt e-unitare perfecte, şi anume

$$2^2 \cdot 3^2,\ 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2,\ 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2,\ 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13^2,\ 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13^2,\ 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13^2 \text{ şi}$$

$$2^{19} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 19^2 \cdot 37^2 \cdot 79^2 \cdot 109^2 \cdot 157^2 \cdot 313^2.$$

Cu ajutorul calculatorului, am determinat toate numerele e-unitare perfecte până la 1000. Acestea sunt următoarele:

$$36, 180, 252, 396, 468, 612, 684 \text{ şi } 828.$$

Cercetarea numerelor e-unitare perfecte a continuat şi peste 1000, astfel am obţinut cel mai mic număr natural care este e-perfect şi care nu este e-unitar perfect, acesta fiind

$$17424 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 11^2.$$

Studiind mulţimea numerelor e-unitare perfecte şi paritatea acestora, am obţinut rezultatele următoare:

PROPOZIŢIA 2.2.2 *Există o infinitate de numere e-unitare perfecte.*

Demonstraţie. Utilizăm faptul că, dacă m este un număr liber de pătrate şi n este un număr e-unitar perfect astfel încât $(m, n) = 1$, atunci mn este e-unitar perfect. Cum 36 este primul număr e-unitar perfect, rezultă că $36p$ este e-unitar perfect, unde p este un număr prim mai mare sau egal cu 5. Conform teoremei lui Euclid, există o infinitate de numere prime, deci există o infinitate de numere e-unitare perfecte.

□

PROPOZIŢIA 2.2.3 (Minculete şi Tóth [[**30**], Theorem 5]). *Nu există numere impare care să fie e-unitare perfecte.*

Demonstraţie. Presupunem prin absurd că există numere impare e-unitare perfecte. Fie n_0 cel mai mic număr impar exponenţial unitar, astfel încât $\sigma^{(e)*}(n_0) = 2n_0$. Observăm că n_0 nu poate fi număr prim, deoarece $\sigma^{(e)*}(n_0) = n_0 = 2n_0$ şi ajungem la o contradicţie. Prin urmare, n_0 trebuie să fie număr compus. Dacă în descompunerea canonică a lui n_0 avem şi factori primi cu exponentul egal cu 1, atunci facem o reordonare a factorilor primi, adică $n_0 = p_1p_2...p_sp_{s+1}^{a_{s+1}}...p_r^{a_r}$, şi alegem $n_1 = p_1p_2...p_s$ şi $n_2 = p_{s+1}^{a_{s+1}}...p_r^{a_r}$. Evident că n_1 şi n_2 sunt impare şi $(n_1, n_2) = 1$, iar $n_1, n_2 < n_0$.
Cum $\sigma^{(e)*}(n_0) = 2n_0$, deducem că $\sigma^{(e)*}(n_1n_2) = 2n_1n_2$, adică $\sigma^{(e)*}(n_2) = 2n_2$. Aşadar am obţinut un număr impar n_2 mai mic decât n_0 care este e-unitar perfect, ceea ce este o contradicţie.
Dacă $n_0 = p_1^{a_1}...p_r^{a_r}$, astfel încât $a_i \geq 3,\ (\forall)\ i \in \{1, 2, ..., r\}$, atunci, utilizând relaţia (1.2.5) avem

$$\sigma^{(e)*}(n_0) \leq \sigma^{(e)}(n_0) \leq \frac{9}{5}n_0 < 2n_0,$$

ceea ce este o contradicţie, deoarece $\sigma^{(e)*}(n_0) = 2n_0$.
Prin urmare, există cel puţin un $a_k = 2$. Fără a micşora generalitatea, renumerotând factorii primi din descompunerea lui n_0, luăm $n_0 = p_1^2p_2^2...p_s^2p_{s+1}^{a_{s+1}}...p_r^{a_r}$ cu $a_i \geq 3,\ (\forall)\ i \in \{s+1, ..., r\}$, iar $p_1, ..., p_s$ sunt numere prime mai mari sau egale cu 3.
Alegem $n_1 = p_1^2p_2^2...p_s^2$ şi $n_2 = p_{s+1}^{a_{s+1}}...p_r^{a_r}$. Evident că n_1 şi n_2 sunt impare şi $(n_1, n_2) = 1$, iar $n_1, n_2 < n_0$. Dar $\sigma^{(e)*}(n_1) = \prod_{i=1}^{s}(p_i + p_i^2)$, ceea ce înseamnă că egalitatea $\sigma^{(e)*}(n_0) = 2n_0$ devine $(p_1 + 1)...(p_s + 1)\sigma^{(e)*}(n_2) = 2p_1...p_sn_2$.
Cum $p_1, ..., p_s$ sunt numere impare, rezultă că $p_1 + 1, ..., p_s + 1$ sunt numere pare, deci 2^s divide numărul $2p_1...p_sn_2$, însă numărul $p_1...p_sn_2$ este impar, deci rezultă că $s = 1$.
În consecinţă, avem $n_0 = p_1^2p_2^{a_2}...p_r^{a_r}$, unde $p_1, ..., p_s$ sunt numere impare şi $a_i \geq 3,\ (\forall)\ i \in \{2, ..., r\}$. În acest caz, relaţia $\sigma^{(e)*}(n_0) = 2n_0$ devine

$$(p_1 + 1)\sigma^{(e)*}(p_2^{a_2})...\sigma^{(e)*}(p_r^{a_r}) = 2p_1p_2^{a_2}...p_r^{a_r}.$$

Fie $\sigma^{(e)*}(p_2^{a_2}) = p_2^{d_1} + p_2^{d_2} + ... + p_2^{d_k}$, unde $k = \tau^*(a_2) = 2^{\omega(a_2)}$. Cum k este un număr par, rezultă că adunând un număr par de numere impare, obţinem un număr par, deci numărul $\sigma^{(e)*}(p_2^{a_2})$ este par. Prin urmare, numărul $(p_1 + 1)\sigma^{(e)*}(p_2^{a_2})$ este divizibil cu 4, deci 4 divide numărul $2p_1p_2^{a_2}...p_r^{a_r}$, ceea ce este o contradicţie.
Astfel, demonstraţia se încheie.

□

OBSERVAŢIA 2.2.4 *Similar relaţiei (1.2.4), deducem că, dacă* $\sigma^{(e)*}(n)$ *este suma e-divizorilor unitari ai lui* $n, \sigma^{(e)}(n)$ *este suma divizorilor exponenţiali ai lui* n, ψ *este funcţia lui Dedekind, iar* $\sigma(n)$ *este suma divizorilor naturali ai lui* n*, atunci*

$$\sigma^{(e)*}(n) \leq \sigma^{(e)}(n) \leq \psi(n) \leq \sigma(n) \tag{2.2.5}$$

pentru orice $n \geq 1$.

OBSERVAŢIA 2.2.5 *Cum* $\sigma^{(e)*}(n) \leq \sigma^{(e)}(n)$*, rezultă imediat, din propoziţia 1.2.2, că, dacă* $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_r^{a_r}$ *cu* $a_i \neq 2$ *pentru orice* $i = \overline{1,r}$*, atunci*

$$\sigma^{(e)*}(n) \leq \sigma^{(e)}(n) \leq \frac{\zeta(2)\cdot\zeta(3)}{\zeta(4)\cdot\zeta(6)}n \tag{2.2.6}$$

şi

$$\sigma^{(e)*}(n) \leq \sigma^{(e)}(n) \leq \frac{9}{5}n. \tag{2.2.7}$$

PROPOZIŢIA 2.2.6 *Dacă* $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_r^{a_r}$ *este un număr e-unitar perfect, atunci cel puţin un exponent* a_i *este egal cu* 2.

Demonstraţie. Presupunem prin absurd că numărul $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_r^{a_r}$ cu $a_i \neq 2$ pentru orice $1 \leq i \leq r$ este un număr e-unitar perfect, deci $\sigma^{(e)*}(n) = 2n$. Din observaţia 2.2.5 avem $\sigma^{(e)*}(n) \leq \sigma^{(e)}(n) \leq \frac{9}{5}n < 2n$, deci $\sigma^{(e)*}(n) < 2n$, care înseamnă că am obţinut o contradicţie. În consecinţă, nu există niciun număr e-unitar perfect de tipul $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_r^{a_r}$ cu $a_i \neq 2$ pentru orice $1 \leq i \leq r$.

□

În lucrarea [**30**] am definit *convoluţia exponenţială unitară* în modul următor:

$$(f *_{(e)*} g)(1) = f(1)g(1) \text{ şi}$$

$$(f *_{(e)*} g)(n) = \sum_{\substack{b_1c_1=a_1\\(b_1,c_1)=1}} ... \sum_{\substack{b_rc_r=a_r\\(b_r,c_r)=1}} f(p_1^{b_1}...p_r^{b_r})g(p_1^{c_1}...p_r^{c_r}) \text{ pentru } n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_r^{a_r} > 1.$$

Se arată uşor că mulţimea funcţiilor aritmetice formează un monoid comutativ în raport cu convoluţia exponenţială unitară având elementul neutru μ^2.

O funcţie f este inversabilă în raport cu convoluţia unitară dacă şi numai dacă $f(1) \neq 0$ şi $f(p_1...p_k) \neq 0$ pentru orice numere prime distincte $p_1, ..., p_k$.

Observăm că inversa funcţiei $1(n) = 1 (n \geq 1)$ în raport cu convoluţia exponenţială unitară este funcţia $\mu^{(e)*}(n) = \mu^*(a_1)...\mu^*(a_r) = (-1)^{\omega(a_1)+...+\omega(a_r)}$ pentru $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_r^{a_r} > 1$, iar $\mu^{(e)*}(1) = 1$. Aceasta este o funcţie de tip Möbius.

Studiind comportarea asimptotică a funcţiei $\mu^{(e)*}$, am obţinut următoarea teoremă:

TEOREMA 2.2.7 (Minculete şi Tóth [[**30**], Theorem 2]). *Există următoarele relaţii:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu^{(e)*}(n)}{n^s}=\frac{\zeta(s)}{\zeta^2(2s)}W(s)\ pentru\ \mathrm{Re}s>1, \tag{2.2.8}$$

unde $W(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w(n)}{n^s}$ *este absolut convergentă pentru* $\mathrm{Re}s>\frac{1}{3}$*;*

$$\sum_{n\leq x}\mu^{(e)*}(n)=C_3x+O\left(x^{\frac{1}{2}}\exp(-c(\log x))^{\Delta}\right), \tag{2.2.9}$$

unde

$$C_3=\prod_p\left(1+\sum_{a=2}^{\infty}\frac{(-1)^{\omega(a)}-(-1)^{\omega(a-1)}}{p^a}\right),$$

iar $\Delta<\frac{9}{25}=0,36$ *şi* $c>0$ *sunt constante.*

Demonstraţie. Un rezultat similar a fost dovedit pentru funcţia $\mu^{(e)}$ în lucrarea [[**63**], Theorem 2]. Aplicăm aceeaşi modalitate de demonstraţie pentru funcţia $\mu^{(e)*}$ şi deducem rezultatele de mai sus.

□

Plecând de la definiţia indicatorului lui Euler, $\varphi(n)=card\{k\in\mathbb{N}|1\leq k<n,(k,n)=1\}$, ne-am pus problema existenţei unei funcţii similare în cazul e-divizorilor unitari. Ca urmare, în lucrarea [**30**] definim funcţia $\varphi^{(e)*}(n)=\varphi^*(a_1)...\varphi^*(a_r)$, pentru $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_r^{a_r}>1$, iar $\varphi^{(e)*}(1)=1$, unde

$$\varphi^*(n)=card\{k\in\mathbb{N}|1\leq k<n,(k,n)_*=1\},$$

iar $(k,n)_*:=\max\{d\in\mathbb{N}:d|k,d\parallel n\}$.
Aceasta reprezintă o altă funcţie aritmetică multiplicativă de tipul indicatorului lui Euler.
De aceea, considerăm că este importantă o studiere a comportării asimptotice a funcţiei $\varphi^{(e)*}$. Astfel, deducem rezultatul următor:

TEOREMA 2.2.8 (Minculete şi Tóth [[**30**], Theorem 3])

$$\sum_{n\leq x}\varphi^{(e)*}(n)=C_4x+C_5x^{\frac{1}{3}}+O\left(x^{\frac{1}{4}+\epsilon}\right) \tag{2.2.10}$$

pentru orice $\epsilon>0$*, unde* C_4 *şi* C_5 *sunt constante date astfel:*

$$C_4=\prod_p\left(1+\sum_{a=3}^{\infty}\frac{\varphi^*(a)-\varphi^*(a-1)}{p^a}\right)$$

şi

$$C_5 = \zeta\left(\frac{1}{3}\right)\prod_p\left(1+\frac{1}{p^{4/3}}+\sum_{a=5}^{\infty}\frac{\varphi^*(a)-\varphi^*(a-1)-\varphi^*(a-3)+\varphi^*(a-4)}{p^{a/3}}\right).$$

Demonstraţie. Un rezultat similar a fost dovedit pentru funcţia $\varphi^{(e)}$ în lucrarea [[**60**], Theorem 1]. Aplicăm aceeaşi modalitate de demonstraţie pentru funcţia $\varphi^{(e)*}$ şi deducem rezultatele de mai sus.

□

O expresie asimptotică pentru $\sigma(n)$ este dată de T. H. Gronwall în lucrarea [**4**], astfel: $\limsup_{n\to\infty}\frac{\sigma(n)}{n\ln\ln n}=e^{\gamma}$, iar pentru $\sigma^*(n)$ avem următoarea limită (vezi e.g. [**64**]): $\limsup_{n\to\infty}\frac{\sigma^*(n)}{n\ln\ln n}=\frac{6}{\pi^2}e^{\gamma}$. De asemenea, J. Fabrykowski şi M. V. Subbarao arată în lucrarea [**9**] că $\limsup_{n\to\infty}\frac{\sigma^{(e)}(n)}{n\ln\ln n}=\frac{6}{\pi^2}e^{\gamma}$. Acestea ne determină să studiem o expresie asimptotică de acest tip şi pentru funcţia $\sigma^{(e)*}(n)$, pentru care am obţinut următoarea propoziţie:

PROPOZIŢIA 2.2.9 (Minculete şi Tóth [[**30**], Theorem 1]). *Există relaţia următoare*

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\sigma^{(e)*}(n)}{n\ln\ln n}=\frac{6}{\pi^2}e^{\gamma}. \tag{2.2.11}$$

Demonstraţie. Pentru orice număr prim p, avem relaţia $\sup_{a\geq 0}\frac{\sigma^{(e)*}(p^a)}{p^a}=\sup_{a\geq 0}\frac{p+...+p^a}{p^a}<1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+...=\frac{1}{1-\frac{1}{p}}$, deci $\rho(p)\leq\frac{1}{1-\frac{1}{p}}$. Cum $\frac{\sigma^{(e)*}(p^2)}{p^2}=1+\frac{1}{p}$, rezultă $e_p=2$, unde e_p este definit în teorema 2.0.6. În consecinţă, condiţiile din teorema 2.0.6 sunt îndeplinite pentru funcţia $f(n)=\frac{\sigma^{(e)*}(n)}{n}$. Ca urmare, rezultă că

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\sigma^{(e)*}(n)}{n\ln\ln n}=e^{\gamma}\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)\rho(p)=\frac{6}{\pi^2}e^{\gamma}.$$

□

O formulare echivalentă pentru rezultatul de mai sus este următoarea:

a) Pentru $\epsilon>0$ există un rang $N(\epsilon)\in\mathbb{N}$, astfel încât $\sigma^{(e)*}(n)<(1+\epsilon)\frac{6e^{\gamma}}{\pi^2}n\ln\ln n$ pentru orice $n\geq N(\epsilon)$;

b) Pentru $\epsilon>0$ există o infinitate de numere n, astfel încât $\sigma^{(e)*}(n)>(1-\epsilon)\frac{6e^{\gamma}}{\pi^2}n\ln\ln n$.

PROPOZIŢIA 2.2.10 (Minculete şi Tóth [[**30**], Theorem 4])

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\ln\varphi^{(e)*}(n)\ln\ln n}{\ln n}=\frac{\ln 4}{5}. \tag{2.2.12}$$

Demonstraţie. Aplicăm teorema 1.3.4 pentru funcţiile $F(n) = \varphi^{(e)*}(n),\ f(a) = \varphi^*(a)$ şi $L(m) = \dfrac{\ln f(m)}{m}$. Se observă că $L(1) = L(2) = 0,\ L(3) = \dfrac{\ln 2}{3} \approx 0,231,\ L(4) = \dfrac{\ln 3}{4} \approx 0,274,\ L(5) = \dfrac{\ln 4}{5} \approx 0,277,\ L(6) = \dfrac{\ln 5}{6} \approx 0,268,\ L(7) = \dfrac{\ln 6}{7} \approx 0,255$ şi $L(m) \leq \dfrac{\ln m}{m} \leq \dfrac{\ln 8}{8} \approx 0,259$, deoarece funcţia $\dfrac{\ln m}{m}$ este descrescătoare pentru $m \geq 8$.

Comparând valorile respective, deducem că $\dfrac{\ln 4}{5}$ este cea mai mare, deci rezultă relaţia (2.2.12). □.

J. Sándor şi L. Tóth prezintă în lucrarea [**51**] câteva rezultate referitoare la ordinul minimal al compunerii dintre două funcţii aritmetice. Pe acestea le utilizăm în combinaţie cu funcţii care folosesc divizorii exponenţiali unitari şi deducem următoarele:

PROPOZIŢIA 2.2.11 *Are loc relaţia următoare:*

$$\lim_{n\to\infty} \inf \frac{\varphi(\sigma^{(e)*}(n)) \ln \ln n}{n} = e^{-\gamma}. \tag{2.2.13}$$

Demonstraţie. Cum funcţia aritmetică $\sigma^{(e)*}$ are toate valorile naturale şi $\sigma^{(e)*}(n) \geq n$ pentru orice $n \geq 1$, iar $\sigma^{(e)*}$ este multiplicativă şi $\sigma^{(e)*}(p) = p$ pentru orice număr prim p, rezultă că sunt îndeplinite toate condiţiile din teorema 2.0.4. Prin urmare, obţinem relaţia din enunţ.

□

PROPOZIŢIA 2.2.12 *Există relaţia următoare:*

$$\lim_{n\to\infty} \inf \frac{\sigma^{(e)*}(\sigma(n))}{n} = 1, \tag{2.2.14}$$

unde $\sigma(n)$ este suma divizorilor naturali ai lui n.

Demonstraţie. Este uşor de văzut că $n \leq \sigma^{(e)*}(n) \leq \sigma(n)$ pentru orice $n \geq 1$. Prin aplicarea teoremei 2.0.5 pentru $h(n) = \sigma^{(e)*}(n)$, obţinem relaţia (2.2.14).

