INSTITUTUL DE MATEMATICĂ ”SIMION STOILOW”
AL
ACADEMIEI ROMÂNE DIN BUCUREŞTI

TEZĂ DE DOCTORAT

INTEGRALĂ ŞI FRACTALI – FORME DIRICHLET ŞI RENORMALIZARE PE FRACTALI

Coordonator ştiinţific:
Prof. univ. dr. Gheorghe BUCUR

Doctorand:
Antonio-Mihail NUICĂ

– 2011 –

Cuprins

Introducere

Structurile autosimilare sunt structuri formate din bucăţi geometric asemenea cu întreaga mulţime, dar la o scară mai mică. Foarte mulţi dintre fractalii clasici sunt autosimilari: *mulţimea triadică a lui Cantor*, *sita (triunghiul) lui Sierpinski*, *curba lui Koch*, *buretele Sierpinski-Menger* etc.

Unele dintre cele mai importante exemple de fractali autosimilari, printre care şi cei menţionaţi mai sus, sunt mulţimi puncte fixe ale unor contracţii definite în spaţiul metric complet $(\mathcal{H}(X), h)$, unde $\mathcal{H}(X)$ reprezintă clasa părţilor compacte şi nevide ale spaţiului metric complet (X, d), iar h este metrica Hausdorff-Pompeiu indusă de d. În primul capitol este prezentat spaţiul metric complet $(\mathcal{H}(X), h)$ ([**4**]) şi teoria dimensiunii Hausdorff, cu punerea în evidenţă a celebrei teoreme a lui Hutchinson de calcul efectiv a dimensiunii Hausdorff pentru o clasă remarcabilă de fractali autosimilari ([**18**]).

În capitolul al doilea se introduce conceptul de structură autosimilară (S.A.) şi se realizează o clasificare a fractalilor, punându-se accent pe *structurile autosimilare finit ramificate* (S.A.F.R.), *post critic finite* (S.A.P.C.F.) şi pe *fractalii "cuib" afini* (F.C.A.), prezentându-se exemple şi contraexemple ilustrative de astfel de obiecte.

În capitolul al treilea se realizează sinteza conceptelor de proces Markov, proces Feller, proces Hunt, proces de difuzie şi rezultatele de bază privind formele Dirichlet simetrice, plus dualitatea formă – proces, urmând sursele [**15**], [**48**], [**9**] şi [**22**].

În capitolul al patrulea se prezintă construcţia unei forme Dirichlet pe o structură S.A.P.C.F. (urmându-se [**30**]). Subiectul se bazează pe rezultate simple de teoria potenţialului în reţele electrice finite ([**17**], [**40**]). Deasemenea se prezintă succint construcţia proceselor de difuzie asociate ([**3**], cu apel la dualitatea forme Dirichlet - procese – [**22**]).

Construcţia formei Dirichlet pe "fractal" (S.A.P.C.F.) depinde de existenţa unei forme proprii pentru aşa numita *funcţie de renormalizare asociate structurii*. Problema existenţei, unicităţii, aproximării sau chiar determinării efective a acestor forme proprii este o problemă critică, poartă denumirea de *renormalizare* şi face obiectul capitol al cincelea. Se prezintă în principal contribuţia lui Volker Metz la problema renormalizării structurilor S.A.P.C.F. ([**38**]-[**46**]).

În ultimul capitol se propune - pe baza tehnicii metricii Hilbert proiective dezvoltate de Metz - o *metodă algoritmică de decizie a existenţei formelor proprii ireductibile pentru funcţia de renormalizare* Λ *a unei S.A.P.C.F. conexe (nu neapărat F.C.A.).* Deasemenea, se prezintă exemple concrete de renormalizare a unor structuri S.A.P.C.F. conexe: renormalizarea fulgului lui Vicsek, fulgului lui Lindstrom, a "abc-triunghiului lui Sierpinski", a "triunghiului lui Sierpinski afin", etc. Pentru deducerea existenţei formelor proprii se aplică metoda amintită. Problema determinării efective a formelor (operatorilor) proprii ireductibile pentru funcţia de renormalizare a unui F.C.A., invariante la grupul maximal de simetrie al fractalului, este una foarte dificilă fără asistenţă computerizată, mai ales dacă frontiera fractalului are mai mult de trei puncte. Se dezvoltă un program Java care să ajute în astfel de cazuri şi se utilizează la câteva exemple de fractali "cuib".

Pornind de la definiţia formelor rezistive în sensul lui Kigami ([**30**]), prin abstractizare, a fost propusă o nouă definiţie a formelor rezistive, de către domnii Profesori N. Boboc şi Gh. Bucur. De la un astfel de obiect se poate "dezvolta" o teorie a potenţialului ataşată ([**7**]). În acest sens, în acest ultim capitol se mai prezintă un *Criteriu de semisaturare* relativ la conul funcţiilor excesive în raport cu o formă rezistivă dată ([**6**]).

Ultimul capitol conţine majoritatea rezultatelor originale:

– În secţiunea 6.1, teoremele 6.1.1, 6.1.3 (împreună cu demonstraţiile lor) reprezintă o sinteză a rezultatelor obţinute de V. Metz în [**38**]-[**41**], [**44**], [**46**] *privind renormalizarea fulgului lui Vicsek ("non nested" şi "nested"); contribuţia personală este prezentarea lor într-o formă compactă, conform metodei amintite şi uzând de numeroase figuri; în observaţia 6.1.2 am determinat efectiv funcţia de renormalizare pe acest exemplu de fractal cu frontiera formată din* 4 *puncte.*

– În secţiunea 6.2, teorema 6.2.1 afirmă existenţa formelor proprii ireductibile $\mathcal{G}_s$ *invariante pentru fulgul lui Lindstrom. Rezultatul este cunoscut (*[**35**]*), dar demonstraţia, bazată pe metoda algoritmică amintită, este originală, fiind diferită de demonstraţia probabilistă a lui Lindstrom.*

– În secţiunea 6.3 se introduce fractalul numit "abc-triunghiul lui Sierpinski" ("abc-TS") (considerat prima dată în [**26**]*) şi se obţine o condiţie necesară a existenţei formelor proprii ireductibile pentru acesta*

(teorema 6.3.1); rezultatul constituie o generalizare a lui 8.2 din [**46**] *iar demonstraţia este originală. În observaţia 6.3.2 am determinat efectiv funcţia de renormalizare pe un caz particular de "abc-TS".*

– În secţiunea 6.4, propoziţiile 6.4.1 şi 6.4.2 sunt originale. 6.4.1 dă o condiţie necesară şi suficientă pentru existenţa operatorilor proprii $\mathcal{G}_s$-invarianţi în cazul triunghiul lui Sierpinski afin (TSA) - I, iar 6.4.2 determină operatorul propriu $\mathcal{G}_s$-invariant şi valoarea proprie asociată în cazul triunghiul lui Sierpinski afin (TSA) - II.

– În secţiunea 6.5, cu ajutorul unui program Java care implementează funcţia de renormalizare am verificat 5.8.5 pentru cazul fractalilor TSA-I şi TSA-II (subsecţiunea 6.5.1).

– În subsecţiunile 6.5.2 şi 6.5.3 am determinat efectiv valoarea proprie γ pentru conul formelor $\mathcal{G}_s$-invariante ireductibile şi operatorul propriu ireductibil (unic modulo multiplicarea cu o constantă pozitivă) în cazul fulgul lui Lindstrom şi a fractalului numit Pentakun.

– În secţiunea 6.6 se prezintă un "Criteriu de semisaturare" relativ la conul funcţiilor excesive în raport cu o formă rezistivă (în sensul definiţiei propuse de către domnii Profesori N. Boboc şi Gh. Bucur în [**7**]*). Propoziţia 6.6.6 şi teorema 6.6.8 sunt rezultate originale şi au apărut în* [**6**].

Alte contribuţii personale:

– toate exemplele de fractali, cu detaliile, figurile şi calculele aferente (capitolele 1, 2 şi 6);

– generarea prefractalilor cu ajutorul unui program C++, toate figurile de atractori fiind capturi ecran ale unor prefractali asociaţi;

– o clasificare a fractalilor cu contraexemple (secţiunea 2.4);

– o nouă manieră, mai riguroasă de introducere a conceptelor necesare punerii problemei renormalizării (secţiunea 4.1);

– sintetizarea tuturor rezultatelor surselor [**38**]-[**46**]*, foarte eterogene, greu de manipulat (capitolul al cincelea) în noul limbaj propus în secţiunea 4.1*;

– un program Java care reuşeşte să fie un ajutor nepreţuit în determinarea efectivă a operatorilor proprii sau în ceea ce priveşte aproximarea acestora.

Mulţumesc în mod special domnului Profesor Bucur Gheorghe pentru sprijinul acordat pe parcursul întregului proces de pregătire şi în final, la elaborarea tezei cât şi pentru permanentele încurajări şi entuziasmul molipsitor al domniei sale. Datorez foarte mult membrilor participanţi ai seminarului ştiinţific de *Teoria Potenţialului*, organizat de I.M.A.R. şi Facultatea de Matematică a Universităţii Bucureşti, în frunte cu domnii Profesori Nicu Boboc şi Lucian Beznea, dar şi tuturor celorlalţi, care, în decursul anilor, în cadrul expunerilor mele, au avut nenumărate sugestii, sfaturi şi observaţii utile. Mulţumiri speciale pentru domnii Profesori Mircea Boloşteanu şi Costel Bălcău pentru ajutorul acordat în elaborarea programelor în C++ şi Java de generare a prefractalilor şi de implementare şi iterare a funcţiei de renormalizare a fractalilor P.C.F. De asemenea, mulţumesc în mod deosebit părinţilor mei pentru ajutorul nepreţuit din toţi aceşti ani; această lucrare este dedicată lor.

Antonio-Mihail Nuică, Septembrie 2011

CAPITOLUL 1

Generalităţi despre fractali

Sunt introduse pe scurt elemente "clasice" privind teoria fractalilor. Se prezintă doar schiţa demonstraţiei teoremei privind completitudinea spaţiului fractalilor, acest rezultat permiţând aplicarea principiului contracţiei al lui Banach, de unde ulterior derivă imediat teorema de existenţă şi unicitate a fractalilor autosimilari (asociaţi unui sistem finit de contracţii ce satisfac o condiţie suplimentară de "nesuprapunere"). Măsură şi dimensiune Hausdorff sunt două concepte obligatorii în studiul "geometriei fractale", teorema fundamentală a lui Hutchinson fiind un rezultat deja clasic ([**28**]). Sursele principale citate sunt [**4**] şi [**18**] (excelentele lucrări de popularizare *Fractals Everywhere* a lui Michael Barnsley şi *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications* a lui K.J. Falconer).

1.1. Metrica Hausdorff-Pompeiu. Spaţiul fractalilor

Fie (X,d) un spaţiu metric. Dacă $A \in \mathcal{P}(X)$ şi $\varepsilon \geq 0$, se notează $A+\varepsilon := \{x \in X \mid d(x,A) \leq \varepsilon\}$. Pentru $A, B \in \mathcal{P}(X)$ se defineşte $d(A,B) := \sup_{x\in A} d(x,B)$, unde $d(x,B) := \inf_{y\in B} d(x,y)$. Aplicaţia d are următoarele proprietăţi ([**4**]-2.6):

- $d(A,B) = d(A,\bar{B}) = d(\bar{A},B) = d(\bar{A},\bar{B})$, $\forall\, A,B \in \mathcal{P}(X)$, iar $d(A,B) \neq d(B,A)$ în general;
- $d(A,B) = 0$ dacă şi numai dacă $A \subseteq \bar{B}$;
- $d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$, $A,B,C \in \mathcal{P}(X)$;
- $d\left(\bigcup_{i\in I} A_i, \bigcup_{i\in I} B_i\right) \leq \sup_{i\in i} d(A_i,B_i)$, pentru $\{A_i\}_{i\in I}$, $\{B_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{P}(X)$
- $d(A,B) < +\infty \Longrightarrow d(A,B) = \inf\{\varepsilon \geq 0 \mid A \subseteq B+\varepsilon\}$ (fig.1.1).

Se consideră aplicaţia $h : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$,

$$h(A,B) := \max\{d(A,B), d(B,A)\}, \text{ pentru orice } A,B \in \mathcal{P}(X). \tag{1.1}$$

Funcţia h este denumită *distanţa Hausdorff-Pompeiu.* h nu este, însă, o metrică, ci doar restricţia sa la mulţimile compacte devine metrică. Metrica Hausdorff-Pompeiu a două mulţimi compacte măsoară, grosier vorbind, "gradul de suprapunere" al acestora. Utilizând definiţia şi proprietăţile lui d se pot deduce şi pentru h următoarele proprietăţi ([**4**]-2.6):

- $h(A,B) = h(A,\bar{B}) = h(\bar{A},B) = h(\bar{A},\bar{B})$, $\forall\, A,B \in \mathcal{P}(X)$;
- $h(A,B) = 0$ dacă şi numai dacă $\bar{A} = \bar{B}$;
- $h(A,C) \leq h(A,B) + h(B,C)$, pentru $A,B,C \in \mathcal{P}(X)$;
- $h\left(\bigcup_{i\in I} A_i, \bigcup_{i\in I} B_i\right) \leq \sup_{i\in I} h(A_i,B_i)$, pentru $\{A_i\}_{i\in I}$, $\{B_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{P}(X)$;
- $h(A,B) < +\infty \Longrightarrow h(A,B) = \inf\{\varepsilon \geq 0 \mid A \subseteq B+\varepsilon \text{ şi } B \subseteq A+\varepsilon\}$.

Se notează cu $\mathcal{H}(X)$ familia submulţimilor compacte ale lui (X,d). Proprietăţile lui h listate mai sus permit demonstrarea faptului că:

Teorema 1.1.1. *([**4**]-2.6) h este o metrică pe $\mathcal{H}(X)$.*

Spaţiul metric $(\mathcal{H}(X),h)$ este denumit de către Barnsley ([**4**]), *spaţiul de viaţă al fractalilor.* Se va schiţa demonstraţia faptului că $(\mathcal{H}(X),h)$ este complet dacă (X,d) este complet. În acest demers este nevoie de următoarea lemă, cu o demonstraţie destul de tehnică, dar elementară:

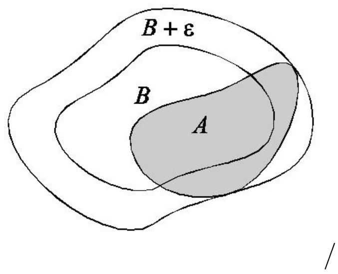

Figura 1.1. Interpretarea geometrică a lui $d(A,B)$

LEMA 1.1.2. **(Lema de extensie)***([4]-2.7) Dacă $\{A_n\}_{n\geq 1}$ un şir Cauchy din $(\mathcal{H}(X), h)$, $\{n_j\}_{j\geq 1}$ un şir strict crescător de numere naturale $(0 < n_1 < n_2 < ...)$, iar $\{x_{n_j} \in A_{n_j}\}_{j\geq 1}$ este şir Cauchy în (X, d), atunci există un şir Cauchy $\{\tilde{x}_n \in A_n\}_{n\geq 1}$ cu $\tilde{x}_{n_j} = x_{n_j}$, $\forall\, j \geq 1$.*

Cu aceasta se poate demonstra

TEOREMA 1.1.3. **(de completitudine a spaţiului fractalilor)** *([4]-2.7)*
a) (X, d) complet $\Longrightarrow$ $(\mathcal{H}(X), h)$ complet;
b) În plus, dacă $\{A_n\}_{n\geq 1}$ este şir Cauchy în $(\mathcal{H}(X), h)$, atunci mulţimea

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{H}(X), \tag{1.2}$$

poate fi caracterizată prin

$$A = \left\{x \in X \mid \text{există un şir Cauchy } \{x_n \in A_n\}_{n\geq 1} \text{ care converge la } x\right\}. \tag{1.3}$$

Pentru $\{A_n\}_{n\geq 1}$ Cauchy în $(\mathcal{H}(X), h)$, se poate arată (cu demonstraţii elemntare) că mulţimea A are proprietăţile:

- **a)** $A \neq \emptyset$;
- **b)** $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N_{\varepsilon_1} \in \mathbb{N}$, $\forall\, n \geq N_{\varepsilon_1}$, $A_n \subseteq A + \varepsilon$;
- **c)** A este închisă;
- **d)** $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N_{\varepsilon_2} \in \mathbb{N}$, $\forall\, n \geq N_{\varepsilon_2}$, $A \subseteq A_n + \varepsilon$;
- **e)** A este total mărginită (adică pentru orice $\varepsilon > 0$, poate fi "acoperită" cu o reuniune finită de bile de rază ε, cu centre în $A \equiv$ o "ε-reţea");

Deoarece în spaţii metrice complete, mulţimile compacte sunt mulţimile închise şi total mărginite, iar (X, d) este complet, din **c)** şi **e)** rezultă că mulţimea A este compactă. În concluzie, $A \in \mathcal{H}(X)$.

Pentru $N_\varepsilon := \max\{N_{\varepsilon_1}, N_{\varepsilon_2}\}$, din **b)** şi **d)** rezultă $A_n \subseteq A + \varepsilon$ şi $A \subseteq A_n + \varepsilon$, $\forall\, n \geq N_\varepsilon$ adică $h(A, A_n) \leq \varepsilon$, $\forall\, n \geq N_\varepsilon$.

Din proprietăţile lui h se poate deduce uşor că

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k} = A := \left\{x \in X \mid \exists\, \{x_n \in A_n\}_{n\geq 1} \text{ şir Cauchy, } x_n \to x\right\}.$$

Dacă şirul $\{A_n\}_n$ este "descrescător", evident $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq A_n + \varepsilon$, $\forall\, \varepsilon > 0$; se poate arăta că, prin reducere la absurd, că $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ cu $A_n \subseteq \left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) + \varepsilon$, $\forall\, n \geq N_\varepsilon$; de aici $h\left(A_n, \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \varepsilon$, $\forall\, n \geq N_\varepsilon$, deci, $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{h} \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. Aşadar, are loc

TEOREMA 1.1.4. *(X, d) spaţiu metric complet şi $\{A_n\}_{n\geq 1}$ şir Cauchy în $(\mathcal{H}(X), h)$ $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k}$. Dacă, în plus,*

- *$A_n \subseteq A_{n+1}$, $\forall\, n \geq 1$, atunci $\lim_{n\to\infty} A_n = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}$;*
- *$A_n \supseteq A_{n+1}$, $\forall\, n \geq 1$, atunci $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{H}(X)$.*

Aşadar limitele de şiruri din $(\mathcal{H}(X), h)$ (date de (1.3)) sunt mulţimi ce se pot obţine prin operaţii de reuninue, intersecţie şi aderenţă (în spaţiul de bază X).

1.2. Sisteme iterative de funcţii şi atractori (fractali) asociaţi

Dacă $\psi : X \to X$ este o funcţie continuă în spaţiul metric (X, d), atunci se poate defini $\tilde{\psi} : \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X)$, $\tilde{\psi}(A) := \psi(A)$, $\forall\, A \in \mathcal{H}(X)$.

Dacă $\psi : X \to X$ contracţie de factor s, pentru $A, B \in \mathcal{H}(X)$, din definiţie, $d(\psi(A), \psi(B)) \leq s{\cdot}d(A, B)$, şi, analog, $d(\psi(B), \psi(A)) \leq s \cdot d(B, A)$, de unde $h(\tilde{\psi}(A), \tilde{\psi}(B)) \leq s \cdot h(A, B)$ i.e. $\tilde{\psi}$ este o contracţie de factor s în $(\mathcal{H}(X), h)$.

Dacă $\{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}$, $N \geq 1$, o familie finită de contracţii în $(\mathcal{H}(X), h)$, de factori $\{s_i\}_{i=\overline{1,N}}$, atunci

$$\begin{aligned} h(\Psi(A), \Psi(B)) &= h\left(\bigcup_{i=1}^{N} \psi_i(A), \bigcup_{i=1}^{N} \psi_i(A)\right) \leq \max_{1\leq i\leq N} h\left(\psi_i(B), \psi_i(B)\right) \leq \\ &\leq \max_{1\leq i\leq N} s_i \cdot h(A, B) = s \cdot h(A, B),\ \forall\, A, B \in \mathcal{H}(X), \end{aligned}$$

deci are loc

PROPOZIŢIA 1.2.1. *([**4**]-3.7) $\{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}$, $N \geq 1$, familie finită de contracţii în $(\mathcal{H}(X), h)$ (de factori $\{s_i\}_{i=\overline{1,N}}$) $\Longrightarrow$ aplicaţia $\Psi : \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X)$, definită prin*

$$\Psi(A) := \bigcup_{i=1}^{N} \psi_i(A),\ \forall\, A \in \mathcal{H}(X), \tag{1.4}$$

este o contracţie de factor $s := \max\{s_i \mid 1 \leq i \leq N\}$.

DEFINIŢIA 1.2.2. ([**4**]-3.7) O familie finită de contracţii, $\{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}$, $N \geq 1$, ale unui spaţiu metric complet (X, d) se numeşte **sistem iterativ de funcţii** (**SIF**). Dacă $s_1, s_2, ..., s_N$ sunt factorii de contracţie corespunzători, numărul $s := \max\{s_1, s_2, ..., s_N\}$ se numeşte **factor de contracţie** al SIF. Se va adopta următoarea notaţie pentru un SIF

$$\left\{(X, d); \{\psi_i, s_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}. \tag{1.5}$$

Din Propoziţia 1.2.1 şi principiul contracţiei rezultă:

TEOREMA 1.2.3. **(de existenţă şi unicitate a fractalului asociat unui SIF)***([**4**]-3.7) Se consideră $\left\{(X, d); \{\psi_i, s_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ SIF cu factor de contracţie s. Atunci*

1) *Ψ (definită în 1.2.1) contracţie de factor s pe $(\mathcal{H}(X), h)$;*

2) *$\exists!\, A \in \mathcal{H}(X)$, punct fix pentru Ψ, i.e. $A = \Psi(A) = \bigcup_{i=1}^{N} \psi_i(A)$;*

3) *pentru orice $B \in \mathcal{H}(X)$, $\lim_{n\to\infty} \Psi^n(B) = A$ în spaţiul $(\mathcal{H}(X), h)$ şi*

$$h\left(A, \Psi^n(B)\right) \quad \leq \quad \frac{s^n}{1-s} \cdot h(A, \Psi(B)),\ \forall\, n \geq 1.$$

DEFINIŢIA 1.2.4. ([**4**]-3.7) Unicul punct fix $A \in \mathcal{H}(X)$ al aplicaţiei Ψ, asociate unui SIF, se numeşte **atractorul** SIF (sau **mulţimea invariantă** a SIF sau **fractalul determinist** al SIF).

Pentru $E \in \mathcal{H}(X)$ cu $\Psi(E) \subseteq E$, $\{\Psi^n(E)\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{H}(X)$ descrescător, deci, cu teorema 1.1.4, $A = \lim_{n\to\infty} \Psi^n(E) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Psi^n(E)$. Deci are loc

PROPOZIŢIA 1.2.5. *$\left\{(X, d); \{\psi_i, s_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ SIF cu atractorul $A \Longrightarrow A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Psi^n(E)$, pentru orice $E \in \mathcal{H}(X)$ cu $\Psi(E) \subseteq E$.*

Se pun două probleme principale în ce priveşte SIF-urile:

1. Fiind dată o mulţime (un fractal) F, să se determine un SIF al cărui atractor să fie F sau, cel puţin, o aproximare a lui F. În multe cazuri se pot construi asemenea sisteme iterative de funcţii, ele furnizând un mod foarte eficient de reprezentare şi *codificare* a unor mulţimi. Aceasta a condus la o problemă mai generală, cea a compresiei imaginilor (fractalilor), i.e. cea a determinării unei familii cât mai mici de contracţii care să reprezinte o mulţime dată sau o imagine.

2. Pentru un SIF dat, se cere reconstruirea atractorului A. Computaţional, acest lucru este posibil şi relativ uşor (rezultă din proprietăţile lui Ψ):

PROPOZIŢIA 1.2.6. *Dacă $\left\{(X, d); \{\psi_i, s_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ SIF cu atractorul A şi factor de contraţie s, atunci $h\left(A, \Psi^n(B)\right) \leq s^n \cdot h(A, B)$, $\forall\, B \in \mathcal{H}(X)$, $n \geq 1$.*

OBSERVAŢIA 1.2.7. *Pentru $B \in \mathcal{H}(X)$ (ales convenabil), Teorema 1.2.3 şi Propoziţia 1.2.6 furnizează posibilitatea determinării apriori a numărului de iterate n care trebuie calculate, astfel încât iterata $\Psi^n(B)$ să fie o aproximare cât mai bună a atractorului A. De regulă, mulţimea B, cu care se începe generarea iteratelor, este constituită dintr-un singur punct, sau mai multe puncte (în special mulţimea formată cu punctele fixe ale aplicaţiilor ψ_i sau aşa-numitele puncte fixe esenţiale - a se vedea secţiunea dedicată fractalilor "cuib" afini).*

DEFINIŢIA 1.2.8. O mulţime $\Psi^n(B)$ care aproximează un fractal A se numeşte **prefractal** al lui A (şi este o mulţime asociată în mod fundamental lui B).

1.3. Similitudini pe $\mathbb{R}^d$

DEFINIŢIA 1.3.1. 1) O aplicaţie $H_r : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $H_r(x) = r \cdot x$, cu $r > 0$, se numeşte *omotetie (de raport r)*.

2) O aplicaţie $T_b : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $T_b(x) = x + b$, cu $b \in \mathbb{R}^d$, se numeşte *translaţie*.

3) O aplicaţie liniară $O : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ care invariază produsul scalar, i.e.

$$< O(x), O(y) >=< x, y >, \forall\, x, y \in \mathbb{R},$$

se numeşte *transformare ortogonală*.

4) O aplicaţie $\psi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ se numeşte *similitudine* $\Longleftrightarrow$

$$\Big(\exists\, \alpha \in (0,1)\Big)\Big(\forall\, x, y \in \mathbb{R}^d\Big)\Big(||\psi(x) - \psi(y)|| = \alpha ||x - y||\Big).$$

OBSERVAŢIA 1.3.2. Omotetiile sunt izomorfisme ale lui $\mathbb{R}^d$; translaţiile sunt bijecţii neliniare.

Transformările ortogonale păstrează proprietatea de ortogonalitate şi conservă norma. O transformare ortogonală O este bijectivă, cu $O^{-1} = O^*$, O^* fiind operatorul autoadjunct (dat de $< O(x), y >=< x, O^*(y) >, \forall\, x, y \in \mathbb{R}$).

Se verifică simplu că omotetiile, translaţiile şi transformările ortogonale sunt similitudini. Compunerea similitudinilor este tot similitudine. Similitudinile sunt bijecţii continue.

Pentru ψ similitudine de factor r, se consideră $O : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $O(x) := \frac{1}{r} \cdot (\psi(x) - \psi(0))$; evident O invariază produsul scalar, deci $\langle O(e_i), O(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$, $\forall\, i, j = \overline{1, d}$, unde $\{e_1, e_2, ..., e_m\}$ o bază ortonormală în $\mathbb{R}^d$; aşadar $O(e_1)$, $O(e_2)$, $\ldots$, $O(e_m)$ formează deasemenea o bază ortonormală în $\mathbb{R}^d$ şi atunci

$$O(x) = \sum_{i=1}^{m} \langle O(x), O(e_i)\rangle \cdot O(e_i) = \sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i\rangle \cdot O(e_i),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^d,$$

deci O aplicaţie liniară şi, în final, O este o transformare ortogonală. Punând $b := \frac{1}{r} \cdot \psi(0)$, se verifică în final că $\psi = H_r \circ T_b \circ O$. Scrierea lui ψ sub această formă este evident unică. Are loc aşadar

TEOREMA 1.3.3. *$\psi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ similitudine $\Longleftrightarrow \exists\, r > 0$, $\exists\, b \in \mathbb{R}^d$ şi există o transformare ortogonală O cu $\psi = H_r \circ T_b \circ O$. Descompunerea este unică.*

Pentru cazul $d = 2$ are loc: $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ similitudine

$$\Leftrightarrow \Big(\exists!\, a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}\Big)\left(\psi\,(x, y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}\right). \tag{1.6}$$

Deci rezultatul de mai sus determină complet şi în mod unic forma unei similitudini şi este baza pentru algoritmul programului C++ de generare a prefractalilor, cu ajutorul căruia au fost realizate multe din figurile din această lucrare.

1.4. Spaţiul codurilor asociat unui SIF

Fie $S = \{1, 2, \ldots, N\}$ o mulţime finită ale cărei elemente se vor numi *simboluri*. Mulţimea S se numeşte *alfabet*. Pentru $k \geq 1$, se notează cu W_k mulţimea tuturor şirurilor ce se pot forma cu k simboluri din S:

$$W_k \quad := \quad \{1, 2, ..., N\}^k = \{w_1 w_2 ... w_k \mid\ w_i \in S,\ i = \overline{1, k}\}. \tag{1.7}$$

Dacă $w = w_1 w_2 ... w_k \in W_k$, se spune că w are *lungimea k*.

Se notează cu W_* mulţimea tuturor şirurilor finite formate cu simboluri din S

$$W_* := \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k.$$

Un element $w \in W_*$ se numeşte *cuvânt* peste alfabetul S. Se notează cu $|w|$ lungimea cuvântului w.

Se notează cu Σ mulţimea şirurilor infinite de simboluri din S

$$\Sigma := \{1, 2, \ldots, N\}^{\mathbb{N}^*} = \{w : \mathbb{N}^* \to S\} = \{w_1 w_2 \cdots w_n \cdots \mid w_i \in S,\ \forall\ i \in \mathbb{N}^*\}.$$

Pentru un element $w \in W_* \bigcup \Sigma$ şi pentru $n \geq 1$ se va nota cu $w|n := w_1 w_2 \cdots w_n \in W_n$, cuvântul format din primele n simboluri ale lui w. Se apune că $v \in W_*$ este *prefix* pentru $w \in W_* \bigcup \Sigma$, dacă $w||v| = v$.