□

Cum $\varphi^{(e)*}(n) \geq \varphi^*(\varphi^{(e)*}(n)) \geq \varphi(\varphi^{(e)*}(n))$ pentru orice $n \geq 1$, investigăm ordinul maximal al funcţiei $\varphi^{(e)*}$ obţinut în relaţia (2.2.12) prin înlocuirea funcţiei $\varphi^{(e)*}$ cu funcţiile $\varphi \circ \varphi^{(e)*}$ sau $\varphi^* \circ \varphi^{(e)*}$. În consecinţă, deducem următoarele:

PROPOZIŢIA 2.2.13 *Există relaţiile următoare:*

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{\ln \varphi(\varphi^{(e)*}(n)) \ln \ln n}{\ln n} = \frac{\ln 6}{8} \tag{2.2.15}$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{\ln \varphi^*(\varphi^{(e)*}(n)) \ln \ln n}{\ln n} = \frac{\ln 6}{8}. \tag{2.2.16}$$

Demonstraţie. Dacă f şi g sunt două funcţii aritmetice multiplicative cu $\mathrm{Im}f \subset \mathbb{N}^*$, atunci $g \circ f$ este o funcţie aritmetică multiplicativă. Prin urmare, din faptul că $\mathrm{Im}\varphi^{(e)*} \subset \mathbb{N}^*$, rezultă că funcţia $\varphi \circ \varphi^{(e)*}$ este multiplicativă. Întrebuinţăm teorema 1.3.4 pentru funcţiile $F(n) = \varphi(\varphi^{(e)*}(n))$, $f(n) = \varphi(\varphi^*(n))$ şi $L(m) = \dfrac{\ln f(m)}{m}$. Cum $\varphi(n) \geq \sqrt{n}$ pentru orice $n \neq 2, 6$ (vezi e.g. [**50**]), rezultă că $n - 1 \geq \varphi(\varphi^*(n)) \geq \sqrt{\varphi^*(n)} \geq \sqrt{\varphi(n)} \geq \sqrt[4]{n}$ pentru orice $\varphi^*(n) \neq 2, 6$. Deci $\varphi(\varphi^*(n)) = O(n^\beta)$, unde $\beta > 0$ este un număr fixat. Ca urmare, ne situăm în condiţiile teoremei 1.3.4, ceea ce înseamnă că obţinem relaţia

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{\ln \varphi(\varphi^{(e)*}(n)) \ln\ln n}{\ln n} = \sup_m \frac{\ln \varphi(\varphi^*(m))}{m}.$$

Dându-i lui m valori de la 1 la 10, deducem următoarele: $L(1) = L(2) = L(3) = L(6) = 0$, $L(4) = \dfrac{\ln 2}{4} \approx 0,173$, $L(5) = \dfrac{\ln 2}{5}$, $L(7) = \dfrac{\ln 2}{7}$, $L(8) = \dfrac{\ln 6}{8} \approx 0,224$, $L(9) = \dfrac{\ln 4}{9}$ şi $L(10) = \dfrac{\ln 2}{10}$. Dar funcţia $\dfrac{\ln m}{m}$ este descrescătoare pentru $m \geq 11$; rezultă $L(m) \leq \dfrac{\ln m}{m} \leq \dfrac{\ln 11}{11} \approx 0,218$, însă comparând valorile respective, observăm că $L(8) = \dfrac{\ln 6}{8} \approx 0,224$ este cea mai mare dintre valori, deci avem relaţia (2.2.15).

Acum considerăm funcţiile următoare: $F(n) = \varphi^*(\varphi^{(e)*}(n))$, $f(n) = \varphi^*(\varphi^*(n))$ şi $L(m) = \dfrac{\ln f(m)}{m}$. Cum $n - 1 \geq \varphi^*(\varphi^*(n)) \geq \varphi(\varphi^*(n)) \geq \sqrt{\varphi^*(n)} \geq \sqrt{\varphi(n)} \geq \sqrt[4]{n}$ pentru orice $\varphi^*(n) \neq 2, 6$, rezultă $\varphi^*(\varphi^*(n)) = O(n^\beta)$, unde $\beta > 0$ este un număr fixat. Aşadar, aplicăm teorema 1.3.4 şi deducem relaţia

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{\ln \varphi^*(\varphi^{(e)*}(n)) \ln\ln n}{\ln n} = \sup_m \frac{\ln \varphi^*(\varphi^*(m))}{m}.$$

Atribuindu-i lui m valori de la 1 la 10, avem următoarele: $L(1) = L(2) = L(3) = L(6) = 0$, $L(4) = \dfrac{\ln 2}{4} \approx 0,173$, $L(5) = \dfrac{\ln 3}{5} \approx 0,219$, $L(7) = \dfrac{\ln 2}{7}$, $L(8) = \dfrac{\ln 6}{8} \approx 0,224$, $L(9) = \dfrac{\ln 7}{9} \approx 0,216$ şi $L(10) = \dfrac{\ln 3}{10}$. În mod similar, rezultă $L(m) \leq \dfrac{\ln m}{m} \leq \dfrac{\ln 11}{11} \approx 0,218$, pentru orice $m \geq 11$. Însă examinând valorile respective, observăm că $L(8) = \dfrac{\ln 6}{8} \approx 0,224$ este cea mai mare dintre valori, deci obţinem relaţia (2.2.16).

□

Studiind câteva combinaţii între funcţiile de mai sus, observăm că $\dfrac{\mu^{(e)*}(n)}{\mu^{(e)}(n)} = |\mu^{(e)}(n)|$ este funcţia caracteristică a numerelor naturale e-libere de pătrate, iar formula asimptotică pentru $|\mu^{(e)}(n)|$ este dată de L. Tóth în [[**63**], Th. 1] şi de J. Wu în [[**69**], Th. 2].

Aceasta ne sugerează ideea studierii comportării asimptotice a funcţiilor aritmetice multiplicative de tip raport, adică $\dfrac{f^{(e)*}(n)}{f^{(e)}(n)}$, unde $f \in \{\tau, \sigma, \varphi\}$. Ca urmare, avem următoarea propoziţie:

PROPOZIŢIA 2.2.14 (Minculete şi Tóth [[**30**], Theorem 5]).

$$\sum_{n\le x}\frac{\tau^{(e)*}(n)}{\tau^{(e)}(n)}=x\prod_p\left(1+\sum_{a=4}^{\infty}\frac{2^{\omega(a)}/\tau(a)-2^{\omega(a-1)}/\tau(a-1)}{p^a}\right)+O\left(x^{\frac{1}{4}}\ln x\right). \tag{2.2.17}$$

Demonstraţie. Relaţia (2.2.17) se deduce dintr-un rezultat general, şi anume: fie g o funcţie aritmetică cu valori complexe, astfel încât $|g(n)|\le 1$ pentru orice $n\ge 1$ şi $g(p)=g(p^2)=g(p^3)=1$ pentru orice număr prim p. Atunci avem relaţia

$$\sum_{n\le x}g(n)=x\prod_p\left(1+\sum_{a=4}^{\infty}\frac{g(p^a)-g(p^{a-1})}{p^a}\right)+O\left(x^{\frac{1}{4}}\ln x\right). \tag{2.2.18}$$

Fie convoluţia Dirichlet $h=g*\mu$, unde μ este funcţia lui Möbius. Rezultă că h este multiplicativă, $h(p)=h(p^2)=h(p^3)=0,\ h(p^a)=g(p^a)-g(p^{a-1})$ şi $|h(p^a)|\le 2$ pentru orice număr prim p şi pentru orice $a\ge 4$. Prin urmare, $|h(n)|\le l_4(n)2^{\omega(n)}$ pentru orice $n\ge 1$, unde $l_4(n)$ reprezintă funcţia caracteristică a numerelor naturale 4-full ($n=\prod_p p^a,\ a\ge 4$). Observăm că

$$l_4(n)2^{\omega(n)}=\sum_{d^4e=n}\tau(d)v(e),$$

unde funcţia v este dată prin relaţia

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v(n)}{n^s}=\prod_p\left(1+\frac{2}{p^{5s}}+\frac{2}{p^{6s}}+\frac{2}{p^{7s}}-\frac{1}{p^{8s}}-\frac{2}{p^{9s}}-\frac{2}{p^{10s}}-\frac{2}{p^{11s}}\right).$$

Această serie este absolut convergentă pentru $\mathrm{Re}\, s>\frac{1}{5}$. Prin urmare, relaţia (2.2.18) se deduce similar cu relaţia din [[**63**], Th. 1].

Considerăm funcţia aritmetică multiplicativă $g(n)=\dfrac{\tau^{(e)*}(n)}{\tau^{(e)}(n)}$. Aceasta îndeplineşte condiţiile rezultatului de mai sus cu $g(p^a)=\dfrac{\tau^*(a)}{\tau(a)}=\dfrac{2^{\omega(a)}}{\tau(a)}$. Aşadar, rezultă relaţia (2.2.17).

OBSERVAŢIA 2.2.15 *a) Dacă $f\in\{\sigma,\varphi\}$, atunci, similar cu demonstraţia de mai sus, obţinem rezultatele următoare:*

$$\sum_{n\le x}\frac{\sigma^{(e)*}(n)}{\sigma^{(e)}(n)}=x\prod_p\left(1+\sum_{a=4}^{\infty}\frac{\sigma^{(e)*}(p^a)/\sigma^{(e)}(p^a)-\sigma^{(e)*}(p^{a-1})/\sigma^{(e)}(p^{a-1})}{p^a}\right)+O\left(x^{\frac{1}{4}}\ln x\right) \tag{2.2.19}$$

şi

$$\sum_{n\le x}\frac{\varphi^{(e)*}(n)}{\varphi^{(e)}(n)}=x\prod_p\left(1+\sum_{a=4}^{\infty}\frac{\varphi^{*}(a)/\varphi(a)-\varphi^{*}(a-1)/\varphi(a-1)}{p^a}\right)+O\left(x^{\frac{1}{4}}\ln x\right). \tag{2.2.20}$$

b) Pentru $g(n) = \dfrac{1}{\varphi(\varphi^{(e)*}(n))}$, *deducem că* $|g(n)| \leq 1$ *pentru orice* $n \geq 1$ *şi* $g(p) = g(p^2) = g(p^3) = 1$ *pentru orice număr prim* p. *Prin urmare, condiţiile relaţiei* (2.2.18) *sunt îndeplinite. Ca urmare, rezultă relaţia*

$$\sum_{n\leq x} \frac{1}{\varphi(\varphi^{(e)*}(n))} = x \prod_p \left(1 + \sum_{a=4}^{\infty} \frac{\varphi(\varphi^*(a-1)) - \varphi(\varphi^*(a))}{p^a \cdot \varphi(\varphi^*(a^2-a))}\right) + O\left(x^{\frac{1}{4}} \ln x\right). \tag{2.2.21}$$

c) De asemenea, funcţia aritmetică multiplicativă $g(n) = \dfrac{1}{\varphi^*(\varphi^{(e)*}(n))}$ *verifică toate condiţiile relaţiei* (2.2.18)*, deci obţinem relaţia*

$$\sum_{n\leq x} \frac{1}{\varphi^*(\varphi^{(e)*}(n))} = x \prod_p \left(1 + \sum_{a=4}^{\infty} \frac{\varphi^*(\varphi^*(a-1)) - \varphi^*(\varphi^*(a))}{p^a \cdot \varphi^*(\varphi^*(a^2-a))}\right) + O\left(x^{\frac{1}{4}} \ln x\right). \tag{2.2.22}$$

CAPITOLUL 3

Alte funcţii aritmetice cu e-divizori

În acest capitol introducem noţiunea de *divizor de ordin k*, iar obiectivul este să descriem funcţiile aritmetice definite de această noţiune. Remarcând aplicabilitatea divizorilor unitari în multe dintre rezultatele din *Teoria numerelor*, am considerat că este util să căutăm o metodă de a generaliza acest tip de divizori.

Pentru a generaliza noţiunea de divizor unitar avem nevoie de o generalizare a funcţiei $\gamma(n)$, pe care am realizat-o cu ajutorul funcţiei $\gamma_k(n)$. Această funcţie ne ajută la definirea divizorilor de ordin k. Studiem proprietăţile unor funcţii aritmetice definite prin divizori de ordin k şi, comparându-le cu proprietăţile celorlalte funcţii aritmetice multiplicative analizate în teză, urmărim care dintre aceste proprietăţi se păstrează şi care sunt noi.

Subcapitolele 3.2 şi 3.3 sunt rezervate cercetării funcţiilor aritmetice care utilizează *e-divizorii semiproprii*. Astfel, am identificat o subclasă de divizori a clasei e-divizorilor unitari, pe care am numit-o *clasa e-divizorilor semiproprii*.

Cu ajutorul teoremei lui D. Suryanarayana şi a lui R. Sita Rama Chandra Rao, a teoremei lui L. Tóth, a teoremei lui L. Tóth şi a lui E. Wirsing, respectiv a teoremei lui J. Sándor şi a lui L. Tóth, studiem o serie de proprietăţi ale acestor funcţii, printre care multiplicativitatea, ordinul mediu, ordinul maximal, comportările asimptotice şi unele inegalităţi.

În mod similar cu numerele perfecte, introducem noţiunea de numere *e-semiproprii perfecte*. În urma cercetării acestora, am demonstrat că există o infinitate de numere e-semiproprii perfecte şi că nu există numere impare care să fie e-semiproprii perfecte.

Această generalizare a divizorilor unitari şi a divizorilor exponenţiali semiproprii ne-a permis obţinerea altor clase de divizori exponenţiali, şi anume *clasa e-divizorilor de ordin k* pe care am descris-o în subcapitolul 3.4.

Acest capitol are la bază o serie de rezultate pe care le-am preluat din lucrările: [**20**]

N. Minculete, "A new class of divisors: the exponential semiproper divisors" − trimisă spre publicare; [**22**] N. Minculete, "Divisors of order k" − trimisă spre publicare; [**29**] N. Minculete şi C. Pozna,"On some properties of divisors of order k", *International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences.*

De asemenea, enunţăm un rezultat care ne ajută în cercetările ulterioare:

TEOREMA 3.0.16 (H. Delange [**8**]). *Dacă f este o funcţie multiplicativă care îndeplineşte condiţiile următoare:*
1) $|f(n)| \leq 1$ pentru orice $n \geq 1$ şi
2) seria $\sum_{p \ prim} \frac{f(p)-1}{p}$ este convergentă,
atunci există limita

$$m(f) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(n),$$

unde

$$m(f) = \prod_{p \ prim} \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{f(p)}{p} + \frac{f(p^2)}{p^2} + ...\right).$$

3.1 Divizori de ordin k

În acest subcapitol introducem noţiunea de divizor de ordin k şi studiem unele funcţii aritmetice care utilizează divizorii de ordin k. În continuare, extindem această noţiune la noţiunea de e-divizor de ordin k, noţiune ce defineşte noi funcţii aritmetice care întrebuinţează e-divizorii.

Reamintim câteva tipuri de divizori, descoperite în unele lucrări de *Teoria numerelor. Divizorul unitar* a fost descris în primul capitol. Principalele funcţii aritmetice definite pe baza divizorilor unitari sunt $\sigma^*(n)$ – suma divizorilor unitari ai lui n şi $\tau^*(n)$ – numărul divizorilor unitari ai lui n sau numărul divizorilor lui n care sunt liberi de pătrate. Câteva proprietăţi ale acestor funcţii le prezentăm mai jos.

F. Mertens a demonstrat în lucrarea [**16**] relaţia următoare:

$$\sum_{n\leq x} \tau^*(n) = \frac{x}{\zeta(2)}\left(\log x + 2\gamma - 1 - \frac{2\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right) + S_2(x), \text{ unde } S_2(x) = O\left(x^{\frac{1}{2}} \log x\right), \quad (3.1.1)$$

ζ este *funcţia zeta a lui Riemann* şi γ este *constanta lui Euler.*

Referitor la rezultatul (3.1.1), A. A. Gioia şi A. M. Vaidya arată în lucrarea [**10**] o evaluare mai bună a termenului *eroare*, dat prin $S_2(x) = O\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$.

În anul 1973, R. Sitaramachandrarao şi D. Suryanarayana demonstrează în lucrarea [**53**] rezultatul următor:

$$\sum_{n\leq x}\sigma^*(n)=\frac{\pi^2x^2}{12\zeta(3)}+O\left(x\log^{\frac{2}{3}}x\right). \tag{3.1.2}$$

Divizorul exponenţial sau *e-divizorul* a fost introdus de M. V. Subbarao în lucrarea [**55**], iar unele proprietăţi ale funcţiilor aritmetice definite de e-divizori au fost prezentate în primul capitol.

În al doilea capitol arătăm câteva proprietăţi ale funcţiilor aritmetice care utilizează *e-divizorii unitari*.

Pentru a extinde tipurile de divizori expuşi anterior, ne propunem generalizarea clasei divizorilor unitari. Însă pentru aceasta, avem nevoie de o funcţie care generalizează funcţia γ.

Fie numerele naturale $n\geq 1$ şi $k\geq 0$. Definim funcţia aritmetică $\gamma_k:\mathbb{N}^*\to\mathbb{C}$ prin $\gamma_k(1)=1$ şi $\gamma_k(n)=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_u^{a_u}(p_{u+1}p_{u+2}...p_r)^k$ pentru $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_u^{a_u}p_{u+1}^{a_{u+1}}...p_r^{a_r}>1$ cu $a_1,a_2,...,a_u<k+1$ şi $a_{u+1},a_{u+2},...,a_r\geq k+1$.

Este uşor de văzut că funcţia aritmetică γ_k este multiplicativă, iar aceasta ne ajută să definim un nou tip de divizor.

Astfel, un divizor d al lui n, pentru care $\gamma_k(d)=\gamma_k(n)$ şi $\left(\frac{d}{\gamma_k(n)},\frac{n}{d}\right)=1$, îl numim *divizor de ordin k* al lui n. În acest caz, notăm $d|_{(k)}n$.
De exemplu, dacă avem numărul $n=2^6\cdot 3^3$, atunci divizorii de ordin 2 ai lui n sunt următorii:

$$2^2\cdot 3^2,\ 2^2\cdot 3^4,\ 2^6\cdot 3^2 \text{ şi } 2^6\cdot 3^4,\ \text{unde } \gamma_2(n)=2^2\cdot 3^2.$$

În lucrarea [**22**] studiem câteva proprietăţi referitoare la funcţiile aritmetice care utilizează divizorii de ordin k.

Fie $\tau^{(k)}(n)$ numărul divizorilor de ordin k ai lui n şi $\sigma^{(k)}(n)$ suma divizorilor de ordin k ai lui n. Observăm că 1 este un divizor de ordin k al lui însuşi, deci $\sigma^{(k)}(1)=\tau^{(k)}(1)=1$. De asemenea, mai observăm că 1 nu este un divizor de ordin k al lui $n>1$ pentru $k\geq 1$. Cel mai mic divizor de ordin k al lui n este $\gamma_k(n)$, iar cel mai mare divizor de ordin k al lui n este n.

În exemplul de mai sus, divizorii de ordin 2 ai lui $n=2^6\cdot 3^4$ sunt următorii $\gamma_2(n)\cdot 1,\gamma_2(n)\cdot 3^2,\ \gamma_2(n)\cdot 2^4$ şi $\gamma_2(n)\cdot 2^4\cdot 3^2$. Această scriere ne sugerează următoarea idee: orice divizor de ordin k al lui n este de forma $d=\gamma_k(n)\cdot d'$, unde d' este un divizor unitar al lui $\frac{n}{\gamma_k(n)}$. Prin urmare, numărul divizorilor de ordin k ai lui n este $\tau^*\left(\frac{n}{\gamma_k(n)}\right)$ şi suma divizorilor de ordin k ai lui n este $\gamma_k(n)\cdot\sigma^*\left(\frac{n}{\gamma_k(n)}\right)$. Aşadar, avem relaţiile următoare:

$$\tau^{(k)}(n)=\tau^*\left(\frac{n}{\gamma_k(n)}\right)\ \text{şi}\ \sigma^{(k)}(n)=\gamma_k(n)\cdot\sigma^*\left(\frac{n}{\gamma_k(n)}\right). \tag{3.1.3}$$

Observăm că, dacă numarul $d = p_1^{b_1}...p_r^{b_r}$ este un divizor de ordin k al lui $n = p_1^{a_1}...p_r^{a_r} > 1$, atunci $b_i \in \{k, a_i\}$ pentru orice $1 \leq i \leq r$.
Ţinând cont de cele menţionate mai sus, avem

$$\tau^{(k)}(p^a) = \begin{cases} 1, \text{ pentru } a < k+1 \\ 2, \text{ pentru } a \geq k+1. \end{cases} \tag{3.1.4}$$

Deci p^a este singurul divizor de ordin k al lui p^a, atunci când $a \leq k$, iar divizorii de ordin k ai lui p^a, în cazul $a \geq k+1$, sunt p^k şi p^a, ceea ce înseamnă că

$$\sigma^{(k)}(p^a) = \begin{cases} p^a, \text{ pentru } a < k+1 \\ p^a + p^k, \text{ pentru } a \geq k+1 \end{cases} \tag{3.1.5}$$

Se observă că pentru $k = 0$, noţiunea de *divizor de ordin 0* este identică cu noţiunea de *divizor unitar*, iar pentru $k = 1$, noţiunea de *divizor de ordin 1* este identică cu noţiunea de *divizor exponenţial semipropriu* pe care o tratăm în subcapitolul 3.2.
Similar cu indicatorul unitar al lui Euler (vezi e.g. [**26**], [**30**], [**49**], [**51**]) definim funcţia aritmetică multiplicativă $\varphi^{(k)} : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$, prin $\varphi^{(k)}(1) = 1$ şi

$$\varphi^{(k)}(p^a) = \begin{cases} p^a, \text{ pentru } a < k+1 \\ p^a - p^k, \text{ pentru } a \geq k+1, \end{cases} \tag{3.1.6}$$

unde p este un număr prim şi $a \geq 1$.
De asemenea, observăm că $\varphi^{(0)}(n) = \varphi^*(n)$, unde φ^* este indicatorul unitar de tip Euler, şi $\varphi^{(1)}(n) = \varphi^{(e)s}(n)$, unde funcţia aritmetică multiplicativă $\varphi^{(e)s} : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ este definită prin $\varphi^{(e)s}(1) = 1$ şi

$$\varphi^{(e)s}(p^a) = \begin{cases} p, \text{ pentru } a = 1 \\ p^a - p, \text{ pentru } a \geq 2, \end{cases} \tag{3.1.7}$$

unde p este un număr prim şi $a \geq 1$, iar această funcţie se referă la divizorii exponenţiali semiproprii (vezi [**20**]).
Este uşor de arătat că funcţiile aritmetice $\tau^{(k)}$ şi $\sigma^{(k)}$ sunt multiplicative şi că avem relaţiile

$$\tau^{(k)}(n) = 2^t \text{ şi } \sigma^{(k)}(n) = p_1^{a_1}...p_u^{a_u} \prod_{i=u+1}^{r} (p_i^{a_i} + p_i^k), \tag{3.1.8}$$

unde $n = p_1^{a_1}...p_u^{a_u} p_{u+1}^{a_{u+1}}...p_r^{a_r}$, cu $a_i \leq k$ pentru orice $i \in \{1, ..., u\}$ şi $a_i \geq k+1$ pentru orice $i \in \{u+1, ..., r\}$, iar $t = r - u$. Deci t este numărul exponenţilor din descompunerea canonică a lui n care sunt mai mari decât $k+1$ sau egali cu $k+1$.

Este simplu de observat că, dacă n este liber de pătrate şi $k \geq 1$, atunci $\tau^{(k)}(n) = 1$ şi $\sigma^{(k)}(n) = n$.

În mod similar cu convoluţia exponenţială şi cu convoluţia exponenţială unitară, introducem *convoluţia de ordin k* pentru funcţiile aritmetice, care este definită astfel:

$$(f *_{(k)} g)(1) = 1 \text{ şi}$$

$$(f *_{(k)} g)(n) = f(p_1^{a_1}...p_u^{a_u})g(p_1^{a_1}...p_u^{a_u}) \sum_{\substack{b_{u+1}\neq c_{u+1} \\ b_{u+1},c_{u+1}\in\{k,a_{u+1}\}}} ... \sum_{\substack{b_r\neq c_r \\ b_r,c_r\in\{k,a_r\}}} f(p_{u+1}^{b_{u+1}}...p_r^{b_r})g(p_{u+1}^{c_{u+1}}...p_r^{c_r}). \tag{3.1.9}$$

O cercetare a convoluţiei de ordin k evidenţiază faptul că această convoluţie este comutativă, asociativă şi are ca element neutru funcţia aritmetică $\overline{\mu}^{(k)}$, unde $\overline{\mu}^{(k)}(1) = 1$ şi

$$\overline{\mu}^{(k)}(p^a) = \begin{cases} 1, \text{ pentru } a < k+1 \\ 0, \text{ pentru } a \geq k+1, \end{cases} \tag{3.1.10}$$

unde p este un număr prim şi $a \geq 1$.
Observăm că

$$\overline{\mu}^{(k)}(n) = \begin{cases} 1, \text{ pentru } n \in \mathbb{Q}_{k+1} \\ 0, \text{ în rest }, \end{cases} \tag{3.1.11}$$

unde $\mathbb{Q}_k$ este mulţimea numerelor naturale k-libere (numerele naturale care au toţi factorii primi din descompunere la exponenţi mai mici sau egali cu k), deci $\overline{\mu}^{(k)}$ este funcţia caracteristică corespunzătoare lui $\mathbb{Q}_{k+1}$.

T. M. Apostol utilizează în lucrarea [**2**] un rezultat al lui Gegenbauer, care arată că numărul numerelor k-libere $\leq x$ are următoarea comportare asimptotică:

$$\sum_{n\leq x} \overline{\mu}^{(k)}(n) = \frac{x}{\zeta(k+1)} + O\left(x^{\frac{1}{k+1}}\right) \text{ pentru orice } k \geq 1. \tag{3.1.12}$$

În [**1**, **2**], T. M. Apostol defineşte funcţia Möbius de ordin k, notată μ_k, astfel:
$\mu_k(1) = 1$,
$\mu_k(n) = 0$, dacă $p^{k+1}|n$ pentru orice număr prim p,
$\mu_k(n) = (-1)^u$, dacă $n = p_1^k...p_u^k \prod_{i>u} p_i^{a_i},\ 0 \leq a_i < k$,
$\mu_k(n) = 1$, în rest.
Este uşor de văzut că există o legătură între cele două funcţii definite anterior, dată prin: $\overline{\mu}^{(k)}(n) = |\mu_k(n)|$.

Mai mult, o funcţie aritmetică f are inversă în raport cu convoluţia de ordin k dacă şi numai dacă $f(1) \neq 0$ şi $f(p_1^{a_1}...p_u^{a_u}(p_{u+1}^{a_{u+1}}...p_r^{a_r})^k) \neq 0$ pentru orice numere prime distincte $p_1, ..., p_r$.

3. Alte funcţii aritmetice cu e-divizori

Inversa funcţiei constante 1 în raport cu convoluţia de ordin k este notată prin $\mu^{(k)}$ şi ea verifică relaţia $1 *_{(k)} \mu^{(k)} = \overline{\mu}^{(k)}$. Această funcţie aritmetică este definită prin $\mu^{(k)}(1) = 1$ şi

$$\mu^{(k)}(p^a) = \begin{cases} 1, \text{ pentru } a < k+1 \\ -1, \text{ pentru } a \geq k+1 \end{cases} \tag{3.1.13}$$

pentru un număr prim p şi pentru $a \geq 1$.
Aşadar, obţinem identitatea

$$\mu^{(k)} *_{(k)} \mu^{(k)} = \mu^{(k)} \cdot \tau^{(k)}. \tag{3.1.14}$$

Prin urmare, funcţia aritmetică $\mu^{(k)}$ este o altă funcţie de tip Möbius care ne arată că, dacă avem funcţiile aritmetice F şi f astfel încât $F = f *_{(k)} 1$, atunci $f = F *_{(k)} \mu^{(k)}$.

TEOREMA 3.1.0 (L. Tóth [[**63**] Theorem 1, p.2]). *Fie f o funcţie multiplicativă cu valori complexe, astfel încât $|f(n)| \leq 1$ pentru orice $n \geq 1$ şi $f(p) = 1$ pentru orice număr prim p. Atunci*

$$\sum_{n \leq x} f(n) = m(f)x + O\left(x^{\frac{1}{2}} \ln x\right),$$

unde

$$m(f) = \prod_p \left(1 + \sum_{a=2}^{\infty} \frac{f(p^a) - f(p^{a-1})}{p^a}\right)$$

este valoarea medie a lui f.

Această teoremă ne permite să stabilim comportarea asimptotică a funcţiei $\mu^{(k)}$. Astfel, obţinem rezultatul următor:

TEOREMA 3.1.1 (Minculete şi Pozna [[**29**], Theorem 1]). *Pentru $k \geq 1$, avem relaţia*

$$\sum_{n \leq x} \mu^{(k)}(n) = Ax + O\left(x^{\frac{1}{2}} \ln x\right), \tag{3.1.15}$$

unde

$$A = \prod_p \left(1 - \frac{2}{p^{k+1}}\right) \tag{3.1.16}$$

este valoarea medie a lui $\mu^{(k)}$.

Demonstraţie. Deoarece $|\mu^{(k)}(n)| \leq 1$ pentru orice $n \geq 1$ şi $\mu^{(k)}(p) = 1$ pentru orice număr prim p, aplicăm teorema 3.1.0, pentru funcţia multiplicativă $f = \mu^{(k)}$. Prin urmare, obţinem relaţia

$$m(\mu^{(k)}) = \prod_p \left(1 + \sum_{a=2}^{\infty} \frac{\mu^{(k)}(p^a) - \mu^{(k)}(p^{a-1})}{p^a}\right) = \prod_p \left(1 - \frac{2}{p^{k+1}}\right).$$

Deci valoarea medie a lui $\mu^{(k)}$ este $\prod_p \left(1 - \frac{2}{p^{k+1}}\right)$.

În lucrarea [**32**] sunt studiate convoluţiile regulate de tip Narkiewicz, iar aici observăm că doar convoluţia de ordin 0 este un caz special al acestor convoluţii.

În continuare, avem în vedere studierea ordinelor maximale ale unora dintre funcţiile introduse. Acestea sunt dovedite de următoarele propoziţii:

PROPOZIŢIA 3.1.2 (Minculete [[**22**], Theorem 2])

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\ln \tau^{(k)}(n) \ln\ln n}{\ln n} = \frac{\ln 2}{k+1}. \tag{3.1.17}$$

Demonstraţie. Fie funcţia aritmetică multiplicativă $F(n) = \tau^{(k)}(n)$. Este uşor de văzut că, $F(p^a) = f(a)$ pentru orice putere primă p^a, unde

$$f(a) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } a < k+1 \\ 2, & \text{dacă } a \geq k+1. \end{cases}$$

Cum $f(n) = O(1) = O(n^0)$, aplicăm teorema 1.3.4 şi deducem limita

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\ln \tau^{(k)}(n) \ln\ln n}{\ln n} = \sup_m \frac{\ln f(m)}{m} = \sup_{m\geq k+1} \frac{\ln 2}{m} = \frac{\ln 2}{k+1}.$$

□

Rezultatul de mai sus este echivalent cu următorul:

a) Pentru $\epsilon > 0$ există un rang $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, astfel încât $\tau^{(k)}(n) < n^{(1+\epsilon)\ln 2/(k+1)\ln\ln n}$ pentru orice $n \geq N(\epsilon)$;

b) Pentru $\epsilon > 0$ există o infinitate de numere n, astfel încât $\tau^{(k)}(n) > n^{(1-\epsilon)\ln 2/(k+1)\ln\ln n}$.

În continuare, studiem ordinul maximal al funcţiei $\sigma^{(k)}$, pentru care am obţinut rezultatul următor:

PROPOZIŢIA 3.1.3 (Minculete [[**22**], Theorem 3])

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sigma^{(k)}(n)}{n\ln\ln n} = \frac{6}{\pi^2} e^{\gamma}, \tag{3.1.18}$$

unde γ este constanta lui Euler.

Demonstraţie. Fie funcţia aritmetică $f(n) = \dfrac{\sigma^{(k)}(n)}{n}$. Această funcţie este multiplicativă şi, pentru $e_p = k+1$, avem

$$\frac{\sigma^{(k)}(p^{k+1})}{p^{k+1}} = 1 + \frac{1}{p}.$$

Dar evaluând raportul $\dfrac{\sigma^{(k)}(p^a)}{p^a}$, obţinem

$$\sup_{a\geq 0}\frac{\sigma^{(k)}(p^a)}{p^a}=\sup_{a\geq 0}\frac{p^k+p^a}{p^a}<1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+...=\frac{1}{1-\frac{1}{p}},\ \text{deci}\ \rho(p)\leq\frac{1}{1-\frac{1}{p}}.$$

În consecinţă, aplicând teorema 2.0.6 pentru funcţia f, deducem că relaţia (3.1.18) este adevărată. Deci ordinul maximal al funcţiei $\dfrac{\sigma^{(k)}(n)}{n}$ este $\dfrac{6}{\pi^2}e^{\gamma}\ln\ln n$.

□

O formulare echivalentă pentru rezultatul de mai sus, este următoarea:

a) Pentru $\epsilon>0$ există un rang $N(\epsilon)\in\mathbb{N}$, astfel încât $\sigma^{(k)}(n)<(1+\epsilon)\dfrac{6e^{\gamma}}{\pi^2}n\ln\ln n$ pentru orice $n\geq N(\epsilon)$;

b) Pentru $\epsilon>0$ există o infinitate de numere n, astfel încât $\sigma^{(k)}(n)>(1-\epsilon)\dfrac{6e^{\gamma}}{\pi^2}n\ln\ln n$.

Comportarea asimptotică a funcţiei $\tau^{(k)}$ şi seria Dirichlet asociată funcţiei $\tau^{(k)}$ pot fi urmărite în teorema de mai jos.

TEOREMA 3.1.4 (Minculete [[**22**], Theorem 4]). *Există relaţiile următoare:*

$$\sum_{n\leq x}\tau^{(k)}(n)=\frac{\zeta(k+1)}{\zeta(2k+2)}x+Ax^{\frac{1}{k+1}}+O\left(x^{\frac{1}{k+2}+\epsilon}\right)\tag{3.1.19}$$

pentru orice $\epsilon>0$, unde A este o constantă, şi seria Dirichlet asociată funcţiei $\tau^{(k)}(n)$ este

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau^{(k)}(n)}{n^t}=\frac{\zeta(t)\zeta(t(k+1))}{\zeta(2t(k+1))}\ \textit{pentru}\ \mathrm{Re}\,t>1.\tag{3.1.20}$$

Demonstraţie. Pentru funcţia aritmetică $f(n)=\tau^{(k)}(n)$, luăm $l=k+1$ şi $s=2$ în teorema 2.1.1, deoarece $\tau^{(k)}(p)=...=\tau^{(k)}(p^k)=1$ şi $\tau^{(k)}(p^{k+1})=\tau^{(k)}(p^{k+2})=2$. Se deduce uşor că pentru orice $a\geq k+3$, avem

$$|\tau^{(k)}(p^a)|=2\leq Ca^m,$$

unde C şi m sunt două constante. Aşadar, condiţiile din teorema 2.0.1 sunt îndeplinite, deci rezultă relaţia

$$\sum_{n\leq x}\tau^{(k)}(n)=C_fx+x^{\frac{1}{k+1}}P_{f,0}(\log x)+O(x^{u_{2,k+1}+\epsilon}).$$

Dar $C_f:=\prod_p\left(1+\sum_{a=l}\dfrac{f(p^a)-f(p^{a-1})}{p^a}\right)$, adică

$$C_f=\prod_p\left(1+\sum_{a=k+1}\frac{\tau^{(k)}(p^a)-\tau^{(k)}(p^{a-1})}{p^a}\right)=\prod_p\left(1+\frac{1}{p^{k+1}}\right)=\frac{\zeta(k+1)}{\zeta(2k+2)}.$$

Făcând câteva calcule, obţinem $u_{2,k+1} = \dfrac{1}{k+2}$ şi $P_{f,0}$, care este o constantă pe care o notăm cu A. Prin urmare, demonstraţia relaţiei (3.1.19) este completă.
Fie $v(p) = ... = v(p^{2k+1}) = 0$ şi
$v(p^a) = \sum_{j\geq 0}(-1)^j \binom{1}{j}(\tau^{(k)}(p^{a-jl}) - \tau^{(k)}(p^{a-jl-1})) = \tau^{(k)}(p^a) - \tau^{(k)}(p^{a-1}) - \tau^{(k)}(p^{a-k-1}) +$
$+ \tau^{(k)}(p^{a-k-2}) = 0$, pentru $a \geq 2k+3$, iar $v(p^{2k+2}) = -1$, pentru $a = 2k+2$. Aşadar, obţinem $v(p^{2k+2}) = -1$ şi $v(p^a) = 0$, pentru orice $a \neq 2k+2$.
Seria Dirichlet asociată funcţiei v dată prin $V(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{v(n)}{n^t}$ este absolut convergentă pentru $\mathrm{Re}t > \dfrac{1}{k+3}$ şi este egală cu $\prod_{p\ prim}\left(1 - \dfrac{1}{p^{2t(k+1)}}\right) = \dfrac{1}{\zeta(2t(k+1))}$, deci $V(t) = \dfrac{1}{\zeta(2t(k+1))}$.
Astfel, relaţia (3.1.20) este adevărată.

□

Spunem că un număr natural n este un *număr perfect de ordin* k, dacă avem relaţia

$$\sigma^{(k)}(n) = 2n.$$

Se observă că, dacă m este un număr liber de pătrate şi n este număr perfect de ordin $k(k \geq 1)$, astfel încât $(m, n) = 1$, atunci mn este un număr perfect de ordin k, deoarece

$$\sigma^{(k)}(m \cdot n) = \sigma^{(k)}(m) \cdot \sigma^{(k)}(n) = m \cdot 2n = 2mn.$$

Un exemplu de număr perfect de ordin k este numărul $n = 2^{k+1} \cdot 3^{k+1}$ şi observăm că există o infinitate de numere perfecte de ordin k pentru $(k \geq 1)$.

OBSERVAŢIA 3.1.5 *Numărul n este număr perfect de ordin k dacă şi numai dacă numărul $\dfrac{n}{\gamma_k(n)}$ este un număr perfect unitar.*

Alte două rezultate referitoare la funcţia $\sigma^{(k)}$ se bazează pe aplicarea teoremelor 2.0.4 şi 2.0.5. Avem, în acest sens, următoarele propoziţii:

PROPOZIŢIA 3.1.6 (Minculete [[**22**], Theorem 5])

$$\lim_{n\to\infty} \inf \frac{\varphi(\sigma^{(k)}(n)) \ln\ln n}{n} = e^{-\gamma}. \tag{3.1.21}$$

Demonstraţie. Este simplu de observat că $n \leq \sigma^{(k)}(n)$ pentru orice $n \geq 1$. Funcţia $\sigma^{(k)}$ este multiplicativă şi $\sigma^{(0)}(p) = p+1$ sau $\sigma^{(k)}(p) = p$ pentru $k \geq 1$. Aplicăm teorema 2.0.4 şi deducem enunţul.

□

PROPOZIŢIA 3.1.7 (Minculete [[**22**], Theorem 6])

$$\lim_{n\to\infty} \inf \frac{\sigma^{(k)}(\sigma(n))}{n} = 1. \tag{3.1.22}$$

Demonstraţie. Cum avem inegalitatea $n \leq \sigma^{(k)}(n) \leq \sigma(n)$ pentru orice $n \geq 1$, aplicăm teorema 2.0.5 şi rezultă relaţia (3.1.22).

□

O proprietate referitoare la divizorii de ordin k arată că media aritmetică a divizorilor de ordin k ai unui număr natural n este mai mare decât numărul divizorilor lui n. Acest fapt este dovedit prin următoarea propoziţie:

PROPOZIŢIA 3.1.8 (Minculete [[**22**], Theorem 7]). *Pentru $n \geq 1$ şi $k \geq 1$ are loc următoarea inegalitate:*

$$\tau(n) \leq \sqrt{n\gamma_k(n)} \leq \frac{\sigma^{(k)}(n)}{\tau^{(k)}(n)},\ n \neq 4. \tag{3.1.23}$$

Demonstraţie. Pentru $n = 1$, avem $\tau(1) = 1 = \sqrt{1\gamma_k(1)} = 1 = \dfrac{\sigma^{(k)}(1)}{\tau^{(k)}(1)}$.
Pentru $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_u^{a_u}p_{u+1}^{a_{u+1}}...p_r^{a_r} > 1$, unde $a_1, a_2, ..., a_u < k+1$ şi $a_{u+1}, a_{u+2}, ..., a_r \geq k+1$, deducem inegalitatea

$$p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_u^{a_u}p_{u+1}^{\frac{a_{u+1}+k}{2}}...p_r^{\frac{a_r+k}{2}} \leq p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_u^{a_u}\prod_{j=u+1}^{r}\left(\frac{p_j^{a_j}+p_j^k}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2^{r-u}}p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_u^{a_u}\prod_{j=u+1}^{r}(p_j^{a_j}+p_j^k) = \frac{\sigma^{(k)}(n)}{\tau^{(k)}(n)}.$$

Dar avem egalitatea $p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_u^{a_u}p_{u+1}^{\frac{a_{u+1}+k}{2}}...p_r^{\frac{a_r+k}{2}} = \sqrt{n\gamma_k(n)}$. Aşadar, obţinem inegalitatea

$$\sqrt{n\gamma_k(n)} \leq \frac{\sigma^{(k)}(n)}{\tau^{(k)}(n)},$$

care este adevărată pentru orice $n \geq 1$.
Partea stângă a inegalităţii (3.1.23) trebuie tratată separat, datorită faptului că ea nu este adevărată pentru $n = 4$.
Dacă $n = p^a \neq 4$, atunci arătăm mai întâi că

$$\sqrt{p^a\gamma_k(p^a)} \geq \tau(p^a).$$

Pentru $a \geq k+1$, avem $p^{\frac{a+k}{2}} \geq a+1$, care este adevărată, deoarece $p^{\frac{a+k}{2}} \geq 2^{\frac{a+1}{2}} \geq a+1$.
Pentru $a < k+1$ şi $k \geq 1$, avem $p^a \geq a+1$, care este adevărată, deoarece $p^a \geq 2^a \geq a+1$

pentru orice $a \geq 1$. Pentru $a \leq k$, avem $p^a \geq a+1$, care este adevărată. Observăm că trebuie să verificăm separat inegalitatea (3.1.23) pentru numere de forma $n = 4p^a$. Dacă avem $k = 1$ şi $a = 1$, atunci rezultă inegalitatea $\tau(4p) = 6 \leq \sqrt{4p \cdot 2p} = 2\sqrt{2}p$, care este adevărată, deoarece $p \geq 3$. În cazul $k \geq 2$ şi $a \leq k$ sau $a \geq k+1$, avem $\tau(4p^a) = 3(a+1) \leq \sqrt{4p^a \cdot 4p^k} = 4p^{\frac{a+k}{2}}$. Această inegalitate este adevărată deoarece $p \geq 3$ şi datorită celor evidenţiate mai sus.
Utilizând faptul că funcţiile aritmetice τ şi γ_k sunt multiplicative, rezultă că

$$\sqrt{n\gamma_k(n)} \geq \tau(n) \text{ pentru orice } n \geq 1,\ n \neq 4 \text{ şi } k \geq 1.$$

Astfel, demonstraţia este completă.