Pentru $v \in W_*$, $v = v_1 v_2 \cdots v_k \in W_k$, şi $u \in W_* \bigcup \Sigma$ se defineşte operaţia de *concatenare* $\cdot$ $(\cdot : W_* \times (W_* \bigcup \Sigma) \to W_* \bigcup \Sigma)$ în felul următor

$$v \cdot u := \begin{cases} v_1 v_2 \cdots v_k u_1 u_2 \cdots u_m \in W_{k+m}, & \text{dacă } u = u_1 u_2 \cdots u_m \in W_m, \\ v_1 v_2 \cdots v_k u_1 u_2 \cdots u_m \cdots \in \Sigma, & \text{dacă } u = u_1 u_2 \cdots u_m \cdots \in \Sigma. \end{cases}$$

Pe Σ se consideră topologia produs a topologiilor discrete de pe S. Aceasta este metrizabilă, iar distanţa uzuală ce dă toplogia produs pe Σ va fi considerată $d : \Sigma \times \Sigma \to \mathbb{R}_+$:

$$d(\omega, w) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|\omega_i - w_i|}{1 + |\omega_i - w_i|},\ \omega = \omega_1 \omega_2 ... \omega_n ...,\ w = w_1 w_2 ... w_n ... \in \Sigma.$$

OBSERVAŢIA 1.4.1. Se poate deduce uşor că metrica d este echivalentă cu metrica d_N, dată de $d_N(\omega, w) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\omega_i - w_i|}{(1+N)^i}$, $\omega = \omega_1\omega_2...\omega_n...$, $w = w_1w_2...w_n... \in \Sigma$, şi ea este echivalentă cu oricare din metricile date în teorema următoare:

TEOREMA 1.4.2. *([**30**]-1.2) Pentru $w, v \in \Sigma$, $w \neq v$, se notează*

$$s(w, v) := \min\{m | w_m \neq v_m\} - 1.$$

Dacă $0 < r < 1$, atunci $\delta_r(w, v) := r^{s(w,v)}$, $w \neq v$ şi $\delta_r(w, w) = 0$ este o metrică pe Σ ce generează topologia produs. În plus, $\sigma_i : \Sigma \longrightarrow \Sigma$, $\sigma_i(w) := i \cdot w$ este r-contracţie, $\forall\, i \in S$.

DEFINIŢIA 1.4.3. ([**4**]-4.2) Spaţiul metric (Σ, d_N) se numeşte **spaţiul codurilor** asociat unui SIF $\left\{(X, d); \{\psi_i, s_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$. Pentru $N \geq 2$, Σ este nenumărabilă.

Se verifică simplu că d_N are proprietăţile:

- $d_N(\omega, w) < \frac{1}{(1+N)^{k+1}} \Longrightarrow \omega_i = w_i, \forall\, i \leq k;$
- $\omega_i = w_i, \forall\, i \leq k \Longrightarrow d_N(\omega, w) < \frac{1}{(1+N)^k};$

pentru orice $\omega, w \in \Sigma$.

Pentru spaţiul codurilor un rol important îl joacă aşanumitele adrese periodice:

DEFINIŢIA 1.4.4. ([**4**]-4.2) $w = w_1w_2 \cdots w_n \cdots \in \Sigma$ se numeşte **adresă periodică** $\Longleftrightarrow$

$$\big(\exists\, p \geq 1\big)\big(\forall k \geq 1\big)\big(w_k = w_{p+k}\big).$$

Adresa periodică $w = w_1w_2 \cdots w_pw_1w_2 \cdots w_p \cdots$ se notează $w = (w_1\overset{\cdot}{\widehat{w_2 \cdots w_p}})$. Cel mai mic număr p cu proprietatea de mai sus se numeşte **perioada** lui w. Mulţimea adreselor periodice din Σ se notează $Per(\Sigma)$. Un element din spaţiul de cod în care simbolurile sunt periodice după omiterea unui număr finit de simboluri iniţiale se numeşte **adresă eventual periodică**.

PROPOZIŢIA 1.4.5. *([**4**]-4.2) $Per(\Sigma)$ este densă în (Σ, d_N).*

DEMONSTRAŢIE. Pentru $w = w_1w_2 \cdots w_n \cdots \in \Sigma$, fie şirul $\omega^{(n)} := (w_1\overset{\cdot}{\widehat{w_2 \cdots w_n}})$, $\forall\, n \geq 1$. Atunci $\omega^{(n)} \in Per(\Sigma)$, $\omega_i^{(k)} = w_i$, $\forall\, i \leq k$, deci $d_N(\omega^{(k)}, w) < \frac{1}{(1+N)^k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, adică $\lim_{n\to\infty} \omega^{(n)} = w$, deci $\Sigma = \overline{Per(\Sigma)}$. □

Despre spaţiul codurilor se mai pot deduce următoarele

TEOREMA 1.4.6. *([**16**]) Spaţiul metric (Σ, d_N) este compact, total neconex şi perfect.*

1.5. Măsură şi dimensiune Hausdorff clasică pe $\mathbb{R}^d$

Noţiunea de dimensiune este una centrală în geometria fractală, ea indicând, grosier vorbind, cât de mult spaţiu ocupă o mulţime în vecinătatea fiecărui punct al său. Dintre toate tipurile de dimensiuni fractale utilizate, dimensiunea Hausdorff (clasică) este cea mai veche, cea mai importantă şi cea mai utilizată. Marele său avantaj este că poate fi definită pentru orice parte a lui $\mathbb{R}^d$ şi poate fi uşor manipulată d.p.d.v. matematic, fiind definită în termeni de măsuri. Toate exemplele de fractali din această lucrare vor fi practic scufundaţi în $\mathbb{R}^d$, aşa încât, chiar dacă prezintă marele dezavantaj al greutăţii calculului ei prin mijloace computaţionale concrete, ea este esenţială pentru înţelegerea geometriei fractalilor.

DEFINIŢIA 1.5.1. Pentru $E \subset \mathbb{R}^d$ şi $s \geq 0$, se defineşte:

$$\mathcal{H}^s(E) := \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^s_\delta(E). \tag{1.8}$$

unde

$$\mathcal{H}^s_\delta(E) := \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |E_i|^s \,\middle|\, E \subset \bigcup_{i\geq 1} E_i,\ (E_i)_{i\geq 1} \subset \mathcal{P}(\Omega),\ |E_i| \leq \delta \right\}, \tag{1.9}$$

pentru orice $\delta > 0$. $\mathcal{H}^s$ se va mai numi *s-măsura Hausdorff clasică.* (diametrul $d(E)$ al unei mulţimi $E \subset \mathbb{R}^d$ s-a notat cu $|E|$). În locul acoperirilor arbitrare ale lui E se poate demonstra că se pot considera acoperiri formate doar cu mulţimi închise, sau acoperiri formate doar cu mulţimi deschise, etc., iar valoarea $\mathcal{H}^s_\delta(E)$ nu se modifică.

Măsura $\mathcal{H}^s$ are următoarele proprietăţi:

TEOREMA 1.5.2. *([**56**]-1) Măsura Hausdorff $\mathcal{H}^s$ pe $\mathbb{R}^d$ este o măsură regulată pe $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{G}_\delta$-regulată, toate mulţimile boreliene sunt $\mathcal{H}^s$-măsurabile şi orice mulţime $\mathcal{H}^s$-măsurabilă de măsură finită conţine o mulţime de tip $\mathcal{F}_\sigma$ de aceeaşi măsură.*

Între măsura Lebesgue pe $\mathbb{R}^d$ şi măsura Hausdorff clasică există următoarea legătură:

TEOREMA 1.5.3. *([**56**]-1) $\Big(\forall n \in \mathbb{N}^*\Big)\Big(\exists k_n \in (0,\infty)\Big)\Big(\forall E \subset \mathbb{R}^d\Big)\Big(\mathcal{H}^n(E) = k_n\lambda^n(E)\Big)$, unde λ^n este măsura Lebesgue pe $\mathbb{R}^d$. Sau, se mai spune că cele două mşuri λ^n şi $\mathcal{H}^n$ sunt echivalente (sau comparabile).*

Aşadar, s-măsurile Hausdorff cu $s = n \in \mathbb{N}^*$ nu aduc nimic nou. Pentru s "fracţionar" ele sunt exact măsurile de care este nevoie în studiul fractalilor (aceştia se dovedesc a fi mulţimi "de dimensiune fracţionară"). Ideea fundamentală este considerarea în relaţia (1.9) a "cantităţilor" $|E_i|^s$.

Măsurile Hausdorff clasice $\mathcal{H}^s$, cu $s \geq 0$, au o serie de alte proprietăţi remarcabile:

PROPOZIŢIA 1.5.4. *([**18**]-2.1) (Proprietăţi ale măsurilor Hausdorff clasice $\mathcal{H}^s$):*
1. *$\mathcal{H}^0$ este măsura de numărare;*
2. *$\mathcal{H}^1 = \lambda^1$ pe $\mathbb{R}$;*
3. *$\mathcal{H}^s \equiv 0$ pe $\mathbb{R}^d$, pentru $s > n$;*
4. *$\mathcal{H}^s(T(E)) = k^s\mathcal{H}^s(E)$, pentru orice transformare similară $T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ de factor de similaritate k şi orice $E \subset \mathbb{R}^d$;*
5. *$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(E)) \leq k^{s/\alpha}\mathcal{H}^s(E)$, pentru orice $E \subset \mathbb{R}^d$ şi orice $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^m$ cu proprietatea $\exists\, k > 0$ şi $\alpha > 0$ astfel încât $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|^\alpha$, $x, y \in E$.*

Este posibilă introducerea noţiunii de dimensiune Hausdorff.

Analizând atent ecuaţia (1.8), se observă că, pentru $E \subset \mathbb{R}^d$ fixată şi pentru $t > s \geq 0$ rezultă $\mathcal{H}^t_\delta(E) \leq \delta^{t-s}\mathcal{H}^s_\delta(E)$. Trecând la limită cu $\delta \to 0$, se observă că, pentru $s < t$ şi $\mathcal{H}^s(E) < \infty$, rezultă $\mathcal{H}^t(E) = 0$. Există aşadar o valoare critică $s \geq 0$ pentru care $\mathcal{H}^s(E)$ "sare" de la ∞ la 0:

DEFINIŢIA 1.5.5. Pentru orice $E \subset \mathbb{R}^d$, se notează

$$\dim_H(E) := \inf\{s \geq 0 \,|\, \mathcal{H}^s(E) = 0\} = \sup\{s \geq 0 \,|\, \mathcal{H}^s(E) = \infty\}, \tag{1.10}$$

şi se va numi *dimensiunea Hausdorff a mulţimii E.*

OBSERVAŢIA 1.5.6. a) Pentru orice $E \subset \mathbb{R}^d$, se poate vorbi despre dimensiunea sa Hausdorff, care este un număr nenegativ unic cu proprietatea că $\mathcal{H}^s(E) = 0$ pentru $s > \dim_H(E)$ şi $\mathcal{H}^s(E) = \infty$ pentru $0 \leq s < \dim_H(E)$. Pentru $s = \dim_H(E)$, sau $\mathcal{H}^s(E) = 0$ sau $\mathcal{H}^s(E) = \infty$ sau $0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$. Dacă $0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$ şi E este $\mathcal{H}^s$-măsurabilă (în particular boreliană) se spune că E este o *s-mulţime.*

b) În calculul dimensiunii Hausdorff se asociază diferite "ponderi" $|U_i|^s$ mulţimilor U_i din acoperirile lui E. Astfel, dimensiunea Hausdorff măsoară eficienţa acoperirii mulţimii cu mulţimi mici dar de o mare varietate de mărimi.

Dimensiunea Hausdorff se bucură de o serie de proprietăţi remarcabile ([**18**]-2.2):
1. *Monotonie.* $E \subset F \Longrightarrow \dim_H E \leq \dim_H F$;
2. *"Zero" pe mulţimi numărabile.* E cel mult numărabilă $\Longrightarrow \dim_H E = 0$;
3. *Stabilitate.* $\dim_H(E \cup F) = \max(\dim_H E, \dim_H F)$;
4. *Stabilitate numărabilă.* $\dim_H\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sup_{1\leq i<\infty} \dim_H E_i$;
5. *Invarianţă Lipschitz.* $\dim_H f(E) = \dim_H E$ pentru f transformare bi-Lipschitz a lui $\mathbb{R}^d$;
6. *Invarianţă geometrică.* $\dim_H f(E) = \dim_H E$ pentru f transformare a lui $\mathbb{R}^d$ de tip translaţie, rotaţie, similitudine sau transformare afină;
7. *"Valoare maximă" pe mulţimi deschise.* $E \subset \mathbb{R}^d$ deschisă $\Rightarrow \dim_H E = n$;
8. *"Comportare bună" pe varietăţi netede.* $E \subset \mathbb{R}^d$ varietate diferenţiabilă m-dimensională ($m \leq n$) $\Longrightarrow \dim_H E = m$;

OBSERVAŢIA 1.5.7. a) Din propoziţia 1.5.4, punctul (5), se constată că pentru orice funcţie satisfăcând condiţia lui Holder are loc $\dim_H(f(E)) \leq (1/\alpha)\dim_H(E)$. Aceasta are ca şi consecinţă faptul că transformările lipschitziene nu cresc dimensiunea Hausdorff a mulţimii pe care acţionează, iar transformările bi-Lipschitz (ca de exemplu similitudinile !) nu modifică această dimensiune.

b) În continuare sunt prezentate procedee de calcul efectiv a dimensiunii Hausdorff a unor mulţimi fractale.

1.6. Teorema lui Hutchinson

Pentru înţelegerea intuitivă a teoremei lui Hutchinson, este nevoie de conceptul de "distribuţie de masă":

DEFINIŢIA 1.6.1. a) Pentru μ măsură pe $\mathbb{R}^d$, *suportul lui* μ este cea mai mică mulţime închisă F pentru care $\mu(\mathbb{R}^d \setminus F) = 0$. Se notează cu spt$\mu$, este evident mulţime închisă şi

$$x \in \mathrm{spt}\mu \iff \mu(B(x,r)) > 0,\ \forall r > 0.$$

b) Dacă $A \subset \mathbb{R}^d$ mărginită şi μ măsură pe $\mathbb{R}^d$ cu spt$\mu \subset A$, se spune că μ *este măsură pe* A. Reciproc, dacă μ măsură pe A (în sensul că $\mu : \mathcal{P}(A) \longrightarrow [0,\infty]$ satisface axiomele măsurii exterioare), atunci se poate defini o măsură pe $\mathbb{R}^d$, $\widetilde{\mu}$, cu spt$\widetilde{\mu} \subset A$ şi $\widetilde{\mu}_{|A} = \mu$.

c) O măsură μ pe o mulţime mărginită din $\mathbb{R}^d$, pentru care borelienele sunt măsurabile şi cu $0 < \mu(\mathbb{R}^d) < \infty$ se numeşte *distribuţie de masă*.

d) Dacă μ este măsură pe $\mathbb{R}^d$, $E \subset \mathbb{R}^d$, se defineşte $\nu(A) := \mu(E \cap A)$, $\forall A \subset \mathbb{R}^d$ şi se numeşte *restricţia lui* μ *la* E, ν fiind evident o măsură pe $\mathbb{R}^d$ cu spt$\nu \subset \overline{E}$, sau altfel spus o măsură pe $\overline{E}$.

OBSERVAŢIA 1.6.2. ([**18**]-1.3) Există o metodă extrem de elegantă şi intuitivă de construcţie a unei distribuţii de masă pe o mulţime boreliană E din $\mathbb{R}^d$: Fie $\mathcal{E}_0 := \{E\}$. Fie $\mathcal{E}_1$ familie finită, mutual disjunctă de submulţimi boreliene ale lui E, etc., $\mathcal{E}_k$ familie mutual disjunctă de submulţimi boreliene ale lui E astfel încât orice $U \in \mathcal{E}_k$ este submulţime a uneia dintre mulţimile lui $\mathcal{E}_{k-1}$ şi conţine un număr finit de mulţimi din $\mathcal{E}_{k+1}$. Deasemenea, se presupune că şirul format cu diametrele maxime al mulţimilor din fiecare $\mathcal{E}_k$ este convergent la 0 pentru $k \to \infty$. Se defineşte o distribuţie de masă pe E astfel: se consideră $\mu(E)$ arbitrar cu proprietatea $0 < \mu(E) < \infty$, apoi, se "dezintegrează" "masa" lui E între mulţimile $U_1, U_2, \ldots, U_m$ din $\mathcal{E}_1$ definind $\mu(U_i)$ astfel încât $\mu(E) = \sum\limits_{i=1}^{m} \mu(U_i)$. Analog se definesc "mase" pentru mulţimile lui $\mathcal{E}_2$ astfel încât dacă $U_1, U_2, \ldots, U_m$ sunt mulţimile lui $\mathcal{E}_2$ conţinute într-o mulţime U a lui $\mathcal{E}_1$, să aibă loc din nou $\mu(U) = \sum\limits_{i=1}^{m} \mu(U_i)$. În general se definesc "mase" pentru mulţimile lui $\mathcal{E}_{k+1}$ astfel încât dacă $U_1, U_2, \ldots, U_m$ sunt mulţimile lui $\mathcal{E}_{k+1}$ conţinute într-o mulţime U a lui $\mathcal{E}_k$, să aibă loc $\mu(U) = \sum\limits_{i=1}^{m} \mu(U_i)$ (figura 1.2).

Se notează în final E_k reuniunea tuturor mulţimilor dintr-un $\mathcal{E}_k$ şi cu

$$\mathcal{E} := \bigcup_{k \geq 0} \Big(\mathcal{E}_k \cup \mathcal{P}(\mathbb{R}^d \setminus E_k) \Big)$$

şi se defineşte $\mu : \mathcal{E} \longrightarrow [0,\infty)$, $\mu(U)$ ca mai sus pentru U element dintr-un $\mathcal{E}_k$ şi $\mu(A) = 0$, pentru orice A submulţime a unui $\mathbb{R}^d \setminus E_k$.

$\mu : \mathcal{E} \longrightarrow [0,\infty)$ are proprietăţile: $\mu(\emptyset) = 0$, μ finit aditivă(!), deci şi monotonă.

Pentru a construi însă o distribuţie de masă autentică, trebuie produsă o măsură pe tot $\mathbb{R}^d$, cu suportul inclus în $\overline{E}$ şi cu proprietatea ca borelienele să fie măsurabile relativ la ea; în plus să fie o prelungire a lui μ de la $\mathcal{E}$ la $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. Astfel se poate demonstra:

PROPOZIŢIA 1.6.3. *(Construcţia unei distribuţii de masă)([**18**]-1.3) Se consideră $\mu : \mathcal{E} \longrightarrow [0,\infty)$ definit ca în observaţia anterioară. Atunci se poate construi o măsură pe $\mathbb{R}^d$, μ^*, cu suportul inclus în $\overline{E}$, cu proprietatea ca borelienele să fie măsurabile relativ la ea, şi în plus să fie o prelungire a lui μ de la $\mathcal{E}$ la $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. Mai mult, suportul lui μ^* este conţinut chiar în $\bigcap\limits_{k \geq 0} \overline{E_k}$.*

OBSERVAŢIA 1.6.4. Măsura căutată este cea produsă prin metoda standard a lui Caratheodory din premăsura $\mu : \mathcal{E} \longrightarrow [0,\infty)$ şi se poate deduce că $\mu^*_{|\mathcal{E}} = \mu$. Dacă se notează cu μ_k "premăsura" definită pe $\mathcal{E}_k$, obţinută prin dezintegrarea de la pasul k, atunci $\mu(A \cap K) = \mu_k(A)$, $A \in \mathcal{E}_k$, $K := \mathrm{spt}(\mu)$.

În termeni de diagrame, concluzia propoziţiei se poate descrie astfel:

$$\Big(\mathbb{R}^d, \mathcal{E}, \mu\Big) \subseteq \Big(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}^*_\mu, \mu^*_{|\mathcal{M}^*_\mu}\Big) \subseteq \Big(\mathbb{R}^d, \mathcal{P}(\mathbb{R}^d), \mu^*\Big),$$

$$\Big(\mathbb{R}^d, \mathcal{E}, \mu\Big) \subseteq \Big(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu^*_{|\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)}\Big) \subseteq \Big(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}^*_\mu, \mu^*_{|\mathcal{M}^*_\mu}\Big) \subseteq \Big(\mathbb{R}^d, \mathcal{P}(\mathbb{R}^d), \mu^*\Big).$$

EXEMPLUL 1.6.5. Fie $\mathcal{E}_k$ familia "intervalelor binare" de lungime $1/2^k$ din $[0,1]$ (intervale de forma $\left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}\right)$, $j \in \{0, 1, \ldots, 2^k - 1\}$). Dacă se consideră $\mu\left(\left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}\right)\right) = \frac{1}{2^k}$ şi se construiesc μ şi μ^* ca în 1.6.2 şi 1.6.3 se poate deduce că $\mu^* = \lambda^*_{|[0,1]}$, adică măsura exterioară Lebesgue pe $[0,1]$.

Pentru μ o distribuţie de masă pe $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $\{U_i\}_i$-δ-acoperire a lui F, cu $\delta \leq \varepsilon$, are loc

$$0 < \mu(F) \leq \mu\left(\bigcup_{i \geq 1} U_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(U_i) \leq c \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|,$$

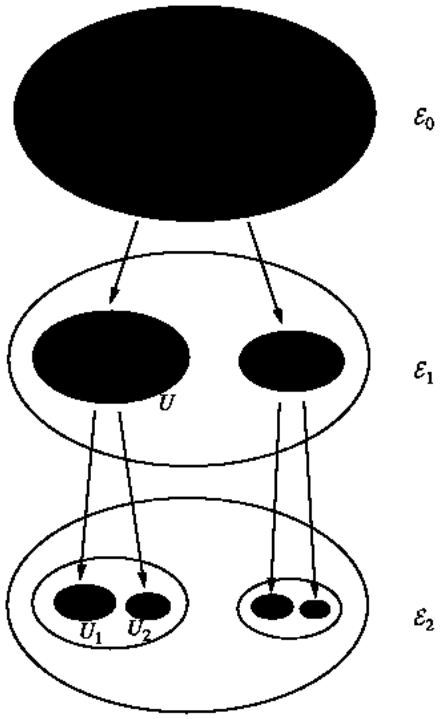

FIGURA 1.2. Construcţia distribuţiei de masă prin "dezintegrare" repetată

de unde, luînd infimum după toate δ-acoperirile a lui F, se obţine $\mathcal{H}^s_\delta(F) \geq \mu(F)/c > 0$, deci, $\mathcal{H}^s(F) = \sup\limits_{\delta>0} \mathcal{H}^s_\delta(F) = \sup\limits_{0<\delta\leq\varepsilon} \mathcal{H}^s_\delta(F) \geq \mu(F)/c > 0$, aşadar $s \leq \dim_H(F)$. Are loc atunci

PROPOZIŢIA 1.6.6. *(*[**18**]*-4.1)(Principiul distribuţiei de masă) Fie μ o distribuţie de masă pentru mulţimea boreliană F, astfel încât*
$$\Big(\exists\, s \geq 0\Big)\Big(\exists\, c > 0\Big)\Big(\exists\, \varepsilon > 0\Big)\Big(\forall\, U,\ |U| \leq \varepsilon\Big)\Big(\mu(U) \leq c|U|^s\Big).$$
Atunci
$$\mathcal{H}^s(F) \geq \mu(F)/c,\ s \leq \dim_H(F).$$

"Principiul distribuţiei de masă" stă în spatele teoremei fundamentale a lui Hutchinson (de calcul a dimensiunii Hausdorff a unui fractal generat de un SIF). Se poate da o versiune mai simplă a acestui principiu (pe "bile") care conţine şi o variantă pentru mărginirea superioară a dimensiunii Hausdorff ([**18**]):

PROPOZIŢIA 1.6.7. *(*[**18**]*-4.1) Fie μ o distribuţie de masă pentru mulţimea boreliană F, astfel încât*
$$\Big(\exists\, s \geq 0\Big)\Big(\exists\, c_1, c_2 > 0\Big)\Big(\exists\, r_0 > 0\Big)\Big(\forall\, r \leq r_0\Big)\Big(\forall\, x \in F\Big)\Big(c_1 r^s \leq \mu(B(x,r)) \leq c_2 r^s\Big).$$
Atunci $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$, $s = \dim_H(F)$.

Totuşi, în ciuda faptului că e un criteriu puternic de determinare a dimensiunii Hausdorff a unei mulţimi nu este încă suficient de practic. Astfel a luat naştere teorema lui Hutchinson. Ea conţine în ea, în formă codificată, principiul distribuţiei de masă, "interfaţa" cu utilizatorul fiind însă una mult mai prietenoasă, "preţul" plătit fiind restrângerea la o anumită clasă de mulţimi ("fractalii" generaţi de SIF-uri pe $\mathbb{R}^d$ ce satisfac condiţia "mulţimii deschise"). Condiţia mulţimii deschise pe care trebuie s-o îndeplinească SIF-ul spune, grosier, că "copiile" $\{F_i = \psi_i(F)\}_i$ de ordin 1 ale atractorului SIF-ului "nu se suprapun prea mult":

TEOREMA 1.6.8. **(Teorema lui Hutchinson)***(*[**18**]*-9.2,* [**28**]*) Se consideră un SIF $\Big\{\mathbb{R}^d; \{\psi_i, c_i\}_{i=\overline{1,N}}\Big\}$, cu ψ_i similitudini, care satisface "condiţia mulţimii deschise" (CMD) $\Big($există $U \subset \mathbb{R}^d$ deschisă, cu $\Psi(U) = \bigcup\limits_{i=1}^{N} \psi_i(U) \subset U$ şi $\{\psi_i(U)\}_{i=\overline{1,N}}$ mutual disjunctă$\Big)$, cu atractorul F, adică*

$$F = \bigcup_{i=1}^{N} \psi_i(F). \tag{1.11}$$

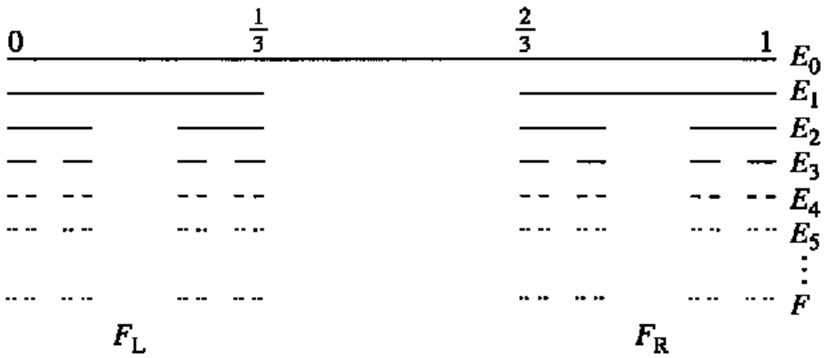

FIGURA 1.3. "Mulţimea triadică" a lui Cantor

Atunci $\dim_H(F) = s$, *unde s soluţie a ecuaţiei* $\sum_{i=1}^{N} c_i^s = 1$, *iar F este chiar o s-mulţime (i.e.* $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$*).*

Demonstraţia utilizează principiul distribuţiei de masă.

I. Se consideră $w = w_1 \dots w_k \in W_k$ şi $A \subset \mathbb{R}^d$; dacă se notează $A_w := \psi_w(A)$, unde $\psi_w := \psi_{w_1} \circ \dots \circ \psi_{w_k}$ şi $c_w := c_{w_1} \cdot \dots \cdot c_{w_k}$, din (1.11) rezultă $F = \bigcup_{w \in W_k} F_w$. Cum ψ_w este şi ea similaritate de factor c_w,

$$\sum_{w \in W_k} |F_w|^s = \sum_{w \in W_k} (c_w)^s |F|^s = \left(\sum_{w_1=1}^{N} c_{w_1}^s \right) \dots \left(\sum_{w_k=1}^{N} c_{w_k}^s \right) |F|^s = |F|^s.$$

Pentru $\delta > 0$, se alege k şi $w = w_1 \dots w_k \in W_k$ astfel încât $|F_w| \leq (\max_i c_i)^k |F| \leq \delta$, deci $\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq |F|^s$, de unde $\mathcal{H}^s(F) \leq |F|^s$.

II. Pt. obţinerea unui minorant al lui $\mathcal{H}_\delta^s(F)$ se pune $\Sigma_w = \{w \cdot \omega | \omega \in \Sigma\}$ $(w \in W_k)$ şi se "aşează" o distribuţie de masă pe Σ prin $\mu(\Sigma_w) = (c_{w_1} \cdot \dots \cdot c_{w_k})^s$. Se verifică că μ este o distribuţie de masă pe Σ, cu $\mu(\Sigma) = 1$, se transferă apoi μ la o distribuţie de masă pe F $\Big(\widetilde{\mu}(A) := \mu(\{\omega \in \Sigma | x_\omega \in A\})$, $A \subset F$, iar $\{x_\omega\} = \bigcap_{m \geq 0} F_{\omega|m}$!!$\Big)$, se arată că $\widetilde{\mu}$ satisface principiul distribuţiei de masă, prin aplicarea acestuia obţinându-se în final un minorant pentru $\mathcal{H}^s(F)$ (demonstraţie tehnică, dar ideea va fi reluată şi dezvoltată cu detalii la secţiunea dedicată *măsurilor autosimilare*).

1.7. Exemple de atractori şi calculul dimensiunii Hausdorff

EXEMPLUL 1.7.1. (**Mulţimea triadică a lui Cantor**) Mulţimea triadică a lui Cantor este obţinută prin îndepărtarea succesivă a unor intervale triadice "mijlocii" ca în figura (figura 1.3).

Mulţimea triadică a lui Cantor este atractorul SIF $\{(\mathbb{R}, |\cdot|); \{\psi_i, r_i\}_{i=1,2}\}$, unde $\psi_1(x) = \dfrac{x}{3}$, $\psi_2(x) = \dfrac{x}{3} + \dfrac{2}{3}$. ψ_1 şi ψ_2 au ca efect contractarea unui interval compact cu factorul $\dfrac{1}{3}$; în plus, ψ_2 realizează o translaţie cu $\dfrac{2}{3}$. Condiţia mulţimii deschise este satisfăcută pentru $U = (0, 1)$.

Din teorema lui Hutchinson va rezulta că mulţimea triadică a lui Cantor are dimensiunea Hausdorff $s = \log 2 / \log 3$ (soluţie a ecuaţiei $(1/3)^s + (1/3)^s = 1$).

EXEMPLUL 1.7.2. (**Triunghiul lui Sierpinski**) Triunghiul lui Sierpinski este obţinut dintr-un triunghi echilateral "plin" prin îndepărtarea succesivă a unor triunghiuri echilaterale "mijlocii" ca în figura 1.4.