□

OBSERVAŢIA 3.1.9 *În mod similar, arătăm că pentru orice $n \geq 1$ şi $k \geq 0$ avem inegalităţile următoare:*

$$\frac{n+\gamma_k(n)}{2} \geq \frac{\sigma^{(k)}(n)}{\tau^{(k)}(n)} \geq \frac{\sigma^*(n)}{\tau^*(n)} \geq \frac{\sigma(n)}{\tau(n)} \geq \sqrt{n} \tag{3.1.24}$$

şi

$$2n \leq \varphi^{(k)}(n) + \sigma^{(k)}(n) \leq \tau^{(k)}(n) \cdot n. \tag{3.1.25}$$

Comportătile asimptotice pentru indicatorul lui Euler (φ) şi pentru alte funcţii aritmetice similare lui φ, precum $\varphi^*, \varphi^{(e)}$ şi $\varphi^{(e)*}$, au fost date în câteva lucrări (vezi e.g. [**30**], [**50**] şi [**60**]). Mai jos, prezentăm comportarea asimptotică a funcţiei $\varphi^{(k)}$. Această funcţie face parte din categoria funcţiilor de tipul indicatorului lui Euler.

PROPOZIŢIA 3.1.10 (Minculete şi Pozna [[**29**], Theorem 2.2]). *Pentru $k \geq 1$, avem relaţia*

$$\sum_{n \leq x} \varphi^{(k)}(n) = Bx + O\left(x^{\frac{3}{2}} \log x\right), \tag{3.1.26}$$

unde

$$B = \frac{1}{2} \prod_{p\ prim} \left(1 - \frac{1}{p^{k+1}(p+1)}\right).$$

Demonstraţie. Considerăm funcţia multiplicativă $f(n) = \dfrac{\varphi^{(k)}(n)}{n}$ care are proprietăţile următoare: $|f(n)| \leq 1$ pentru orice $n \geq 1$ şi $f(p) = 1$ pentru orice număr prim p. Aplicând teorema 3.1.0 pentru această funcţie, deducem relaţia următoare:

$$\sum_{n \leq x} \frac{\varphi^{(k)}(n)}{n} = 2Bx + O\left(x^{\frac{1}{2}} \log x\right), \tag{3.1.27}$$

unde

$$B = \frac{1}{2} \prod_{p \ prim} \left(1 - \frac{1}{p^{k+1}(p+1)}\right).$$

Se cunoaşte teorema sumei parţiale a lui Abel (vezi e.g [**33**]), care este dată astfel:

$$\sum_{n \leq x} f(n)g(n) = F(x)g(x) - \int_1^x F(t)g'(t)dt, \tag{3.1.28}$$

unde $f(n), g(n)$ sunt două funcţii aritmetice, $x \geq 2$, iar $f(t)$ continuă şi $g(t)$ derivabilă cu derivata continuă pe $[1, x]$ şi $F(x) = \sum_{n \leq x} f(n)$.

Pentru $f(n) = \dfrac{\varphi^{(k)}(n)}{n}$ şi $g(n) = n$, avem relaţia (3.1.27), adică $F(x) = 2Bx + O(x^{1/2} \log x)$. Ţinând cont de relaţia (3.1.28), obţinem următoarele:

$$\sum_{n \leq x} \varphi^{(k)}(n) = \sum_{n \leq x} \frac{\varphi^{(k)}(n)}{n} \cdot n = \left[2Bx + O\left(x^{\frac{1}{2}} \log x\right)\right] x - \int_1^x [2Bt + O(t^{1/2} \log t)]dt =$$

$$= 2Bx^2 + O\left(x^{\frac{3}{2}} \log x\right) - Bx^2 - O\left(\int_1^x t^{1/2} \log t dt\right) = Bx^2 + O\left(x^{\frac{3}{2}} \log x\right).$$

În consecinţă, deducem relaţia (3.1.26).

OBSERVAŢIA 3.1.11 *Valoarea medie a funcţiei aritmetice multiplicative* $\dfrac{\varphi^{(k)}(n)}{n}$ *este* $\prod_{p \ prim} \left(1 - \dfrac{1}{p^{k+1}(p+1)}\right)$.

În continuare, considerăm funcţia $h^{(k)} = \sigma^{(k)} * \mu$, dată cu ajutorul produsului Dirichlet, unde μ este funcţia lui Möbius. Cum funcţiile $\sigma^{(k)}$ şi μ sunt multiplicative şi ţinând cont că produsul Dirichlet păstrează multiplicativitatea (vezi e.g [**1**]), rezultă că funcţia $h^{(k)}$ este multiplicativă şi deducem relaţia

$$h^{(k)}(p^a) = \begin{cases} \varphi(p^a), \ a \neq k+1 \\ p^a, \ a = k+1 \end{cases} \tag{3.1.29}$$

pentru un număr prim p şi pentru $a \geq 1$, unde φ este indicatorul lui Euler.

PROPOZIŢIA 3.1.12 (Minculete şi Pozna [[**29**], Theorem 2.3]). *Pentru $k \geq 1$, există relaţia*

$$\sum_{n \leq x} h^{(k)}(n) = Cx^2 + O(x), \tag{3.1.30}$$

unde

$$C = \frac{1}{2} \prod_{p \ prim} \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^{k+2}}\right).$$

Demonstraţia. Considerăm funcţia multiplicativă $f(n) = \dfrac{h^{(k)}(n)}{n}$, pentru care avem proprietăţile: $0 < f(n) \leq 1$ pentru orice $n \geq 1$ şi seria $\sum\limits_p \dfrac{f(p)-1}{p} = -\sum\limits_p \dfrac{1}{p^2}$ este convergentă. Aplicând teorema 3.0.1, deducem următoarea relaţie:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{h^{(k)}(n)}{n} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^{k+1}}\right) = 2C,$$

ceea ce înseamnă că

$$F(x) = \sum_{n\leq x} \frac{h^{(k)}(n)}{n} = 2Cx + O(1). \tag{3.1.31}$$

Prin urmare, pentru $f(n) = \dfrac{h^{(k)}(n)}{n}$ şi $g(n) = n$, avem funcţia $F(x)$, dată prin relaţia (3.1.31). Aplicând relaţia (3.1.28), obţinem următoarea egalitate:

$$\sum_{n\leq x} h^{(k)}(n) = \sum_{n\leq x} \frac{h^{(k)}(n)}{n} \cdot n = F(x)x - \int_1^x F(t)dt = Cx^2 + O(x).$$

Astfel, demonstraţia este completă.

3.2 Numărul e-divizorilor semiproprii ai unui număr natural

Mulţimea e-divizorilor unitari ai unui număr natural n este inclusă în mulţimea e-divizorilor lui n. În continuare, studiem existenţa unui număr de divizori ai unui număr natural n, număr de divizori care să fie mai mic decât numărul e-divizorilor unitari.

Particularizând divizorul de ordin k pentru $k = 1$, obţinem *divizorul de ordin 1*, adică un divizor d al lui n pentru care $\gamma(d) = \gamma(n)$ şi $\left(\frac{d}{\gamma(n)}, \frac{n}{d}\right) = 1$, unde $\gamma(n) = p_1p_2...p_r$ pentru $n = \prod\limits_{i=1}^{r} p_i^{a_i} > 1$. Observăm că numărul natural $d = \prod\limits_{i=1}^{r} p_i^{b_i}$ este un divizor de ordin 1 al lui $n = \prod\limits_{i=1}^{r} p_i^{a_i} > 1$ dacă b_i este un divizor impropriu al lui a_i, adică $b_i \in \{1, a_i\}$ pentru orice $i = \overline{1,r}$. De asemenea, mai observăm că toţi divizorii de ordin 1 sunt divizori exponenţiali.

Divizorii 1 şi a ai numărului natural a se numesc *divizori improprii*, iar orice alt divizor diferit de 1 şi a se numeşte *divizor propriu.* Această noţiune o punem în corelaţie cu noţiunea de *divizor exponenţial* şi cu cea de *divizor de ordin 1.* Prin urmare, considerăm că este mai potrivit ca, în loc de noţiunea de divizor de ordin 1, să utilizăm noţiunea de *divizor exponenţial semipropriu* sau *e-divizor semipropriu.*

Astfel, am identificat o subclasă de divizori a clasei e-divizori unitari, pe care am numit-o *clasa divizorilor exponenţiali semiproprii*. Am definit-o în modul următor: dacă avem numărul natural $n > 1$ cu descompunerea canonică $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_r^{a_r}$ şi funcţia aritmetică $\gamma(n) = p_1 p_2 ... p_r$, atunci un divizor d al lui n pentru care $\gamma(d) = \gamma(n)$ şi $\left(\frac{d}{\gamma(n)}, \frac{n}{d}\right) = 1$ este numit *divizor exponenţial semipropriu* sau *e-divizor semipropriu* al lui n. În acest caz, notăm $d|_{(e)s}n$.
De exemplu, pentru numărul $n = 2^6 \cdot 3^4$ avem e-divizorii semiproprii următori:

$$2 \cdot 3, 2^6 \cdot 3, 2 \cdot 3^4 \text{ şi } 2^6 \cdot 3^4.$$

Studiem o serie de proprietăţi ale acestor funcţii nou definite, printre care multiplicativitatea, ordinul mediu, ordinul maximal, comportările asimptotice şi unele inegalităţi în care sunt implicate aceste funcţii aritmetice.

Rezultatele care se înscriu în această tematică au fost extrase din lucrarea [**20**], N. Minculete, "A new class of divisors: the exponential semiproper divisors" – trimisă spre publicare.

Fie $\tau^{(e)s}(n)$ numărul divizorilor exponenţiali semiproprii ai lui n. Observăm că $\tau^{(e)s}(1) = 1$ şi că 1 nu este un divizor exponenţial semipropriu al lui $n > 1$, iar cel mai mic divizor exponenţial semipropriu al lui n este $\gamma(n)$ şi cel mai mare divizor exponenţial semipropriu al lui n este n. În cazul exemplului de mai sus, avem $\tau^{(e)s}(2^6 \cdot 3^4) = 4$.

Orice divizor exponenţial semipropriu al lui n poate fi scris sub forma $d = \gamma(n) \cdot d'$, unde d' este un divizor unitar al lui $\frac{n}{\gamma(n)}$. Prin urmare, numărul divizorilor exponenţiali semiproprii ai lui n este $\tau^*\left(\frac{n}{\gamma(n)}\right)$, deci avem următoarea relaţie:

$$\tau^{(e)s}(n) = \tau^*\left(\frac{n}{\gamma(n)}\right). \tag{3.2.1}$$

Observăm că numărul natural $d = \prod_{i=1}^{r} p_i^{b_i}$ este un *e-divizor semipropriu* al lui $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{a_i} > 1$ dacă b_i este un divizor impropriu al lui a_i, adică $b_i \in \{1, a_i\}$ pentru orice $i = \overline{1,r}$. Notăm $d|_{(e)s}n$ şi citim *d divide exponenţial semipropriu pe n*. Aşadar,

$$\tau^{(e)s}(p^a) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } a = 1 \\ 2, & \text{dacă } a \geq 2, \end{cases} \tag{3.2.2}$$

adică p are ca e-divizor semipropriu pe p, iar e-divizorii semipropriii ai lui p^a cu $a \geq 2$ sunt p şi p^a.

De asemenea, observăm că e-divizorii semiproprii ai lui n se găsesc printre divizorii exponenţiali unitari ai lui n, care, la rândul lor, se găsesc printre divizorii exponenţiali ai lui n, deci

$$\tau^{(e)s}(n) \leq \tau^{(e)*}(n) \leq \tau^{(e)}(n). \tag{3.2.3}$$

Pentru a observa diferenţele dintre aceste tipuri de divizori, luăm următorul exemplu: fie numărul $n = 2^6 \cdot 3^4$; rezultă că e-divizorii lui n sunt:

$$2 \cdot 3, 2^2 \cdot 3, 2^3 \cdot 3, 2^6 \cdot 3,$$

$$2 \cdot 3^2, 2^2 \cdot 3^2, 2^3 \cdot 3^2, 2^6 \cdot 3^2,$$

$$2 \cdot 3^4, 2^2 \cdot 3^4, 2^3 \cdot 3^4, 2^6 \cdot 3^4,$$

e-divizorii unitari ai lui $n = 2^6 \cdot 3^4$ sunt:

$$2 \cdot 3, 2^2 \cdot 3, 2^3 \cdot 3, 2^6 \cdot 3,$$

$$2 \cdot 3^4, 2^2 \cdot 3^4, 2^3 \cdot 3^4, 2^6 \cdot 3^4,$$

iar e-divizorii semiproprii ai lui $n = 2^6 \cdot 3^4$ sunt următorii:

$$2 \cdot 3, 2^6 \cdot 3, 2 \cdot 3^4, 2^6 \cdot 3^4.$$

De asemenea, observăm că

$$\tau^{(e)s}(n) \leq \tau^{(e)*}(n) \leq \tau^{(e)}(n) \leq \tau(n) \tag{3.2.4}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
Pentru a studia modalitatea de apariţie a acestor tipuri de divizori, luăm câteva cazuri particulare pentru n. Aşadar, dacă n este un număr liber de pătrate, atunci $\tau^{(e)s}(n) = 1$, iar dacă toţi factorii primi din descompunerea canonică: $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot ... \cdot p_r^{a_r}$ au exponenţii $a_i \geq 2$, atunci

$$\tau^{(e)s}(n) = \tau^*(n) = 2^r. \tag{3.2.5}$$

Presupunând că t este numărul exponenţilor $a_i \geq 2$ ai factorilor primi din descompunerea canonică a lui n, deducem relaţia

$$\tau^{(e)s}(n) = 2^t. \tag{3.2.6}$$

Acest rezultat arată că funcţia aritmetică $\tau^{(e)s}(n) = \sum_{d|_{(e)s}n} 1$ este multiplicativă.
Multiplicativitatea este importantă pentru studiul funcţiei aritmetice $\tau^{(e)s}$, deoarece ajută la determinarea ordinului maximal al acestei funcţii.

PROPOZIŢIA 3.2.1 (Minculete [[**20**], Theorem 1]). *Există următoarea relaţie:*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\ln \tau^{(e)s}(n) \ln \ln n}{\ln n} = \frac{\ln 2}{2}. \tag{3.2.7}$$

Demonstraţie. Fie $F(n)=\tau^{(e)s}(n)$ o funcţie multiplicativă, cu proprietatea $F(p^a)=f(a)$, unde

$$f(a)=\begin{cases} 1, & \text{dacă } a=1 \\ 2, & \text{dacă } a\geq 2. \end{cases}$$

Cum $f(n)=O(1)=O(n^0)$, rezultă, conform teoremei 1.3.4, relaţia

$$\lim_{n\to\infty}\sup\frac{\ln\tau^{(e)s}(n)\ln\ln n}{\ln n}=\sup_m\frac{\ln f(m)}{m}=\sup_m\frac{\ln 2}{m}=\frac{\ln 2}{2}.$$

Mai sus, am determinat ordinul maximal al funcţiei $\tau^{(e)s}(n)$. În continuare, studiem comportarea asimptotică a funcţiei aritmetice $\tau^{(e)s}(n)$.

TEOREMA 3.2.2 (Minculete [[**20**], Theorem 3]). *Pentru funcţia aritmetică $\tau^{(e)s}(n)$ avem următoarea evaluare asimptotică:*

$$\sum_{n\leq x}\tau^{(e)s}(n)=\frac{15}{\pi^2}x+Ax^{\frac{1}{2}}+O\left(x^{\frac{1}{3}+\epsilon}\right) \tag{3.2.8}$$

pentru orice $\epsilon>0$, unde A este o constantă, iar seria Dirichlet asociată funcţiei $\tau^{(e)s}(n)$ este de forma

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau^{(e)s}(n)}{n^s}=\frac{\zeta(s)\zeta(2s)}{\zeta(4s)}\ \textit{pentru}\ \mathrm{Re}\,s>1. \tag{3.2.9}$$

Demonstraţie. Considerăm funcţia $f(n)=\tau^{(e)s}(n)$. Deoarece $\tau^{(e)s}(p)=1$ şi $\tau^{(e)s}(p^2)=\tau^{(e)s}(p^3)=2$, luăm $l=2$ şi $k=2$ în teorema 2.0.1. Pentru orice $a\geq 4$, avem

$$|\tau^{(e)s}(p^a)|=2\leq Ca^m,$$

unde C şi m sunt două constante. Prin urmare, condiţiile din teorema 2.0.1 sunt îndeplinite, rezultă relaţia

$$\sum_{n\leq x}\tau^{(e)s}(n)=C_fx+x^{\frac{1}{2}}P_{f,2}(\ln x)+O(x^{u_{2,2}+\epsilon}).$$

Se ştie că $C_f:=\prod_p\left(1+\sum_{a=l}\frac{f(p^a)-f(p^{a-1})}{p^a}\right)$. Aşadar, înlocuind funcţia f în această expresie şi efectuând calculele, obţinem

$$C_f=\prod_p\left(1+\sum_{a=2}\frac{\tau^{(e)s}(p^a)-\tau^{(e)s}(p^{a-1})}{p^a}\right)=\prod_p\left(1+\frac{1}{p^2}+\sum_{a=3}\frac{\tau^{(e)s}(p^a)-\tau^{(e)s}(p^{a-1})}{p^a}\right)=$$

$$=\prod_p\left(1+\frac{1}{p^2}\right)=\frac{\zeta(2)}{\zeta(4)}=\frac{15}{\pi^2}.$$

Este uşor de văzut că $u_{2,2} = \frac{1}{3}$, iar $P_{f,2}$ este o constantă pe care o notăm cu A. Astfel, demonstraţia relaţiei (3.2.8) este incheiată.
Observăm că $v(p) = v(p^2) = v(p^3) = 0$, iar
$v(p^a) = \sum_{j\geq 0}(-1)^j \binom{1}{j}(\tau^{(e)s}(p^{a-jl}) - \tau^{(e)s}(p^{a-jl-1})) = \tau^{(e)s}(p^a) - \tau^{(e)s}(p^{a-1}) - \tau^{(e)s}(p^{a-2}) +$
$+\tau^{(e)s}(p^{a-3}) = 0$ pentru $a \geq 5$. În cazul $a = 4$, avem $v(p^4) = -1$, iar pentru $a \geq 4$, obţinem $v(p^4) = -1$. Ca urmare, $v(p^a) = 0$ pentru orice $a \neq 4$.

Seria $V(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v(n)}{n^s}$ este absolut convergentă pentru $\mathrm{Re}s > \frac{1}{4}$ şi este egală cu $\prod_{p\ prim}\left(1 - \frac{1}{p^{4s}}\right) = \frac{1}{\zeta(4s)}$, deci $V(s) = \frac{1}{\zeta(4s)}$. Astfel, relaţia (3.2.9) este demonstrată.