Triunghiul lui Sierpinski este atractorul SIF $\left\{(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|); \{\psi_i, r_i\}_{i=\overline{1,3}}\right\}$ definit de similitudinile

$$\begin{aligned}
\psi_1(x,y) &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/2 \\ y/2 \end{pmatrix}, \\
\psi_2(x,y) &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/4 \\ \sqrt{3}/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/2 + 1/4 \\ y/2 + \sqrt{3}/4 \end{pmatrix}, \\
\psi_3(x,y) &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/2 + 1/2 \\ y/2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

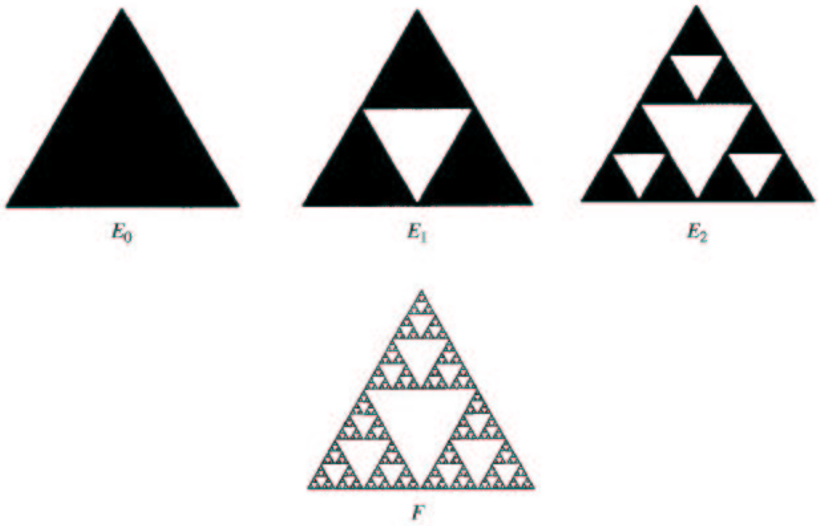

FIGURA 1.4. Triunghiul lui Sierpinski

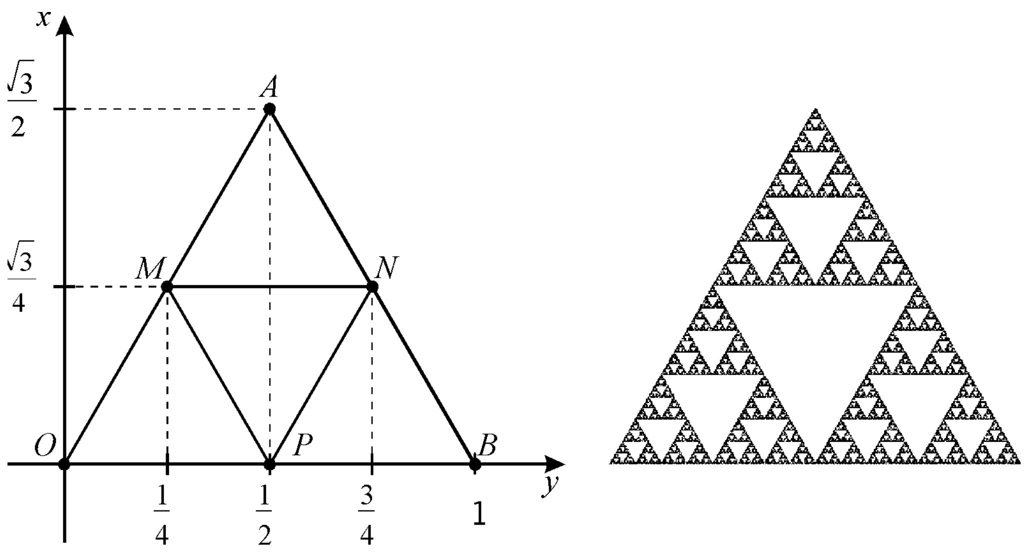

FIGURA 1.5. Triunghiul lui Sierpinski

Cele trei similitudini au raţiile $r_1 = r_2 = r_3 = 1/2$. Fiecare dintre ele contractă triunghiul OAB cu factorul $1/2$, după care ψ_2 îl translatează pe direcţia laturii OA, iar ψ_3, pe direcţia laturii OB (Fig.1.5). Este satisfăcută condiţia mulţimii deschise pentru $U = \overset{\circ}{\widehat{\triangle OAB}}$. Din teorema lui Hutchinson, dimensiunea Hausdorff a triunghiului lui Sierpinski este $s = \dfrac{\log 3}{\log 2}$ (unica soluţie a ecuaţiei $(1/2)^s + (1/2)^s + (1/2)^s = 1$).

EXEMPLUL 1.7.3. (**Curba lui Koch**) Fie $E_0 := [0, 1]$ (sau orice segment de lungime 1). Fie E_1 mulţimea obţinută înlăturând ”treimea mijlocie” a segmentului şi înlocuind-o cu celelalte două laturi ale triunghiului echilateral având ca bază segmentul înlăturat. Se construieşte apoi E_2 aplicând acelaşi procedeu fiecărui segment al mulţimii E_1, etc. În final, fie $F := \bigcap_{k \geq 0} E_k$ (numită ”curba lui Koch”, figura 1.7).

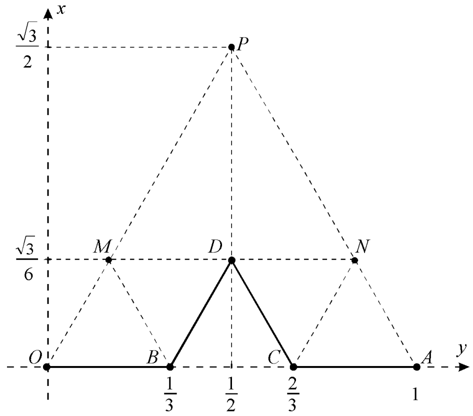

FIGURA 1.6. Generarea curbei lui Koch

Curba lui Koch (Fig. 1.7) este atractorul SIF $\left\{(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|); \{\psi_i, r_i\}_{i=\overline{1,4}}\right\}$, definit de similitudinile

$$\begin{aligned}
\psi_1(x,y) &= \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/3 \\ y/3 \end{pmatrix}, \\
\psi_2(x,y) &= \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} \cos(\pi/3) & -\sin(\pi/3) \\ \sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} x/6 - \sqrt{3}\cdot y/6 + 1/3 \\ \sqrt{3}\cdot x/6 + y/6 \end{pmatrix}, \\
\psi_3(x,y) &= \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} \cos(2\pi/3) & -\sin(2\pi/3) \\ \sin(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/6 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} x/6 + \sqrt{3}\cdot y/6 + 1/2 \\ -\sqrt{3}\cdot x/6 + y/6 + \sqrt{3}/6 \end{pmatrix}, \\
\psi_4(x,y) &= \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/3 + 2/3 \\ y/3 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

care au raţiile $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 1/3$. Toate cele patru similitudini contractă segmentul $[OA]$ (vezi Fig.1.6) cu factorul $1/3$, după care:

- ψ_2 îi aplică o rotaţie de unghi $\pi/3$ şi apoi îl translatează cu $1/3$ în direcţia şi sensul axei Ox;
- ψ_3 îi aplică o rotaţie de unghi $2\pi/3$, apoi îl translatează cu $1/2$ în direcţia şi sensul axei Ox şi cu $\sqrt{3}/6$ în direcţia şi sensul axei Oy;
- ψ_4 îl translatează cu $2/3$ în direcţia şi sensul axei Ox.

Pentru $U = \overset{\circ}{\widehat{\triangle OPA}}$ este satisfăcută condiţia mulţimii deschise (Fig. 1.6). Din teorema lui Hutchinson, dimensiunea Hausdorff a curbei lui Koch este $s = \log 4/\log 3$ (unica soluţie a ecuaţiei $4(1/3)^s = 1$).

Cum există un homeomorfism natural între $[0,1]$ şi curba lui Koch, este simplu de studiat analiza acesteia.

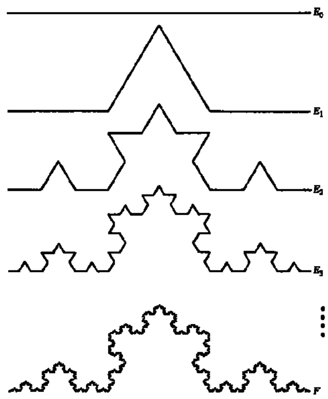

FIGURA 1.7. Curba lui Koch

CAPITOLUL 2

Structuri autosimilare

Sunt introduse structurile ”fractale” de bază: structuri autosimilare, structuri autosimilare finit ramificate, post critic finite, etc, urmând în special sursele [**3**], [**4**], [**30**]. Se prezintă clase de fractali pe $\mathbb{R}^d$ cu proprietăţi remarcabile de simetrie: fractalii ”cuib” (F.C.) şi fractalii ”cuib” afini (F.C.A.). Numeroase exemple de astfel de obiecte sunt prezentate, cu figuri edificatoare.

Măsurile autosimilare joacă un rol foarte important în capitolele următoare; de aceea sunt prezentate în detaliu. Deasemenea, problema conexiunii structurilor S.A.P.C.F. este crucială.

Pe structuri S.A.P.C.F. conexe şi în raport cu măsuri autosimilare bine alese, se vor putea construi ulterior, în ipoteze suplimentare, forme Dirichlet ce vor conduce la procesele de difuzie asociate.

Se realizează o clasificare a fractalilor de către autor (secţiunea 2.4) cu exemple şi contraexemple sugestive.

2.1. Structuri autosimilare (S.A.) şi structuri autosimilare post critic finite (S.A.P.C.F.)

2.1.1. Structuri autosimilare (S.A.). Pornind de la ideea de SIF şi atractor asociat lui, prin abstractizare, s-a ajuns la conceptul de structură autosimilară (ea a fost introdusă de şcoala japoneză - Kusuoka, Kigami, Kumagai - în anii ’80-’90):

Definiţia 2.1.1. ([**3**]-5) $\left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ se numeşte *structură autosimilară* $\Leftrightarrow$

- (S.A.1) (F,d) spaţiu metric compact;
- (S.A.2) $\psi_i : F \longrightarrow F$, $i=\overline{1,N}$ contracţii injective;
- (S.A.3) $F = \bigcup\limits_{i=1}^{N} \psi_i(F)$.

Structură autosimilară se va prescurta S.A. Pentru $A \subset F$, se va nota $A_i := \psi_i(A)$, $i \in S$ şi $A_w := \psi_w(A) = \psi_{w_1} \circ \ldots \circ \psi_{w_n}(A)$, pentru $w = w_1 \ldots w_n \in W_n$. Mulţimii $S := \{1,2,\ldots,N\}$ i se poate asocia spaţiul codurilor din secţiunea 1.4 şi se vor utiliza toate notaţiile şi rezultatele aferente. Din 1.4 se va deduce (teorema 1.4.2) că $\{\Sigma, \{\sigma_i\}_{i\in S}\}$ este S.A.

Pentru $\left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ structură S.A. se poate deduce că

Lema 2.1.2. *([**3**]-5)* $\Big(\forall\, w \in \Sigma\Big)\Big(\exists!\, x_w \in F\Big)\Big(\{x_w\} = \bigcap\limits_{n\geq 0} \psi_{w|n}(F)\Big)$.

Într-adevăr, $\psi_{w|n}(F)$ este şir descrescător de mulţimi compacte cu

$$\operatorname{diam}(\psi_{w|n}(F)) \leq \alpha^n \operatorname{diam}(F),$$

deci cu şirul diametrelor tinzând la zero.

Pentru $w \in \Sigma$, fie $\pi(w) := x_w$, x_w dat de 2.1.2. Apoi

$$\pi(i\cdot w) = x_{i\cdot w} \in \bigcap_{n\geq 1} \psi_{i\cdot w|n}(F) = \bigcap_{n\geq 2} \psi_i(\psi_{w|n-1}(F)) \supseteq \psi_i\Big(\bigcap_{n\geq 2} \psi_{w|n-1}(F)\Big) = \{\psi(x_w)\},$$

de unde $\pi(i\cdot w) = \psi_i(\pi(w))$, $i \in S$. Dacă $x \in F = \cup_{w_1=1}^{N} F_{w_1}$, există $w_1 \in S$ cu $x \in F_{w_1} = \cup_{w_2=1}^{N} F_{w_1 w_2}$, de unde există $w_2 \in S$ cu $x \in F_{w_1 w_2} = \cup_{w_3=1}^{N} F_{w_1 w_2 w_3}$, ... ; în final există $w \in \Sigma$ cu $x \in F_{w|n}$, $\forall n \geq 1$, deci $x \in \cap_{n\geq 1} F_{w|n} = \{\pi(w)\}$, aşadar $\pi(w) = x$. De aici π surjectivă.

Dacă $U \subset F$ deschisă, iar $w \in \pi^{-1}(U)$, deci $\pi(w) \in U$, există $m \geq 1$ cu $F_{w|m} \subset U$, de unde $V := \{v \in \Sigma \,|\, v|m = w|m\} = (w|m)\cdot\Sigma \subset \pi^{-1}(U)$. Cum V deschisă în Σ (cu topologia produs), rezultă $\pi^{-1}(U)$ deschisă, deci π continuă. Evident π este unică cu proprietatea $\pi(i\cdot w) = \psi_i(\pi(w))$, $i \in S$. Are loc deci:

Lema 2.1.3. *([**3**]-5) Fie* $\left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ *S.A. Atunci*

$$\Big(\exists! \pi : \Sigma \longrightarrow F \text{ continuă, surjectivă}\Big)\Big(\forall\, w \in \Sigma, \forall\, i \in I\Big)\Big(\pi(i\cdot w) = \psi_i(\pi(w))\Big).$$

De aici $\pi(v\cdot w) = \psi_v(\pi(w))$, $\forall\, v \in W_n$, $\forall\, w \in \Sigma$.

Observaţia 2.1.4. *În* [**30**]*-1.3 se spune că* $(F, S, \{\psi_i\}_{i\in S})$, $S = \{1, 2, \cdot, N\}$ *este structură autosimilară* $\Longleftrightarrow$ *F spaţiu metric compact,* $\psi_i : F \longrightarrow F$ *injecţii continue şi există* $\pi : \Sigma \longrightarrow F$ *surjecţie continuă cu* $\psi_i \circ \pi = \pi \circ \sigma_i$, $i = 1, ..., N$. *(pt.* σ_i *a se vedea 1.4.5). Se deduce apoi că* π *este unică cu proprietatea de mai sus şi* $\forall\, w \in \Sigma$, $\{\pi(w)\} = \bigcap_{n\geq 0} \psi_{w|n}(F)$. *Evident* $F = \bigcup_{i=1}^{N} \psi_i(F)$. *Dacă* ψ_i *sunt contracţii se ajunge la definiţia 2.1.1. Deci definiţia din* [**30**]*-1.3 este mai generală.*

Observaţia 2.1.5. Se pot deduce uşor următoarele proprietăţi ale structurilor S.A.([**30**]-1.2):

1) $\omega \in Per(\Sigma)$ (adică $\omega = \dot{w}$, $w \in W_n$) $\Longrightarrow \pi(\omega) = \pi(\dot{w}) = \pi(w\dot{w}) = \psi_w(\pi(\dot{w}))$, deci $\pi(\dot{w}) =: p_w$ este unicul punct fix al lui ψ_w. De aici rezultă că pentru $w \in W_n$ şi $v \in W_m$, $\pi(v \cdot \dot{w}) = \psi_v(\pi(\dot{w})) = \psi_v(p_w)$.

2) Din π continuă şi $Per(\Sigma)$ densă în Σ (1.4.5), rezultă că $\{p_w | w \in W_n,\, n \geq 1\}$ este densă în F.

3) Pt. $w,\, v \in \Sigma$, $w \neq v$, $\pi(w) = \pi(v) \Longleftrightarrow \pi(\sigma^m w) = \pi(\sigma^m v)$, $m = s(w, v)$ (din 1.4.2). Dacă $\pi(w) = \pi(v)$, atunci $\pi(\sigma^m w) = \pi(\sigma^m v) \in B := \bigcup_{1\leq i<j\leq N} (F_i \cap F_j)$.

Se poate demonstra următoarea lemă privind topologia lui F:

Lema 2.1.6. *(*[**3**]*-5,* [**30**]*-1.3) Familia* $\{N_n(x)\}_{n\geq 1}$ *este bază de vecinătăţi ale lui* $x \in F$ $\Big($*cu* $N_n(x) := \bigcup \{F_w | w \in W_n,\, x \in F_w\}\Big)$.

Observaţia 2.1.7. *Toate exemplele de fractali introduse până acum (generate de SIF-uri din* $\mathbb{R}^d$*) formează structuri autosimilare (atractorul asociat SIF-ului împreună cu restricţiile similitudinilor la el constitue structuri autosimilare).*

2.1.2. Structuri autosimilare finit ramificate (S.A.F.R.) şi structuri autosimilare post critic finite (S.A.P.C.F.). Structura autosimilară nu conţine în definiţia sa nici un mecanism de prevenire a suprapunerii "copiilor" $\{F_i\}_{i\in S}$ de ordin 1. Condiţia mulţimii deschise previne suprapunerea, dar se bazează pe existenţa unui spaţiu "mare" în care se poate scufunda mulţimea F ($\mathbb{R}^d$). În continuare sunt introduse condiţii suplimentare de prevenire a unor suprapuneri "prea mari" în cazul structurilor autosimilare.

Definiţia 2.1.8. ([**3**]-5, [**30**]-1.3) 1) Pentru $\Big\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\Big\}$ structură autosimilară, se defineşte $B := \bigcup_{1\leq i<j\leq N} (F_i \cap F_j)$ şi se numeşte *mulţimea punctelor de ramificare*; $\Gamma := \pi^{-1}(B)$ se numeşte *mulţimea critică*, iar $P := \bigcup_{n\geq 1} \sigma^n(\Gamma)$ se numeşte *mulţimea postcritică*. Aşadar mulţimea critică este formată cu adresele (codurile) punctelor de ramificare, iar mulţimea postcritică este formată cu toate posibilităţile de a "şunta" cuvinte din mulţimea critică.

2) Structura autosimilară $\Big\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\Big\}$ se numeşte *finit ramificată* (S.A.F.R.) $\Longleftrightarrow$ B finit ramificată. $\Big\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\Big\}$ se numeşte *post critic finită* (S.A.P.C.F.) $\Longleftrightarrow$ P finită (i.e. adresele din Γ sunt aproape periodice).

Mulţimea postcritică generează o reţea remarcabilă de puncte ale "fractalului", prin aplicarea sucesivă a aplicaţiilor ψ_i:

Definiţia 2.1.9. ([**3**]-5) Pentru $\Big\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\Big\}$ S.A.P.C.F. şi $n \geq 1$, se defineşte $P^{(n)} := \{w \in W | \sigma^n w \in P\} = \{v \cdot u | v \in W_n,\, u \in P\} = W_n \cdot P$ (mulţimea adreselor (cuvintelor) din P la care se ataşează cuvinte din W_n) şi $V_n := \pi(P^{(n)})$. Pentru $n = 0$ se consideră $P^{(0)} := P$ şi $V_0 := \pi(P)$.

Observaţia 2.1.10. ([**3**]-5,[**30**]-1.3) a) Se poate deduce că $V_n = \bigcup_{w\in W_n} (V_0)_w$. Într-adevăr, $x \in V_n \Rightarrow \exists\, v \in P$, $w \in W_n$ cu $x = \pi(w \cdot v) = \psi_w(\pi(v)) \in (\pi(P))_w = (V_0)_w \subset V_n$. Apoi, pt. $w \in W_n$, are loc $x \in (V_0)_w \Rightarrow x = \psi_w(\pi(v))$, cu $v \in P$, deci $x = \psi_w(\pi(v)) = \pi(w \cdot v) \in \pi(P^{(n)}) = V_n$.

b) Din a) se poate demonstra că $V_n \subset V_{n+1}$, $\forall\, n \geq 0$.

Într-adevăr, $x \in V_n \Rightarrow \exists\, \omega = \omega_1\omega_2 \ldots \omega_k \ldots \in P$, $\exists\, w = w_1 w_2 \ldots w_n \in W_n$ cu

$$x = \psi_w(\pi(\omega)) = \pi(w \cdot \omega) = \pi(w_1 w_2 \ldots w_n \omega_1\omega_2 \ldots \omega_k \ldots) = \pi((w_1 \ldots w_n \omega_1) \cdot \sigma\omega).$$

Dar $\sigma\omega \in \sigma(P) \subset P$, iar $\widetilde{w} := w_1 \ldots w_n \omega_1 \in W_{n+1}$, deci

$$x = \pi(\widetilde{w} \cdot \sigma\omega) = \psi_{\widetilde{w}}(\pi(\sigma\omega)) \in \psi_{\widetilde{w}}(\pi(P)) = \psi_{\widetilde{w}}(V_0) \subset V_{n+1}.$$

Punctele din V_n au o proprietate remarcabilă: copiile F_w ($w \in W_n$) de ordin n ale "fractalului" (numite şi n-complexe) se intersectează doar în V_n ($(V_0)_w$ se numeşte n-celulă):

LEMA 2.1.11. *([**3**]-5) Pentru* $\left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ *S.A.P.C.F.are loc*
a) $w,\, v \in W_n,\, w \neq v \Longrightarrow F_w \cap F_v = (V_0)_w \cap (V_0)_w$;
b) $\forall\, n \geq 0,\ \pi^{-1}(\pi(P^{(n)})) = \pi^{-1}(V_n) = P^{(n)}$.

Se va schiţa demonstraţia acestei leme de mare importanţă. Este suficent să se deducă doar "$\subseteq$" (Şi la a) şi la b)).

a) Fie $n \geq 1$ şi $v,\, w \in W_n$ fixaţi. Dacă $x \in F_w \cap F_v$, atunci $\exists\, y = \pi(u),\ y' = \pi(u') \in F,\ u,\ u' \in \Sigma$ cu

$$x = \psi_w(y) = \psi_w(\pi(u)) = \psi_w(y') = \psi_v(\pi(u')) = \pi(w \cdot u) = \pi(v \cdot u').$$

- dacă $v_1 \neq w_1$, atunci $x = \pi(w \cdot u) = \pi(v \cdot u') \in F_w \cap F_v \subset F_{w_1} \cap F_{v_1} \subset B$, deci $w \cdot u,\ v \cdot u' \in \Gamma$, de unde $u,\ u' \in \sigma^n(\Gamma) \subset P$; de aici $\pi(u),\ \pi(u') \in \pi(P) = V_0$, deci $x = \psi_w(y) = \psi_w(\pi(u)) = \psi_w(y') \in (V_0)_w \cap (V_0)_w$.
- dacă $v_1 = w_1$, notând $k := \min\{i|w|i = v|i\}$, $v_{k+1} \neq w_{k+1}$; se aplică $\psi^{-1}_{w|k}$ şi cele de mai sus.

b) "$\supseteq$": Evidentă. "$\subseteq$":

- $n = 0$. Pentru $w \in \pi^{-1}(\pi(P))$, $\pi(w) \in \pi(P)$, deci $\exists\, v \in P$, $\pi(w) = \pi(v)$, adică $\exists\, m \geq 1$, cu $v \in \sigma^m(\Gamma)$ şi $\exists\, u \in W_m$ cu $u \cdot v \in \pi^{-1}(B) = \Gamma$, deci $\pi(u \cdot v) \in B$; atunci $\pi(u \cdot w) = \psi_u(\pi(w)) = \psi_u(\pi(v)) = \pi(u \cdot v) \in B$, de unde $u \cdot w \in \pi^{-1}(B) = \Gamma$, deci $w \in \sigma^m(\Gamma) \subset P$.
- $n \geq 1$. Pentru $w \in \pi^{-1}(\pi(P^{(n)}))$, $\pi(w) \in \pi(P^{(n)})$, deci $\exists\, v \in W_n$, cu $\pi(w) \in (V_0)_v$, de unde $\pi(w) \in (V_0)_v \cap F_{w|n} = (V_0)_v \cap (V_0)_{w|n}$, deci $\pi(w) \in (V_0)_{w|n}$; rezultă că $\exists\, v \in P$ cu $\pi(w) = \psi_{w|n}(\pi(v)) = \pi((w|n) \cdot v)$, de unde $\pi(v) = \pi(\sigma^n w)$, şi, cum $v \in P$, $\sigma^n w \in P$, sau $w \in P^{(n)}$.

Următoarele două rezultate permit înţelegerea mai aprofundată a structurilor S.A.P.C.F.

LEMA 2.1.12. *([**3**]-5)* $\left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ *S.A.P.C.F. şi* $s \in \{1, 2, \ldots, N\} \Longrightarrow \pi(\dot{s})$ *se află în exact un n-complex.*

PROPOZIŢIA 2.1.13. *([**3**]-5) Dacă* $\left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ *S.A.P.C.F.,* $x \in F$ *şi* $n \geq 1$*, se notează* $m_n(x) := \#\{w \in W_n | x \in F_w\}$ n-multiplicitatea lui x *(numărul de n-complexe ce-l conţin pe x). Atunci* $m_n(x) \leq N \cdot \#(P)$.

2.1.3. Exemple de S.A.P.C.F., S.A.F.R. şi S.A. infinit ramificate. În continuare se vor da exemple de structuri autosimilare, pentru care se vor calcula mulţimile de ramificare, critică şi postcritică, cu menţiunea că triunghiul lui Sierpinski va fi reintrodus într-o variantă mai compactă şi simplificată.

EXEMPLUL 2.1.14. (**Triunghiul lui Sierpinski (TS)**) Se consideră un triunghi echilateral de vîrfuri $a_1,\ a_2,\ a_3$ (de exemplu $a_1 = (1/2, \sqrt{3}/2)$, $a_2 = (0, 0)$, $a_3 = (1, 0)$). Se consideră similitudinile care au fost introduse şi în capitolul precedent, dar într-o formă simplificată: $\psi_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\psi_i(x) = a_i + \frac{1}{2}(x - a_i)$, $x \in \mathbb{R}^2$, $1 \leq i \leq 3$. Dacă F este atractorul SIF-ului $\left\{(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|); \{\psi_i, r_i\}_{i=\overline{1,3}}\right\}$, cu $r_i = 1/2$, atunci $\left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,3}}\right\}$ este o S.A. (s-au notat resticţiile ψ_i-urilor la F tot cu ψ_i).

Se observă că $a_i = \pi(\dot{i})$ este punctul fix al lui ψ_i, $i = \overline{1,3}$, iar $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, unde $b_1 = \frac{1}{2}(a_2 + a_3)$, $b_2 = \frac{1}{2}(a_3 + a_1)$, $b_3 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$ (mijloacele laturilor $[a_2a_3]$, $[a_3a_1]$, $[a_1a_2]$) (a se vedea figura 2.1). De aici

$$\Gamma = \left\{(2\dot{3}), (3\dot{2}), (1\dot{3}), (3\dot{1}), (1\dot{2}), (2\dot{1})\right\},\ P = \sigma(\Gamma) = \left\{(\dot{1}), (\dot{2}), (\dot{3})\right\},$$

deci $\left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,3}}\right\}$ este S.A.P.C.F.

Atractorul SIF-ului este prezentat în figurile 1.4 şi 1.5.

EXEMPLUL 2.1.15. (**Triunghiul lui Sierpinski cu triunghi "adăugat" (TS+TA)**) La similitudinile din exemplul precedent se mai adaugă $\psi_4(x) = a_4 + \frac{1}{4}(x - a_4)$, cu $a_4 = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3)$. $\{\psi_i\}_{i=\overline{1,4}}$ satisface condiţia mulţimii deschise (considerând ca mulţime deschisă U interiorul trinunghiului de vârfuri $a_1,\ a_2,\ a_3$), deci, considerând $r_1 = r_2 = r_3 = 1/2$, $r_4 = 1/4$, $\left\{(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|); \{\psi_i, r_i\}_{i=\overline{1,4}}\right\}$ este un SIF ce satisface ipotezele teoremei lui Hutchinson; se generează atractorul F de dimensiune Hausdorff $s = 1 - \left(\log(-3 + \sqrt{13})/\log 2\right)$, soluţie a ecuaţiei $3(1/2)^s + (1/4)^s = 1$. Notând $(\psi_i)_{|F}$ tot cu ψ_i, se obţine că $\left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,4}}\right\}$ este o S.A. Dacă $c_i = \frac{1}{2}(a_i + b_i)$, $i = \overline{1,3}$ (mijloacele segmentelor $[b_2b_3]$, $[b_3b_1]$, $[b_1b_2]$), atunci se vede că $B = \{b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3\}$ (a se vedea figura 2.2). Cum $\pi^{-1}(b_1) = \{(2\dot{3}), (3\dot{2})\}$, $\pi^{-1}(b_2) = \{(1\dot{3}), (3\dot{1})\}$, $\pi^{-1}(b_3) = \{(1\dot{2}), (2\dot{1})\}$, $\pi^{-1}(c_1) = \{(12\dot{3}), (13\dot{2}), (4\dot{1})\}$, $\pi^{-1}(c_2) = \{(21\dot{3}), (23\dot{1}), (4\dot{2})\}$, $\pi^{-1}(c_3) = \{(31\dot{2}), (32\dot{1}), (4\dot{3})\}$, rezultă că

$$\Gamma = \left\{(2\dot{3}), (3\dot{2}), (1\dot{3}), (3\dot{1}), (1\dot{2}), (2\dot{1}), (12\dot{3}), (13\dot{2}), (4\dot{1}), (21\dot{3}), (23\dot{1}), (4\dot{2}), (31\dot{2}), (32\dot{1}), (4\dot{3})\right\}.$$

De aici $\sigma(\Gamma) = \left\{(\dot{1}), (\dot{2}), (\dot{3}), (2\dot{3}), (3\dot{2}), (1\dot{3}), (3\dot{1}), (1\dot{2}), (2\dot{1})\right\}$, $\sigma^2(\Gamma) = \left\{(\dot{1}), (\dot{2}), (\dot{3})\right\}$, de unde

$$P = \left\{(\dot{1}), (\dot{2}), (\dot{3}), (2\dot{3}), (3\dot{2}), (1\dot{3}), (3\dot{1}), (1\dot{2}), (2\dot{1})\right\},$$

deci $\left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,4}}\right\}$ este o S.A.P.C.F. Atractorul este prezentat în figura 2.8.