□

OBSERVAŢIA 3.2.3 *Notăm prin $T^{(e)s}$ produsul tuturor e-divizorilor semiproprii ai lui n. Fie $n = p_1p_2...p_up_{u+1}^{a_{u+1}}...p_r^{a_r}$. Termenul $p_1p_2...p_u$ apare la fiecare e-divizor semipropriu, iar un număr de $\frac{\tau^{(e)s}(n)}{2}$ e-divizori semiproprii îl conţin pe $p_j^{a_j}$ şi un număr de $\frac{\tau^{(e)s}(n)}{2}$ e-divizori semiproprii îl conţin pe p_j. Ca urmare, în produsul e-divizorilor semiproprii, p_j apare cu exponentul $\frac{\tau^{(e)s}(n)(a_j+1)}{2}$, ceea ce implică relaţia*

$$T^{(e)s}(n) = \left(p_1p_2...p_up_{u+1}^{\frac{a_{u+1}+1}{2}}...p_r^{\frac{a_r+1}{2}}\right)^{\frac{\tau^{(e)s}(n)}{n}} = (\sqrt{n\gamma(n)})^{\tau^{(e)s}(n)} = (n\gamma(n))^{\frac{\tau^{(e)s}(n)}{2}}. \quad (3.2.10)$$

Prin aplicarea teoremei 2.0.3, obţinem o aplicaţie a funcţiei aritmetice $\tau^{(e)s}$ care stabileşte o legătură cu funcţia Γ a lui Euler şi care ne dă o altă exprimare pentru suma $\sum_{n\leq x}\tau^{(e)s}(n)$ decât cea din relaţia (3.2.8). În acest sens, avem următoarea propoziţie:

PROPOZIŢIA 3.2.4 *Pentru $x \to \infty$, există o constantă $t \geq 0$, astfel încât*

$$\sum_{n\leq x}\tau^{(e)s}(n) = \left(\frac{e^{-\gamma(t)}}{\Gamma(t)} + o(1)\right)\frac{x}{\ln x}\prod_{p\leq x}\left(\frac{p^2+1}{p(p-1)}\right). \quad (3.2.11)$$

Demonstraţie. Este uşor de văzut că $\tau^{(e)s}(n) \geq 0,\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$, iar

$$\tau^{(e)*}(p^a) \leq 2 \leq c_1c_2^a.$$

Vom arăta că pentru $x \to \infty$ avem

$$\sum_{p\leq x}\tau^{(e)s}(p)\ln p = (t + o(1))x,$$

unde $t \geq 0$ este o constantă. Preocupându-ne de membrul stâng al egalităţii anterioare, deducem relaţia $\sum_{p\leq x} \tau^{(e)s}(p)\ln p = \sum_{p\leq x} \ln p = \ln \prod_{p\leq x} p$. Din lema lui Finsler (vezi e.g. [[**38**], pag. 76]), obţinem $\prod_{\substack{p \ prim\\ p\leq x}} p < 4^x$, deci $\ln \prod_{\substack{p \ prim\\ p\leq x}} p < x\ln 4$. Cu alte cuvinte, rezultă că

$$\sum_{p\leq x} \tau^{(e)s}(p)\ln p < x\ln 4,$$

ceea ce înseamnă că există o constantă $t \geq 0$, astfel încât, pentru $x \to \infty$, avem

$$\sum_{p\leq x} \tau^{(e)s}(p)\ln p = (t + o(1))x.$$

Condiţiile din teorema 2.0.3 sunt îndeplinite, ceea ce înseamnă că, pentru $x \to \infty$, obţinem relaţia următoare:

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x} \tau^{(e)s}(n) &= \left(\frac{e^{-\gamma t}}{\Gamma(t)} + o(1)\right)\frac{x}{\ln x}\prod_{p\leq x}\left(1 + \frac{\tau^{(e)s}(p)}{p} + \frac{\tau^{(e)s}(p^2)}{p^2} + ...\right) = \\ &= \left(\frac{e^{-\gamma t}}{\Gamma(t)} + o(1)\right)\frac{x}{\ln x}\prod_{p\leq x}\left(1 + \frac{1}{p} + \frac{2}{p^2} + \frac{2}{p^3}...\right) = \\ &= \left(\frac{e^{-\gamma t}}{\Gamma(t)} + o(1)\right)\frac{x}{\ln x}\prod_{p\leq x}\left(\frac{p^2+1}{p(p-1)}\right).\end{aligned}$$

Analizând seria Dirichlet asociată funcţiei $\tau^{(e)s}$, sesizăm o extindere a acestui rezultat. Astfel, obţinem o generalizare a relaţiei (3.2.9), pe care o prezentăm mai jos:

PROPOZIŢIA 3.2.5 (Minculete [**20**]). *Pentru orice $r \geq 1$, există următoarele relaţii:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[\tau^{(e)s}(n)]^r}{n^s} = \zeta(s)\zeta^{2^r-1}(2s)\left(2 - 2^r + \frac{2^r-1}{\zeta(4s)}\right), \ \textit{pentru } \mathrm{Re}s > 1 \tag{3.2.12}$$

şi

$$\sum_{n=1}^{\infty}[\tau^{(e)s}(n)]^r = A_r x + x^{\frac{1}{2}}P_{2^r-2}(\ln x) + (x^{u_r+\epsilon}), \tag{3.2.13}$$

pentru orice $\epsilon > 0$, unde P_{2^r-2} este un polinom de gradul $2^r - 2$, $u_r = \dfrac{2^{r+1}-1}{2^{r+2}+1}$ şi

$$A_r := \prod_p\left(1 + \frac{2^r-1}{p^2}\right).$$

Demonstraţie. În cazul $f(n) = [\tau^{(e)s}(n)]^r$ cu $r \geq 1$, aplicăm teorema 2.0.1 pentru $l = 2$ şi $k = 2^r$, de unde obţinem relaţiile (3.2.12) şi (3.2.13).

3.3 Suma e-divizorilor semiproprii ai unui număr natural

Mai sus, am introdus noţiunea de *divizor semipropriu* sau *e-divizor semipropriu.* Fie $\sigma^{(e)s}(n)$ suma e-divizorilor semiproprii ai lui n. Observăm că 1 este un e-divizor semipropriu al său, adică $\sigma^{(e)s}(1) = 1$.

Orice e-divizor semipropriu al lui n poate fi scris ca $d = \gamma(d) \cdot d'$, unde d' este un divizor unitar al numărului $\dfrac{n}{\gamma(n)}$. Aşadar, suma e-divizorilor semiproprii ai lui n este $\gamma(n) \cdot \sigma^* \left(\dfrac{n}{\gamma(n)}\right)$, deci avem următoarea relaţie:

$$\sigma^{(e)s}(n) = \gamma(n) \cdot \sigma^* \left(\frac{n}{\gamma(n)}\right). \tag{3.3.1}$$

De asemenea, observăm că e-divizorii semiproprii ai lui n se găsesc printre e-divizorii unitari ai lui n, iar e-divizorii unitari ai lui n se găsesc printre e-divizorii lui n. Ca urmare, deducem inegalitatea

$$\sigma^{(e)s}(n) \leq \sigma^{(e)*}(n) \leq \sigma^{(e)}(n). \tag{3.3.2}$$

De exemplu, e-divizorii semiproprii ai lui $n = 2^6 \cdot 3^4$ sunt următorii:

$$2 \cdot 3, 2^6 \cdot 3, 2 \cdot 3^4, 2^6 \cdot 3^4,$$

ceea ce înseamnă că $\sigma^{(e)s}(2^6 \cdot 3^4) = 5544$.
Prin compararea sumelor de divizori prezentaţi până acum, rezultă inegalitatea

$$\sigma^{(e)s}(n) \leq \sigma^{(e)*}(n) \leq \sigma^{(e)}(n) \leq \sigma(n) \tag{3.3.3}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
Este simplu de observat că, dacă n este un număr liber de pătrate, atunci $\sigma^{(e)s}(n) = n$.
Presupunând că toţi factorii primi din descompunerea canonică a lui $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot ... \cdot p_r^{a_r}$ au exponenţii $a_i \geq 2$, deducem

$$\sigma^{(e)s}(n) = \prod_{p^a \| n} (p^a + p). \tag{3.3.4}$$

Aşadar, dacă $n = p_1 p_2 ... p_u p_{u+1}^{a_{u+1}} ... p_r^{a_r}$, $a_i \geq 2$, $(\forall)\ i \in \{u+1, ..., r\}$, atunci

$$\sigma^{(e)s}(n) = p_1 p_2 ... p_u \prod_{j=u+1}^{r} (p_j^{a_j} + p_j). \tag{3.3.5}$$

Prin urmare, observăm că funcţia aritmetică $\sigma^{(e)s}(n) = \sum_{d|_{(e)s} n} d$ este multiplicativă.

3. Alte funcţii aritmetice cu e-divizori

În mod similar cu numărul perfect, spunem că un numărul n este un număr *e-semipropriu perfect*, dacă $\sigma^{(e)s}(n) = 2n$.

Mai jos, analizăm câteva dintre aspectele referitoare la numerele e-semiproprii perfecte. Este simplu de observat că, dacă m este un număr liber de pătrate şi n este un număr e-semipropriu perfect, astfel încât $(m, n) = 1$, atunci mn este e-semipropriu perfect..

Utilizând calculatorul, obţinem numerele e-semiproprii perfecte până la 1000 sunt următoarele:

$$36, 180, 252, 396, 468, 612, 684 \text{ şi } 828.$$

În continuare, căutând numere e-semiproprii perfecte cu ajutorul calculatorului, am găsit că numărul natural care este e-unitar perfect, dar care nu este e-semipropriu perfect, este numărul următor:

$$9539712 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13^2.$$

Se pune problema aflării cardinalului mulţimii numerelor e-semiproprii perfecte şi a formei acestor numere. Răspunsul la aceste probleme sunt concretizate în următoarele două propoziţii:

PROPOZIŢIA 3.3.1 *Există o infinitate de numere e-semiproprii perfecte.*

Demonstraţie. Ştim că, dacă m este un număr liber de pătrate şi n este un număr e-semipropriu perfect, astfel încât $(m, n) = 1$, atunci mn este e-semipropriu perfect. Cum 36 este primul număr e-semipropriu perfect, rezultă că $36p$ este e-semipropriu perfect, unde p este un număr prim mai mare sau egal cu 5. Conform teoremei lui Euclid, există o infinitate de numere prime, deci există o infinitate de numere e-semiproprii perfecte.

□

PROPOZIŢIA 3.3.2 (Minculete [[**20**], Theorem 5]). *Nu există numere impare care să fie e-semiproprii perfecte.*

Demonstraţie. Presupunem prin absurd că există numere impare e-semiproprii perfecte, adică există $n = p_1^{a_1}...p_r^{a_r}$ astfel încât

$$\sigma^{(e)s}(p_1^{a_1})...\sigma^{(e)s}(p_r^{a_r}) = 2p_1^{a_1}...p_r^{a_r}. \tag{3.3.6}$$

Dacă $a_i = 1$, atunci $\sigma^{(e)s}(p_i) = p_i$ şi, prin simplificare cu numărul p_i, aceasta dispare din relaţia (3.3.6). Ca urmare, presupunem că $a_i \geq 2$, $(\forall)\ i \in \{1, ..., r\}$ şi relaţia (3.3.6) devine $(p_1^{a_1} + p_1)...(p_r^{a_r} + p_r) = 2p_1^{a_1}...p_r^{a_r}$, adică $(p_1^{a_1-1} + 1)...(p_r^{a_r-1} + 1) = 2p_1^{a_1-1}...p_r^{a_r-1}$, ceea ce

înseamnă că $r = 1$.
Prin urmare, avem relaţia

$$p_1^{a_1-1} + 1 = 2p_1^{a_1-1},$$

care implică $a_1 = 1$, ceea ce este o contradicţie. Astfel, demonstraţia se încheie.

□

OBSERVAŢIA 3.3.3 *Cum* $\sigma^{(e)s}(n) \leq \sigma^{(e)*}(n) \leq \sigma^{(e)}(n)$ *şi ţinând seama de inegalitatea (2.2.5), rezultă că*

$$\sigma^{(e)s}(n) \leq \sigma^{(e)*}(n) \leq \sigma^{(e)}(n) \leq \psi(n) \leq \sigma(n). \tag{3.3.7}$$

OBSERVAŢIA 3.3.4 *Din observaţia 2.2.5, deducem uşor faptul că, dacă* $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_r^{a_r}$ *cu* $a_i \neq 2$ *pentru orice* $i = \overline{1,r}$*, atunci*

$$\sigma^{(e)s}(n) \leq \sigma^{(e)*}(n) \leq \sigma^{(e)}(n) \leq \frac{\zeta(2)\cdot\zeta(3)}{\zeta(4)\cdot\zeta(6)}n \tag{3.3.8}$$

şi

$$\sigma^{(e)s}(n) \leq \frac{9}{5}n. \tag{3.3.9}$$

COROLARUL 3.3.5 *Dacă* $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_r^{a_r}$ *este un număr e-semipropriu perfect, atunci cel puţin un exponent* a_i *este egal cu 2.*

Demonstraţie. Presupunem prin absurd că numărul $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_r^{a_r}$ cu $a_i \neq 2$ pentru orice $1 \leq i \leq r$ este un număr e-semipropriu perfect, deci $\sigma^{(e)s}(n) = 2n$. Aplicând observaţia 3.3.4, avem $\sigma^{(e)s}(n) \leq \frac{9}{5}n < 2n$, deci $\sigma^{(e)s}(n) < 2n$, care implică o contradicţie. În consecinţă, nu există niciun număr e-semipropriu perfect de tipul $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_r^{a_r}$ cu $a_i \neq 2$ pentru orice $1 \leq i \leq r$.

□

Utilizând propoziţiile 3.1.3 şi 3.1.7 pentru $k = 1$, obţinem ordinul maximal al funcţiei $\sigma^{(e)s}$ şi ordinul minimal al compunerii de funcţii $\sigma^{(e)s} \circ \sigma$. Ca urmare, avem

CONSECINŢA 3.3.6 (Minculete [[**20**]])

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sigma^{(e)s}(n)}{n \ln\ln n} = \frac{6}{\pi^2}e^{\gamma} \tag{3.3.10}$$

şi

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\sigma^{(e)s}(\sigma(n))}{n} = 1, \tag{3.3.11}$$

unde γ *este constanta lui Euler, iar* $\sigma(n)$ *este suma divizorilor ai lui* n*.*

Cu ajutorul convoluţiei putem obţine o serie de funcţii multiplicative. De aceea, considerăm că este necesară extinderea tipurilor de convoluţie.
Astfel, în mod asemănător cu definirea convoluţiei exponenţiale unitare, introducem *convoluţia exponenţială semiproprie* a funcţiilor aritmetice, pe care o definim astfel: $(f *_{(e)s} g)(1) = 1$ şi

$$(f *_{(e)s} g)(n) = \sum_{\substack{b_1c_1=a_1 \\ b_1,c_1\in\{1,a_1\}}} \ldots \sum_{\substack{b_rc_r=a_r \\ b_r,c_r\in\{1,a_r\}}} f(p_1^{b_1}\ldots p_r^{b_r})g(p_1^{c_1}\ldots p_r^{c_r}). \tag{3.3.12}$$

Convoluţia exponenţială semiproprie este comutativă, asociativă şi are ca element neutru pe $\overline{\mu}$, unde $\overline{\mu}(1) = 1$ şi

$$\overline{\mu}(p^a) = \begin{cases} 1, \text{ pentru } a = 1 \\ 0, \text{ pentru } a \geq 2, \end{cases} \tag{3.3.13}$$

unde p este un număr prim şi $a \geq 1$.

Mai mult, o funcţie f este inversabilă în raport cu convoluţia exponenţială semiproprie dacă şi numai dacă $f(1) \neq 0$ şi $f(p_1\ldots p_k) \neq 0$ pentru orice numere prime distincte $p_1, \ldots, p_k$.

Inversa funcţiei constante 1 în raport cu convoluţia exponenţială semiproprie este funcţia aritmetică μ_s, dată prin $\mu_s(1) = 1$ şi

$$\mu_s(p^a) = \begin{cases} 1, \text{ pentru } a = 1 \\ -1, \text{ pentru } a \geq 2, \end{cases} \tag{3.3.14}$$

unde p este un număr prim şi $a \geq 1$.

O proprietate imediată a acestei funcţii este următoarea:

$$\mu_s *_{(e)s} \mu_s = \mu_s \cdot \tau^{(e)s}. \tag{3.3.15}$$

De asemenea, convoluţia exponenţială semiproprie nu este un exemplu de convoluţie regulată de tip Narkiewicz, pe care o găsim tratată în lucrarea [**32**].

3.4 Numărul şi suma e-divizorilor de ordin k ai unui număr natural

Pentru a extinde mulţimea funcţiilor aritmetice multiplicative cunoscute la altele noi, care utilizează divizorii exponenţiali, în acest subcapitol introducem noţiunea de *divizor exponenţial de ordin k* sau *e-divizor de ordin k*.

DEFINIŢIA 3.4.0 *Un număr natural $n > 1$ descompus canonic $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_r^{a_r}$ are ca e-divizor de ordin k pe $d = \prod_{i=1}^{r} p_i^{b_i}$, dacă b_i este un divizor de ordin k al lui a_i, adică $b_i|_{(k)}a_i$ pentru orice $i = \overline{1,r}$. Prin convenţie, 1 este un e-divizor de ordin k al său.*

În acest caz, notăm $d|_{(e)(k)}n$.

Dacă $\tau^{(e)(k)}(n)$ reprezintă numărul e-divizorilor de ordin k ai lui n, atunci $\tau^{(e)(k)}(1) = 1$. Remarcăm că 1 nu este e-divizor de ordin k al lui $n > 1$, iar cel mai mic e-divizor de ordin k al lui $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_u^{a_u}p_u^{a_u}p_{u+1}^{a_{u+1}}...p_r^{a_r} > 1$, unde $a_1, a_2, ..., a_u < k+1$ şi $a_{u+1}, a_{u+2}, ..., a_r \geq k+1$, este numărul $\gamma(n) = p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_u^{a_u}(p_{u+1}p_{u+2}...p_r)^k$. De asemenea observăm că e-divizorii de ordin k ai lui n se găsesc printre divizorii exponenţiali ai lui n, deci

$$\tau^{(e)(k)}(n) \leq \tau^{(e)}(n).$$

În acelaşi timp, deducem inegalitatea

$$\tau^{(e)(k)}(n) \leq \tau^{(e)}(n) \leq \tau(n)$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
Dacă $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot ... \cdot p_r^{a_r} > 1$, atunci, făcând câteva calcule, obţinem egalitatea

$$\tau^{(e)(k)}(n) = \tau^{(k)}(a_1) \cdot \tau^{(k)}(a_2) \cdot ... \cdot \tau^{(k)}(a_r), \tag{3.4.1}$$

ceea ce implică faptul că funcţia aritmetică $\tau^{(e)(k)}(n) = \sum_{d|_{(e)(k)}n} 1$ este multiplicativă.

Fie $\sigma^{(e)(k)}(n)$ suma e-divizorilor de ordin k ai lui n. Prin convenţie, 1 este un e-divizor de ordin k al său, deci $\sigma^{(e)(k)}(1) = 1$. Observăm că e-divizorii de ordin k ai lui n se găsesc printre divizorii exponenţiali ai lui n, deci

$$\sigma^{(e)(k)}(n) \leq \sigma^{(e)}(n), \tag{3.4.2}$$

ceea ce implică inegalitatea $\sigma^{(e)(k)}(n) \leq \sigma^{(e)}(n) \leq \sigma(n)$.
Dacă $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot ... \cdot p_r^{a_r} > 1$, atunci

$$\sigma^{(e)(k)}(n) = \prod_{i=1}^{r} \left(\sum_{d|_{(k)}a_i} p_i^d \right), \tag{3.4.3}$$

de unde rezultă că funcţia aritmetică $\sigma^{(e)(k)}(n) = \sum_{d|_{(e)(k)}n} d$ este multiplicativă.
Urmărind câteva proprietăţi ale e-divizorilor de ordin k, constatăm că, dacă n este liber de pătrate, atunci avem

$$\sigma^{(e)(k)}(n) = n.$$

În mod asemănător cu numărul perfect, introducem numărul *e-perfect de ordin k*; astfel, un număr n este un număr *e-perfect de ordin k*, dacă $\sigma^{(e)(k)}(n) = 2n$.
Utilizând definiţia de mai sus, este uşor de văzut că, dacă m este un număr liber de pătrate, iar n este un număr e-perfect de ordin k, astfel încât $(m, n) = 1$, atunci mn este e-perfect de ordin k. Această proprietate a fost remarcată la majoritatea tipurilor de numere perfecte studiate anterior.
O proprietate a sumei divizorilor de ordin k ai lui $\sigma(n)$, care reprezintă suma divizorilor naturali ai lui n, este dată astfel:

PROPOZIŢIA 3.4.1 *Există relaţia următoare:*

$$\lim_{n\to\infty} \inf \frac{\sigma^{(e)(k)}(\sigma(n))}{n} = 1. \tag{3.4.4}$$

Demonstraţie. Este uşor de văzut că $n \leq \sigma^{(e)(k)}(n) \leq \sigma(n)$ pentru orice $n \geq 1$. Aplicăm teorema 2.0.5 pentru $h(n) = \sigma^{(e)(k)}(n)$ şi deducem relaţia din enunţ.