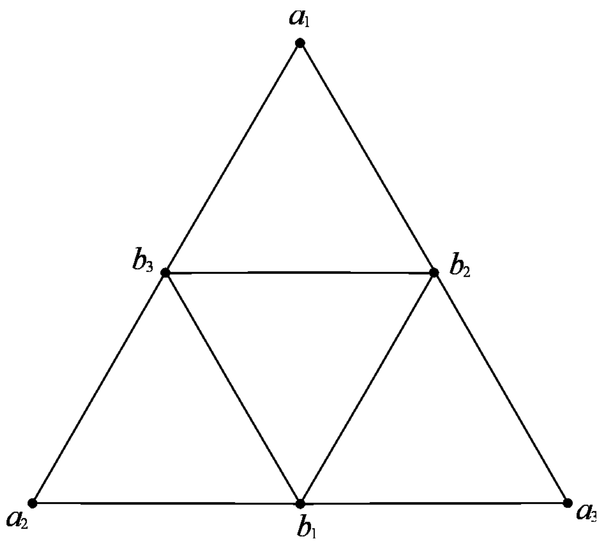

FIGURA 2.1. Triunghiul lui Sierpinski

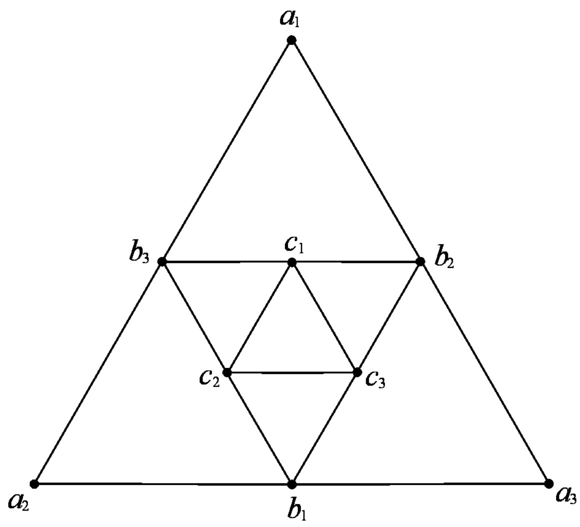

FIGURA 2.2. Triunghiul lui Sierpinski cu triunghi "adăugat"

EXEMPLUL 2.1.16. (**Triunghiul lui Sierpinski cu triunghi "adăugat, rotit" (TS+TAR)**) Se consideră a_i, b_i, ψ_i, $i=\overline{1,3}$ ca în precedentele două exemple, şi $\lambda \in (0,1)$, $p_1 = \lambda b_2 + (1-\lambda)b_3$, $p_2 = \lambda b_3 + (1-\lambda)b_1$, $p_3 = \lambda b_1 + (1-\lambda)b_2$, puncte pe segmentele $[b_2b_3]$, $[b_3b_1]$, $[b_1b_2]$, "proporţional" distribuite, cu factor de proporţionalitate (f.p.) λ (a se vedea figura 2.3). Se consideră similitudinea (unică) ψ_4 pentru care $\psi_4(a_i) = p_i$, $i=\overline{1,3}$. Mai precis $\psi_4(x) = a_4 + c_\lambda R_{\theta_\lambda}(x-a_4)$, $x \in \mathbb{R}^2$, unde $a_4 = \frac{1}{3}(a_1+a_2+a_3)$, $c_\lambda = \frac{1}{2}(3\lambda^2 - 3\lambda + 1)^{1/2}$, $\theta_\lambda = \alpha_\lambda - \pi/3$, $\sin\alpha_\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{3\lambda^2}{3\lambda^2-3\lambda+1}\right)^{1/2} \in [\pi/3, 2\pi/3]$ (de unde $\theta_\lambda \in [0,\pi/3]$), iar

$$R_{\theta_\lambda} = \begin{pmatrix} \cos\theta_\lambda & -\sin\theta_\lambda \\ \sin\theta_\lambda & \cos\theta_\lambda \end{pmatrix}.$$

Analog cu exemplul precedent $B = \{b_1, b_2, b_3, p_1, p_2, p_3\}$, $\pi^{-1}(b_1)$, $\pi^{-1}(b_2)$, $\pi^{-1}(b_3)$ fiind aceleaşi (a se vedea din nou figura 2.3). Deasemenea $\pi^{-1}(p_1) = \{(4\dot{1}), (1v), (1w)\}$, unde

$$A := \pi^{-1}(\psi_1^{-1}(\{p_1\})) = \{v, w\}$$

($y_1 := \psi_1^{-1}(\{p_1\}) \in (a_2, a_3)$, iar v, $w \in \Sigma$ formaţi doar cu simbolurile 2 şi 3 şi $v = w$ sau $v \neq w$ după cum λ admite o descompunere diadică raţională sau nu). Analog pentru $\pi^{-1}(p_2)$ şi $\pi^{-1}(p_3)$.

Dacă se defineşte $\theta : \Sigma \longrightarrow \Sigma$, $\theta(w) = w'$, cu $w'_i = w_i + 1$ (modulo 3), iar $A_n := \{(\dot{1}), \sigma^n v, \sigma^n w\}$, $n \geq 1$, va rezulta

$$\sigma^n(\Gamma) = A_n \cup \theta(A_n) \cup \theta^2(A_n).$$

i) Pentru $\lambda \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$, v şi w sunt aproape periodice, cu simboluri 2 şi 3, deci P finită, deci $\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,4}}\}$ este o S.A.P.C.F.

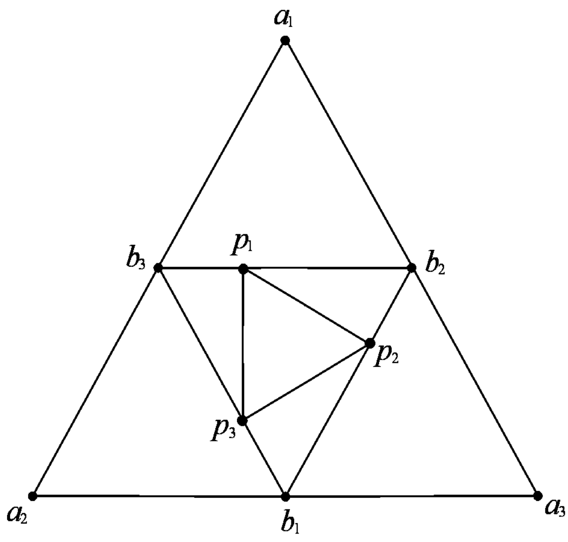

FIGURA 2.3. Triunghiul lui Sierpinski cu triunghi "adăugat" rotit

ii) Pentru $\lambda \in (0,1)\backslash\mathbb{Q}$, $P = \bigcup\limits_{n\geq 1} \sigma^n(\Gamma)$ infinită, deci $\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,4}}\}$ este o S.A.F.R. dar nu e S.A.P.C.F.

iii) În general $\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,4}}\}$ este o S.A.F.R. pentru orice $\lambda \in (0,1)$ dar e S.A.P.C.F. $\Longleftrightarrow \lambda \in \mathbb{Q}\cap(0,1)$.

iv) Pentru $\lambda = 1/2$, se obţine exemplul precedent.

v) Pentru $\lambda = 2/3$, $A = \pi^{-1}(\psi_1^{-1}(\{p_1\})) = \{v = w = (\dot{\widehat{23}})\}$, de unde va rezulta că $\sigma(\Gamma) = \{(2\dot{3}), (3\dot{2}), (4\dot{1}), (1\dot{\widehat{23}}) +$ "rotaţiile date de θ"$\}$, de unde

$$P = \left\{(\dot{1}), (\dot{2}), (\dot{3}), (\dot{\widehat{23}}), (\dot{\widehat{32}}), (\dot{\widehat{13}}), (\dot{\widehat{31}}), (\dot{\widehat{12}}), (\dot{\widehat{21}})\right\}.$$

EXEMPLUL 2.1.17. (**Pătratul "tăiat" (PT)**) Dintr-un pătrat iniţial (de exemplu $C_0 = [0,1]^2$) se "taie" (scot) segmentele $L_1 = \{(1/2, y)\,|\, 0 < y < 1/2\}$ şi L_2, L_3, L_4 segmentele obţinute din L_1 prin rotaţie. Mulţimea C_1 se obţine din C_0 prin înlocuirea punctelor $(1/2, y) \in L_1$ $(0 < y < 1/2)$ cu câte două puncte $(1/2, y-)$, $(1/2, y+)$, şi, similar pentru punctele segmentelor lui L_2, L_3, L_4. Se repetă procedeul cu cele 4 pătrate de latură $1/2$ ce compun C_1, obţinându-se C_2, etc. Pătratul tăiat C este $C := \lim C_n$. Dacă a_i, $i = \overline{1,4}$ sunt vârfurile pătratului şi $\varphi_i(x) := a_i + \frac{1}{2}(x - a_i)$, $i = \overline{1,4}$, C va fi S.A.P.C.F. relativ la 4 funcţii ψ_i, $i = \overline{1,4}$, pentru care $(\varphi_i)_{|\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}} = (\psi_i)_{|\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}$. Atunci $B = \left\{(0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (1, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, 1)\right\}$, iar $\Gamma = \left\{(1\dot{2}), (2\dot{1}), (2\dot{3}), (3\dot{2}), (3\dot{4}), (4\dot{3}), (4\dot{1}), (1\dot{4}), (1\dot{3}), (3\dot{1}), (2\dot{4}), (4\dot{2}),\right\}$ (de exemplu $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi((1\dot{3})) = \pi((3\dot{1})) = \pi((2\dot{4})) = \pi((4\dot{2}))$), de unde $P = \{(\dot{1}), (\dot{2}), (\dot{3}), (\dot{4})\}$.

Este un exemplu de S.A.P.C.F. care nu poate fi scufundat în nici un spaţiu euclidian.

Ultimul exemplu este exemplu de structură autosimilară infinit ramificată:

EXEMPLUL 2.1.18. (**"Covorul" ("carpeta") lui Sierpinski (CS)**) Un pătrat "plin" se împarte în 9 pătrate egale, de latură $1/3$ din latura celui iniţial, scoţându-se cel din mijloc, apoi, celor 8 pătrate rămase li se aplică din nou procedeul de mai sus, etc., continuându-se la infinit. În final, se obţine fractalul numit "covorul" ("carpeta") lui Sierpinski (figura 2.4). Riguros, el s-ar putea defini astfel: se consideră a_1, a_2, a_3, a_4 vârfurile unui pătrat (de exemplu $a_1 = (0,0)$, $a_2 = (1,0)$, $a_3 = (1,1)$, $a_4 = (0,1)$) şi similitudinile: $\psi_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $1 \leq i \leq 8$, $\psi_1(x) = \frac{1}{3}x$, $\psi_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}a_2$, $\psi_3(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}a_2$, $\psi_4(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}a_2 + \frac{1}{3}a_4$, $\psi_5(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}a_2 + \frac{2}{3}a_4$, $\psi_6(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}a_2 + \frac{2}{3}a_4$, $\psi_7(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}a_4$, $\psi_8(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}a_4$, $x \in \mathbb{R}^2$. Dacă F este atractorul SIF-ului $\left\{(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|); \{\psi_i, r_i\}_{i=\overline{1,8}}\right\}$, cu $r_i = 1/3$, atunci $\left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,8}}\right\}$ este o S.A. (s-au notat restricţiile ψ_i-urilor la F tot cu ψ_i). Se observă că mulţimea de ramificare este infinită şi nenumărabilă (formată cu laturile comune ale celor 8 pătrate micşorate cu factor $\frac{1}{3}$ din pătratul "mare").

2.2. Măsuri autosimilare

Măsurile autosimilare sunt măsuri ce se asociază SIF-urilor (sau structurilor autosimilare) şi unei familii de ponderi date şi sunt fundamentale pentru construcţia formelor Dirichlet pe atractor. Se va vedea ulterior că între măsura autosimilară şi măsura Hausdorff a atractorului este o legătură strânsă. Se prezintă rezultatele fundamentale privind măsurile autosimilare asociate structurilor autosimilare, un subiect extrem de important şi profund.

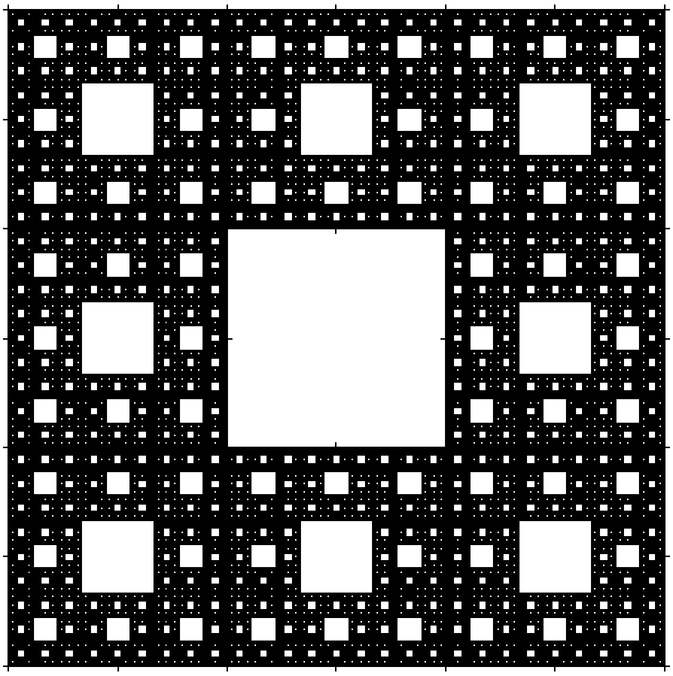

FIGURA 2.4. "Covorul" lui Sierpinski

2.2.1. Existenţa şi unicitatea măsurilor autosimilare.

DEFINIŢIA 2.2.1. ([**4**]-9.5) Fie (F,d) spaţiu metric compact; fie $\mathcal{M}_1(F)$ mulţimea probabilităţilor boreliene definite pe F. Se defineşte $d_H : \mathcal{M}_1(F) \times \mathcal{M}_1(F) \longrightarrow \mathbb{R}_+$,

$$d_H(\mu, \nu) := \sup \left\{ \left| \int_F f d\mu - \int_F f d\nu \right| \, \Big| \, |f(x) - f(y)| \leq d(x,y), \, \forall \, x, y \in F \right\},$$

pentru μ, $\nu \in \mathcal{M}_1(F)$.

Se deduce simplu că d_H este o metrică pe $\mathcal{M}_1(F)$ (se numeşte *metrica Hutchinson*). Cu o demonstraţie tehnică se poate deduce că e chiar completă, deci are loc:

TEOREMA 2.2.2. *([**4**]-9.5) (F,d) spaţiu metric compact $\Longrightarrow$ $(\mathcal{M}_1(F), d_H)$ spaţiu metric compact.*

În continuare se defineşte noţiunea de operator Markov asociat unui SIF şi unui sistem de "ponderi":

DEFINIŢIA 2.2.3. ([**4**]-9.5) Fie $\left\{(F,d); \{\psi_i, s_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ un SIF ((F,d) spaţiu metric compact) şi $\{p_i\}_{i=\overline{1,N}}$ *sistem de ponderi*, i.e. $0 < p_i < 1$, $\forall \, i$ şi $\sum_{i=i}^{N} p_i = 1$. Se numeşte *operator Markov asociat SIF-ului şi sistemului de ponderi* $\{p_i\}$ aplicaţia $M : \mathcal{M}_1(F) \longrightarrow \mathcal{M}_1(F)$, definită prin $M(\nu) := p_1 \nu \circ \psi_1^{-1} + p_2 \nu \circ \psi_2^{-1} + \ldots p_N \nu \circ \psi_N^{-1}$, pentru orice $\nu \in \mathcal{M}_1(F)$.

Operatorul Markov M este o contracţie pe spaţiul $(\mathcal{M}_1(X), d_H)$:

$$\begin{aligned} d_H(M(\nu_1), \, M(\nu_2)) &= \sup_{Lipg \leq 1} \left| \sum_{i=1}^{N} p_i \left(\int_F g \circ \psi_i d\nu_1 - \int_F g \circ \psi_i d\nu_2 \right) \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{N} p_i \sup_{Lipg \leq 1} \left| \int_F g \circ \psi_i d\nu_1 - \int_F g \circ \psi_i d\nu_2 \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{N} p_i s_i \sup_{Lipg \leq 1} \left| \int_F s_i^{-1} g \circ \psi_i d\nu_1 - \int_F s_i^{-1} g \circ \psi_i d\nu_2 \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{N} p_i s_i \sup_{Lipg \leq 1} \left| \int_F g d\nu_1 - \int_F g d\nu_2 \right| \leq s \cdot d_H(\nu_1, \nu_2), \end{aligned}$$

pentru ν_1, $\nu_2 \in (\mathcal{M}_1(X), d_H)$ (*Lipg* înseamnă constanta de lipschitzianitate a lui g). Principiul contracţiei al lui Banach dă atunci

TEOREMA 2.2.4. *([**19**]-2, [**4**]-9.6) Fie $\left\{(F,d); \{\psi_i, s_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ un SIF (pe (F,d) spaţiu metric compact) şi $p := \{p_i\}_{i=\overline{1,N}}$ sistem de ponderi şi M operatorul Markov asociat. Atunci M este o contracţie pe*

$(\mathcal{M}_1(F), d_H)$ de factor de contractivitate $s = \max\limits_{i=\overline{1,N}} s_i$, deci va exista o unică măsură $\mu \in \mathcal{M}_1(F)$ cu $M\mu = \mu$.

OBSERVAŢIA 2.2.5. $\mu \in \mathcal{M}_1(F)$ din teorema de mai sus este unică cu $\mu(A) = \sum\limits_{i=1}^{N} p_i \mu \circ \psi_i^{-1}(A)$, $\forall\, A \in \mathcal{B}(F)$, sau echivalent $\int_F g d\mu = \sum\limits_{i=1}^{N} p_i \int_F g \circ \psi_i d\mu, \forall\, g \in \mathcal{B}(F)$. De aici $\operatorname{spt}\mu = \sum\limits_{i=1}^{N} \psi_i(\operatorname{spt}\mu) = \Psi(\operatorname{spt}\mu)$, de unde (teorema 1.2.3) $\operatorname{spt}\mu = F_0$, F_0 atractorul IFS-ului.

Are loc evident următoarea consecinţă:

COROLARUL 2.2.6. *Pentru $\left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ S.A. şi $\{p_i\}_{i=\overline{1,N}}$ sistem de ponderi există o unică probabilitate $\mu \in \mathcal{M}_1(F)$ cu $\mu(A) = \sum\limits_{i=1}^{N} p_i \mu \circ \psi_i^{-1}(A)$, $\forall\, A \in \mathcal{B}(F)$, iar* $\operatorname{spt}\mu = F$.

OBSERVAŢIA 2.2.7. Pentru $S = \{1, 2, \ldots, N\}$ şi $\Sigma := S^{\mathbb{N}^*}$, s-a remarcat faptul că $\{\Sigma, \{\sigma_i\}_i\}$ este o S.A.(observaţia de după definiţia 2.1.1). Dacă $p := \{p_i\}_{i=\overline{1,N}}$ sistem de ponderi, din corolarul 2.2.6 există o unică probabilitate $\mu^p \in \mathcal{M}_1(\Sigma)$ cu $\mu^p(A) = \sum\limits_{i=1}^{N} p_i \mu^p(\sigma_i^{-1}(A))$, $\forall\, A \in \mathcal{B}(\Sigma)$, iar $\operatorname{spt}\mu^p = \Sigma$.

DEFINIŢIA 2.2.8. ([**4**]-9.6) Măsura din teorema precedentă poartă numele de *măsura invariantă (sau autosimilară) asociată SIF-ului $\left\{(F, d); \{\psi_i, s_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ şi sistemului de ponderi $p := \{p_i\}_{i=\overline{1,N}}$*.

2.2.2. Spaţiul de probabilitate $(\Sigma, \mathcal{M}^p, \mu^p)$. Pentru $S = \{1, 2, \ldots, N\}$ şi sistemul de ponderi $p := \{p_i\}_{i=\overline{1,N}}$, se defineşte probabilitatea $\mu_S : \mathcal{P}(S) \longrightarrow [0, 1]$, $\mu_S := \sum\limits_{i=1}^{N} p_i \varepsilon_i$.

Pe $\Sigma := S^{\mathbb{N}^*}$ se consideră topologia produs $\mathcal{T}_{pr}$ pentru care oricare din familiile următoare este bază:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} &:= \left\{\{i_1\} \times \ldots \times \{i_n\} \times S \times S \times \ldots \,\middle|\, i_1, \ldots, i_n \in S,\, n \in \mathbb{N}^*\right\},\\
\mathcal{B}' &:= \left\{S \times \ldots \times S \times \{i_n\} \times S \times S \times \ldots \,\middle|\, i_1, \ldots, i_n \in S,\, n \in \mathbb{N}^*\right\},\\
\mathcal{B}'' &:= \left\{\prod_{n \in \mathbb{N}^*} \{i_n\} \,\middle|\, i_n \in S,\, \forall\, n \geq 1\right\}.
\end{aligned}$$

Deasemenea, pe Σ se consideră σ-algebra produs $\bigotimes\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{P}(S)$, iar

$$\mu^p := \bigotimes_{n \in \mathbb{N}^*} \mu_S^n : \bigotimes_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{P}(S) \longrightarrow [0, 1],\ \mu_S^n := \mu_S,\, n \geq 1,$$

probabilitatea produs pe Σ a familiei $\{\mu_S^n\}_{n \geq 1}$. Dacă se notează cu $\mathcal{M}^p$ completatul lui $\bigotimes\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{P}(S)$ relativ la $\mu^p = \bigotimes\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \mu_S^n$ şi se notează tot cu μ^p completata la $\mathcal{M}^p$, atunci

$$\sigma_a(\mathcal{B}) = \sigma_a(\mathcal{B}') = \sigma_a(\mathcal{B}'') = \sigma_a(\mathcal{T}_{pr}) = \mathcal{B}(\Sigma) \subset \bigotimes_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{P}(S) \subset \mathcal{M}^p,\ \mu^p : \mathcal{M}^p \longrightarrow [0, 1].$$

μ^p se numeşte *măsura Bernoulli pe Σ de ponderi $p = \{p_i\}_{i=\overline{1,N}}$*.
μ^p are următoarele proprietăţi:

2.2.9. (Proprietăţile lui μ^p)

(1) $(\Sigma, \mathcal{M}^p, \mu^p)$ spaţiu cu probabilitate completă boreliană regulată.
(2) $\mu^p(\Sigma_w) = \mu^p(\{w_1\} \times \ldots \times \{w_n\} \times S \times \ldots) = \mu_S(\{w_1\}) \ldots \mu_S(\{w_n\}) = p_w$, $p_w := p_{w_1} \ldots p_{w_n}$ pentru $w = w_1 \ldots w_n \in W_n$, $n \geq 1$. De aici rezultă că μ^p nu "încarcă punctele":
$$\mu^p(\{\omega\}) = \mu^p\left(\bigcap_{n \geq 1} \Sigma_{\omega|n}\right) = \lim_n \mu^p(\Sigma_{\omega|n}) = \lim_n p_{\omega|n} = \prod_{n \geq 1} p_{\omega_n} = 0,$$
deoarece $\prod\limits_{n \geq 1} p_{\omega_n} \leq \lim\limits_n p_{max}^n = 0$, pentru orice $\omega = \omega_1 \omega_2 \ldots \in \Sigma$.
(3) μ^p coincide cu probabilitatea pe Σ dată de 2.2.7 (de aceea s-a notat la fel) (din teorema de identitate a măsurilor, ele coincid pe oricare din clasele $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$). Deci μ^p este unica probabilitate boreliană pe Σ cu $\mu^p(A) = \sum\limits_{i=1}^{N} p_i \mu^p(\sigma_i^{-1}(A))$, $\forall\, A \in \mathcal{B}(\Sigma)$ şi $\operatorname{spt}\mu^p = \Sigma$.

2.2.3. Măsura autosimilară asociată unei S.A. Pentru $\left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ S.A. şi $p := \{p_i\}_{i=\overline{1,N}}$ sistem de ponderi, se consideră $\pi : (\Sigma, \mathcal{T}_{pr}) \longrightarrow (F, \mathcal{T}_d)$ aplicaţia naturală ((F, d) spaţiu metric). Se poate considera şi $\pi : (\Sigma, \mathcal{M}^p, \mu^p) \longrightarrow (F, \mathcal{B}(F))$. Cum π continuă $\Longrightarrow \pi \in \mathcal{B}(\Sigma)/\mathcal{B}(F) \subset \mathcal{M}^p/\mathcal{B}(F)$. Se poate defini "transportul" lui μ^p pe F:

$$\mathcal{N}^p := \{A \subset F | \pi^{-1}(A) \in \mathcal{M}^p \in \mathcal{N}\} \supseteqq \mathcal{B}(F),\ \mathcal{N}^p\ \sigma - \text{algebră},$$

$$\nu^p := \mu^p \circ \pi^{-1} : \mathcal{N}^p \longrightarrow [0, 1],$$

ν^p devenind probabilitate boreliană regulată pe F.

ν^p are următoarele proprietăţi:

2.2.10. (Proprietăţile lui ν^p)

a) ν^p "autosimilară":

$$\begin{aligned}\nu^p(A) &= \mu^p(\pi^{-1}(A)) = \sum_{i=1}^N p_i \mu^p(\sigma_i^{-1}(\pi^{-1}(A))) = \sum_{i=1}^N p_i \mu^p((\pi \circ \sigma_i)^{-1}(A)) = \\ &= \sum_{i=1}^N p_i \mu^p((\psi_i \circ \pi)^{-1}(A)) = \sum_{i=1}^N p_i \mu^p(\pi^{-1}(\psi_i^{-1}(A))) = \sum_{i=1}^N p_i \nu^p(\psi_i^{-1}(A)),\end{aligned}$$

$\forall A \in \mathcal{B}(F)$, şi, cum singura probabilitate boreliană pe F cu această proprietate este exact punctul fix al operatorului Markov asociat lui $\{\psi_i\}_i$ şi sistemului de ponderi $p = \{p_i\}_i$, rezultă că ν^p coincide cu probabilitatea μ dată de 2.2.6. Ea se va numi *măsura autosimilară asociată structurii autosimilare* $\left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ *şi sistemului de ponderi* $\{p_i\}_{i=\overline{1,N}}$.

b) Pentru $w = w_1 \ldots w_n \in W_n$, are loc

$$\begin{aligned}\nu^p(F_w) &= \mu^p(\pi^{-1}(\psi_w(F))) = \mu^p(\pi^{-1}(\psi_w(\pi(\Sigma)))) = \mu^p(\pi^{-1}(\pi(\sigma_w(\Sigma)))) \\ &\geq \mu^p(\sigma_w(\Sigma)) = \mu^p(\Sigma_w) = p_{w_1} \ldots p_{w_n},\end{aligned}$$

din 2.2.9 şi $\Sigma_w \subset \pi^{-1}(\pi(\Sigma_w))$, inegalitatea fiind datorită neinjectivităţii lui π; ea se transformă în egalitate atunci când mulţimea de suprapunere (critică) nu e prea "mare" (a se vedea teorema următoare).

Teorema 2.2.11. *([**30**]-1.4) Fie* $\left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ *S.A.,* $\{p_i\}_{i=\overline{1,N}}$ *sistem de ponderi şi* $\pi : \Sigma \longrightarrow F$ *aplicaţia naturală. Fie* $\mathcal{I}_\infty := \{\omega \in \Sigma \,|\, \#(\pi^{-1}(\pi(\omega))) = \infty\}$. *Atunci*

$$\Big(\forall\, w = w_1 \ldots w_n \in W_*\Big)\Big(\nu^p(F_w) = p_{w_1} \ldots p_{w_n}\Big) \Longleftrightarrow \mu^p(\mathcal{I}_\infty) = 0.$$

Demonstraţia este foarte profundă şi merită prezentată. Ea se face în trei paşi.

Pentru $A \in \mathcal{M}^p$, se va nota $A_0 := \{\omega \in \Sigma \,|\, \sigma^m \omega \in A$ pt. o infinitate de $m\}$. Deasemenea, fie $\mathcal{I} := \{\omega \in \Sigma \,|\, \#(\pi^{-1}(\pi(\omega))) > 1\}$. Se observă că $\mathcal{I} = \bigcup_{w \in W_*} \sigma_w(\Gamma)$.

I. *Pentru* $A \in \mathcal{M}^p \Longrightarrow A_0 \in \mathcal{M}^p$ *şi* $\mu^p(A_0) \geq \mu^p(A)$. *În particular* $A \in \mathcal{B}(\Sigma) \Longrightarrow A_0 \in \mathcal{B}(\Sigma)$.

Într-adevăr, pt. $w = w_1 \ldots w_m \in W_*$, $\sigma_w := \sigma_{w_1} \circ \ldots \circ \sigma_{w_m}$ injectivă (σ_i inj.) şi pt. $A \in \mathcal{M}^p$, mulţimea $A_m := \bigcup_{w \in W_m} \sigma_w(A) = \bigcup_{w \in W_m} \{w_1\} \times \ldots \times \{w_m\} \times A$ este în $\mathcal{M}^p$, reuniunea fiind disjunctă.

Se observă că $A_0 = \limsup_m A_m$, deci $A_0 \in \mathcal{M}^p$. Dar

$$\begin{aligned}\mu^p(A_m) &= \sum_{w \in W_m} \mu^p(\sigma_w(A)) = \sum_{w \in W_m} \mu_S(\{w_1\}) \ldots \mu_S(\{w_m\}) \mu^p(A) = \\ &= \sum_{w \in W_m} p_{w_1} \ldots p_{w_m} \mu^p(A) = \mu^p(A).\end{aligned}$$

Din lema lui Fatou pentru μ^p măsură finită şi $A_0 = \limsup_m A_m$ rezultă $\mu^p(A_0) \geq \limsup_m \mu^p(A_m) = \mu^p(A)$.

II. $\mathcal{I} \in \mathcal{B}(\Sigma)$, $\mathcal{I}_\infty \in \mathcal{M}^p$, $\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{I}_\infty \subset \mathcal{I}$ şi $\mu^p(\mathcal{I}_0) = \mu^p(\mathcal{I}_\infty) = \mu^p(\mathcal{I})$.

Pentru demonstraţie se va nota $I_m := \bigcup_{v \neq w \in W_m} (F_v \cap F_w)$. Se poate deduce uşor că $\mathcal{I} = \bigcup_{m \geq 1} \pi^{-1}(I_m)$, de unde $\mathcal{I}$ închisă în Σ, deci $\mathcal{I} \in \mathcal{B}(\Sigma)$, deci, din I $\mathcal{I}_0 \in \mathcal{B}(\Sigma)$.