□

CAPITOLUL 4

Tipuri de numere armonice

În acest capitol investigăm numerele armonice, numerele armonice bi-unitare şi numerele armonice exponenţiale, continuând cercetările făcute de J. Sándor în câteva lucrări la care ne vom referi în continuare.

J. Sándor prezintă în lucrarea [**47**] un tabel cu toate cele 211 numere armonice bi-unitare până la 10^9. Studiind numerele armonice bi-unitare mai mari decât 10^9, am găsit un număr armonic bi-unitar mai mare decât 10^{94}. Mai mult, am arătat că singurul număr par care este, în acelaşi timp, număr perfect şi număr armonic bi-unitar este 6, iar dacă un număr n este armonic bi-unitar de forma pqt^2, atunci $n = 60$ sau $n = 90$.

J. Sándor introduce în lucrarea [**46**] *numerele armonice exponenţiale de tipul 1 şi de tipul 2*. În subcapitolul 4.3 introducem şi studiem *numerele armonice exponenţiale de tipul 3 şi de tipul 4*, arătând că orice număr liber de pătrate este armonic exponenţial de tipurile 3 şi 4, iar dacă n este un număr e-unitar perfect, atunci n este armonic exponenţial de tipul 3.

Rezultatele care se înscriu în această tematică au fost extrase în mare parte din lucrarea [**25**], N. Minculete, "Types of harmonic numbers" –lucrare care se află în pregătire.

4.1 Numere armonice

Fie n un număr natural şi $1 = d_1 < d_2 < ... < d_s = n$, divizorii naturali ai lui n. O. Ore studiază în lucrarea [**36**] cazul în care media armonică a acestora, $H(n)$, este un număr natural, adică

$$H(n) = \frac{s}{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + ... + \frac{1}{d_s}} \in \mathbb{N}.$$

Dacă $\sigma(n)$ este suma divizorilor naturali ai lui n, iar $\tau(n)$ este numărul de divizori ai lui n, atunci $H(n)$ se rescrie $H(n) = \dfrac{n\tau(n)}{\sigma(n)}$, deoarece

$$\sigma(n) = d_1 + d_2 + ... + d_s = \frac{n}{d_s} + ... + \frac{n}{d_1} = n\left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + ... + \frac{1}{d_s}\right).$$

Prin urmare se observă că $H(n)$ este număr natural dacă şi numai dacă $\sigma(n)|n\tau(n)$.

Astfel, C. Pomerance defineşte, în lucrarea [**40**], *numărul armonic* drept un număr n pentru care $\sigma(n)|n\tau(n)$.

O. Ore stabileşte o legătură între numerele perfecte şi numerele armonice, arătând că dacă n este un număr perfect, atunci acesta este armonic.

O listă a numerelor armonice până la $2 \cdot 10^9$ este dată de G. L. Cohen în lucrarea [**5**], el găsind 130 de numere de acest tip, iar G. L. Cohen şi R. M. Sorli continuă, în lucrarea [**6**], această listă până la 10^{10}.

Noţiunea de număr armonic este extinsă asupra divizorilor unitari de către K. Nageswara Rao în [**34**]. Astfel, un număr natural n este numit *armonic unitar* dacă $\sigma^*(n)|n\tau^*(n)$. Aceasta arată că dacă un număr este perfect unitar, atunci n este armonic unitar.

Ch. Wall arată în [**68**] că există 23 de numere armonice unitare cu $\omega(n) \leq 4$.

4.2 Numere armonice bi-unitare

Noţiunea de număr armonic este extinsă şi asupra divizorilor bi-unitari. Reamintim că un divizor d al lui n se numeşte *divizor bi-unitar* dacă cel mai mare divizor unitar al lui d şi $\dfrac{n}{d}$ este 1, iar prin $\sigma^{**}(n)$ notăm suma divizorilor bi-unitari ai lui n.

Ch. Wall introduce, în lucrarea [**66**], noţiunea de număr perfect bi-unitar. Astfel, un număr n este număr *perfect bi-unitar* dacă $\sigma^{**}(n) = 2n$. Ch. Wall arată că singurele numere perfecte bi-unitare sunt 6, 60 şi 90.

Observăm că funcţia $\sigma^{**}(n)$ este multiplicativă şi avem

$$\sigma^{**}(p^a) = \sigma(p^a) = \frac{p^{a+1}-1}{p-1} \text{ dacă } a \text{ este impar şi}$$

$$\sigma^{**}(p^a) = \sigma(p^a) - p^{\frac{a}{2}} = \frac{p^{a+1}-1}{p-1} - p^{\frac{a}{2}} \text{ dacă } a \text{ este par,}$$

unde p este un număr prim.

Notăm prin $\tau^{**}(n)$ numărul divizorilor bi-unitari ai lui n; este uşor de văzut că, dacă $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_r^{a_r} > 1$, atunci $\tau^{**}(n) = \prod\limits_{a_i=par} a_i \prod\limits_{a_i=impar} (a_i+1)$.

În lucrarea [**47**], J. Sándor introduce noţiunea de număr armonic bi-unitar în modul următor: un număr natural n este *număr armonic bi-unitar* dacă avem $\sigma^{**}(n)|n\tau^{**}(n)$. El arată că dacă n este perfect bi-unitar, atunci n este armonic bi-unitar. Cum Ch. Wall arată că 6, 60 şi 90 sunt numere perfecte bi-unitare, acestea sunt şi armonice bi-unitare. Tot în [**47**] este arătat că dacă $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_r^{a_r} > 1$ şi toţi exponenţii a_i sunt impari, atunci n este armonic bi-unitar dacă şi numai dacă n este armonic. De asemenea, se demonstrează că nu există numere armonice bi-unitare de formele: pq^4, p^3q^2 şi p^3q^4, iar singurul număr armonic bi-unitar de forma pq^2 este $5 \cdot 3^2$. De aici deducem că există numere impare care sunt armonice bi-unitare.

J. Sándor prezintă în [**47**] un tabel cu toate cele 211 numere armonice bi-unitare până la 10^9, unde observăm următoarele:

- există doar cinci numere impare până la 10^9 care sunt armonice bi-unitare.
  Acestea sunt următoarele: $1, 45 = 3^2 \cdot 5$, $646425 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 13^2 \cdot 17$,
  $716625 = 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13$ şi $29381625 = 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 41$.

- există un singur pătrat perfect până la 10^9 care să fie armonic bi-unitar: $9922500 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7^2$.

- există doar cinci numere powerful (număr *powerful* este numărul 1 sau orice număr natural $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_r^{a_r}$, pentru care $a_i \geq 2$, oricare ar fi $i = \overline{1,r}$) până la 10^9 care sunt numere armonice bi-unitare. Acestea sunt următoarele: $3307500 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^4 \cdot 7^2$, $9922500 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7^2$, $23152500 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^4 \cdot 7^3$, $138915000 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7^3$ şi $555660000 = 2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7^3$.

În continuare, căutăm numere armonice bi-unitare mai mari decât 10^9. Pentru a verifica dacă anumite numere, relativ de mari, sunt prime, am utilizat programul informatic *Prime Number Checker*.

În construcţia numerelor armonice mai mari decât 10^9 avem nevoie de numere prime suficient de mari, dar care au o formă convenabilă. Prin urmare, utilizăm numerele prime Mersenne în descompunerea canonică a noilor numere armonice bi-unitare.

PROPOZIŢIA 4.2.1 (Minculete [**25**]). *Numerele următoare:*

$$n_1 = 2^{14}(2^7 - 1)(2^8 + 1) \cdot 3^4 \cdot 11 \cdot 43,$$

$$n_2 = 2^{26}(2^{13} - 1) \cdot 3^3 \cdot 5^6 \cdot 19 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 79 \cdot 113 \cdot 157 \cdot 313,$$

$$n_3 = 2^{34}(2^{17} - 1) \cdot 3^4 \cdot 5^6 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 79 \cdot 109 \cdot 157 \cdot 313,$$

$$n_4 = 2^{38}(2^{19} - 1) \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 2203 \cdot 30841 \cdot 61681$$

şi

$$n_5 = 2^{62}(2^{31}-1)\cdot 3^5\cdot 5^6\cdot 7^5\cdot 11\cdot 13\cdot 19\cdot 43\cdot 79\cdot 107\cdot$$

$$157\cdot 313\cdot 349\cdot 641\cdot 27919\cdot 55837\cdot 335021\cdot 3350209\cdot 6700417$$

sunt armonice bi-unitare.

Demonstraţie. Conform lucrărilor [**33**,**38**], un număr n este număr Mersenne dacă este de forma 2^k-1. Tot aici sunt prezentate primele 38 numere prime Mersenne. Primele opt numere prime sunt următoarele: $M_1=2^2-1,\ M_2=2^3-1,\ M_3=2^5-1,\ M_4=2^7-1,\ M_5=2^{13}-1,\ M_6=2^{17}-1,\ M_7=2^{19}-1$ şi $M_8=2^{31}-1$.
Fie n numărul armonic bi-unitar pe care îl căutăm. Mai jos, prezentăm o modalitate de construcţie a acestuia.
Dacă $M_k=2^k-1$ este un număr prim, atunci deducem relaţia

$$\sigma^{**}((M_k+1)^2)=\sigma^{**}(2^{2k})=(1+2+2^2+...+2^{k-1}+2^{k+1}+...+2^{2k})=$$

$$=(1+2+2^2+...+2^{k-1})(1+2^{k+1})=(2^k-1)(2^{k+1}+1).$$

Cum $\sigma^{**}(n)|n\tau^{**}(n),\ n$ trebuie să-l aibă ca divizor pe $M_k=2^k-1$ şi, pe lângă acesta, pe toţi divizorii primi ai lui $2^{k+1}+1$, deci $n=2^{2k}(2^k-1)\cdot p_1^{a_1}\cdot ...\cdot p_r^{a_r}$.
I. Pentru $M_1=2^2-1=3$, avem $n=2^4\cdot 3^4\cdot 7$ sau $n=2^4\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7$ sau $n=2^4\cdot 3^4\cdot 7\cdot 11$.
II. Pentru $M_2=2^3-1=7$, avem $n=2^6\cdot 3\cdot 7\cdot 17=22848$.
III. Pentru $M_3=2^5-1=31$, avem $n=2^{10}\cdot 7\cdot 13\cdot 31=2888704$.
Valorile lui n pe care le avem până acum se regăsesc în tabelul dat de J. Sándor în lucrarea [**47**].
IV. Pentru $M_4=2^7-1=127$, avem $n=2^{14}(2^7-1)(2^8+1)\cdot v$, dar 2^7-1 este număr prim Mersenne, iar 2^8+1 este număr prim Fermat. Prin urmare, $\sigma^{**}(n)=(2^7-1)(2^8+1)\cdot 2^7\cdot(2^8+2)\cdot w$, ceea ce înseamnă că $2^8+2=2\cdot 3\cdot 43$ trebuie să fie un divizor al lui $n\tau^{**}(n)$, deoarece $\sigma^{**}(n)|n\tau^{**}(n)$. Deci noua formă a lui n este dată astfel: $n=2^{14}(2^7-1)\cdot 3\cdot 43\cdot v'$. Dar $\sigma^{**}(43)=44=2^2\cdot 11$, ceea ce implică $11|n$. Aşadar, îl rescriem pe n astfel: $n=2^{14}(2^7-1)(2^8+1)\cdot 3\cdot 11\cdot 43$ şi avem $\sigma^{**}(n)=(2^7-1)(2^8+1)\cdot 2^7\cdot 2\cdot 3\cdot 43\cdot 2^2\cdot 2^2\cdot 3\cdot 2^2\cdot 11=2^{14}(2^7-1)(2^8+1)\cdot 3^2\cdot 11\cdot 43$. Observăm că mai apare un 3 în plus, în descompunerea lui $\sigma^{**}(n)$, dar, cum $\tau^{**}(n)=14\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=2^5\cdot 7$ nu conţine încă un 3, atunci trebuie să mărim puterea lui 3 din descompunerea lui n pentru a avea $\sigma^{**}(n)|n\tau^{**}(n)$. Dacă 3^2 ar divide unitar pe n, atunci $\sigma^{**}(3^2)=1+3^2=10$, ceea ce implică $5|n$, iar aceasta ar da naştere la apariţia încă unui 3 în descompunerea lui $\sigma^{**}(n)$.
Prin urmare, luăm $n=2^{14}(2^7-1)(2^8+1)\cdot 3^4\cdot 11\cdot 43$, iar

$$\sigma^{**}(n)=(2^7-1)(2^8+1)\cdot 2^7\cdot 2\cdot 3\cdot 43\cdot 2^4\cdot 7\cdot 2^2\cdot 3\cdot 2^2\cdot 11=2^{16}(2^7-1)(2^8+1)\cdot 3^2\cdot 7\cdot 11\cdot 43.$$

Cum $\tau^{**}(n) = 14 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7 \cdot 7$, rezultă că $n\tau^{**}(n) = 2^{21}(2^7-1)(2^8+1) \cdot 3^4 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 43$, ceea ce înseamnă că $\sigma^{**}(n) | n\tau^{**}(n)$. Aşadar, numărul

$$n_1 = 2^{14}(2^7-1)(2^8+1) \cdot 3^4 \cdot 11 \cdot 43 = 20.488.159.346.688$$

este armonic bi-unitar mai mare decât $2 \cdot 10^{13}$, iar

$$H^{**}(n_1) = \frac{n_1\tau^{**}(n_1)}{\sigma^{**}(n_1)} = 2^5 \cdot 3^2 = 288.$$

V. Pentru $M_5 = 2^{13} - 1 = 8191$, avem $n = 2^{26}(2^{13}-1)(2^{14}+1) \cdot v$, unde $2^{13}-1$ este număr prim Mersenne, iar $2^{14}+1 = 5 \cdot 29 \cdot 113$. Prin urmare,

$$\sigma^{**}(n) = (2^{13}-1)(2^{14}+1) \cdot 2^{13} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 19 \cdot w = 2^{16}(2^{13}-1) \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 19 \cdot 29 \cdot 113 \cdot w,$$

ceea ce înseamnă că 3, 5 şi 19 trebuie să fie divizori ai lui $n\tau^{**}(n)$, deoarece $\sigma^{**}(n) | n\tau^{**}(n)$, deci noua formă a lui n este dată astfel: $n = 2^{26}(2^{13}-1) \cdot 3^a \cdot 5^b \cdot 19 \cdot 29 \cdot 113 \cdot v'$. Făcând mai multe verificări, alegem combinaţia $3^3 \cdot 5^6$, astfel că $\sigma^{**}(3^3 \cdot 5^6) = 2^4 \cdot 5 \cdot 31 \cdot 313$, ceea ce implică $31, 313 | n$. Prin urmare, îl rescriem pe n astfel: $n = 2^{26}(2^{13}-1) \cdot 3^3 \cdot 5^6 \cdot 19 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 113 \cdot 313 \cdot w'$ şi, cum $\sigma^{**}(313) = 2 \cdot 157$, rezultă $157 | n$, iar cum $\sigma^{**}(157) = 2 \cdot 79$, rezultă $79 | n$. Aşadar, studiem numărul $n = 2^{26}(2^{13}-1) \cdot 3^3 \cdot 5^6 \cdot 19 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 79 \cdot 113 \cdot 157 \cdot 313$ dacă este armonic bi-unitar. Ca urmare, deducem

$$\sigma^{**}(n) = (2^{13}-1) \cdot 5 \cdot 29 \cdot 113 \cdot 2^{13} \cdot 2^3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 31 \cdot 313 \cdot$$

$$2^2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^5 \cdot 2^4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 19 \cdot 2 \cdot 79 \cdot 2 \cdot 157 =$$

$$= 2^{32}(2^{13}-1) \cdot 3^2 \cdot 5^5 \cdot 19 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 79 \cdot 113 \cdot 127 \cdot 313.$$

În acest caz, avem $\tau^{**}(n) = 26 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2^7 = 2^{12} \cdot 3 \cdot 13$, ceea ce implică

$$H^{**}(n) = \frac{n\tau^{**}(n)}{\sigma^{**}(n)} = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13,$$

de unde rezultă că numărul

$$n_2 = 2^{26}(2^{13}-1) \cdot 3^3 \cdot 5^6 \cdot 19 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 79 \cdot 113 \cdot 157 \cdot 313 =$$

$$1.737.654.465.595.711.599.673.344.000.000$$

este armonic bi-unitar mai mare decât 10^{30}.
VI. Pentru $M_6 = 2^{17} - 1 = 131071$, ca mai sus, găsim numărul
$n = 2^{34}(2^{17}-1) \cdot 3^4 \cdot 5^6 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 79 \cdot 109 \cdot 157 \cdot 313$ pentru care

$\sigma^{**}(n) = 2^{41}(2^{17}-1)\cdot 3\cdot 5^6\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13\cdot 19\cdot 31\cdot 37\cdot 79\cdot 109\cdot 157\cdot 313.$
Cum $\tau^{**}(n) = 2^{15}\cdot 3\cdot 17$, rezultă

$$H^{**}(n) = \frac{n\tau^{**}(n)}{\sigma^{**}(n)} = 2^8\cdot 3^4\cdot 17,$$

ceea ce înseamnă că numărul

$$n_3 = 2^{34}(2^{17}-1)\cdot 3^4\cdot 5^6\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13\cdot 19\cdot 31\cdot 37\cdot 79\cdot 109\cdot 157\cdot 313$$

este armonic bi-unitar mai mare decât 10^{38}.
VII. Pentru $M_7 = 2^{19}-1 = 524287$, găsim numărul

$$n = 2^{38}(2^{19}-1)\cdot 3^4\cdot 5^3\cdot 7^3\cdot 13\cdot 17\cdot 29\cdot 2203\cdot 3041\cdot 61681,$$

pentru care

$$\sigma^{**}(n) = (2^{19}-1)(2^{20}+1)\cdot 2^{19}\cdot 2^4\cdot 7\cdot 2^2\cdot 3\cdot 13\cdot 2^4\cdot 5^2\cdot$$

$$2\cdot 7\cdot 2\cdot 3^2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 2^2\cdot 19\cdot 29\cdot 2\cdot 7\cdot 2203\cdot 2\cdot 30841.$$

Deci
$\sigma^{**}(n) = 2^{36}(2^{19}-1)\cdot 3^4\cdot 5^3\cdot 7^3\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 29\cdot 2203\cdot 30841\cdot 61681,$
unde $2^{20}+1 = 17\cdot 61681$, iar $\tau^{**}(n) = 38\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 2^6 = 2^{14}\cdot 19$, de unde rezultă că

$$H^{**}(n) = \frac{n\tau^{**}(n)}{\sigma^{**}(n)} = 2^{16}.$$

În concluzie, numărul

$$n_4 = 2^{38}(2^{19}-1)\cdot 3^4\cdot 5^3\cdot 7^3\cdot 13\cdot 17\cdot 29\cdot 2203\cdot 3041\cdot 61681$$

este armonic bi-unitar mai mare decât 10^{40}.
VIII. Pentru $M_8 = 2^{31}-1 = 3221225471$, găsim numărul

$$n = 2^{62}(2^{31}-1)\cdot 3^5\cdot 5^6\cdot 7^5\cdot 11\cdot 13\cdot 19\cdot 43\cdot 79\cdot 107\cdot$$

$$157\cdot 313\cdot 349\cdot 641\cdot 27919\cdot 55837\cdot 335021\cdot 3350209\cdot 6700417,$$

pentru care
$\sigma^{**}(n) = (2^{31}-1)(2^{32}+1)\cdot 2^{31}\cdot 2^2\cdot 7\cdot 13\cdot 2\cdot 31\cdot 313\cdot 2^3\cdot 3\cdot 19\cdot 43\cdot 2^3\cdot 3\cdot 2\cdot 7\cdot 2^2\cdot 5\cdot$
$2^2\cdot 11\cdot 2^4\cdot 5\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot 2\cdot 79\cdot 2\cdot 157\cdot 2\cdot 5^2\cdot 7\cdot 2\cdot 3\cdot 107\cdot 2^4\cdot 5\cdot 349\cdot 2\cdot 27919\cdot$
$2\cdot 3\cdot 55837\cdot 2\cdot 5\cdot 335021\cdot 2\cdot 3350209.$
Deci

$$\sigma^{**}(n) = 2^{63}(2^{31}-1)\cdot 3^7\cdot 5^6\cdot 7^3\cdot 11\cdot 13\cdot 19\cdot 31\cdot 43\cdot 79\cdot 107\cdot$$

$$157 \cdot 313 \cdot 349 \cdot 641 \cdot 27919 \cdot 55837 \cdot 335021 \cdot 3350209 \cdot 6700417,$$

unde $2^{32} + 1 = 641 \cdot 6700417 = F_5$, adică al cincilea număr Fermat.
Cum $\tau^{**}(n) = 2^{20} \cdot 3^3 \cdot 31$, rezultă

$$H^{**}(n) = \frac{n\tau^{**}(n)}{\sigma^*(n)} = 2^{19} \cdot 3 \cdot 7^2,$$

ceea ce înseamnă că numărul

$$n_5 = 2^{62}(2^{31} - 1) \cdot 3^5 \cdot 5^6 \cdot 7^5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 43 \cdot 79 \cdot 107 \cdot$$

$$157 \cdot 313 \cdot 349 \cdot 641 \cdot 27919 \cdot 55837 \cdot 335021 \cdot 3350209 \cdot 6700417$$

este armonic bi-unitar mai mare decât 10^{86}.

□

OBSERVAŢIA 4.2.2 *a) J. Sándor introduce în lucrarea [47] noţiunea de număr $k - perfect$ bi-unitar astfel: un număr natural n este număr k-perfect bi-unitar dacă avem $\sigma^{**}(n) = kn$, unde $k \geq 2$. Din demonstraţia de mai sus, observăm că pentru*

$$n = 2^{14}(2^7 - 1)(2^8 + 1) \cdot 3 \cdot 11 \cdot 43 = 758820716544,$$

avem $\sigma^{**}(n) = 2^{14}(2^7 - 1)(2^8 + 1) \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 43$, adică $\sigma^{**}(n) = 3n$, deci n este un număr 3-perfect bi-unitar.
b) Observăm că dacă $(m, n) = 1$, atunci $H^{**}(m \cdot n) = H^{**}(m) \cdot H^{**}(n)$. Această observaţie ne determină să căutăm numere naturale m prime cu

$$n_1 = 2^{14}(2^7 - 1)(2^8 + 1) \cdot 3^4 \cdot 11 \cdot 43 = 20488159346688,$$

pentru care $H^{**}(m \cdot n)$ este un număr întreg. Cum $H^{**}(n) = 2^5 \cdot 3^2$, îl alegem pe m ca fiind un număr prim pentru care $m + 1$ are în descompunere factorii primi 2 şi 3 sau îl alegem pe m ca produs de numere prime cu proprietatea anterioară. Observăm că dacă m este prim, atunci obţinem $m \in \{5, 7, 17, 23, 31, 47, 71\}$. Prin urmare, obţinem următoarele:

$$H^{**}(5 \cdot n_1) = 2^5 \cdot 3 \cdot 5,\ H^{**}(7 \cdot n_1) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7,\ H^{**}(17 \cdot n_1) = 2^5 \cdot 17,$$

$$H^{**}(23 \cdot n_1) = 2^3 \cdot 3 \cdot 23,\ H^{**}(31 \cdot n_1) = 2 \cdot 3^2 \cdot 31,\ H^{**}(47 \cdot n_1) = 2^2 \cdot 3 \cdot 47,$$

$$H^{**}(71 \cdot n_1) = 2^3 \cdot 71,$$

$$H^{**}(5 \cdot 7 \cdot n_1) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7,\ H^{**}(5 \cdot 23 \cdot n_1) = 2^3 \cdot 5 \cdot 23,\ H^{**}(5 \cdot 31 \cdot n_1) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 31,$$

$$H^{**}(5\cdot 47\cdot n_1)=2^2\cdot 5\cdot 47,\ H^{**}(7\cdot 17\cdot n_1)=2^3\cdot 7\cdot 17,\ H^{**}(7\cdot 23\cdot n_1)=2\cdot 3\cdot 7\cdot 23,$$
$$H^{**}(7\cdot 47\cdot n_1)=3\cdot 7\cdot 47,\ H^{**}(7\cdot 71\cdot n_1)=2\cdot 7\cdot 71,\ H^{**}(17\cdot 31\cdot n_1)=2\cdot 17\cdot 31 \text{ şi}$$
$$H^{**}(23\cdot 47\cdot n_1)=23\cdot 47.$$

O altă combinaţie poate fi facută cu numărul prim 13, deoarce $H^{**}(13)=\dfrac{13}{7}$, *astfel:*

$$H^{**}(7\cdot 13\cdot n_1)=2^3\cdot 3^2\cdot 13,\ H^{**}(5\cdot 7\cdot 13\cdot n_1)=2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 13,$$
$$H^{**}(7\cdot 13\cdot 17\cdot n_1)=2^3\cdot 13\cdot 17,\ H^{**}(7\cdot 13\cdot 23\cdot n_1)=2\cdot 3\cdot 13\cdot 23,$$
$$H^{**}(7\cdot 13\cdot 47\cdot n_1)=3\cdot 13\cdot 47 \text{ şi } H^{**}(7\cdot 13\cdot 71\cdot n_1)=2\cdot 13\cdot 71.$$

c) Plecând de la numărul n_4 *şi ţinând seama că* $M_5=2^{13}-1=8191$ *este al cincilea număr Mersenne prim, rezultă că numărul*

$$n_4\cdot M_5=2^{38}(2^{19}-1)(2^{13}-1)\cdot 3^4\cdot 5^3\cdot 7^3\cdot 13\cdot 17\cdot 29\cdot 2203\cdot 30841\cdot 61681$$

este armonic bi-unitar mai mare decât 10^{44}, *iar* $H^{**}(n_4\cdot M_5)=2^4(2^{13}-1)$.
Utilizând numărul n_4 *şi ţinând seama că numărul* $M_6=2^{17}-1=131071$ *este al şaselea număr Mersenne prim, rezultă că numărul*

$$n_4\cdot M_6=2^{38}(2^{19}-1)(2^{17}-1)\cdot 3^4\cdot 5^3\cdot 7^3\cdot 13\cdot 17\cdot 29\cdot 2203\cdot 30841\cdot 61681$$

este armonic bi-unitar mai mare decât 10^{46}, *iar*

$$H^{**}(n_4\cdot M_6)=M_6=2^{17}-1=131071.$$

d) Cum $M_7=2^{19}-1=524287$ *este număr prim Mersenne, rezultă că* $H^{**}(M_7)=\dfrac{2^{19}-1}{2^{18}}$, *iar cum* M_7 *este prim cu orice divizor al lui n, deducem că* $H^{**}(n_5\cdot M_7\cdot 293)=2\cdot 293\cdot(2^{19}-1)$. *Aşadar, obţinem un alt număr armonic bi-unitar, şi anume*

$$n_5\cdot M_7\cdot 293=2^{62}(2^{31}-1)\cdot(2^{19}-1)\cdot 3^5\cdot 5^6\cdot 7^5\cdot 11\cdot 13\cdot 19\cdot 43\cdot 79\cdot 107\cdot$$
$$157\cdot 293\cdot 313\cdot 349\cdot 641\cdot 27919\cdot 55837\cdot 335021\cdot 3350209\cdot 6700417,$$

care este mai mare decât 10^{94}.

Deşi am găsit numere armonice bi-unitare din ce în ce mai mari, nu se ştie, încă, dacă sunt o infinitate de numere de acest tip. Această problemă rămâne deschisă.

Dacă s-ar putea arăta că sunt o infinitate de numere perfecte bi-unitare, fapt încă nedemonstrat, atunci ar exista o infinitate de numere armonice bi-unitare.

O. Ore arată în lucrarea [**36**] că dacă n este un număr perfect, atunci acesta este armonic. Mai jos, arătăm că singurul număr par care este, în acelaşi timp, număr perfect şi armonic bi-unitar este 6.

PROPOZIŢIA 4.2.3 (Minculete [**25**]). *Dacă un număr par n este, în acelaşi timp, perfect şi armonic bi-unitar, atunci $n = 6$.*

Demonstraţie. Conform teoremei lui Euler-Euclid (vezi e.g [**33**,**38**]), un număr par n este perfect dacă şi numai dacă $n = 2^k(2^{k+1} - 1)$, unde $k \geq 1$ şi $p = 2^{k+1} - 1$ este număr prim. Pentru $k = 1$ obţinem $n = 6$, deci 6 este un număr perfect, iar $H^{**}(6) = \dfrac{6\tau^{**}(6)}{\sigma^{**}(6)} = 2$.
Ca urmare, 6 este un număr armonic bi-unitar.
Fie $k \geq 2$. Cum p este număr prim mai mare sau egal cu 5, atunci $k + 1$ este impar, rezultă k par, adică scriem $k = 2m$. Prin urmare, n se rescrie astfel: $n = 2^{2m}(2^{2m+1} - 1)$ cu $m \geq 1$. Presupunem, prin absurd, că n este număr armonic bi-unitar; rezultă $\sigma^{**}(n)|n\tau^{**}(n)$. Deci $\sigma^{**}(2^{2m})\sigma^{**}(2^{2m+1} - 1)|2^{2m}(2^{2m+1} - 1)\tau^{**}(2^{2m})\tau^{**}(2^{2m+1} - 1)$, ceea ce este echivalent cu $(2^m - 1)(2^{m+1} - 1)2^{2m+1}|2^{2m+2}(2^{2m+1} - 1) \cdot m$. Cum $((2^m - 1), 2(2^{2m+1} - 1)) = 1$, deducem că $(2^m - 1)|m$, ceea ce este fals, deoarce $2^m - 1 > m$ pentru $m \geq 2$. Pentru $m = 1$, obţinem $n = 2^2 \cdot 7$, care nu este armonic bi-unitar, deoarece $H^{**}(2^2 \cdot 7) = \dfrac{2^2 \cdot 7 \cdot 2^2}{5 \cdot 2^3} = \dfrac{14}{5}$ nu este număr întreg. În concluzie, singurul număr par care este număr perfect şi număr armonic bi-unitar este 6.

□

PROPOZIŢIA 4.2.4 (Minculete [**25**]). *Dacă un număr n este un armonic bi-unitar de forma pqt^2, unde p, q şi t sunt numere prime diferite, atunci $n = 60$ sau $n = 90$.*

Demonstraţie. Fie $n = pqt^2$; rezultă $\sigma^{**}(n) = (1 + p)(1 + q)(1 + t^2)$ şi $n\tau^{**}(n) = 2^3pqt^2$. Dacă n este un număr armonic bi-unitar, atunci $\sigma^{**}(n)|n\tau^{**}(n)$, ceea ce implică

$$(1 + p)(1 + q)(1 + t^2)|2^3pqt^2. \tag{4.2.1}$$

Studiem cazurile următoare:
I. Dacă numărul n este par, atunci cel puţin unul dintre numerele p, q sau t este egal cu 2.
I.1. Fie $p = 2$. Din relaţia (4.2.1), deducem că $3|2^4qt^2$, deci $q = 3$ sau $t = 3$. Pentru $q = 3$, rezultă $3 \cdot 4 \cdot (1 + t^2)|2^4 \cdot 3 \cdot t^2$, adică $(1 + t^2)|2^2 \cdot t^2$. Deci $(1 + t^2)|2^2$, ceea ce este fals.
Pentru $t = 3$, rezultă $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (1 + q)|2^4 \cdot 3^2 \cdot q$, adică $5 \cdot (1 + q)|2^3 \cdot 3 \cdot q$, deci $5|q$. Aşadar, deducem $q = 5$. În consecinţă, obţinem soluţia $n = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$.
I.2. Considerăm cazul $t = 2$ şi relaţia (4.2.1) devine $5(1 + p)(1 + q)|2^5 \cdot pq$, deci $5|pq$, adică $p = 5$ sau $q = 5$. Pentru $p = 5$, rezultă $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (1 + q)|2^5 \cdot 5 \cdot q$, adică $3|q$, deci $q = 3$, de unde deducem soluţia $n = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.
II. Dacă numărul n este impar, atunci p, q şi t sunt prime impare. Fie $p < q$ şi p', cel mai mare

divizor prim al lui $p+1$. Cum $(1+p)(1+q)(1+t^2)|2^3pqt^2$, rezultă $p'|2^3pqt^2$ şi avem următoarele situaţii:
II.1. Dacă $p'=2$, atunci $p+1=2^2$ sau $p+1=2^3$, adică $p=3$ sau $p=7$. Aceasta implică o contradicţie, deoarece ar însemna că $2|qt^2$, ceea ce este fals.
II.2. Dacă $p'\neq 2$, atunci $p'|pqt^2$, ceea ce înseamnă că $p'|t^2$, adică $p'=t$. Deci $p+1=2t^av$. Presupunem prin absurd că $a\geq 3$; rezultă $t|pq$, ceea ce este fals. Pentru $a=2$, avem relaţia $v(1+q)(1+t^2)|2^2pq$. Dacă numărul impar v are un divizor prim, atunci acesta trebuie să fie p sau q, ceea ce este imposibil, deci $v=1$.
II.2.1. Pentru $p+1=2t^2$, obţinem $(1+q)(1+t^2)|2^2pq$. Fie q' cel mai mare divizor prim al lui $q+1$; rezultă $q'=2$, adică $q=3$, care este fals, sau $q'|p$, deci $q'=4$. Prin urmare, avem $1+q=2p$, deoarece este imposibil ca $q+1$ să mai aibă alt divizor prim.
Conform celor prezentate până acum, deducem că $(1+t^2)|2q$, adică $1+t^2=2q$. Aşadar avem $1+t^2=2q=4p-2=8t^2-6$, adică $t=1$, ceea ce este fals.
II.2.2. Pentru $p+1=2t$, obţinem $(1+q)(1+t^2)|2^2pqt$. Dacă q' este cel mai mare divizor prim al lui $q+1$, rezultă $q'=2$, adică $q=3$, care este fals, sau $q'|pt$, adică $q'=p$ sau $q'=t$. Prin urmare, avem $1+q=2p$, deoarece este imposibil ca $q+1$ să mai aibă alt divizor prim. Varianta $1+q=2t$ nu convine, deoarece ar însemna că $p=q$, care este o contradicţie. Aşadar, deducem că $(1+t^2)|2qt$, adică $1+t^2=2q$ şi ajungem la o concluzie falsă.

□

4.3 Numere armonice exponenţiale

J. Sándor introduce, în lucrarea [**46**], două noţiuni referitoare la numerele armonice exponenţiale:

I. Un număr natural n este numit *armonic exponenţial de tipul 1* dacă $\sigma^{(e)}(n)|n\tau^{(e)}(n)$;

II. Un număr natural n este numit *armonic exponenţial de tipul 2* dacă $S^{(e)}(n)|n\tau^{(e)}(n)$, unde $S^{(e)}(n)=\prod_{i=1}^{r}\left(\sum_{d_i|a_i}p_i^{a_i-d_i}\right)$ pentru $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}....p_r^{a_r}>1$, şi, prin convenţie, luăm $S^{(e)}(1)=1$.

Referitor la funcţia aritmetică $S^{(e)}$, observăm că dacă $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_r^{a_r}>1$ are toţi exponenţii a_i numere prime, atunci $S^{(e)}(n)=\dfrac{\sigma^{(e)s}(n)}{\gamma(n)}$, unde $\sigma^{(e)s}(n)$ este suma e-divizorilor semiproprii ai lui n, iar această funcţie a fost tratată în subcapitolul 3.3.

J. Sándor dovedeşte că orice număr liber de pătrate este armonic exponenţial de ambele tipuri, ceea ce înseamnă că sunt o infinitate de numere armonice exponenţiale de ambele tipuri. Un alt rezultat demonstrat în [**46**] arată că dacă $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_r^{a_r}>1$ este e-perfect, atunci n este armonic exponenţial de tipul 1 dacă şi numai dacă cel puţin unul dintre exponenţii $a_1,a_2,...,a_r$ nu este pătrat perfect.

E. G. Straus şi M. V. Subbarao prezintă în [**54**] câteva numere e-perfecte care sunt numere powerful:

$$2^2 \cdot 3^2, 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2, 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2, 2^4 \cdot 3^2 \cdot 11^2, 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 11^2, 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13^2,$$

$$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13^2, 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13^2, 2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 139^2 \text{ şi}$$

$$2^{19} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 19^2 \cdot 37^2 \cdot 79^2 \cdot 109^2 \cdot 157^2 \cdot 313^2.$$

Cum acestea au cel puţin un exponent al unui număr prim din decompunerea canonică, ce nu este pătrat perfect, rezultă că acestea sunt armonice exponenţiale de tipul 1. Dar $S^{(e)}(2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 11^2) = S^{(e)}(2^4) \cdot S^{(e)}(3^3 \cdot 5^2 \cdot 11^2) = (2^3 + 2^2 + 1) S^{(e)}(3^3 \cdot 5^2 \cdot 11^2) = 13k$, iar $13 \nmid n\tau^{(e)}(n) = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 11^2$, ceea ce înseamnă că numărul $2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 11^2$ nu este armonic exponenţial de tipul 2. Dintre numerele de mai sus, doar

$$2^2 \cdot 3^2, 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2, 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2, 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13^2 \text{ şi}$$

$$2^{19} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 19^2 \cdot 37^2 \cdot 79^2 \cdot 109^2 \cdot 157^2 \cdot 313^2$$

sunt armonice exponenţiale de tipul 2.
Se observă că media armonică a divizorilor exponenţiali ai unui număr armonic exponenţial de tipul 2 este un număr natural.

Fie n un număr natural şi $\gamma(n) = d_1 < d_2 < ... < d_s = n$, divizorii exponenţiali ai lui n, unde $s = \tau^{(e)}(n)$. Media armonică a acestora este

$$H^{(e)}(n) = \frac{s}{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + ... + \frac{1}{d_s}},$$

adică $H^{(e)}(n) = \dfrac{n\tau^{(e)}(n)}{S^{(e)}(n)}$. Prin urmare, un număr n este armonic exponenţial de tipul 2 dacă şi numai dacă $H^{(e)}(n)$ este număr natural.
Numărul $900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ este un număr armonic exponenţial de tipul 2 care nu este armonic exponenţial de tipul 1, deoarece $H^{(e)}(900) = \dfrac{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 3^2} = 2^2 \cdot 5^2$ este un număr natural, iar $\sigma^{(e)}(900) = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \nmid 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 900 \cdot \tau^{(e)}(900)$.

În lucarea [**30**] prezentăm noţiunea de divizor exponenţial unitar sau e-divizor unitar, notând prin $\tau^{(e)*}(n)$ numărul e-divizorilor unitari ai lui n şi prin $\sigma^{(e)*}(n)$, suma e-divizorilor unitari ai lui n.
În mod similar cu numerele armonice exponenţiale de tipul 1 şi de tipul 2, date mai sus, introducem numerele armonice exponenţiale de tipul 3 şi de tipul 4 în modul următor:
I. Un număr natural n este numit *armonic exponenţial de tipul 3* dacă $\sigma^{(e)*}(n) | n\tau^{(e)*}(n)$;

II. Un număr natural n este numit *armonic exponenţial de tipul 4* dacă $S^{(e)*}(n)|n\tau^{(e)*}(n)$, unde $S^{(e)*}(n) = \prod_{i=1}^{r}\left(\sum_{d_i\|a_i} p_i^{a_i-d_i}\right)$ pentru $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_r^{a_r} > 1$, iar prin convenţie, luăm $S^{(e)*}(1) = 1$.

Studiind funcţia aritmetică $S^{(e)*}$, observăm că dacă $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_r^{a_r} > 1$ cu exponenţii $a_i,\ i = \overline{1,r}$, numere prime la o putere sau egali cu 1, atunci avem $S^{(e)*}(n) = \dfrac{\sigma^{(e)s}(n)}{\gamma(n)}$, unde $\sigma^{e(s)}(n)$ este suma e-divizorilor semiproprii ai lui n.