Considerând $\omega \in \mathcal{I}_0$, prin inducţie se pot construi $(m_k)_{k \geq 1}$, $(m_k)_{k \geq 1}$, $(\omega^{(k)})_{k \geq 1}$, $(\omega^{(k)})_{k \geq 1} \subset \Sigma$, cu $1 < m_1 < n_1 < \ldots < m_k < n_k < m_{k+1} < \ldots$ şi $\sigma^{m_k}\omega \in \mathcal{I}$, $\sigma^{m_k}\omega \neq \tau^k$, $\pi(\sigma^{m_k}\omega) = \pi(\tau^k)$, $\omega^{(k)} = \omega_1 \ldots \omega_{m_k} \tau^{(k)}$, $\omega_1 \ldots \omega_{n_{k-1}} = \omega_1^{(k)} \ldots \omega_{n_{k-1}}^{(k)}$, $\omega_{n_k} \neq \omega_{n_k}^{(k)}$. De aici $\pi(\omega) = \pi(\omega^{(k)})$, deci $\omega \in \mathcal{I}_\infty$. Aşadar $\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{I}_\infty \subset \mathcal{I}$ şi $\mu^p(\mathcal{I}_0) \leq \mu^p(\mathcal{I}_\infty)$. Cum $\mu^p(\mathcal{I}_0) \geq \mu^p(\mathcal{I})$, în final $\mu^p(\mathcal{I}_0) = \mu^p(\mathcal{I}_\infty) = \mu^p(\mathcal{I})$. Dar $\mathcal{I}_0, \mathcal{I} \in \mathcal{B}(\Sigma)$, şi cum μ^p completă $\mathcal{I}_\infty \in \mathcal{M}^p$.

III. Pentru demonstraţia efectivă a teoremei, se va ţine cont că $\mu^p(\Sigma_w) = p_w := p_{w_1} \cdot \ldots \cdot p_{w_n}$, $w \in W_n$, $n \geq 1$ şi evident de I şi II. Deoarece

$$\pi^{-1}(F_i) = \pi^{-1}(\psi_i(\pi(\Sigma))) = \pi^{-1}(\pi(\sigma_i(\Sigma))) = \pi^{-1}(\pi(\Sigma_i)) \supseteq \Sigma_i,\ i \in S,$$

$\Longrightarrow \pi^{-1}(F_w) = \pi^{-1}(\pi(\Sigma_w)) \supseteq \Sigma_w$, $w \in W_*$. Cum

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(F_i) \setminus \Sigma_i &= \{\omega \in \Sigma \,|\, \omega_1 \neq i \wedge \exists\, \omega' \in \Sigma_i,\ \pi(\omega) = \pi(\omega')\} \subset \\ &\subset \{\omega \in \Sigma \,|\, \#(\pi^{-1}(\pi(\omega))) > 1\} = \mathcal{I},\ i \in S, \end{aligned}$$

rezultă $\pi^{-1}(F_w) \setminus \Sigma_w \subset \mathcal{I}$, $\forall\, w \in W_*$. De aici şi din $\mathcal{I} = \bigcup\limits_{w \in W_*} \sigma_w(\Gamma)$

$$\begin{aligned} \mu^p(\mathcal{I}) = 0 &\iff \mu^p(\mathcal{I}_\infty) = 0 \iff \mu^p(\pi^{-1}(F_w) \setminus \Sigma_w) = 0,\ \forall\, w \in W_* \\ &\iff \mu^p(\pi^{-1}(F_w)) - \mu^p(\Sigma_w) = \nu^p(F_w) - \mu^p(\Sigma_w) = 0,\ \forall\, w \in W_* \\ &\iff \nu^p(F_w) = \mu^p(\Sigma_w) = p_{w_1} \ldots p_{w_n}, \forall\, w = w_1 \ldots w_n \in W_*. \end{aligned}$$

Observaţia 2.2.12. 1) Din μ^p ergodică relativ la σ ($\Leftrightarrow \Big(A \in \mathcal{M}^p,\ \sigma^{-1}(A) = A \Longrightarrow \mu^p(A) = 0 \vee \mu^p(A) = 1\Big)$), iar $\sigma^{-1}(\mathcal{I}_0) = \mathcal{I}_0$ va rezulta $\mu^p(\mathcal{I}_0) = \mu^p(\mathcal{I}_\infty) = \mu^p(\mathcal{I}) = 0$ sau 1.

2) Dacă $\forall\, x \in F$, $\pi^{-1}(x)$ finită (ca în cazul S.A.P.C.F.), atunci $\mathcal{I}_\infty = \emptyset$, deci $\nu^p(F_w) = p_{w_1} \ldots p_{w_n}, \forall\, w = w_1 \ldots w_n \in W_*$.

3) Din $\mathcal{I} = \bigcup\limits_{w \in W_*} \sigma_w(\Gamma)$ rezultă $\mu^p(\mathcal{I}) = 0 \Longrightarrow \mu^p(\Gamma) = 0$.

2.2.4. Măsura autosimilară a unei S.A şi măsura Hausdorff. Ideile din această secţiune se vor continua în secţiunea 4.7 când se va concluziona faptul că o măsură autosimilară bine aleasă asociată unei S.A.P.C.F. conexe ("fractalului") coincide practic cu măsura Hausdorff a "fractalului". Cu rezultatele obţinute în subsecţiunea anterioară, se poate demonstra

Teorema 2.2.13. *(*[**30**]*-1.5.7) Fie* $\Big\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\Big\}$ *S.A. şi* $\mathbf{r} := (r_1, \ldots, r_N)$ *cu* $0 < r_i < 1$, $i = \overline{1,N}$. *Pentru* $a \in (0,1)$, *se pune* $\Lambda(\mathbf{r}, a) := \{w \,|\, w = w_1 \ldots w_m \in W_*,\ r_{w_1 \ldots w_{m-1}} > a \geq r_w\}$. *Se presupune că există* c_0, c_1, c_2, $M > 0$ *cu*

$$|F_w| \leq c_1 r_w,\ \forall\, w \in W_*, \tag{2.1}$$

$$\#\,\{w \in \Lambda(\mathbf{r}, a) \,|\, d(x, F_w) \leq c_2 a\} \leq M,\ \forall\, x \in F_w,\ \forall\, a \in (0, c_0). \tag{2.2}$$

Atunci

$$\Big(\exists\, c_3, c_4 > 0\Big)\Big(\forall\, B \in \mathcal{B}(F, d)\Big)\Big(c_3 \nu(B) \leq \mathcal{H}^s(B) \leq c_4 \nu(B)\Big), \tag{2.3}$$

unde $\nu = \nu^p$ *măsura autosimilară asociată ponderilor* $p := \{p_i := r_i^s\}_{i=\overline{1,N}}$, *s fiind unica soluţie a ecuaţiei* $\sum\limits_{i=1}^{N} r_i^s = 1$.

De aici rezultă evident apoi că $\dim_H(F, d) = s$, F s-mulţime $(0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty)$. Din (2.2) rezultă faptul că $\#(\pi^{-1}(x)) \leq M$, $\forall\, x \in F$, de unde, cu 2.2.12-2) $\nu(F_w) = r_w^s$, $\forall\, w \in W_*$ şi $\nu(\mathcal{I}) = 0$. Pe scurt, din (2.1) se poate deduce că $\mathcal{H}^s(F_w) \leq c_1^s \nu(F_w)$, iar din (2.2) se poate obţine $\nu(B_{c_2 a}(x)) \leq M c_2^{-s} (c_2 a)^s$, $\forall\, x \in F$, de unde, principiul distribuţiei de masă implică $\nu(F_w) \leq M c_2^{-s} \mathcal{H}^s(F_w)$, apoi rezultă simplu (2.3) (a se vedea [**30**]-pag.31-32).

Se poate demonstra şi faptul că pentru situaţia "atractorului" unui SIF format cu similitudini pe $\mathbb{R}^d$ ce verifică condiţia (CMD) sunt verificate ipotezele teoremei anterioare ([**30**]-1.5.8) Mai precis: *Pentru un SIF* $\Big\{\mathbb{R}^d; \{\psi_i, r_i\}_{i=\overline{1,N}}\Big\}$, *cu* ψ_i *similitudini, care satisface (CMD), măsura Hausdorff* $\mathcal{H}^s$ *(s singura soluţie a ecuaţiei* $\sum\limits_{i=1}^{N} r_i^s = 1$*) este comparabilă cu măsura autosimilară asociată S.A.* $\Big\{F; \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\Big\}$ *(F atractorul SIF-ului) şi ponderilor* $\{r_i^s\}_{i=\overline{1,N}}$.

2.2.5. Măsuri autosimilare pe S.A.P.C.F. Se consideră $\Big\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\Big\}$ S.A.P.C.F., $p := \{p_i\}_{i=\overline{1,N}}$ sistem de ponderi şi $\pi : \Sigma \longrightarrow F$ aplicaţia naturală. Din observaţia anterioară $\nu^p(F_w) = p_{w_1} \ldots p_{w_n} =: p_w, \forall\, w = w_1 \ldots w_n \in W_*$. Fie mulţimile B, Γ, P, $V_0 = \pi(P)$, $V^n = \bigcup\limits_{w \in W_n} (V_0)_w$, $n \geq 1$. Fie $N_0 := \#(V_0)$.

Rezultă $\#((V_0)_w) = N_0$, $\forall\, w \in W_n$. Deasemenea $\nu^p(F_j) = \sum\limits_{i=1}^{N} p_i \nu^p(\psi_i^{-1}(F_j))$ implică

$$\int_F \mathbb{I}_{F_j} d\nu^p = \sum_{i=1}^{N} p_i \int_F \mathbb{I}_{F_j} d(\nu^p \circ \psi_i^{-1}) = \sum_{i=1}^{N} p_i \int_F \mathbb{I}_{F_j} \circ \psi_i d\nu^p,\ \forall\, j,$$

de unde

$$\int_F f d\nu^p = \sum_{i=1}^{N} p_i \int_F f \circ \psi_i d\nu^p, \forall f \in L^1(F, \nu^p). \tag{2.4}$$

Pentru $n \geq 0$, se consideră pe V^n măsura discretă $\nu_n^p := \frac{1}{N_0} \sum_{w \in W_n} p_w \varepsilon_{(V_0)_w}$.

Practic, ν_n^p *este obţinută prin concentrarea "masei" fiecărei* F_w *pe "frontiera" sa* $(V_0)_w$*, cu aceeaşi pondere pe fiecare punct, dar, fiecare punct* $x \in (V_0)_w$ *obţinând o contribuţie de* p_w *de la fiecare* n*-complex căruia îi aparţine.*

Şi ν^p este o probabilitate:

$$\nu_n^p(V^n) = \int_{V^n} \mathbb{I}(x) \nu_n^p(dx) = \sum_{x \in V^n} \int_{\{x\}} \mathbb{I}(y) \nu_n^p(dy) =$$

$$= \sum_{x \in V^n} \frac{1}{N_0} \sum_{w \in W_n} p_w \mathbb{I}_{(V_0)_w}(x) = \sum_{w \in W_n} \frac{1}{N_0} p_w \sum_{x \in V^n} \mathbb{I}_{(V_0)_w}(x) = \sum_{w \in W_n} p_w = 1.$$

În plus, din (2.4), pentru $f : F \longrightarrow \mathbb{R}$ continuă

$$\left| \int_F f d\nu^p - \int_F f d\nu_n^p \right| \leq \max_{w \in W_n} \sup_{x,y \in F_w} |f(x) - f(y)|,$$

aşadar are loc

Propoziţia 2.2.14. ν_n^p *probabilitate pe* V^n*,* $\forall n$ *şi* $\nu_n^p \xrightarrow[n]{w} \nu^p$.

Deci acest şir de măsuri discrete "aproximează" măsura autosimilară ν^p.

2.3. Fractali "cuib" (F.C.)

2.3.1. Fractali "cuib" (F.C.) şi fractali "cuib" afini (F.C.A.). Fractalii "cuib" au fost introduşi de matematicianul suedez Tom Lindström în celebra sa carte *Brownian motion on nested fractals* din 1988 ([**35**]). Ulterior ei au fost generalizaţi la noţiunea de fractali "cuib" afini la 1994 într-un articol de Fitzsimmons, Hambly şi Kumagai ([**20**]). Ei sunt S.A.P.C.F. dar au două proprietăţi suplimentare: pot fi scufundaţi într-un spaţiu euclidian şi posedă un "grup de simetrie" suficient de bogat.

Definiţia 2.3.1. ([**3**]-5) Se consideră

- atractorul F al unui SIF $\left\{(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|); \{\psi_i, r_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$, cu ψ_i similitudini de factor r_i. Atunci $\left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ S.A. (s-a considerat că restricţiile la F ale ψ_i-urilor se notează tot cu ψ_i).
- conceptele ataşate lui $\left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$: spaţiul "codurilor"(adreselor) Σ, $\pi : \Sigma \longrightarrow F$, mulţimile de ramificare, critică şi postcritică B, Γ, P, apoi V_0 şi V_n (considerate în secţiunile anterioare).
- $\overline{V} := \{z_1, \ldots, z_N\}$ punctele fixe ale aplicaţiilor $\{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}$ ($z_k = \pi(\dot{k})$, $k = \overline{1,N}$).
- $\overline{V}^{(0)} := \left\{x \in \overline{V} \middle| \left(\exists\, y \in \overline{V}\right) (\exists\, i \neq j) \left(\psi_i(x) = \psi_j(y)\right)\right\}$. Punctele din $\overline{V}^{(0)}$ se mai numesc *puncte fixe esenţiale.*
- pentru $x, y \in \overline{V}^{(0)}$, g_{xy} aplicaţia "reflecţie" în hiperplanul mediator segmentului $[xy]$.

$\left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ dat ca mai sus se numeşte *fractal "cuib" afin* (F.C.A.) $\Longleftrightarrow$

- (F.C.A.0) $\left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ satisface cond. mulţimii deschise, $\#\left(\overline{V}^{(0)}\right) \geq 2$;
- (F.C.A.1) $\left(\forall\, i, j\right) \left(\exists\, i_0, \ldots, i_k\right) \left(i_0 = i, i_k = j, \overline{V}^{(0)}_{i_{r-1}} \cap \overline{V}^{(0)}_{i_r} \neq \emptyset, \forall\, r = \overline{1,k}\right)$;
- (F.C.A.2) $\left(\forall\, x, y \in \overline{V}^{(0)}\right) (\forall\, n \geq 0) \left(g_{xy}\right.$ "duce" n-celule în n-celule$\left.\right)$;
- (F.C.A.3) $(\forall\, w, v \in W_n, w \neq v) \left(F_w \cap F_v = \overline{V}^{(0)}_w \cap \overline{V}^{(0)}_v\right)$.

Dacă în plus, toate similitudinile au acelaşi factor, atunci $\left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ se numeşte *fractal "cuib"* (F.C.)

Observaţia 2.3.2. a) Axioma (F.C.A.1) se mai numeşte *axioma de conexiune*, axioma (F.C.A.2) se mai numeşte *axioma de simetrie*, iar axioma (F.C.A.3) se mai numeşte *axioma "cuib"*. *Axiomele (F.C.A.1) şi (F.C.A.2) se folosesc pentru a construi grupuri de simetrie şi grafuri conexe pe F.C.A.-uri* (a se vedea secţiunile dedicate acestora).

b) Triunghiul lui Sierpinski este un F.C. cu $\overline{V} = \overline{V}^{(0)} = \{a_1, a_2, a_3\}$ (pt. că $\psi_2(a_1) = \psi_1(a_2) = b_3$, etc.)

Pentru triunghiul lui Sierpinski cu triunghi adăugat $\overline{V} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, iar $\overline{V}^{(0)} = \{a_1, a_2, a_3\}$. Într-adevăr, $a_4 \notin \overline{V}^{(0)}$. Presupunând că $\exists\, i \neq j$, $\exists\, y \in \{a_1, a_2, a_3\}$ cu $\psi_i(a_4) = \psi_j(y)$, rezultă $\psi_i(a_4) \in \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3\}$, contradicţie!

Deoarece nu se ştie încă faptul că orice fractal F.C.A. este S.A.P.C.F., următorul rezultat trebuie demonstrat pentru F.C.A. (altfel s-ar fi aplicat lema 2.1.12):

Lema 2.3.3. *([**3**]-5) $\left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ F.C.A. şi z_i punctul fix al lui $\psi_i \Longrightarrow z_i \notin F_j$, $\forall\, j \neq i$.*

Într-adevăr, dacă se consideră doar cazul F.C. şi se presupune $z_1 \in F_2$, atunci $z_1 \in F_1 \cap F_2 = \overline{V}_1^{(0)} \cap \overline{V}_2^{(0)}$ $\Longrightarrow z_1 \in \overline{V}_2^{(0)}$, deci $\exists\, z_i \in \overline{V}^{(0)}$ cu $z_1 = \psi_2(z_i)$. Cum $i \neq 1, 2$, se poate presupune că $i = 3$, de unde $z_1 = \psi_1^k \circ \psi_2 \circ \psi_3^j(z_3) \in F_{1^k.2.3^j}$. Dacă se consideră $D_n := \{w \in W_n | z_1 \in F_w\}$, atunci $\#(D_n) \geq n$. Pentru U mulţimea deschisă dată de (CMD), rezultă $F \subset \overline{U}$, de unde $z_i \in \overline{U}$, $\forall\, i = \overline{1, N}$, deci $z_1 \in F_w \subset \overline{U}_w$, $\forall\, w \in D_n$. Cum $\{U_w\}_{w \in D_n}$ mutual disjunctă, rezultă în final că z_1 se află pe frontiera a cel puţin n mulţimi deschise disjuncte. Cum pentru F.C. acestea sunt şi congruente, se obţine uşor o contradicţie!

Cu ajutorul acestei leme se poate demonstra *rezultatul fundamental privind fractalii F.C.A.: anume aceştia sunt structuri S.A.P.C.F. Deasemenea pentru F.C.A.* $\overline{V}^{(0)} = V_0$, rezultat care va permite determinarea computaţională simplă a elementelor din V_0:

Teorema 2.3.4. *([**3**]-5) Pentru $\left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ F.C.A. $\Rightarrow \left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ este S.A.P.C.F. şi, în plus,*

(1) $\overline{V}^{(0)} = V_0$;
(2) $P = \left\{(\dot{s}) \,\middle|\, z_s \in \overline{V}^{(0)}\right\}$;
(3) $z \in \overline{V}^{(0)} \Longrightarrow z$ *se află în exact un* n-*complex*, $\forall\, n \geq 1$;
(4) *fiecare* 1-*complex conţine cel mult un element din* $\overline{V}^{(0)}$.

Demonstraţia este simplă şi va fi prezentată, dată fiind importanţa rezultatului. *Practic se poate considera că acest rezultat a dat ideea considerării mulţimilor de ramificare, critică, postcritică şi a clasei mai largi de "fractali" numiţi structuri S.A.P.C.F. - de către, Kusuoka ([**33**]), Kigami ([**29**]), Kumagai ([**32**]).*

Din (F.C.A.0) $\overline{V}^{(0)} = \{z_1, \ldots, z_k\}$, cu $k \geq 2$.

Se consideră $w \in \Gamma$; rezultă $\pi(w) = \psi_{w_1}(\pi(\sigma w)) \in F_{w_1}$ şi cum $\pi(w) \in B$, din (F.C.A.3) rezultă $\pi(w) \in F_{w_1} \cap F_{j_0} = \overline{V}_{w_1}^{(0)} \cap \overline{V}_{j_0}^{(0)}$, pentru un $j_0 \neq w_1$. Rezultă $\pi(w) = \psi_{w_1}(\pi(\sigma w)) \in \overline{V}_{w_1}^{(0)}$, de unde $\pi(\sigma w) \in \overline{V}^{(0)}$, deci $\exists\, s \in \{1, \ldots, k\}$ cu $\pi(\sigma w) = z_s$. Dar $\pi(\sigma w) = \psi_{w_2}(\pi(\sigma^2 w)) \in F_{w_2}$, de unde, cu lema anterioară, $w_2 = s$. Rezultă $\psi_s(\pi(\sigma^2 w)) = z_s$, de unde $\pi(\sigma^2 w) = z_s$. Scriind din nou $\pi(\sigma^2 w) = \psi_{w_3}(\pi(\sigma^3 w))$ şi procedând analog se obţine $w_3 = s$, apoi, repetând procedul, se obţine, inductiv $\sigma w = (\dot{s})$. Aşadar, în final, $\sigma(\Gamma) = \left\{(\dot{s}) \,\middle|\, 1 \leq s \leq k\right\} = \left\{(\dot{s}) \,\middle|\, z_s \in \overline{V}^{(0)}\right\} = P$, de unde (2). Cum P finită, $\left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ S.A.P.C.F. iar $\pi(P) = V_0 = \left\{\pi(\dot{s}) \,\middle|\, 1 \leq s \leq k\right\} = \overline{V}^{(0)}$, de unde (1). (3) este evidentă din lema precedentă. Analog (4).

Observaţia 2.3.5. ([**3**]-5) a) Î n demonstraţiile celor două rezultate anterioare se pare că s-au utilizat doar (F.C.A.0) şi (F.C.A.3), dar în demonstraţia lemei 2.3.3 se foloseşte în mod tacit (F.C.A.2); deci orice $\left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ ce satisface doar (F.C.A.0), (F.C.A.2) şi (F.C.A.3) este S.A.P.C.F. şi au loc (1),(2),(3),(4).

b) Este posibil ca fractalul F să fie conex, dar totuşi $F \backslash V_0$ neconexă (Triunghiul lui Sierpinski, etc.)

c) Pentru două 1-celule $(V_0)_i$, $(V_0)_j$ este posibil ca $\#((V_0)_i \cap (V_0)_j) \geq 2$ (Pătratul "tăiat"). Nu se ştie dacă pentru fractali "cuib" (F.C.) sau fractali "cuib" afini (F.C.A.) are loc $\#((V_0)_i \cap (V_0)_j) \leq 1$, $\forall\, i \neq j$. În [**20**] se deduce acest fapt pentru F.C.A. citându-se un rezultat de J. Murrai care a fost demonstrat însă în condiţii mai restrictive. De aceea, mulţi autori pun această condiţie în axiomele din definiţia F.C.A. Dar, conform lui M. Barlow (în [**3**]), rezultatele obţinute de aceştia pot fi adaptate uşor la cazul general în care nu se presupune $\#((V_0)_i \cap (V_0)_j) \leq 1$, $i \neq j$ în definiţia F.C.A.

d) Axioma (F.C.A.2) este foarte puternică şi implică $g_{xy}(V_0) \subset V_0$, $\forall\, x \neq y \in V_0$. Este uşor de verificat că pt. $d = 2$, poligoanele regulate, iar pentru $d \geq 3$ tetraedrele d-dimensionale sau d-simplexe verifică această condiţie. M. Barlow citează o demonstraţie a lui G. Maxwell cum că acestea sunt singurele posibilităţi, pe care J. Kigami nu o recunoaşte.

e) Dacă F este F.C. şi $V_0 \subset H$, H subspaţiu k-dimensional, nu neapărat $F \subset H$ (curba lui Koch).

2.3.2. Exemple de fractali "cuib" şi fractali "cuib" afini.

Exemplul 2.3.6. (**Triunghiul lui Sierpinski "afin" (TSA)**)

I.([**20**]) Se consideră punctele a_1, a_2, a_3, vârfurile unui triunghi echilateral de latură 1 (idem cu triunghiul lui Sierpinski), apoi $a_4 = \frac{3}{5}a_1 + \frac{2}{5}a_2$, $a_5 = \frac{3}{5}a_2 + \frac{2}{5}a_3$, $a_6 = \frac{3}{5}a_3 + \frac{2}{5}a_1$, $a_4' = \frac{2}{5}a_1 + \frac{3}{5}a_2$,

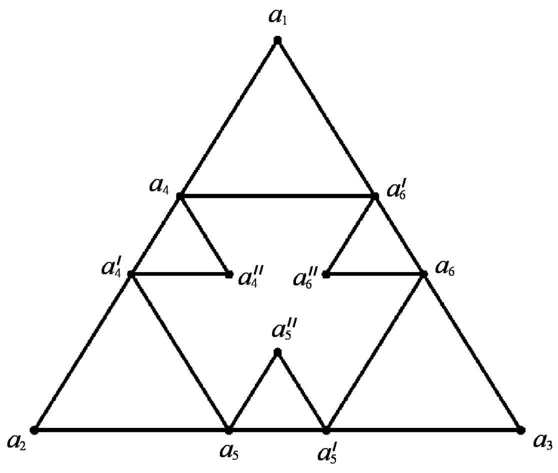

FIGURA 2.5. Mulţimea V_1 pentru triunghiul lui Sierpinski "afin"(I)

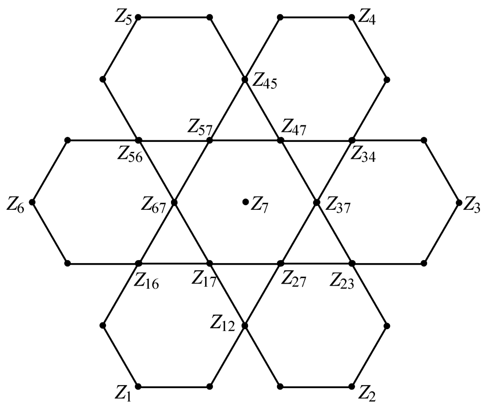

FIGURA 2.6. "Fulgul" lui Lindstrom

$a'_5 = \frac{2}{5}a_2 + \frac{3}{5}a_3$, $a'_6 = \frac{2}{5}a_3 + \frac{3}{5}a_1$ (ca în figura 2.5). Se consideră similitudinile $\psi_i(x) = a_i + \frac{2}{5}(x - a_i)$, $i = 1, 2, 3$ şi $\psi_{i+3}(x) = a_{i+3} + \frac{1}{5}(x - a_i)$, $i = 1, 2, 3$. Se veriică uşor faptul că $\{(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|); \{\psi_i, r_i\}_{i=\overline{1,6}}\}$ generează un F.C.A.

Se obţine $B = \{a_4, a'_4, a_5, a'_5, a_6, a'_6\}$ şi

$$\Gamma = \{(1\dot{2}), (2\dot{1}), (2\dot{3}), (3\dot{2}), (3\dot{1}), (1\dot{3}), (4\dot{1}), (4\dot{2}), (5\dot{2}), (5\dot{3}), (6\dot{3}), (6\dot{1})\},$$

de unde $P = \{(\dot{1}), (\dot{2}), (\dot{3})\}$, deci $V_0 = \{a_1, a_2, a_3\}$. Deasemenea, se verifică uşor că $\overline{V} = \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\}$, unde $b_1 = \frac{1}{2}(a_2 + a_3)$, $b_2 = \frac{1}{2}(a_3 + a_1)$, $b_3 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$. Faptul că $\overline{V}^{(0)} = V_0$ rezultă din teorema 2.3.4 sau se poate deduce direct ($\psi_4(a_1) = \psi_1(a_2) = a_4$, etc., iar a_4, a_5, a_6 nu pot fi puncte fixe esenţiale: se calculează imaginile lor prin celelalte similitudini, etc.).

Mulţimea V_1 este ilustrată în figura 2.5.

Atractorul SIF-ului de mai sus este ilustrat în figura 2.9.

II.([**30**]-3.2) Se mai poate considera în plus faţă de I punctul $a_7 = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3)$ (centrul de greutate al triunghiului $a_1a_2a_3$) şi similitudinea $\psi_7(x) = a_7 + \frac{1}{5}(x - a_7)$. SIF-ul $\{(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|); \{\psi_i, r_i\}_{i=\overline{1,7}}\}$ generează un F.C.A., etc. Atractorul acestui SIF este ilustrat în figura 2.10.

EXEMPLUL 2.3.7. (**"Fulgul" lui Lindstrom (FL)**) Se consideră punctele z_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ vârfurile unui hexagon regulat de latură 1, z_7 centrul său şi $\psi_i(x) = z_i + \frac{1}{3}(x - z_i)$, $i = \overline{1,7}$. Se verifică uşor că $\overline{V} = \{z_i\}_{i=\overline{1,7}}$, $B = \{z_{12}, z_{23}, z_{34}, z_{45}, z_{56}, z_{61}, z_{17}, z_{27}, z_{37}, z_{47}, z_{57}, z_{67}\}$ (a se vedea figura 2.6),

$$\Gamma = \{(1\dot{3}), (2\dot{4}), (3\dot{5}), (4\dot{6}), (5\dot{1}), (6\dot{2}), (1\dot{4}), (2\dot{5}), (3\dot{6}), (4\dot{1}), (5\dot{2}), (6\dot{3}),$$
$$(2\dot{6}), (3\dot{1}), (4\dot{2}), (5\dot{3}), (6\dot{4}), (1\dot{5}), (7\dot{1}), (7\dot{2}), (7\dot{3}), (7\dot{4}), (7\dot{5}), (7\dot{6})\}.$$

Rezultă $P = \{(\dot{1}), (\dot{2}), (\dot{3}), (\dot{4}), (\dot{5}), (\dot{6})\}$, $V_0 = \overline{V}^{(0)} = \{z_i\}_{i=\overline{1,6}}$.

Atractorul SIF-ului de mai sus este ilustrat în figura 2.11 şi este un F.C.

EXEMPLUL 2.3.8. (**"Fulgul" lui Vicsek (FV)**) Se consideră a_1, a_2, a_3, a_4 vârfurile unui pătrat (de exemplu $a_1 = (0, 0)$, $a_2 = (1, 0)$, $a_3 = (1, 1)$, $a_4 = (0, 1)$) şi similitudinile: $\psi_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $1 \le i \le 5$, $\psi_1(x) = \frac{1}{3}x$, $\psi_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}a_2$, $\psi_3(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}a_2 + \frac{2}{3}a_4$, $\psi_4(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}a_4$, $\psi_5(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{3}a_4$,

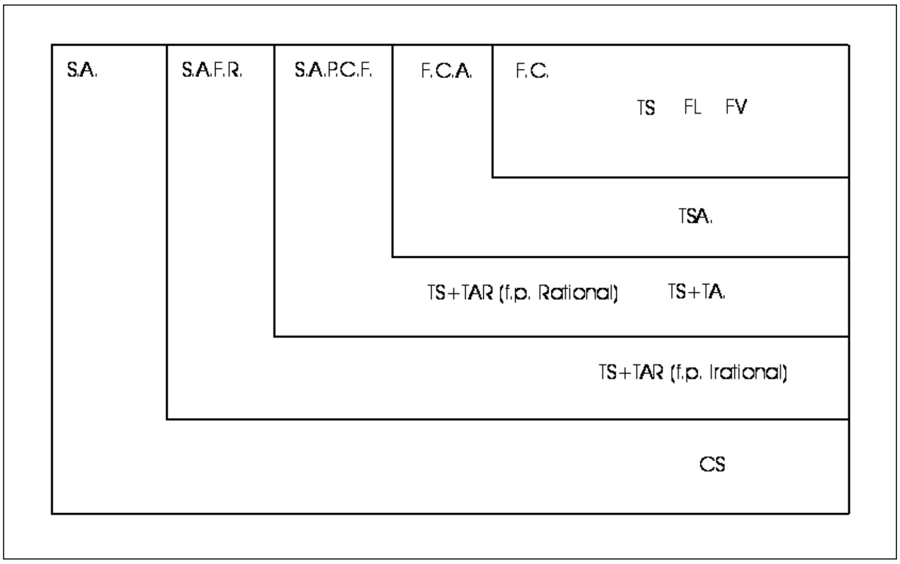

FIGURA 2.7. Clasificarea fractalilor

$x \in \mathbb{R}^2$. Sau, dacă se notează $a_5 = \frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$ (centrul pătratului), se poate scrie succint $\psi_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\psi_i(x) = a_i + \frac{1}{3}(x - a_i)$, $1 \leq i \leq 5$. Atractorul SIF-ului $\left\{(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|); \{\psi_i, r_i\}_{i=\overline{1,5}}\right\}$, cu $r_i = 1/3$ este ilustrat în figura 2.12 (s-au notat resticţiile ψ_i-urilor la F tot cu ψ_i).