PROPOZIŢIA 4.3.1 *Orice număr liber de pătrate este armonic exponenţial de tipurile 3 şi 4.*

Demonstraţie. Fie n un număr liber de pătrate, adică $n = p_1p_2...p_r$, unde $p_1, p_2, ..., p_r$ sunt numere prime distincte. Cum $\sigma^{(e)*}(n) = n$, rezultă $\sigma^{(e)*}(n)|n\tau^{(e)*}(n)$, iar cum $S^{(e)*}(n) = 1$, avem $S^{(e)*}(n)|n\tau^{(e)*}(n)$. Prin urmare, n este armonic exponenţial de tipurile 3 şi 4.

□

Din propoziţia 4.3.1, deducem că sunt o infinitate de numere armonice exponenţiale de tipurile 3 şi 4. Se pune problema existenţei numerelor armonice exponenţiale de tipurile 3 şi 4 care sunt powerful, adică a numerelor de tipul $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_r^{a_r}$ cu $a_i \geq 2$, oricare ar fi $i = \overline{1,r}$. Dar mai întâi avem următoarea propoziţie:

PROPOZIŢIA 4.3.2 *Dacă n este un număr e-unitar perfect, atunci n este armonic exponenţial de tipul 3.*

Demonstraţie. Fie $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_r^{a_r} > 1$; rezultă că

$$\tau^{(e)*}(n) = \tau^*(a_1)\tau^*(a_2)...\tau^*(a_r) = 2^{\omega(a_1)+\omega(a_2)+...+\omega(a_r)}.$$

Dacă n este e-unitar perfect, atunci $\sigma^{(e)*}(n) = 2n$, ceea ce înseamnă că $\sigma^{(e)*}(n)|n\tau^{(e)*}(n)$, deci n este armonic exponenţial de tipul 3.

□

În al doilea capitol am prezentat şapte numere e-unitare perfecte care sunt powerful:

$$2^2\cdot 3^2, 2^3\cdot 3^2\cdot 5^2, 2^2\cdot 3^3\cdot 5^2, 2^6\cdot 3^2\cdot 7^2\cdot 13^2, 2^7\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 13^2, 2^6\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 13^2 \text{ şi}$$
$$2^{19}\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 11^2\cdot 13^2\cdot 19^2\cdot 37^2\cdot 79^2\cdot 109^2\cdot 157^2\cdot 313^2.$$

Conform propoziţiei 4.3.2, acestea sunt armonice exponenţiale de tipul 3.
Tot în al doilea capitol am determinat toate numerele e-unitare perfecte până la 1000.
Acestea sunt următoarele:

$$36, 180, 252, 396, 468, 612, 684 \text{ şi } 828.$$

Ca urmare, putem spune că aceste numere sunt armonice exponenţiale de tipul 3.
Observăm că media armonică a divizorilor exponenţiali unitari ai unui număr armonic exponenţial de tipul 4 este un număr natural.
Fie n un număr natural şi $\gamma(n) = d_1 < d_2 < ... < d_s = n$, divizorii exponenţiali unitari ai lui n, unde $s = \tau^{(e)*}(n)$. Cum media armonică a acestora este

$$H^{(e)*}(n) = \frac{s}{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + ... + \frac{1}{d_s}},$$

rezultă $H^{(e)*}(n) = \dfrac{n\tau^{(e)*}(n)}{S^{(e)*}(n)}$. Prin urmare, un număr n este armonic exponenţial de tipul 4 dacă şi numai dacă $H^{(e)*}(n)$ este un număr natural.
Numărul $900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ este un număr armonic exponenţial de tipul 4 care nu este armonic exponenţial de tipul 3, deoarece

$$H^{(e)*}(900) = \frac{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 3^2} = 2^2 \cdot 5^2$$

este un număr natural, iar $\sigma^{(e)*}(900) = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \nmid 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 900 \cdot \tau^{(e)*}(900)$.

PROPOZIŢIA 4.3.3 (Minculete [**25**]). *Dacă $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_r^{a_r} > 1$ are toţi exponenţii a_i, $i = \overline{1, r}$, numere prime la o putere sau egali cu 1 şi n este un număr e-semipropriu perfect, atunci n este armonic exponenţial de tipul 4.*

Demonstraţie. Considerăm numărul $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_r^{a_r} > 1$; rezultă că $\tau^{(e)*}(n) = 2^{\omega(a_1)+\omega(a_2)+...+\omega(a_r)}$, adică este un număr par. Dacă n este e-semipropriu perfect, atunci $\sigma^{(e)s}(n) = 2n$, ceea ce înseamnă că $\sigma^{(e)s}(n) | n\tau^{(e)*}(n)$. Dar $S^{(e)*}(n) = \dfrac{\sigma^{(e)s}(n)}{\gamma(n)}$, rezultă că $H^{(e)*}(n) = \dfrac{n\tau^{(e)*}(n)\gamma(n)}{\sigma^{(e)s}(n)}$ este un număr natural, deci n este armonic exponenţial de tipul 4.

OBSERVAŢIA 4.3.4 *Căutând numere armonice exponenţiale printre numerele powerful care nu sunt e-perfecte, am găsit următoarele:*
a) numărul $n = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 7^2$ nu este armonic exponenţial de tipul 1 sau 2, dar este armonic exponenţial de tipul 3 şi de tipul 4;
b) numărul $n = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11^2$ este armonic exponenţial de tipul 1, dar nu este armonic exponenţial de tipul 2, 3 sau 4.
c) numărul $n = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2$ este armonic exponenţial de tipul 4, dar nu este armonic exponenţial de tipul 1, 2 sau 3.

Căutând numere armonice exponenţiale care sunt din ce în ce mai mai mari şi care sunt numere powerful, am obţinut următoarea propoziţie:

PROPOZIŢIA 4.3.5 (Minculete [**25**]). *Numărul*

$$n_1 = 2^{20} \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 23^2 \cdot 31^2 \cdot 179^2 \cdot 367^2 \cdot 733^2 \cdot 524827^2$$

este armonic exponenţial de tipul 1, dar nu este armonic exponenţial de tipul 2, 3 sau 4, iar numărul

$$n_2 = 2^{20} \cdot 3^{10} \cdot 5^5 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 43^2 \cdot 59^2 \cdot 79^2 \cdot 83^2 \cdot 157^2 \cdot 313^2 \cdot 353^2 \cdot 6473^2$$

este armonic exponenţial de tipul 3, dar nu este armonic exponenţial de tipul 1, 2 sau 4.

Demonstraţie. Numărul powerful $n_1 = 2^{20} \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 23^2 \cdot 31^2 \cdot 179^2 \cdot 367^2 \cdot 733^2 \cdot 524867^2$ este armonic exponenţial de tipul 1, deoarece

$$\sigma^{(e)}(n_1) = (2 \cdot 524827) \cdot (2^8 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5) \cdot (23 \cdot 2^3 \cdot 3) \cdot (31 \cdot 2^5) \cdot (179 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5) \cdot$$

$$(367 \cdot 2^4 \cdot 23) \cdot (733 \cdot 2 \cdot 367) \cdot (524827 \cdot 2^2 \cdot 179 \cdot 733),$$

adică $\sigma^{(e)}(n_1) = 2^{27} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 23^2 \cdot 31 \cdot 179^2 \cdot 367^2 \cdot 733^2 \cdot 524827^2$, iar $n_1\tau^{(e)}(n_1) = 2^{30} \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 23^2 \cdot 31^2 \cdot 179^2 \cdot 367^2 \cdot 733^2 \cdot 524827^2$, deci $\sigma^{(e)}(n_1) | n_1\tau^{(e)}(n_1)$. Dar numărul n_1 nu este armonic exponenţial de tipul 2, deoarece $S^{(e)}(3^6) = 2^5 \cdot 11$, iar $11 \nmid n\tau^{(e)}(n)$.
Acest număr nu este nici armonic exponenţial de tipul 3 sau de tipul 4, deoarece $6473 | \sigma^{(e)*}(2^{20}) \nmid n_1\tau^{(e)*}(n_1)$, iar $23059 | S^{(e)*}(2^{20}) \nmid n_1\tau^{(e)*}(n_1)$.
Pentru $n_2 = 2^{20} \cdot 3^{10} \cdot 5^5 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 43^2 \cdot 59^2 \cdot 79^2 \cdot 83^2 \cdot 157^2 \cdot 313^2 \cdot 353^2 \cdot 6473^2$, avem $\sigma^{(e)*}(n_2) = 2^{25} \cdot 3^{10} \cdot 5^3 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 43^2 \cdot 59^2 \cdot 79^2 \cdot 83^2 \cdot 157^2 \cdot 313^2 \cdot 353^2 \cdot 6473^2$, iar $\tau^{(e)*}(n_2) = 2^{16}$, rezultă $\sigma^{(e)*}(n_2) | n_2\tau^{(e)*}(n_2)$. Deci n_2 este armonic exponenţial de tipul 3.
Cum $23059 | S^{(e)*}(2^{20}) \nmid n_2\tau^{(e)*}(n_2)$, deducem că numărul n_2 nu este armonic exponenţial de tipul 4. Din faptul că $524827 | \sigma^{(e)}(2^{20}) \nmid n_2\tau^{(e)}(n_2)$, rezultă că n_2 nu este armonic exponenţial de tipul 1. De asemenea, observăm că $131 | S^{(e)}(7^4) \nmid n_2\tau^{(e)}(n_2)$, deci n_2 nu este armonic exponenţial de tipul 2. Astfel, demonstraţia se încheie.

□

PROBLEME DESCHISE

Viitoarele cercetări pot avea la bază următoarele întrebări:

1. Există numere e-unitare perfecte nedivizibile cu 3?
2. Există numere e-unitare perfecte care să nu fie e-perfecte?
3. Există numere e-semiproprii perfecte nedivizibile cu 3?
4. Există numere e-semiproprii perfecte care să nu fie e-unitare perfecte?
5. Care este densitatea numerelor e-unitare perfecte şi a celor e-semiproprii perfecte?
6. Care este numărul numerelor e-unitare amicale şi care este numărul numerelor e-semiproprii amicale?

Comentariu. Similar cu numerele e-amicale din [**11**], se pot defini numerele *e-unitare amicale* şi numerele *e-semiproprii amicale*. Dacă $\sigma^{(e)*}(m) = m + n = \sigma^{(e)*}(n)$, spunem că perechea (m, n) este o pereche de numere e-unitare amicale, iar dacă $\sigma^{(e)s}(m) = m + n = \sigma^{(e)s}(n)$, spunem că perechea (m, n) este o pereche de numere e-unitare semiproprii amicale. Avem două perechi de numere e-unitare amicale până la 10^7, aceastea sunt $(2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 19^2; 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7^2 \cdot 19)$ şi $(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 19^2; 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 19)$.

7. Care este ordinul maximal şi ordinul mediu pentru funcţiile aritmetice $\sigma^{(e)(k)}$ şi $\tau^{(e)(k)}$?
8. Există o infinitate de numere armonice exponenţiale care sunt în acelaşi timp powerful?

Bibliografie

[1] Apostol, T. M., *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer-Verlag, New York, 1976.

[2] Apostol, T. M., Möbius function of order k, *Pacific J. Math.*, Vol. **32**, No. 1 (1970), 21-27.

[3] Băndilă, V., Lascu, M., Panaitopol, L., *Inegalităţi*, Editura GIL, Zalău, 1995.

[4] Cohen, E., Arithmetical functions associated with the unitary divisors of an integer, *Math. Z.*, **74** (1960), 66-80.

[5] Cohen, G. L., Numbers whose positive divisors have small integral harmonic mean, *Math Comp.* **66**(1997), 883-891.

[6] Cohen, G. L., Sorli, R. M., Harmonic seeds, *Fib. Quart.* **36**(1998), 386-390.

[7] De Koninck, J.-M., Ivić, A., An asymptotic formula for reciprocals of logarithms of certain multiplicative functions, *Canad. Math. Bull.*, Vol. **21**(4), 1978.

[8] Delange, H., Sur les functions arithmetiques multiplicatives, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3) **78** (1961), 273-304.

[9] Fabrykowski, J., Subbarao, M. V., The maximal order and the average order of multiplicative function, *Théorie des Nombres* (Quebec, PQ, 1987), 201-206, de Gruyter, Berlin-New York, 1989.

[10] Gioia, A. A., Vaidya, A. M., The number of squarefree divisors of an integer, *Duke Math. J.* **33** (1966), 797-799.

[11] Hagis, P. Jr., Some results concerning exponential divisors, *Internat. J. Math. & Math. Sci.*, Vol. **11**, No. 2 (1988), 343-350.

[12] Haukkanen, P., Ruokonen, P., On an analogue of completely multiplicative functions, *Port. Math.*, vol. **54**, Fasc. 4-1997.

[13] Ivić, A., Two inequalities for the sum of divisors functions, *Review of Research of Science-University of Novi Sad*, Volume **7** (1977).

[14] Kolenick, J. F., On exponentially perfect numbers relatively prime to 15, *Master of Science in Mathematics*, Youngstown State University, 2007.

[15] Le, A. V., Dang, P. D., A note on multiplicatively e-perfect numbers, *J. Ineq. Pure Appl. Math.*, Vol **7** (2006), No. 3.

[16] Mertens, F., Über einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie, *Crelle's Journal* **77** (1874), 289-338.

[17] Mincu, G., Panaitopol, L., Equations involving arithmetic functions, *Carpathian J. Math.*, **22**, No. 1-2(2006), 91-98.

[18] Minculete, N., Concerning some arithmetic functions which use exponential divisors, *Acta Univ. Apulensis Math. Inform* **28** (2011), 125-133.

[19] Minculete, N., Some inequalities about certain arithmetic functions, *An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform.*, Vol. **38**(1), 2011, 83-91.

[20] Minculete, N., A new class of divisors: the exponential semiproper divisors (trimisă spre publicare).

[21] Minculete, N., A note about properties of the exponential divisors (trimisă spre publicare).

[22] Minculete, N., Divisors of order k (trimisă spre publicare).

[23] Minculete, N., On certain inequalities about arithmetic functions which use the exponential divisors (trimisă spre publicare).

[24] Minculete, N., Some inequalities about certain arithmetical functions which use e-divisors and the e-unitary divisors (trimisă spre publicare).

[25] Minculete, N., Types of harmonic numbers (lucrare aflată în pregătire).

[26] Minculete, N., Dicu, P., Concerning the Euler totient, *Gen. Math.*, Vol. **16**, No.1 (2008), 93-99.

[27] Minculete, N., Dicu, P., Some inequalities concerning to the number of the divisors of a natural number, *Gen. Math.*, Vol. **17**, No.1 (2009), 65-70.

[28] Minculete, N., Dicu, P., Certain aspects of some arithmetic functions in number theory, *Gen. Math.* Vol. **19**, No.1 (2011), 135-144.

[29] Minculete, N., Pozna, C., On some properties of divisors of order k, *Int. J. Res. Rev. Appl. Sci.*, Vol. **8**, Issue 3 (2011), 283-287.

[30] Minculete, N., Toth, L., Exponential unitary divisors, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.* **35** (2011), 205-216.

[31] Montgomery, H., Vaughan, R., *Multiplicative Number Theory: I. Classical Theory*, Cambridge University Press, New York, 2006.

[32] Narkiewicz, W., On a class of arithmetical convolutions, *Colloq. Math.*, **10** (1963), 81-94.

[33] Nathanson, M., *Elementary Methods in Number Theory,* Springer, New York, 2006.

[34] Nageswara Rao, K., On the unitary analogues of certain totients, *Monatsh. Math.*, vol. **70**, no. 2 (1966), 149-154.

[35] Nageswara Rao, K., On some unitary divisor functions, *Scripta Math.* **28** (1967), 347-351.

[36] Ore, O., On the averages of the divisors of a number, *Amer. Math. Monthly*, **55** (1948), 615-619.

[37] Panaitopol, L., Gica, Al. , *Probleme celebre de teoria numerelor*, Editura Universităţii din Bucureşti, 1998.

[38] Panaitopol, L., Gica, Al., *O introducere în aritmetică şi teoria numerelor*, Editura Universităţii Bucureşti, 2001.

[39] Panaitopol, L., Gica, Al., *Probleme de aritmetică şi teoria numerelor*, Editura GIL, Zalău, 2006.

[40] Pomerance, C., On a problem of Ore: Harmonic numbers, Abstract 709-A5, *Notices Amer. Math. Soc.* **20** (1973), A-648.

[41] Postnikov, A. G., *Introduction to Analytic Number Theory*, American Mathematical Society, 1988.

[42] Sándor, J., On Jordan′s arithmetical function, Gazeta Matematică Seria B, nr. 2-3/1993.

[43] Sándor, J., On an exponential totient function, *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.*, Vol. **41** (1996), No. 3, 91-94.

[44] Sándor, J., On multiplicatively e-perfect numbers, *J. Ineq. Pure Appl. Math.*, Vol **5** (2004), No. 4.

[45] Sándor, J., A note on exponential divisors and related arithmetic functions, *Sci. Magna*, Vol **1** (2006), No. 1.

[46] Sándor, J., On exponentially harmonic numbers, *Sci. Magna*, Vol. **2** (2006), No. 3, 44-47.

[47] Sándor, J., On bi-unitary harmonic numbers, arXiv:1105.0294v1, 2011.

[48] Sándor, J., Crstici, B., *Handbook of Number Theory II*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 2004.

[49] Sándor, J., Minculete, N., A note concerning the Euler totient (acceptat spre publicare în *Gen. Math.*).

[50] Sándor, J., Mitrinović, D. S., Crstici, B., *Handbook of Number Theory I*, Springer, 1995.

[51] Sándor, J., Tóth, L., Extremal orders of compositions of certain arithmetical functions, *Electron. J. Combin.*, **8** (2008).

[52] Sierpinski, W., *Elementary theory of numbers*, Warsawa, 1964.

[53] Sitaramachandrarao, R., Suryanarayana, D., On $\sum_{n\leq x}\sigma^*(n)$ and $\sum_{n\leq x}\varphi^*(n)$, *Proc. Amer. Math. Soc.* **41** (1973), 61-66.

[54] Straus, E. G., Subbarao, M. V., On exponential divisors, *Duke Math. J.* **41** (1974), 465-471.

[55] Subbarao, M. V., On some arithmetic convolutions in: *The Theory of Arithmetic Functions*, Lecture Notes in Mathematics, New York, Springer-Verlag, 1972.

[56] Subbarao, M. V., Warren, L. J., Unitary perfect numbers, *Canad. Math. Bull.* **9** (1966), 147-153.

[57] Suryanarayana, D., Sita Rama Chandra Rao, R., On the true maximum order of a class of arithmetical functions, *Math. J. Okayama Univ.*, **17** (1975), 95-101.

[58] Tóth, L., Asymptotic formulae concerning arithmetical functions defined by cross-convolutions, I. Divisor-sum functions and Euler-type functions, *Publ. Math. Debrecen*, **50** (1997), 159-176.

[59] Tóth, L., Asymptotic formulae concerning arithmetical functions defined by cross-convolutions, II. The divisor functions, *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.*, **42** (1997), 105-110.

[60] Tóth, L., On certain arithmetic functions involving exponential divisors, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.* **24** (2004), 285-294.

[61] Tóth, L., On exponentially coprime integers, *Pure Math. Appl.* (PU. M. A.), **15** (2004), 343-348.

[62] Tóth, L., An order result for the exponential divisors function, *Publ. Math. Debrecen*, **71** (2007), no. 1-2, 165-171.

[63] Tóth, L., On certain arithmetic functions involving exponential divisors, II, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.* **27** (2007), 155-166.

[64] Tóth, L., Wirsing, E., The maximal order of a class of multiplicative arithmetical functions, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.*, **22** (2003), 353-364.

[65] Vaidyanathaswamy, R., The theory of multiplicative arithmetic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **33** (1931), 579-662.

[66] Wall, Ch., Bi-unitary perfect numbers, *Proc. Amer. Math. Soc.* **33** (1972), no. 1, 39-42.

[67] Wall, Ch., The fifth unitary perfect numbers, *Canad. Math. Bull.* **18** (1975), 115-122.

[68] Wall, Ch., Unitary harmonic numbers, *Fib. Quart.* **21** (1983), 18-25.

[69] Wu, J., Probléme de diviseurs exponentiels et entiers exponentiellement sans facteur carré, *J. Théor. Nombres Bordeaux*, **7** (1995), 133-141.