Se verifică uşor că $\overline{V} = \{a_i\}_{i=\overline{1,5}}$, $B = \{a_{15}, a_{25}, a_{35}, a_{45}\}$ (dacă K pătratul iniţial, atunci $a_{k5} = K_k \cap K_5$, $k = 1, 2, 3, 4$), iar

$$\Gamma = \left\{(1\dot{3}), (5\dot{1}), (2\dot{4}), (5\dot{2}), (3\dot{1}), (5\dot{3}), (4\dot{2}), (5\dot{4})\right\}.$$

Rezultă $P = \{(\dot{1}), (\dot{2}), (\dot{3}), (\dot{4})\}$, $V_0 = \overline{V}^{(0)} = \{a_i\}_{i=\overline{1,4}}$. $\left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,5}}\right\}$ este o S.A.P.C.F., mai precis un F.C.

2.4. Clasificarea fractalilor

Evident fractalii "cuib" (F.C.) sunt fractali "cuib" afini (F.C.A.), care sunt structuri autosimilare post critic finite (S.A.P.C.F.)(din teorema 2.3.4), acestea fiind structuri autosimilare finit ramificate (S.A.F.R.). Aşadar, are loc

$$\text{(F.C.)} \subsetneqq \text{(F.C.A.)} \subsetneqq \text{(S.A.P.C.F.)} \subsetneqq \text{(S.A.F.R.))} \subsetneqq \text{(S.A.)}.$$

În figura 2.7 se vede, cu exemple, că incluziunile de mai sus sunt stricte.

S-au considerat abrevierile standard pentru exemplele remarcabile de fractali: triunghiul lui Sierpinski (TS) (exemplul 2.1.14), "fulgul" lui Lindstrom (FL) (exemplul 2.3.7) şi "fulgul" lui Vicsek (FV) (exemplul 2.3.8) pentru fractali "cuib" (F.C.); triunghiul lui Sierpinski "afin" (TSA) (exemplul 2.3.6) pentru fractali "cuib" afini (F.C.A.) care nu sunt fractali "cuib"; triunghiul lui Sierpinski cu triunghi "adăugat" (TS+TA) (exemplul 2.1.15) pentru structuri autosimilare post critic finite (S.A.P.C.F.) care nu sunt fractali "cuib" afini; triunghiul lui Sierpinski cu triunghi "adăugat" rotit (TS+TAR) (cu factor de proporţionalitate iraţional, exemplul 2.1.16) pentru structuri autosimilare finit ramificate (S.A.F.R.) care nu sunt post critic finite; "covorul" lui Sierpinski (CS) (exemplul 2.1.18) pentru structuri autosimilare infinit ramificate.

2.5. Grupuri de simetrie pe S.A.P.C.F.

Fie $\left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ S.A.P.C.F.

DEFINIŢIA 2.5.1. Un grup $\mathcal{G}$ de bijecţii continue de la F la F se numeşte *grup de simetrie pe* F $\Longleftrightarrow$

- (G.S.1) $\forall g \in \mathcal{G}$, $g(V_0) \subset V_0$;
- (G.S.2) $\forall i$, $\forall g \in \mathcal{G}$, $\exists j$, $\exists g' \in \mathcal{G}$ cu $g \circ \psi_i = \psi_j \circ g'$.

OBSERVAŢIA 2.5.2. a) Pentru g, $h \in \mathcal{G}$

$$(g \circ h) \circ \psi_i = g \circ (h \circ \psi_i) = g \circ (\psi_j \circ h') = (g \circ \psi_j) \circ h' = (\psi_k \circ g') \circ h' = \psi_k \circ (g' \circ h'),$$

deci grupul generat de $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ (grupuri de simetrie) este tot grup de simetrie. Cel mai "mare" grup de simetrie pe F se notează cu $\mathcal{G}(F)$.

b) Din definiţie rezultă imediat $\forall g \in \mathcal{G}$, $g(V_n) \subset V_n$ şi $\forall w \in W_n$, $\forall g \in \mathcal{G}$, $\exists v \in W_n$, $\exists g' \in \mathcal{G}$ cu $g \circ \psi_w = \psi_v \circ g'$.

Dacă $\left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ este chiar F.C.A., se consideră generic un anumit grup de simetrie pe F:

PROPOZIŢIA 2.5.3. *Pentru $\left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ F.C.A., se consideră $\mathcal{G}_1$ mulţimea izometriilor pe $\mathbb{R}^d$ generate de reflecţiile în hiperplanele mediatoare ale segmentelor de capete x, $y \in V_0$. Dacă $\mathcal{G}_0$ este grupul generat de $\mathcal{G}_1$, atunci $\mathcal{G}_R := \{g_{|F} \,|\, g \in \mathcal{G}_0\}$ este grup de simetrie.*

Într-adevăr, pentru $g \in \mathcal{G}_1$, $g(V_n) \subset V_n$, de unde $g(F) \subset F$. Pentru $i \in \{1, \dots, N\}$, din (F.C.A.2) $\exists\, j \in \{1, \dots, N\}$ cu $g((V_0)_i) = (V_0)_j$. Pentru fiecare din posibilităţile pe care le are V_0 (observaţia 2.3.5,d)), grupul de simetrie al lui V_0 este generat de reflecţiile din $\mathcal{G}_1$, deci $\exists\, g' \in \mathcal{G}_0$ cu $g \circ \psi_i = \psi_j \circ g'$, deci (G.S.2) este verificată pentru orice $g \in \mathcal{G}_1$, de unde în final şi pentru orice $g \in \mathcal{G}_0$.

2.6. Conexiunea structurilor autosimilare

Conexiunea structurilor autosimilare, în special a celor post critic finite este esenţială pentru construcţia formelor Dirichlet ireductibile.

2.6.1. S.A. conexe.

TEOREMA 2.6.1. *([**30**]-1.6) Fie $\left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ S.A. Fie $S := \{1, 2, \dots, N\}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
(1) $\Big(\forall i, j \in S\Big)\Big(\exists i_0 = i, i_1, \dots, i_{k-1}, i_k = j \in S\Big)\Big(F_{i_{r-1}} \cap F_{i_r} \neq \emptyset, r = \overline{1,k}\Big)$;
(2) F conexă prin arce;
(3) F conexă.

(3)$\Longrightarrow$(1) reiese cu o tehnică clasică: pentru $i \in S$ fixat, dacă se notează

$$A := \{j \in S \,|\, \exists i_0 = i, i_1, \dots, i_{k-1}, i_k = j \in S,\ F_{i_{r-1}} \cap F_{i_r} \neq \emptyset, r = \overline{1,k}\},$$

$U := \bigcup\limits_{j \in A} F_j$, $V := \bigcup\limits_{j \notin A} F_j$, din faptul că F conexă, iar U, V partiţie cu închise a lui F, rezultă $U = F$, sau $U = \emptyset$, deci $U = F$.

Pentru implicaţia (1)$\Longrightarrow$(2) se face apel la ideea lui Sierpinski (de acum aproape 90 de ani), care privea triunghiul lui Sierpinski (TS) şi covorul (CS) ca pe nişte curbe. Se notează

$$P := \left\{f : F^2 \times [0,1] \longrightarrow F \,|\, f(p,q,0) = p,\ f(p,q,1) = q,\ \forall\,(p,q) \in F^2\right\},$$

iar, pentru $f, g \in P$, $d_P(f,g) := \sup\{d(f(p,q,t), g(p,q,t)) \,|\, (p,q,t) \in F^2 \times [0,1]\}$ (d metrica de pe F). Se deduce că (P, d_P) spaţiu metric complet. Pentru $(p,q) \in F^2$, $\exists\, n(p,q) \in \mathbb{N}^*$, $\exists\,\{i_k(p,q)\}_{k=\overline{0,n(p,q)-1}} \subset S$, $\exists\,\{x_k(p,q)\}_{k=\overline{0,n(p,q)}} \subset F$, cu $x_0(p,q) = p$, $x_{n(p,q)}(p,q) = q$, $x_k(p,q)$, $x_{k+1}(p,q) \in F_{i_k(p,q)}$, $k = \overline{0, n(p,q)-1}$.

Pentru $f \in P$, se defineşte $Gf \in P$, astfel

$$(Gf)(p,q,t) := \psi_{i_k(p,q)}(f(y_k(p,q), z_k(p,q), n(p,q)t - k)),$$

unde $y_k(p,q) := \psi^{-1}_{i_k(p,q)}(x_k(p,q))$, $z_k(p,q) := \psi^{-1}_{i_k(p,q)}(x_{k+1}(p,q))$, $k/n(p,q) \le t \le (k+1)/n(p,q)$. Se poate deduce că $(G^m f)_m$ este Cauchy în (P, d_P), deci convergent în d_P la $f_* \in P$, care, cu o demonstraţie destul de tehnică, se deduce că este drum de la p la q.

Din teorema de mai sus se poate deduce uşor (din 2.1.6) că F este şi local conexă.

2.6.2. S.A.P.C.F. conexe.

Pentru S.A.P.C.F., teorema 2.6.1 se poate traduce astfel

TEOREMA 2.6.2. *([**30**]-1.6) Fie $\left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ S.A.P.C.F. Fie $S := \{1, 2, \dots, N\}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
(1) $\Big(\forall p, q \in V_1\Big)\Big(\exists p_0 = p, p_1, \dots, p_{m-1}, p_m = q \in V_1,\ \exists\,(k_i)_{i=\overline{0,m-1}} \subset S\Big)$
$\Big(p_i, p_{i+1} \in \psi_{k_i}(V_0),\ i = \overline{0, m-1}\Big)$;
(2) F conexă.

Dacă se consideră pe V_n ($n \ge 0$) o structură de graf, cu $\{x,y\} \in E_n \iff \exists\, w \in W_n,\ x \neq y \in (V_0)_w$, atunci are loc:

PROPOZIŢIA 2.6.3. *([**3**]-5) $\left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ S.A.P.C.F. conexă $\Longrightarrow$ (V_n, E_n) graf conex, $\forall\, n \ge 1$.*

Într-adevăr, din F conexă, cu teorema 2.6.2, (V_1, E_1) graf conex. Demonstraţia continuă prin inducţie după n. Se presupune (V_n, E_n) graf conex. Fie $x, y \in V_{n+1}$. Dacă $x, y \in (V_1)_w$, pentru un $w \in W_n$, atunci, din (V_1, E_1) graf conex, $\exists$ un drum $\psi_w^{-1}(x) = z_0$, z_1, $\dots$, $z_k = \psi_w^{-1}(y)$ în (V_1, E_1) şi cu z_{i-1}, $z_i \in (V_0)_{w_i}$, $w_i \in W_1$, $1 \le i \le k$. Pentru $z'_i := \psi_w(z_i)$, avem z'_{i-1}, $z'_i \in F_{w_i \cdot w}$, deci $\{z'_{i-1}, z'_i\} \in E_{n+1}$, de unde x, y conectate în (V_{n+1}, E_{n+1}). Dacă x, $y \in V_{n+1}$ arbitrari, din (V_n, E_n) graf conex, există un drum $y_0, \ldots, y_m$ în (V_n, E_n) astfel încât $\{y_{i-1}, y_i\} \in E_n$ şi x, y_0 şi y, y_m sunt în aceeaşi $n+1$-celulă. Cu argumentele de mai sus, va rezulta că $x, y_0, y_1, \ldots, y_m, y$ sunt E_{n+1}-conectate.

Ţinând cont de faptul că mulţimile $F_{w,x}$ din 2.1.6 care conţin un punct $x \in F$ sunt conexe prin arce, se poate deduce următorul rezultat privind $F \backslash V_0$:

Propoziţia 2.6.4. *([**30**]-1.6.6)* $\left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ *S.A.P.C.F. conexă şi* C *componentă conexă a lui* $F \backslash V_0 \Longrightarrow$

(1) C *conexă prin arce;*
(2) $\big(\forall\, x \in C\big)\big(\forall\, p \in \overline{C}\big)\big(\exists\, \gamma$ *drum în* $C \cup \{p\}$ *de capete* x, $p\big)$.

2.6.3. F.C.A. ca S.A.P.C.F. conexe. Fie $\left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ F.C.A. Din 2.6.2 şi (F.C.A.1) rezultă

Corolarul 2.6.5. *Orice* $\left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ *F.C.A. este S.A.P.C.F. conexă.*

Pentru $\left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ F.C.A., structurile de graf (V_n, E_n) sunt mai interesante şi merită analizate mai atent.

Dacă se consideră $l_0 := \min\{|x-y| \,\big|\, x, y \in V_0, x \neq y\}$, $E_0' := \{\{x,y\} \in E_0 \,|\, |x-y| = l_0\}$, $E_n' := \{\{x,y\} \in E_n \,|\, \exists\, w \in W_n, x = \psi_w(x'), y = \psi_w(y'), \{x', y'\} \in E_0'\}$, $n \geq 1$, atunci are loc:

Propoziţia 2.6.6. *([**3**]-5) Fie* $\left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ *F.C.A. Atunci,*

a) pentru x, y, $z \in V_0$ *distincte, există un drum în* (V_0, E_0') *cu capete* x, y, *ce nu conţine pe* z*;*

b) pentru x, $y \in V_0$ *distincte, există un drum în* (V_1, E_1') *cu capete* x, y, *ce nu conţine nici un alt punct din* $V_0 \backslash \{x, y\}$*;*

c) pentru x, x', y, $y' \in V_0$ *cu* $|x-y| = |x'-y'|$, *există* $g \in \mathcal{G}_R$ *cu* $g(x') = x$, $g(y') = y$.

Într-adevăr, pentru $\#(V_0) = 2$, $E_0 = E_0'$ şi concluziile sunt triviale. Pentru $\#(V_0) \geq 3$ a) este trivială, dacă se ţine cont de observaţia 2.3.5-d) cu privire la posibilităţile lui V_0 (pt. $d = 2$, poligon regulat, iar pentru $d \geq 3$ tetraedru d-dimensional sau d-simplex) iar b) rezultă imediat din a). Pentru c) se consideră $g_1 := g_{yy'}$, $z := g_1(x')$. Dacă $z = x$, atunci $g = g_1$. Altfel, deoarece $|x-y| = |x'-y'| = |z-y|$ şi punând $g_2 := g_{xz}$, rezultă $g_2(y) = y$ şi $g := g_1 \circ g_2$.

2.6.4. Structuri autosimilare tare simetrice (S.A.T.S.). Rostul generalizării F.C.A.-urilor la S.A.P.C.F. conexe tare simetrice (pe scurt structuri autosimilare tare simetrice - S.A.T.S.) se va vedea la renormalizare. Kigami este cel care a propus aceste noi structuri în [**30**]-3.8.

Ideea lui Lindstrom privind renormalizarea F.C. a fost generalizată de Kigami în [**30**]*-3.8, obţinându-se existenţa structurilor armonice pe S.A.T.S. La modul simplist, se consideră S.A.P.C.F. conexe "pe* $\mathbb{R}^d$*", care îndeplinesc în plus "aproximativ" proprietăţile "de simetrie" din propoziţia 2.6.6.*

Definiţia 2.6.7. $\mathcal{L} := \left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ S.A.P.C.F. conexă. $g : F \longrightarrow F$ se numeşte *simetrie a lui* $\mathcal{L}$ $\Longleftrightarrow$

$$\Big(\forall\, m \geq 0\Big)\Big(\exists\, g^{(m)} : W_m \longrightarrow W_m \text{injectivă}\Big)\Big(\forall\, w \in W_m\Big)\Big(g(\psi_w(V_0)) = \psi_{g^{(m)}(w)}(V_0)\Big).$$

Definiţia 2.6.8. Se consideră $\mathcal{L} := \left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ S.A.P.C.F. conexă cu $F \subset \mathbb{R}^d$ şi ψ_i presupuse a fi restricţiile la F ale unor similitudini de pe $\mathbb{R}^d$. Atunci:

- dacă $V_0 = \{p_1, \ldots, p_M\}$, se poate presupune $\sum\limits_{i=1}^{M} p_i = 0$ şi se deduce că orice transformare afină $g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ pentru care $g_{|F}$ este simetrie a lui $\mathcal{L}$ este de fapt liniară ($g(V_0) = V_0$ şi, cum $\sum\limits_{i=1}^{M} p_i = 0 \Longrightarrow g(0) = 0$);
- pentru $x, y \in \mathbb{R}^d$, $x \neq y$, se consideră H_{xy} hiperplanul mediator al segmentului $[x, y]$, iar g_{xy} "reflecţia în H_{xy}";
- se notează $m_* := \#\{|x-y| \,|\, x, y \in V_0, x \neq y\}$, $l_0 := \min\{|x-y| \,|\, x, y \in V_0, x \neq y\}$, $l_{i+1} := \min\{|x-y| \,|\, x, y \in V_0, |x-y| > l_i\}$, $i = 0, 1, \ldots m_* - 1$. l_0 se introdusese şi în subsecţiunea precedentă, pentru F.C.A.-uri.
- se introduc conceptele
  - (i) $\{x_i\}_{i=\overline{1,n}} \subset V_m$ se numeşte *m-drum între* x_1 *şi* x_n $\Longleftrightarrow \exists\, v_1, \ldots, v_n - 1 \in W_m$ cu x_i, $x_{i+1} \in \psi_{v_i}(V_0)$, $i = \overline{1, n-1}$ (0-drum $\Longleftrightarrow \{x_i\}_{i=\overline{1,n}} \subset V_0$);
  - (ii) $\{x_i\}_{i=\overline{1,n}} \subset V_m$ se numeşte *m-drum strict între* x_1 *şi* x_n $\Longleftrightarrow |x_i - x_{i+1}| = l_0, \forall\, i \in \overline{1, n-1}$;
  - (iii) $\mathcal{G}_s := \left\{g \in \mathcal{O}(d) \,\Big|\, g_{|F} \text{ simetrie a lui } \mathcal{L}\right\}$ (grup); $g \in \mathcal{G}_s \Longleftrightarrow g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ transformare afină, izometrie şi $g_{|F}$ simetrie a lui $\mathcal{L}$.

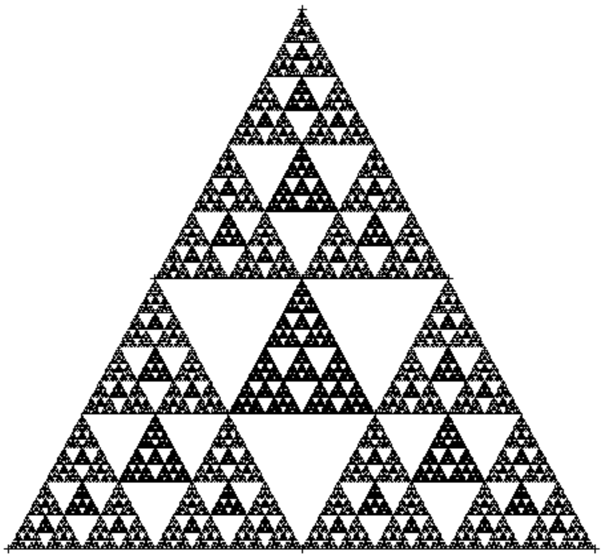

FIGURA 2.8. Triunghiul lui Sierpinski cu triunghi "adăugat"

$\mathcal{L} := \left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ ca mai sus se numeşte *S.A.P.C.F. conexă tare simetrică (pe scurt structură autosimilară tare simetrică - S.A.T.S.)* $\Longleftrightarrow$

- (T.S.1) $\Big(\forall\, x, y \in V_0,\, x \neq y\Big)\Big($există un $0-$ drum strict între x şi $y\Big)$;
- (T.S.2) $\Big(\forall\, x, y, z \in V_0,\, |x-y| = |x-z|\Big)\Big(\exists\, g \in \mathcal{G}_s\Big)\Big(g(x) = x,\, g(y) = z\Big)$;
- (T.S.3) $\Big(\forall\, i = 0, 1, \ldots, m_*-2\Big)\Big(\exists\, x, y, z \in V_0\Big)\Big(|x-y| = l_i,\, |x-z| = l_{i+1},\, (g_{yz})_{|F}$ simetrie a lui $\mathcal{L}\Big)$;
- (T.S.4) $\Big(\forall\, x, y \in V_0,\, x \neq y\Big)\Big((g_{yz})_{|F}$ simetrie a lui $\mathcal{L}\Big)$.

OBSERVAŢIA 2.6.9. Pentru $\mathcal{L} := \left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ S.A.T.S. şi $V_0 = \{p_1, \ldots, p_M\}$, rezultă uşor din (T.S.4) pentru $g_{p_i p_j}$ şi $\sum\limits_{i=1}^{M} p_i = 0$ că $|p_1| = \ldots |p_M|$.

Se poate demonstra uşor

PROPOZIŢIA 2.6.10. *$\mathcal{L} := \left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ F.C.A. $\Longrightarrow$ $\mathcal{L}$ S.A.T.S.*

Într-adevăr, din 2.6.5 $\mathcal{L}$ S.A.P.C.F. conexă. (T.S.1) rezultă imediat dacă se ţine cont de posibilităţile pe care le poate lua V_0 (observaţia 2.3.5-d)) (T.S.3) este evidentă din definiţia l_i-urilor. (T.S.2) rezultă din propoziţia 2.6.6-c) pentru $x = x'$ şi $y' = z$. Din (F.C.A.2) rezultă uşor (T.S.4).

În final se pot deduce incluziunile

$$(\text{F.C.A.}) \subsetneqq (\text{S.A.T.S.}) \subsetneqq (\text{S.A.P.C.F.conex}).$$

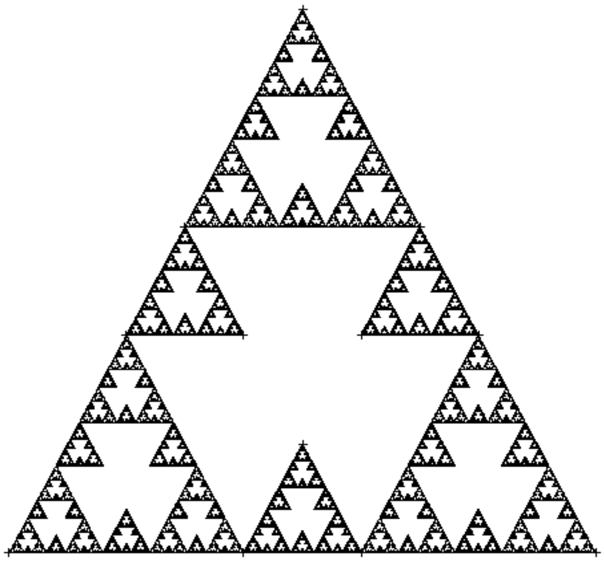

FIGURA 2.9. Triunghiul lui Sierpinski "afin" (I)

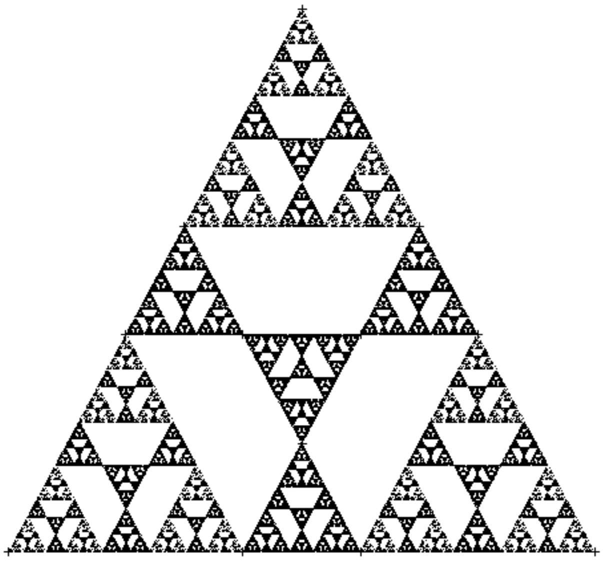

FIGURA 2.10. Triunghiul lui Sierpinski "afin" (II)

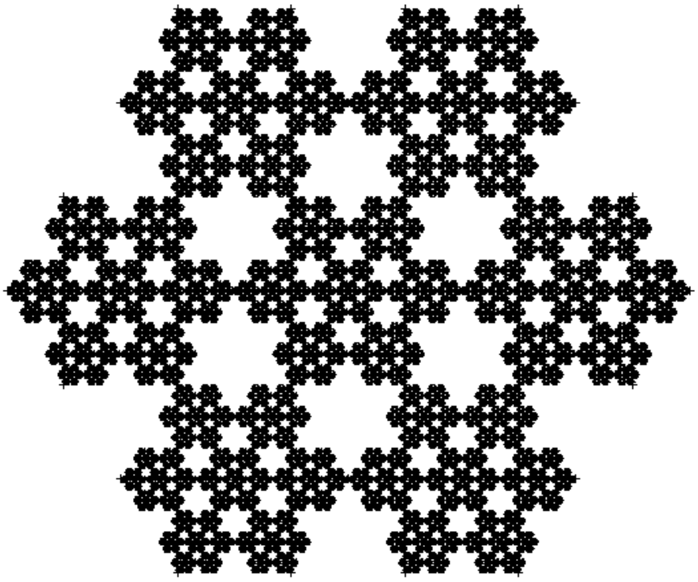

Figura 2.11. "Fulgul" lui Lindstrom

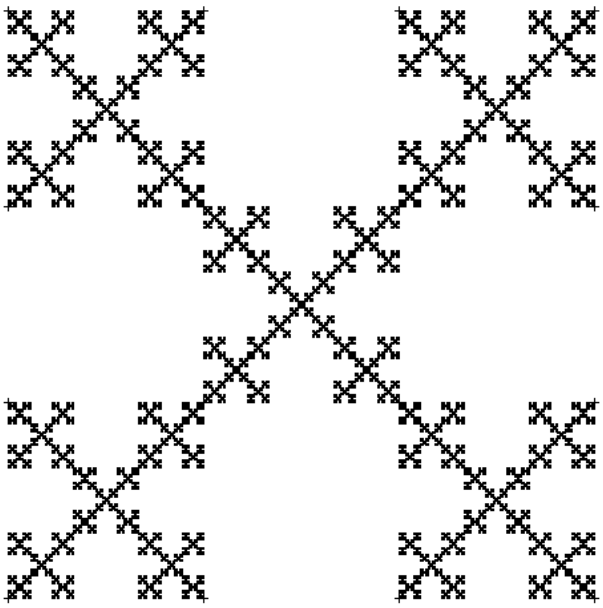

Figura 2.12. "Fulgul" lui Vicsek

CAPITOLUL 3

Procese de difuzie şi forme Dirichlet

Teoria proceselor stocastice în general şi a proceselor Markov în special constituie un domeniu al matematicii extrem de complex, dificil şi numai în ceea ce priveşte partea de fundament. Deoarece în capitolele ce urmează, formelor Dirichlet construite pe fractali li se vor ataşa procese Hunt corespunzătoare (ce se vor dovedi a fi chiar procese de difuzie) este necesară o prezentare atentă a lor; aceasta şi pentru a înţelege forţa deosebită a teoriei formelor Dirichlet. Pentru a remarca profunzimea rezultatelor de teoria potenţialului asociată formelor Dirichlet, este necesară "translatarea" lor în limbaj de procese. Spre deosebire de maniera de construcţie directă, probabilistă a proceselor pe fractali (R. Bass, M. Barlow, T. Lindstrom), foarte laborioasă, construcţia proceselor prin intermediul formelor Dirichlet pe fractali (datorată lui Fukushima, Kusuoka, Kigami, Kumagai, etc.) păstrează totuşi un caracter dacă nu elementar, măcar elegant.

Acest capitol încearcă să realizeze o sinteză, în concordanţă cu [**22**] *şi* [**9**] *a prezentării dualităţii "forme-procese"*. În ceea ce priveşte procesele însă, există riscul de a face ori o expoziţie prea lungă - definiţiile din [**9**], plus trimiterile la tratatul [**15**] fiind de notorietate în acest sens - ori de a prezenta direct conceptele de proces Hunt, proces standard, mişcare browniană (necesare în capitolele următoare) fără a "simţi" aproape nimic din profunzimea şi complexitatea lor. S-a încercat o soluţie mixtă, de compromis.

În debutul capitolului se prezintă conceptele auxiliare necesare pentru a păstra un caracter cât mai autoconţinut (elemente de teoria capacităţii, semigrupuri de nuclee şi operatori, familii proiective, procese cu mulţimea traiectoriilor predefinită, procese Markov "clasice" etc.). Astfel se poate realiza o bună înţelegere a definiţiei procesului Markov (omogen) (cu operatori de translaţie).

Din punct de vedere istoric, proprietăţile fundamentale ale "procesului Feller" (aşa cum pot fi găsite în [**48**]-XIII) au fost considerate ca axiome în definiţia "procesului Hunt" (a se vedea tot [**48**]-XIV); aici noţiunea de proces Hunt este considerată în maniera din [**9**], avînd exact aceleaşi "axiome". Aceste axiome sunt cumva cerinţe minimale pentru un proces dat.

În abordarea [**48**]-XIII,XIV dedicată "proceselor Feller şi Hunt" s-a avut în vedere tot timpul nu "un singur proces", ci "o familie de procese", toate construite pornind de la un semigrup dat, astfel ajungîndu-se în mod firesc la noţiunile de *realizare a unui semigrup* (Feller sau borelian) şi *realizare a operatorilor de translaţie* ([**48**]-XII).

Conceptele de proces Hunt şi proces standard se vor introduce în continuare, urmînd monografia [**9**], unde sunt date direct, fără a se puncta independenţa "axiomelor" din definiţie (căreia îi este dedicată un întreg capitol în [**48**], cap.XIV), dîndu-se apoi ca exemplu fundamental de proces standard "realizarea canonică" a unui semigrup Feller.

Practic definiţia din [**9**] a *procesului Markov (omogen)(cu operatori de translaţie)* înglobează conceptele de realizare a unui semigrup şi a operatorilor de translaţie (ca în [**48**]-XII, a se vedea subsecţiunea 3.2.2). Definiţiile *procesului Hunt* şi *procesului standard* (din [**9**]) conţin în plus toate proprietăţile importante pe care le are "procesul Feller" (în accepţiunea [**48**]-XIII) (anume continuitatea la dreapta, continuitatea la dreapta a funcţiilor excesive pe traiectorii, "quasicontinuitatea" la stînga); "axiomele" din aceste definiţii sunt şi independente (proprietaea tare Markov şi existenţa limitelor la stînga rezultînd din celelalte trei, dar acest lucru nu este considerat aici, studiul independenţei axiomelor fiind foarte dificil - a se vedea [**48**]-XIV). În acest fel din teoria martingalelor este nevoie doar de *teorema de convergenţă a martingalelor cu timp discret* şi de *proprietăţile de regularitate ale traiectoriilor unui supermartingal cu timp continuu*, pentru a se arăta că "procesul" Feller (de fapt realizarea canonică a unui semigrup Feller) constituie exemplul fundamental de proces standard.

3.1. Preliminarii

Prima secţiune este dedicată unor concepte şi rezultate de bază pentru teoria generală a proceselor stocastice şi deci şi a celor Markov în special.

3.1.1. Rezultate de teoria capacităţii. Conceptul de capacitate, construcţia unei capacităţi şi teorema lui Choquet sunt instrumente obligatorii în studiul măsurabilităţii "timpilor de intrare", iar împreună cu teoria mulţimilor analitice constituie baza pentru orice fundamentare riguroasă a teoriei generale a proceselor stocastice.

În această secţiune se vor fixa Ω mulţime nevidă şi $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ *pavaj* (adică $\emptyset \in \mathcal{F}$) "închis" la reuniuni şi intersecţii finite.

DEFINIŢIA 3.1.1. (Definiţia capacităţii "Choquet")
$I : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte $\mathcal{F}$-*capacitate*$\Longleftrightarrow$

(1) I *crescătoare*: $E \subset F \subset \Omega \Rightarrow I(E) \leq I(F)$;

(2) I *"continuă pe şiruri crescătoare"*: $\mathcal{P}(\Omega) \supset \{F_n\}_n \nearrow \Rightarrow I(F_n) \nearrow I\left(\bigcup\limits_{n\geq 1} F_n\right)$;

(3) I *"continuă pe şiruri descrescătoare de elemente din* $\mathcal{F}$" (nu neapărat la un element din $\mathcal{F}$):
$\mathcal{P}(\Omega) \supset \{F_n\}_n \searrow \Rightarrow I(F_n) \searrow I\left(\bigcap\limits_{n\geq 1} F_n\right)$.

O mulţime $A \subset \Omega$ se numeşte I-*capacitabilă* $\Longleftrightarrow I(A) = \sup\limits_{\mathcal{F}_\delta \ni B \subset A} I(B)$.

TEOREMA 3.1.2. *(Teorema lui Choquet de capacitabilitate,* [**15**]*)*
Fie $I : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{F}$-capacitate. *Atunci orice mulţime* $A \in a(\mathcal{F})$ *(i.e.* A $\mathcal{F}$*-analitică) este* I*-capacitabilă.*

TEOREMA 3.1.3. *(Teorema de construcţie a unei capacităţi,* [**15**]*)*
Fie $I : \mathcal{F} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ *cu proprietăţile:*

(1) *-* I *crescătoare (*$E \subset F \in \mathcal{F} \Rightarrow I(E) \leq I(F)$*);*

(2) *-* I *"continuă pe şiruri crescătoare de elemente din* $\mathcal{F}$ *la elemente din* $\mathcal{F}$*" (*$\mathcal{F} \supset \{F_n\}_n \searrow F \in \mathcal{F} \Rightarrow I(F_n) \searrow I(F)$*);*

(3) I *"tare subaditivă" (i.e* $A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow I(A \cup B) + I(A \cap B) \leq I(A) + I(B)$*).*

Se pune

$$\begin{aligned} I_\sigma^* : &\quad \mathcal{F}_\sigma \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+,\ I_\sigma^*(A) := \sup_{\mathcal{F} \ni B \subset A} I(B), \\ I^* : &\quad \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+,\ I^*(C) := \inf_{\mathcal{F}_\sigma \ni A \supset C} I_\sigma^*(A). \end{aligned}$$

Atunci $I^*_{\sigma|\mathcal{F}} = I$, $I^*{}_{|\mathcal{F}_\sigma} = I_\sigma^*$ *şi*

(a) *-* I^* *crescătoare (*$E \subset F \subset \Omega \Rightarrow I(E) \leq I(F)$*);*

(b) *-* I *"continuă pe şiruri crescătoare":*

$$\mathcal{P}(\Omega) \supset \{F_n\}_n \nearrow F \Rightarrow I^*(F_n) \nearrow I^*(F); \tag{3.1}$$

(c) I *"numărabil tare subaditivă":*

$$X_n \subset Y_n \subset \Omega,\ \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow I^*\left(\bigcup_{n\geq 1} Y_n\right) + \sum_{n=1}^{\infty} I^*(X_n) \leq I^*\left(\bigcup_{n\geq 1} X_n\right) + \sum_{n=1}^{\infty} I^*(Y_n).$$

(d) I^* *este* $\mathcal{F}$*-capacitate* $\Longleftrightarrow I^*$ *este* "continuă pe şiruri descrescătoare de elemente din $\mathcal{F}$*":*

$$\mathcal{F} \supset \{F_n\}_n \searrow \Rightarrow I(F_n) \searrow I^*\left(\bigcap_{n\geq 1} F_n\right). \tag{3.2}$$

Pentru a putea aplica teorema 3.1.3, este necesar să se verifice (3.1) şi (3.2). Din acest motiv o capacitate se construieşte în mod uzual ori din funcţii de mulţime continue la stînga definite pe mulţimi deschise, ori din funcţii continue la dreapta definite pe mulţimi compacte. Se fixează un spaţiu topologic Hausdorff F şi se va nota cu $\mathcal{G}$ familia mulţimilor deschise ale lui F şi cu $\mathcal{K}$ familia mulţimilor compacte ale lui F.

DEFINIŢIA 3.1.4. Fie I aplicaţie definită pe $\mathcal{G}$, crescătoare. I se numeşte *continuă la stînga* $\Longleftrightarrow$ $\forall U \in \mathcal{G}, \forall a < I(U), \exists K \subset U, K \in \mathcal{K}$ a.î. $I(V) > a, \forall V \in \mathcal{G}, K \subset V$.

TEOREMA 3.1.5. *(*[**15**]*) Fie* I *o funcţie definită pe* $\mathcal{G}$*, pozitivă, crescătoare, continuă la stînga şi tare subaditivă. Atunci* I *satisface (3.1) relativ la pavajul* $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ *şi* I *este capacitate relativ la* $\mathcal{K}$*.*

În anumite situaţii apar în mod natural funcţii de mulţime continue la dreapta, care generează şi ele capacităţi, deci beneficiază de teorema lui Choquet. Această situaţie se va întîlni la măsurabilitatea "timpilor de intrare" în cazul proceselor standard, în secţiunea 3.5, aşa cum apare în [**9**].

DEFINIŢIA 3.1.6. Fie J aplicaţie definită pe $\mathcal{K}$, crescătoare. I se numeşte *continuă la dreapta* $\Longleftrightarrow$ $\forall K \in \mathcal{K}, \forall a > J(K), \exists V \supset K, V \in \mathcal{G}$ a.î. $J(L) < a, \forall L \in \mathcal{K}, L \subset V$.

TEOREMA 3.1.7. *([**15**]) (a) Fie J o funcţie definită pe $\mathcal{K}$, pozitivă, crescătoare, tare subaditivă şi continuă la dreapta. Atunci J satisface (3.1) relativ la pavajul $\mathcal{F} = \mathcal{K}$.*

(b) Pentru orice G deschisă, se defineşte $J^+(G) = \sup\limits_{\mathcal{K}\ni K\subset G} J(K)$, iar pentru $A \subset F$, $J^+(A) = \sup\limits_{\mathcal{G}\ni G\supset A} J(K)$. Atunci $J^+_{\big|\mathcal{K}} = J$, iar $J^+_{\big|\mathcal{G}}$ este o funcţie pe mulţimi deschise care satisface ipotezele din 3.1.5, deci J^+ capacitate relativ la $\mathcal{K}$.

3.1.2. Nuclee. Funcţii de tranziţie şi Semigrupuri.

DEFINIŢIA 3.1.8. ([**48**], pag.5) Dacă $\{P_{s,t}\}_{s,t\in\mathbb{R}_+,s\le t}$ familie de nuclee markoviene pe $(E,\mathcal{E})$ (spaţiu măsurabil), atunci $\{P_{s,t}\}_{s,t\in\mathbb{R}_+,s\le t}$ se numeşte *funcţie de tranziţie pe* $(E,\mathcal{E}) \Longleftrightarrow$

$$P_{s,t}P_{t,u} = P_{s,u},\ \forall\, 0 \le s < t < u.$$

DEFINIŢIA 3.1.9. ([**48**], pag.5) Dacă $\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ familie de nuclee markoviene pe $(E,\mathcal{E})$ (spaţiu măsurabil), atunci $\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ se numeşte *semigrup de tranziţie pe* $(E,\mathcal{E}) \Longleftrightarrow$

$$P_sP_t = P_{s+t},\ \forall\, s,t \ge 0.$$

OBSERVAŢIA 3.1.10. $\{P_{s,t}\}_{s\le t}$ funcţie de tranziţie se numeşte *omogenă* $\Longleftrightarrow P_{s+u,t+u} = P_{s,t}$, pentru orice $s \le t$ şi orice u; în acest caz ea se poate identifica cu un semigrup $\{P_t\}$ prin $P_{s,t} = P_{t-s}$.

DEFINIŢIA 3.1.11. ([**48**]) Fie E spaţiu polonez. Un semigrup submarkovian $\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ de nuclee pe $(E,\mathcal{B}(E))$ se numeşte *semigrup Feller pe* $E \Longleftrightarrow$

$$\Big(P_0 = I \wedge (\forall t\in\mathbb{R}_+)\,(P_t\,(C_0(E)) \subset C_0(E)) \wedge (\forall f\in C_0(E))\,\Big(||P_tf - f|| \xrightarrow[t\to 0]{} 0\Big)\Big).$$

($||\cdot||$ norma uniformă şi $C_0(E)$ spaţiul funcţiilor continue pe E ”nule la ∞”).

OBSERVAŢIA 3.1.12. ([**48**]) Se poate construi dintr-un semigrup Feller pe E (deci submarkovian) un semigrup *markovian* pe $(E',\mathcal{B}(E'))$ ($E' := E\cup\{\delta\}$ compactificatul Alexandrov al lui E şi $\mathcal{B}(E')$ borelienele sale) punînd $P'_t(\delta,A) := \mathbb{I}_A(\delta)$ şi

$$P'_t(x,A) := P_t(x,A\backslash\{\delta\}) + [1 - P_t(x,E)]\cdot\mathbb{I}_A(\delta),\ x\in E,\ A\in\mathcal{B}(E'),$$

iar noul semigrup markovian pe $(E',\mathcal{B}(E'))$ are proprietatea că $P'_t(\delta,\{\delta\}) = 1$, $\forall\, t\in\mathbb{R}_+$, el fiind, evident şi semigrup Feller pe E'.

3.1.3. Concepte fundamentale de teoria generală a proceselor. Pe parcursul acestei subsecţiuni se consideră $(\Omega,\mathcal{F},P)$ spaţiu cu probabilitate.

DEFINIŢIA 3.1.13. (Definiţia generală a proceselor stocastice) Dacă $(E,\mathcal{E})$ spaţiu măsurabil, $\mathbb{T}$ este o mulţime ordonată arbitrară, atunci o familie de variabile aleatoare $\{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$, unde $X_t\in\mathcal{F}/\mathcal{E}$ se numeşte *proces stocastic* cu *spaţiul stărilor* $(E,\mathcal{E})$ şi *mulţimea de timpi* $\mathbb{T}$. Spaţiul $(\Omega,\mathcal{F},P)$ se numeşte *spaţiul mostrelor (”sample space”)*.

OBSERVAŢIA 3.1.14. a) $\{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ poate fi gândit ca o funcţie $X:\mathbb{T}\times\Omega\longrightarrow E$, $X(t,\omega) := X_t(\omega)$, $\forall\,(t,\omega)\in\mathbb{T}\times\Omega$.

b) Pentru $\omega\in\Omega$, aplicaţia $\mathbb{T}\ni t\longrightarrow X_t(\omega)\in E$ se numeşte *traiectoria punctului* ω *în cadrul procesului.*

DEFINIŢIA 3.1.15. (Definiţia procesului măsurabil) Dacă $\mathcal{T}$ σ-algebră pe $\mathbb{T}$, atunci procesul stocastic $X\equiv\{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ definit pe $(\Omega,\mathcal{F},P)$, cu spaţiul stărilor $(E,\mathcal{E})$ se numeşte *măsurabil* dacă $X\in\mathcal{T}\otimes\mathcal{F}/\mathcal{E}$.

OBSERVAŢIA 3.1.16. Dacă $\mathbb{T}\subset\overline{\mathbb{Z}}$ şi $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathbb{T})$, atunci orice proces stocastic $X\equiv\{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ definit pe $(\Omega,\mathcal{F},P)$, cu spaţiul stărilor $(E,\mathcal{E})$ este trivial măsurabil.

DEFINIŢIA 3.1.17. (Definiţia procesului adaptat şi progresiv măsurabil)

a) Un proces stocastic $X\equiv\{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ definit pe $(\Omega,\mathcal{F},P)$, cu spaţiul stărilor $(E,\mathcal{E})$ se numeşte *adaptat la filtrarea* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{T}} \Longleftrightarrow X_t\in\mathcal{F}_t/\mathcal{E}$, $\forall\, t\in\mathbb{T}$ (mulţimea de timp $\mathbb{T}$ poate fi arbitrară);

b) Un proces stocastic $X\equiv\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ definit pe $(\Omega,\mathcal{F},P)$, cu spaţiul stărilor $(E,\mathcal{E})$ se numeşte *progresiv măsurabil relativ la filtrarea* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+} \Longleftrightarrow$
$X_{\big|[0,t]\times\Omega}\in(\mathcal{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t)/\mathcal{E}$, $\forall\, t\in\mathbb{R}^*_+$.

DEFINIŢIA 3.1.18. (Definiţia procesului continuu la dreapta) Fie E spaţiu metric. Un proces stocastic $X\equiv\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ definit pe $(\Omega,\mathcal{F},P)$, cu spaţiul stărilor $(E,\mathcal{B}(E))$ se numeşte *continuu la dreapta* $\Longleftrightarrow$ a.s. traiectoriile sale $X(\,\cdot\,,\omega):\mathbb{R}_+\to E$, sunt funcţii continue la dreapta.

Cel mai des se consideră $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ şi $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ sau $\mathbb{T}\subset\mathbb{R}_+$ numărabilă şi σ-algebra tuturor părţilor (procese *cu timp discret*), sau $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ şi $\mathcal{T} = \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, şi procese stocastice $\{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ definite pe $(\Omega,\mathcal{F},P)$, cu spaţiul stărilor $(E,\mathcal{E})$(spaţiu măsurabil arbitrar, în unele cazuri $(\overline{\mathbb{R}},\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$) (procese *cu timp continuu*).

Legătura între continuitatea la dreapta, adaptabilitate, măsurabilitate şi progresiv măsurabilitate este dată de:

PROPOZIŢIA 3.1.19. *([**15**])*
a) Orice proces stocastic $X \equiv \{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ progresiv măsurabil (relativ la filtrarea $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$) este măsurabil;
b) Orice proces stocastic $X \equiv \{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ progresiv măsurabil (relativ la filtrarea $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$) este adaptat (la filtrarea $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$);
c) Orice proces stocastic $X \equiv \{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ continuu la dreapta este măsurabil;
d) Orice proces stocastic $X \equiv \{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ continuu la dreapta şi adaptat (la filtrarea $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$) este progresiv măsurabil (relativ la filtrarea $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$).

3.1.4. "Opţionale". Pentru $(\Omega, \mathcal{F})$ spaţiu măsurabil şi $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ filtrare, cu $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$, sau $\mathbb{N}$, sau $\mathbb{T} \subset \mathbb{N}$ finită se dă

DEFINIŢIA 3.1.20. $T : \Omega \longrightarrow \mathbb{T}$ se numeşte $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$-*opţională* $\Longleftrightarrow \{T \le t\} \in \mathcal{F}_t, \forall\, t \in \mathbb{T}$.

Cazul considerat frecvent este $\mathbb{T} = [0, \infty)$. Se deduce uşor

$$T\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}\text{-opţională} \Longleftrightarrow \{T \le t\} \in \mathcal{F}_t,\ \forall\, t \ge 0 \Longleftrightarrow \{T \le t\} \in \mathcal{F}_t,\ \forall\, t \ge 0.$$

Se introduc două filtrări suplimentare foarte importante:

$$\mathcal{F}_{t-} := \sigma\left(\bigcup_{s<t} \mathcal{F}_s\right),\ 0 < t < \infty,\ \mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s,\ 0 \le t < \infty.$$

Se pune şi $\mathcal{F}_{0-} = \mathcal{F}_0$, $\mathcal{F}_{\infty-} = \mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}_{\infty+}$. Evident $\{\mathcal{F}_{t+}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ filtrare continuă la dreapta şi

$$0 \le s < t \le \infty \Longrightarrow \mathcal{F}_{s-} \subset \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_{s+} \subset \mathcal{F}_{t-} \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+}.$$

Despre $\{\mathcal{F}_{t+}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$-opţionale se pot spune următoarele:

- $T\ \{\mathcal{F}_{t+}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$-opţionale $\Longleftrightarrow \{T < t\} \in \mathcal{F}_t, \forall\, t \in [0, \infty) \Longleftrightarrow \{T < t\} \in \mathcal{F}_{t-}, \forall\, t \in [0, \infty)$.
- $T\ \{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$-opţională $\Longrightarrow T\ \{\mathcal{F}_{t+}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$-opţională, reciproca nefiind adevărată.

Următoarele două σ-algebre sunt importante în studiul opţionalelor:

DEFINIŢIA 3.1.21. Pentru $T\ \{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$-opţională, se defineşte

$$\mathcal{F}_T := \left\{\Lambda \in \mathcal{F} \,\middle|\, \Lambda \cap \{T \le t\} \in \mathcal{F}_t,\ \forall\, t \in \mathbb{R}_+\right\} \subset \mathcal{F},$$

iar pentru $T\ \{\mathcal{F}_{t+}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$-opţională, se defineşte

$$\mathcal{F}_{T+} := \left\{\Lambda \in \mathcal{F} \,\middle|\, \Lambda \cap \{T \le t\} \in \mathcal{F}_{t+},\ \forall\, t \ge 0\right\} = \left\{\Lambda \in \mathcal{F} \,\middle|\, \Lambda \cap \{T < t\} \in \mathcal{F}_t,\ \forall\, t \ge 0\right\}.$$

$\mathcal{F}_T$ şi $\mathcal{F}_{T+}$ sunt σ-algebre. Dacă $\mathcal{F}_t$ conţine informaţia dintr-un proces fizic pînă la un moment t absolut, $\mathcal{F}_T$ conţine informaţia dintr-un proces fizic pînă la momentul T aleator.

Sunt binecunoscute numeroase proprietăţi fundamentale ale "opţionalelor" - cu privire la infimumul, supremumul a două opţionale, limita unui şir de opţionale - (pentru detalii a se vedea, de exemplu [**15**], sau [**9**])

DEFINIŢIA 3.1.22. Se consideră $T : \Omega \longrightarrow [0, \infty]$ o $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$-opţională, şi un proces stocastic adaptat $\big(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}, \{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}, (E, \mathcal{E})\big)$. Atunci se defineşte $X_T : \Omega \longrightarrow [0, \infty]$, $X_T(\omega) := X_{T(\omega)}(\omega)$, pentru $\omega \in \{T < \infty\}$ şi $X_T(\omega) := \infty$, pentru $\omega \in \{T = \infty\}$.

Se poate deduce atunci

PROPOZIŢIA 3.1.23. *([**47**], pag.70)* $\big(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}, \{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}, (E, \mathcal{E})\big)$ *proces stocastic progresiv măsurabil relativ la* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *şi* $T : \Omega \longrightarrow [0, \infty]$ $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$*-opţională* $\Longrightarrow X_T \in \mathcal{F}_T/\mathcal{E}$.

Practic conceptul de proces progresiv măsurabil se justifică şi numai prin prisma acestui rezultat. *Nu este nevoie de probabilitatea P nici în definiţia lui X_T, nici în propoziţia precedentă.*

3.1.5. Sisteme proiective.

DEFINIŢIA 3.1.24. ([**5**], pag.300) Fie $(E, \mathcal{E})$ spaţiu măsurabil, I nevidă şi pentru $J \subset I$, fie $\mathcal{E}^J := \otimes_{i\in J}\mathcal{E}_i$, cu $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}$, σ-algebra produs pe E^J. Fie $\mathcal{P}_f(I)$ familia părţilor finite ale lui I. Familia de probabilităţi $(P_J)_{J\in\mathcal{P}_f(I)}$ pe spaţiile $(E^J, \mathcal{E}^J)$ se numeşte *sistem proiectiv de măsuri de probabilitate pe* $(E, \mathcal{E}) \Longleftrightarrow P_J = P_H \circ pr_J^H, \forall\, J \subset H \in \mathcal{P}_f(I)$, unde $pr_J^H : E^H \longrightarrow E^J$ este "proiecţia" de pe E^H pe E^J.

PROPOZIŢIA 3.1.25. *([**5**], pag.299-300) Fie $I \neq \emptyset$ mulţime arbitrară. Dacă $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{X_t\}_{t\in I})$ este un proces stocastic cu spaţiul stărilor $(E, \mathcal{E})$ (spaţiu măsurabil arbitrar), familia distribuţiilor finit dimensionale ale acestuia ($\{P_J\}_{J\in\mathcal{P}_f(I)}$, $P_J := P \circ X_J^{-1}$, $X_J := \bigotimes_{t\in J} X_t$, $J \subset I$ finită) este un sistem proiectiv de măsuri de probabilitate pe $(E, \mathcal{E})$.*

OBSERVAŢIA 3.1.26. 1. Se pune problema dacă reciproca este adevărată: *Dacă* $\{P_J\}_{J\in\mathcal{P}_f(I)}$ *este un sistem proiectiv de măsuri de probabilitate pe* $(E,\mathcal{E})$*, atunci există* $(\Omega,\mathcal{F},P,\{X_t\}_{t\in I})$ *un proces stocastic cu spaţiul stărilor* $(E,\mathcal{E})$*, cu familia distribuţiilor finit dimensionale ale acestuia exact* $\{P_J\}_{J\in\mathcal{P}_f(I)}$*?*

Răspunsul este da ([**5**], pag.303) dacă E este spaţiu polonez, $\mathcal{E} := \mathcal{B}(E)$ (borelienele lui E), aplicând teorema Kolmogorov-Daniell, P fiind unica limită proiectivă a sistemului proiectiv, definită pe spaţiul produs $\left(E^I,\mathcal{B}(E)^I\right) =: (\Omega,\mathcal{F})$ şi $\{X_t\}_{t\in I}$ "proiecţiile" ($X_t := pr_t : E^I \longrightarrow E$, $pr_t\left((x_i)_{i\in I}\right) = x_t$). Acest proces se numeşte *procesul canonic asociat lui* $\{P_J\}_{J\in\mathcal{P}_f(I)}$. Reciproca nu funcţionează neapărat dacă E nu este spaţiu polonez (a se vedea [**5**], pg.304).

Există o procedură canonică de generare a unui sistem proiectiv dintr-un semigrup markovian de nuclee (pentru $I=\mathbb{R}_+$):

PROPOZIŢIA 3.1.27. *(*[**5**]*, pag.314-315) Dacă* $\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *semigrup markovian de nuclee pe un spaţiu măsurabil* $(E,\mathcal{E})$*, şi* μ *este o altă măsură de probabilitate pe* $(E,\mathcal{E})$*, atunci*

$$\begin{aligned} P_J(B) \;\; &:= \int_E \mu(dx_0)\int_E P_{t_1}(x_0,dx_1)\int_E P_{t_2-t_1}(x_1,dx_2)\ldots \\ &\int_E P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},dx_n)1_B(x_1,x_2,\ldots,x_n), \end{aligned}$$

$J\in\mathcal{P}_f(\mathbb{R}_+)$, $J=\{t_1,t_2,\ldots,t_n\}$, $t_1<t_2<\ldots<t_n$ *este un sistem proiectiv de măsuri de probabilitate pe* $(E,\mathcal{E})$*. El se numeşte sistemul proiectiv asociat canonic lui* $\{P_t\}_t$ *şi* μ*.*

OBSERVAŢIA 3.1.28. Se poate generaliza şi pentru funcţie de tranziţie în loc de semigrup.

3.1.6. Procese cu mulţimea traiectoriilor predefinită.

DEFINIŢIA 3.1.29. ([**5**], pag.327-328) $\widetilde{\Omega}\subset E^{\mathbb{R}_+}$ se numşte *esenţială relativ la familia proiectivă* $\{P_J\}_{J\in\mathcal{P}_f(\mathbb{R}_+)}$ de probabilităţi pe un spaţiu măsuarabil $(E,\mathcal{E})$ ($\mathcal{P}_f(\mathbb{R}_+)$ familia părţilor finite ale lui $\mathbb{R}_+$) $\Longleftrightarrow$ există $\left(\Omega,\mathcal{A},P,\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}\right)$ proces stocastic cu spaţiul stărilor $(E,\mathcal{E})$, avînd familia distribuţiilor finit dimensionale exact $\{P_J\}_{J\in\mathcal{P}_f(\mathbb{R}_+)}$ şi mulţimea traiectoriilor exact $\widetilde{\Omega}$ (adică $X_{\mathbb{R}_+}(\Omega)=\widetilde{\Omega}$, $X_{\mathbb{R}_+} : E\longrightarrow E^{\mathbb{R}_+}$, $X_{\mathbb{R}_+} := \bigotimes\limits_{t\in\mathbb{R}_+} X_t$); cu alte cuvinte $\widetilde{\Omega}\subset E^{\mathbb{R}_+}$ este *esenţială relativ la* $\{P_J\}_{J\in\mathcal{P}_f(\mathbb{R}_+)}$ $\Longleftrightarrow$ există un proces stocastic echivalent cu procesul canonic asociat lui $\{P_J\}_{J\in\mathcal{P}_f(\mathbb{R}_+)}$, dar avînd mulţimea traiectoriilor $\widetilde{\Omega}$.

Rezultatul fundamental privind mulţimile esenţiale, des utilizat, este:

TEOREMA 3.1.30. *(*[**5**]*, pag.328) Fie* E *spaţiu polonez. Pentru* $\{P_J\}_{J\in\mathcal{P}_f(\mathbb{R}_+)}$ *sistem proiectiv de probabilităţi pe* $(E,\mathcal{B}(E))$*, se notează cu* $P_{\mathbb{R}_+}$ *limita sa proiectivă (dată de 3.1.26) şi fie* $\widetilde{\Omega}\subset E^{\mathbb{R}_+}$*. Atunci*

$$\widetilde{\Omega} \text{ esenţială relativ la } \{P_J\}_{J\in\mathcal{P}_f(\mathbb{R}_+)} \Longleftrightarrow (P_{\mathbb{R}_+})^*(\widetilde{\Omega})=1.$$

($(P_{\mathbb{R}_+})^*$ *măsura exterioară Caratheodory asociată lui* $P_{\mathbb{R}_+}$*).*

Procesul din definiţia 3.1.29 se mai numeşte $\widetilde{\Omega}$*-procesul canonic determinat de* $\{P_J\}_{J\in\mathcal{P}_f(\mathbb{R}_+)}$.

3.2. Procese Markov "clasice"

Se urmăreşte succesiunea definiţiilor şi conceptelor, aşa cum este în [**48**]-XII.

3.2.1. Definiţii, caracterizări echivalente. Se consideră $(\Omega,\mathcal{F},P)$ spaţiu cu probabilitate, $(E,\mathcal{E})$ alt spaţiu măsurabil, I mulţime "de timpi" care în cea mai mare parte a timpului este $\mathbb{R}_+$, $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in I}$ filtrare pe $(\Omega,\mathcal{F},P)$ şi $\{X_t\}_{t\in I}$ proces stocastic definit pe $(\Omega,\mathcal{F},P)$ cu spaţiul stărilor $(E,\mathcal{E})$, adaptat la $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in I}$.

DEFINIŢIA 3.2.1. ([**48**], pag.1) $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ se numeşte *proces Markov relativ la* $(\Omega,\mathcal{F},P,\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+})$ *cu spaţiul stărilor* $(E,\mathcal{E})$ *(pe scurt* $(\Omega,\mathcal{F},P,\{X_t\}_t,\{\mathcal{F}_t\}_t,(E,\mathcal{E}))$ *proces Markov)* $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}_t$ şi $\sigma(X_s|s\ge t)$ independente relativ la $\sigma(X_t)$, pentru orice $t\ge 0$.

OBSERVAŢIA 3.2.2. ([**48**], pag.2-4) Utilizînd teoreme de clasă monotonă, se pot deduce simplu următoarele caracterizări echivalente (prezente în diverse surse) ale definiţiei de mai sus:

$$\begin{aligned} &(\Omega,\mathcal{F},P,\{X_t\}_t,\{\mathcal{F}_t\}_t,(E,\mathcal{E})) \text{ proces Markov } \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\forall\, t\ge 0)\,(\forall\, Y\in\sigma(X_s|s\ge t))\,(E[Y|\mathcal{F}_t]=E[Y|X_t] \text{ a.s.}) \\ &\Leftrightarrow (\forall\, u\ge t\ge 0)\,(\forall\, f\in b\mathcal{E})\,(E[f\circ X_u|\mathcal{F}_t]=E[f\circ X_u|X_t] \text{ a.s.}) \\ &\Leftrightarrow (\forall\, u\ge t\ge 0)\,(\forall\, A\in\mathcal{E})\,(P[X_u\in A|\mathcal{F}_t]=P[X_u\in A|X_t] \text{ a.s.})\,. \end{aligned}$$

DEFINIŢIA 3.2.3. ([**48**], pag.1) $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ se numeşte *proces Markov relativ la* $(\Omega,\mathcal{F},P)$ *cu spaţiul stărilor* $(E,\mathcal{E})$ *(pe scurt* $(\Omega,\mathcal{F},P,\{X_t\}_t,(E,\mathcal{E}))$*) proces Markov* $\Leftrightarrow$ $(\Omega,\mathcal{F},P,\{X_t\}_t,\{\sigma(X_s|s\le t)\}_t,(E,\mathcal{E}))$ proces Markov.

Observaţia 3.2.4. ([**48**], pag.2-4) Analog, utilizînd teoreme de clasă monotonă şi proprietatea "de universalitate" Doob, se pot deduce următoarele caracterizări echivalente:

$$\begin{aligned}
&(\Omega,\mathcal{F},P,\{X_t\}_t,(E,\mathcal{E}))\ \text{ proces Markov } \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow (\forall\, t\geq 0)\,(\forall\, Y\in\sigma(X_s|s\geq t))\,(E[Y|X_s,s\leq t]=E[Y|X_t]\ \text{a.s.})\\
&\Leftrightarrow (\forall\, u\geq t\geq 0)\,(\forall\, f\in b\mathcal{E})\,(E[f\circ X_u|X_s,s\leq t]=E[f\circ X_u|X_t]\ \text{a.s.})\\
&\Leftrightarrow (\forall\, u\geq t\geq 0)\,(\forall\, A\in\mathcal{E})\,(P[X_u\in A|X_s,s\leq t]=P[X_u\in A|X_t]\ \text{a.s.})\\
&\Leftrightarrow (n\in\mathbb{N}^*)\,(\forall\, 0\leq s_1\leq s_2\leq\ldots\leq s_n\leq t\leq u)\,(\forall\, f\in b\mathcal{E})\\
&\qquad (E[f\circ X_u|X_{s_1},X_{s_2}\ldots X_{s_n},X_t]=E[f\circ X_u|X_t]\ \text{a.s.})
\end{aligned}$$

Observaţia 3.2.5. (Interpretare probabilistă) Ca interpretare probabilistă, se poate spune, mai superficial, că $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ proces Markov $\Longleftrightarrow$ "viitorul" $(\sigma(X_s|s\geq t))$ depinde de "trecut" ($\mathcal{F}_t$ sau $\sigma(X_s|s\leq t)$) prin "prezent" $(\sigma(X_t))$.

Dacă în plus, se consideră şi $\{P_{s,t}\}_{s,t\in\mathbb{R}_+,s\leq t}$ funcţie de tranziţie pe $(E,\mathcal{E})$, se poate da şi următoarea definiţie:

Definiţia 3.2.6. ([**48**], pag.5) $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ se numeşte *proces Markov relativ la* $(\Omega,\mathcal{F},P,\{\mathcal{F}_t\}_t)$ *cu spaţiul stărilor* $(E,\mathcal{E})$ *şi cu funcţia de tranziţie* $\{P_{s,t}\}_{s\leq t}$ *(pe scurt*
$(\Omega,\mathcal{F},P,\{X_t\}_t,\{\mathcal{F}_t\}_t,\{P_{s,t}\}_{s\leq t},(E,\mathcal{E}))$ *proces Markov cu funcţie de tranziţie)*
$\Leftrightarrow$ $(\forall\, u\geq t\geq 0)\,(\forall\, f\in b\mathcal{E})\,(E[f\circ X_u|\mathcal{F}_t]=P_{t,u}f\circ X_t$ a.s.).

Observaţia 3.2.7. 1.([**5**], pag.358-359; [**9**], pag.15,16,20; [**57**], pag.81-83) Au loc caracterizările

$$\begin{aligned}
&(\Omega,\mathcal{F},P,\{X_t\}_t,\{\mathcal{F}_t\}_t,\{P_{s,t}\}_{s\leq t},(E,\mathcal{E}))\ \text{ pr. Markov cu funcţie de tranziţie } \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow (\forall\, u\geq t\geq 0)\,(\forall\, f\in b\mathcal{E})\,(E[f\circ X_u|\mathcal{F}_t]=P_{t,u}f\circ X_t\ \text{a.s.})\\
&\Leftrightarrow (\forall\, u\geq t\geq 0)\,(\forall\, A\in\mathcal{E})\,(P[X_u\in A|\mathcal{F}_t]=P_{t,u}\mathbb{I}_A\circ X_t=P_{t,u}(X_t,A)\ \text{a.s.})\\
&\Rightarrow (n\in\mathbb{N}^*)\,(\forall\, 0=t_0\leq t_1\leq\ldots\leq t_n)\,(\forall\, A_0,A_1,\ldots,A_n\in\mathcal{E})\\
&\quad\Bigg(P(X_0\in A_0,X_{t_1}\in A_1,\ldots,X_{t_n}\in A_n)=\\
&\qquad =\int_{A_0}\nu(dx_0)\int_{A_1}P_{0,t_1}(x_0,dx_1)\int_{A_2}P_{t_1,t_2}(x_1,dx_2)\ldots\int_{A_n}P_{t_{n-1},t_n}(x_{n-1},dx_n)\Bigg)\\
&\Leftrightarrow (n\in\mathbb{N}^*)\,(\forall\, 0=t_0\leq t_1\leq\ldots\leq t_n)\,(\forall\, f_0,f_1,\ldots,f_n\in b\mathcal{E})\\
&\quad\Bigg(E[f_0\circ X_{t_0}\cdot f_1\circ X_{t_1}\cdot\ldots\cdot f_n\circ X_{t_n}]=\\
&\qquad =\int_E\nu(dx_0)\int_E P_{0,t_1}(x_0,dx_1)\int_E P_{t_1,t_2}(x_1,dx_2)\ldots\\
&\qquad\qquad \ldots\int_E P_{t_{n-1},t_n}(x_{n-1},dx_n)f_0(x_0)f_1(x_1)\cdot\ldots\cdot f_n(x_n)\Bigg)\\
&\Leftrightarrow (n\in\mathbb{N}^*)\,(\forall\, 0=t_0\leq t_1\leq\ldots\leq t_n)\,\big(\forall\, f\in b\mathcal{E}^{n+1}\big)\\
&\quad\Bigg(E[f(X_{t_0},X_{t_1},\ldots,X_{t_n})]=\\
&\qquad =\int_E\nu(dx_0)\int_E P_{0,t_1}(x_0,dx_1)\int_E P_{t_1,t_2}(x_1,dx_2)\ldots\\
&\qquad\qquad \ldots\int_E P_{t_{n-1},t_n}(x_{n-1},dx_n)f(x_0,x_1,\ldots,x_n)\Bigg),
\end{aligned}$$

unde $\nu=P\circ X_0^{-1}$. De remarcat că nu peste tot este echivalenţă. Unde are loc implicaţia directă, cea inversă nu este în general adevărată. Dacă procesul este Markov relativ la filtrarea canonică, cu funcţie de tranziţie, atunci avem echivalenţă peste tot. Evident $(\Omega,\mathcal{F},P,\{X_t\}_t,\{\mathcal{F}_t\}_t,\{P_{s,t}\}_{s\leq t},(E,\mathcal{E}))$ proces Markov cu funcţie de tranziţie $\Rightarrow$ $(\Omega,\mathcal{F},P,\{X_t\}_t,\{\mathcal{F}_t\}_t,(E,\mathcal{E}))$ proces Markov, reciproca nefiind adevărată, existînd procese Markov în sensul primei definiţii, dar fără funcţie de tranziţie.

Definiţia 3.2.8. ([**48**], pag.5) $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ se numeşte *proces Markov relativ la* $(\Omega,\mathcal{F},P)$ *cu spaţiul stărilor* $(E,\mathcal{E})$ *şi cu funcţia de tranziţie* $\{P_{s,t}\}_{s\leq t}$ *(pe scurt* $(\Omega,\mathcal{F},P,\{X_t\}_t,\{P_{s,t}\}_{s\leq t},(E,\mathcal{E}))$*) proces Markov cu funcţie de tranziţie* $\Leftrightarrow$ $(\Omega,\mathcal{F},P,\{X_t\}_t,|\{\sigma(X_s|s\leq t)\}_t,\{P_{s,t}\}_{s\leq t},(E,\mathcal{E}))$ proces Markov cu funcţie de tranziţie, adică $(\forall\, u\geq t\geq 0)\,(\forall\, f\in b\mathcal{E})\,(E[f\circ X_u|X_s,s\leq t]=P_{t,u}f\circ X_t$ a.s.).

Observaţia anterioară se păstrează în totalitate cu diferenţa că pe post de $\{\mathcal{F}_t\}_t$ *se ia filtrarea canonică şi au loc echivalenţe peste tot* (a se vedea [**5**], pag.358-359; [**9**], pag.15,16,20; [**57**], pag.81-83).

Rezultatele anterioare au grad mare de generalitate, $(E,\mathcal{E})$ fiind *spaţiu măsurabil arbitrar*, iar $\{P_{s,t}\}_{s\leq t}$ *funcţie de tranziţie nu neapărat omogenă*; în continuare, se presupune că aceasta va fi *omogenă*, adică poate fi identificată cu un semigrup de tranziţie pe $(E,\mathcal{E})$.

3.2.2. Construcţia procesului Markov canonic "brut". Proprietăţi. *În această subsecţiune se vor considera doar semigrupuri de tranziţie* $\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$; astfel, pentru procesele Markov cu funcţie de tranziţie omogenă se va considera semigrupul de tranziţie aferent, aceste procese fiind numite *procese Markov cu semigrup de tranziţie*.

Este suficient să se dispună de un semigrup de tranziţie $\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ pe un spaţiu suficient de bun, pentru a putea construi un proces Markov cu semigrup de tranziţie. Pentru aceasta este nevoie de noţiunea de sistem proiectiv şi rezultatele aferente (subsecţiunea 3.1.5), precum şi de procedura canonică de generare a unui sistem proiectiv dintr-un semigrup markovian de nuclee (pentru $I=\mathbb{R}_+$)(3.1.27). Astfel, 3.1.26 şi 3.1.27 pot fi combinate pentru a produce teorema fundamentală de construcţie a procesului Markov brut:

TEOREMA 3.2.9. *([**5**], pag. 360-361; [**9**], pag.17) Dacă $\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ semigrup markovian de nuclee pe un spaţiu polonez E cu familia borelienelor, şi μ este o altă măsură de probabilitate pe $(E,\mathcal{B}(E))$, atunci există $\left(\Omega,\mathcal{F},P^\mu,\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}\right)$ un proces stocastic cu spaţiul stărilor $(E,\mathcal{B}(E))$, cu familia distribuţiilor finit dimensionale ale acestuia exact sistemul proiectiv asociat cu $\{P_t\}$ şi μ, şi P^μ limita sa proiectivă (unică) ($\Omega:=E^{\mathbb{R}_+}$, $\mathcal{F}:=\mathcal{B}(E)^{\mathbb{R}_+}$, $X_t:=\mathrm{pr}_t$, $t\in I$), adică $P_J=P^\mu\circ X_J^{-1}$, i.e.*

$$P^\mu(X_0\in A_0,X_{t_1}\in A_1,\ldots,X_{t_n}\in A_n)=$$
$$\int_{A_0}\mu(dx_0)\int_{A_1}P_{t_1}(x_0,dx_1)\int_{A_2}P_{t_2-t_1}(x_1,dx_2)\ldots\int_{A_n}P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},dx_n),$$

$J\in\mathcal{P}_f(\mathbb{R}_+)$, $J=\{t_1,t_2,\ldots,t_n\}$, $t_1<t_2<\ldots<t_n$, pentru toţi A_0, A_1,..., $A_n\in\mathcal{B}(E)$. În plus $\left(\Omega,\mathcal{F},P^\mu,\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+},\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+},(E,\mathcal{B}(E))\right)$ este proces Markov cu semigrup de tranziţie şi $\mu=P^\mu\circ X_0^{-1}$, şi se numeşte procesul canonic brut asociat lui $\{P_t\}$ şi μ.

OBSERVAŢIA 3.2.10. 1. Dacă $(\Omega,\mathcal{F},P,\{X_t\}_t,(E,\mathcal{E}))$ proces Markov, el este cu semigrup de tranziţie $\Leftrightarrow$ familia distribuţiilor sale finit dimensionale este sistemul proiectiv asociat canonic unui $\{P_t\}_t$ şi lui $\nu=P\circ X_0^{-1}$.

2. Se poate generaliza şi pentru cazul în care avem funcţie de tranziţie, nu neapărat semigrup(utilizînd observaţia de după 3.1.27).

Proprietăţile pe care le are acest proces Markov "brut" (mai precis acestor procese Markov, pentru fiecare μ existând cîte o probabilitate P^μ, chair dacă spaţiul stărilor este acelaşi, $\Omega:=E^{\mathbb{R}_+}$, $\mathcal{F}:=\mathcal{B}(E)^{\mathbb{R}_+}$, $X_t:=\mathrm{pr}_t$ fiind şi ele comune), construit via 3.2.9 sunt foarte importante, stînd la baza axiomelor din definiţia *procesului Markov (omogen)(cu operatori de translaţie)* (secţiunea 3.3):

TEOREMA 3.2.11. *([**48**], pag.11-14) Fie $\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ semigrup markovian de nuclee pe un spaţiu polonez E cu familia borelienelor; fie $\Omega=E^{\mathbb{R}_+}$, $\mathcal{F}=\mathcal{B}(E)^{\mathbb{R}_+}$, $X_t=\mathrm{pr}_t$, $t\in I$; fie, pentru fiecare μ probabilitate pe $(E,\mathcal{B}(E))$, procesul canonic asociat lui $\{P_t\}$ şi μ via 3.2.9: $\left(\Omega,\mathcal{F},P^\mu,\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+},\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+},(E,\mathcal{B}(E))\right)$. Atunci:*

(1) $(\forall f\in b\mathcal{F})\,((x\longrightarrow E^x[f])\in b\mathcal{E})$;
(2) $(\forall\mu)\,(\forall f\in b\mathcal{F})\left(E^\mu[f]=\int_E E^x[f]\mu(dx)\right)$;
(3) $(\forall\mu)\,(\forall f\in b\mathcal{F})\,(\forall t\in\mathbb{R}_+)\left(E^\mu[f\circ\theta_t]=E^{\mu P_t}[f]\right)$;
(4) $(\forall\mu)\,(\forall f\in b\mathcal{F})\,(\forall t\in\mathbb{R}_+)\left(E^\mu[f\circ\theta_t|X_s,s\leq t]=E^{X_t}[f]\ P^\mu\ a.s.\right)$,

unde $\theta_t:\mathcal{F}\to\mathcal{F}$ este operatorul de "shift", $\theta_t((x_s)_{s\in\mathbb{R}_+})=(x_s)_{s\geq t}$. Acesta are calitatea că $X_s\circ\theta_t=X_{s+t}$ şi $\theta_t\in\mathcal{F}_{s+t}/\mathcal{F}_s$ (unde $\mathcal{F}_s:=\sigma(X_u|u\leq s)$), $s\in\mathbb{R}_+$ filtrarea canonică).

OBSERVAŢIA 3.2.12. I. Se pot da caracterizări echivalente interesante:

- Utilizînd teoreme de clasă monotonă, se poate demostra uşor că (1) este echivalentă cu faptul că $(\forall A\in\mathcal{F})\,((x\longrightarrow P^x(A))\in b\mathcal{E})$.
- Deasemenea (2) este echivalentă cu
$$(\forall\mu)\,(\forall A\in\mathcal{F})\left(P^\mu(A)=\int_E P^x(A)\mu(dx)\right).$$
- (3) este echivalentă cu $(\forall\mu)\,(\forall t\in\mathbb{R}_+)\left(P^\mu\circ X_t^{-1}=\mu P_t\right)$, de unde $(\forall x\in E)\,(P^x(X_0=x)=1)$.
- Dacă este satisfăcută condiţia (2) din teorema anterioară, atunci se poate da şi pentru (4) o caracterizare echivalentă (utilizînd tot teorema de clasă monotonă, pentru funcţii de tipul $f=\mathbb{I}_{X_u^{-1}(A)}$):

$$(\forall\mu)(\forall A\in\mathcal{E})(\forall t,u\geq0)\,(\forall x\in E)\left(P^x[X_{t+u}\in A|X_s,s\leq t]=P^{X_t}[X_u\in A]\ P^x\ \text{a.s.}\right)$$

II. Merită amintit şi conceptul de "realizare":

(1) Fie $\{P_t\}_t$ semigrup de tranziţie pe $(E,\mathcal{E})$ spaţiu măsurabil. Presupunem că există $(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_t)$ spaţiu măsurarabil cu filtrare, $\{X_t\}_t$ cu $X_t:\Omega\to E$, $X_t\in\mathcal{F}_t/\mathcal{E}$ şi o familie $\{P^\mu\}_\mu$ de probabilităţi pe $(\Omega,\mathcal{F})$ indiciată după μ probabilităţi pe $(E,\mathcal{E})$, astfel încît
$$(\Omega,\mathcal{F},P^\mu,\{X_t\}_t,\{\mathcal{F}_t\}_t,\{P_t\}_t,(E,\mathcal{E}))$$
proces Markov cu funcţie de tranziţie, pentru orice μ şi au loc primele două "axiome" din 3.2.11. Atunci P.A.Meyer spune ([**48**], pag.14) că $(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_t,\{X_t\}_t,\{P^\mu\}_\mu)$ este o *realizare a semigrupului* $\{P_t\}_t$.

(2) Dacă există Ω, $\mathcal{F}$, $\{\mathcal{F}_t\}_t$, $\{X_t\}_t$, $\{P^\mu\}_\mu$ ca mai sus şi în plus $\theta_t:\mathcal{F}\to\mathcal{F}$ cu $X_s\circ\theta_t=X_{s+t}$, pentru orice s, t, şi sunt îndeplinite ultimele două "axiome" din 3.2.11, atunci P.A.Meyer spune ([**48**], pag.15) că $(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_t,\{X_t\}_t,\{P^\mu\}_\mu,\theta_t)$ este o *realizare a lui* θ_t.

Aceste două concepte nu se mai utilizează, dar au importanţă istorică deosebită în procesul cristalizării limbajului specific teoriei generale a proceselor Markov în decursul timpului. În secţiunea următoare se abordează terminologia din [**9**], care conţine aceste concepte în însăşi definiţia fundamentală a procesului Markov (omogen)(cu operatori de translaţie).

3.3. Procese Markov (omogene)(cu operatori de translaţie)

În [**48**], cap.XIII,XIV "punctul de intrare" în prezentare este semigrupul (Feller sau borelian, cu diverse axiome suplimentare), generîndu-se procesele corespunzătoare, cu mulţimea traiectoriilor cu "durată de viaţă" (via teorema 3.1.30), cu familia de probabilităţi $\{P^x\}_x$ şi operatorii de translaţie $\{\theta_t\}_t$, obţinîndu-se în plus proprietăţile "de legătură" specifice. Aici maniera de prezentare (ca în [**9**]) urmează oarecum traseul invers, "punctul de intrare" este o familie de variabile aleatoare (definite pe un spaţiu filtrat, cu valori într-un spaţiu măsurabil, la care se adjuncţionează un "punct" suplimentar, traiectoriile fiind cu "durată de viaţă"), o familie de probabilităţi şi o familie de operatori de translaţie, legate între ele prin nişte "axiome" (regularitate, omogenitate, proprietatea Markov), din toate acestea obţinîndu-se şi semigrupul. De remarcat că nu trebuie impuse condiţii topologice suplimentare spaţiului stărilor, acesta fiind considerat spaţiu măsurabil arbitrar, din acest motiv neputîndu-se încă vorbi de continuitate la dreapta, etc.

3.3.1. Definiţii şi observaţii generale.

Definiţia 3.3.1. ([**9**], pag.20-21) Se consideră $\mathbb{T}=[0,\infty]$ şi următoarele "obiecte":

(1) $(E,\mathcal{E})$ spaţiu măsurabil, $\Delta\notin E$ un punct "exterior" lui E şi $E_\Delta:=E\cup\{\Delta\}$, $\mathcal{E}_\Delta:=\sigma(\mathcal{E})$ (σ-algebra generată de $\mathcal{E}$ în E_Δ);
(2) $(\Omega,\mathcal{M},\{\mathcal{M}_t\}_{t\in\mathbb{T}})$ spaţiu "cu filtrare", i.e. $(\Omega,\mathcal{M})$ spaţiu măsurabil, $\{\mathcal{M}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ filtrare pe $(\Omega,\mathcal{M})$ ($\mathcal{M}_s\subset\mathcal{M}_t\subset\mathcal{M}$, $\forall\,0\le s\le t$) şi $\omega_\Delta\in\Omega$ fixat;
(3) $\{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ proces stocastic definit pe $(\Omega,\mathcal{M})$cu spaţiul stărilor $(E_\Delta,\mathcal{E}_\Delta)$ a.î.
 - $\forall\,\omega\in\Omega$, dacă $\exists\,t\in\mathbb{T}$ cu $X_t(\omega)=\Delta$, atunci $\forall\,s\ge t$, $X_s(\omega)=\Delta$;
 - $\forall\,\omega\in\Omega$, $X_\infty(\omega)=\Delta$;
 - $X_0(\omega_\Delta)=\Delta$;
(4) $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ cu $\theta_t:\Omega\longrightarrow\Omega$, $\forall\,t\in\mathbb{T}$ şi cu $\theta_\infty(\omega)=\omega_\Delta$, $\forall\,\omega\in\Omega$;
(5) $\{P^x\}_{x\in E_\Delta}$ familie de probabilităţi pe $(\Omega,\mathcal{M})$.

$\mathbf{X}:=(\Omega,\mathcal{M},\mathcal{M}_t,X_t,\theta_t,P^x)$ se numeşte *proces Markov (omogen)(cu operatori de translaţie) şi cu spaţiul stărilor* $(E,\mathcal{E})$ *(augmentat cu* Δ*)* $\Longleftrightarrow$

(R) (Regularitate)
 (a) $(\forall\,t\in\mathbb{T})\,(X_t\in\mathcal{M}_t/\mathcal{E}_\Delta)$ (i.e. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ adaptat la $\{\mathcal{M}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$);
 (b) $(\forall\,t\in\mathbb{T})\,(\forall\,B\in\mathcal{E})\left(\Big(E\ni x\longrightarrow P^x(X_t\in B)\in[0,1]\Big)\in\mathcal{E}\right)$;
 (c) $(\forall\,t\in\mathbb{T})\,\big(P^\Delta(X_t=\Delta)=1\big)$;

(H) (Omogenitate) $(\forall\,t,h\in\mathbb{T})\,(X_t\circ\theta_h=X_{t+h})$;

(M) (Proprietatea Markov)
$$(\forall\,x\in E_\Delta)\,(\forall\,B\in\mathcal{E}_\Delta)\,(\forall\,s,t\in\mathbb{T})\left(P^x\left(X_{t+s}\in B\,\middle|\,\mathcal{M}_t\right)=P^{X_t}(X_s\in B)\right).$$

Observaţia 3.3.2. ([**9**], pag.21) (1) Din (R)b), considerînd situaţiile "patologice" $B=\{\Delta\}$, $x=\Delta$, $t=\infty$, etc. se poate deduce că
$$(\forall\,t\in\mathbb{T})\,(\forall\,B\in\mathcal{E}_\Delta)\left(\Big(E_\Delta\ni x\longrightarrow P^x(X_t\in B)\in[0,1]\Big)\in\mathcal{E}_\Delta\right).$$

(2) Considerîndu-se $\mathcal{F}^0_t:=\sigma(X_s\,|\,s\le t)$, $\mathcal{F}^0:=\mathcal{F}^0_\infty:=\sigma(X_s\,|\,s\in\mathbb{T})$ din (R)a) $\Longrightarrow\mathcal{F}^0_t\subset\mathcal{M}_t$, $\{\mathcal{F}^0_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ filtrare în $\mathcal{F}^0\subset\mathcal{M}$. Din (H) se poate deduce $\theta_h\in\mathcal{F}^0_{t+h}/\mathcal{F}^0_t$ şi $\theta_h\in\mathcal{F}^0/\mathcal{F}^0$.

(3) Axioma (M) este "compatibilă" cu celelalte axiome în cazurile "patologice" t sau s egale cu ∞, sau $x = \Delta$, datorită celorlalte ipoteze din definiţie şi a celorlalte axiome.

(4) Se poate deduce suplimentar şi că

$$(\forall\, x \in E_\Delta)\, \Big((\Omega, \mathcal{M}, \{\mathcal{M}_t\}_{t\in\mathbb{T}}, P^x, \{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}, (E_\Delta, \mathcal{E}_\Delta))\text{ proces Markov}\Big),$$

în sensul definiţiei 3.2.1. Se demonstrează ([**9**], pag.22) că aceste procese sunt Markov cu semigrup de tranziţie în sensul definiţiei 3.2.6, anume cu acelaşi semigrup de tranziţie $N_t(x, A) := P^x(X_t \in A)$.

(5) Se spune că $\mathbf{X} := (\Omega, \mathcal{M}, \mathcal{M}_t, X_t, \theta_t, P^x)$ se numeşte *proces Markov cu spaţiul stărilor* $(E, \mathcal{E})$ (fără adaosurile celelalte), iar dacă se omit şi $\mathcal{M}$ şi $\mathcal{M}_t$, se va subînţelege că $\mathcal{M} = \mathcal{F}^0$, $\mathcal{M}_t = \mathcal{F}^0_t$.

OBSERVAŢIA 3.3.3. ([**9**], pag.21)(Interpretare probabilistă)

- $(t \longrightarrow X_t(\omega))$ este "traiectoria" unei particule $\omega \in \Omega$ care se "mişcă" în spaţiul stărilor $(E, \mathcal{E})$;
- P^x este probabilitatea după care se mişcă particula presupunînd că la momentul de timp $t = 0$ se afla în x, a.î. $P^x(X_s \in B)$ spune cu ce probabilitate se vor afla particulele în mulţimea B la momentul s, dacă la momentul iniţial $t = 0$ se aflau în x;
- Condiţiile (3) spun că particulele se "mişcă" în E pînă cînd "mor", moment în care sunt "transportate" în Δ ("cimitir"), unde vor "rămîne pe veci"; "toţi mor pînă la urmă" $(\forall\, \omega \in \Omega$, $X_\infty(\omega) = \Delta)$; particula ω_Δ "s-a născut" "moartă" $(X_0(\omega_\Delta) = \Delta)$;
- (M) afirmă că dacă se cunoaşte "istoria" particulei pînă la momentul t, atunci comportamentul său viitor este d.p.d.v. probabilistic exact la fel ca şi cînd particula ar fi pornit din $X_t(\omega)$ la momentul t, iar acest comportament va fi dat de $P^{X_t(\omega)}$, interesîndu-ne doar timpi s "relativi" la t;
- Existenţa operatorilor "de translaţie" θ_t spune că spaţiul "de bază" $(\Omega, \mathcal{M})$ este suficient de bogat în elemente.

DEFINIŢIA 3.3.4. ([**9**], pag.21-22) Pentru un proces ca mai sus se poate defini o aplicaţie numită *durată de viaţă a procesului*, care să contorizeze momentul "decesului" fiecărei particule $\omega \in \Omega$: $\xi : \Omega \longrightarrow [0, \infty]$, $\xi(\omega) := \inf\{t \in \mathbb{T} \,|\, X_t(\omega) = \Delta\}$. Se observă că $\{\xi < t\} = \bigcup_{\mathbb{Q}\ni r<t}\{X_r = \Delta\} \in \mathcal{F}^0_t$, deci ξ este $\{\mathcal{F}^0_{t+}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$-opţională.

OBSERVAŢIA 3.3.5. ([**9**], pag.22) 1) Cum $N_t(\Delta, \{\Delta\}) = P^\Delta(X_t = \Delta) = 1$, $\forall\, t \Longrightarrow N_t$ complet determinată de restricţia sa la $E \times \mathcal{E}$. Se notează $(N_t)_{|E\times\mathcal{E}} =: P_t$, $\forall\, t \Longrightarrow \{P_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ semigrup de tranziţie *submarkovian* pe $(E, \mathcal{E})$ $(A \longrightarrow P_t(x, A)$ nu mai e neapărat probabilitate, doar $P_t(x, E) \leq 1$, $\forall\, t$, $\forall\, x)$. Se notează, pentru $f \in b\mathcal{E}$ $P_t f(x) := \int_E P_t(x, dy) f(y) = E^x[f \circ X_t; X_t \in E]$; se deduce uşor că $P_t : (b\mathcal{E}, ||\cdot||_\infty) \longrightarrow (b\mathcal{E}, ||\cdot||_\infty)$ operator liniar, pozitiv, de normă $||P_t|| \leq 1$.

2) Pentru $\mathbf{X}$ satisfăcînd [(1)-(5)]+(R)+(H), există caracterizări echivalente ale axiomei (M) din definiţia 3.3.1([**9**], pag.22-23): (M)$\Longleftrightarrow$(M1)$\Longleftrightarrow$(M2), unde:

(M1) $(\forall\, x \in E_\Delta)\,(\forall\, f \in b\mathcal{E}_\Delta)\,(\forall\, s, t \in \mathbb{T})\,\Big(E^x\left(f \circ X_{t+s} \,|\, \mathcal{M}_t\right) = E^{X_t}(f \circ X_s)\Big)$;

(M2) $(\forall\, x \in E_\Delta)\,\left(\forall\, Y \in b\mathcal{F}^0\right)(\forall\, t \in \mathbb{T})\,\Big(E^x\left(Y \circ \theta_t \,|\, \mathcal{M}_t\right) = E^{X_t}(Y)\Big)$,

iar pentru $\mathcal{M}_t = \mathcal{F}^0_t$ are loc (M)$\Longleftrightarrow$(M1)$\Longleftrightarrow$(M2)$\Longleftrightarrow$(M3), unde:

(M3) $(n \in \mathbb{N}^*)\,(\forall\, 0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n)\,(\forall\, f_1, f_2, \ldots, f_n \in b\mathcal{E}_\Delta)$

$$\Bigg(E^x[f_1 \circ X_{t_1} \cdot f_2 \circ X_{t_2} \cdot \ldots \cdot f_n \circ X_{t_n}] =$$

$$\int_{E_\Delta} N_{t_1}(x, dx_1) f_1(x_1) \int_{E_\Delta} N_{t_2 - t_1}(x_1, dx_2) f_2(x_2) \ldots \int_{E_\Delta} N_{t_n - t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n) f_n(x_n)\Bigg)$$

3.3.2. Completarea filtrărilor. Uzând de detalii foarte tehnice privind completarea filtrărilor, în [**9**]-pag.27-29 se arată că

Se poate presupune întotdeauna despre un proces Markov $(\Omega, \mathcal{M}, \mathcal{M}_t, X_t, \theta_t, P^x)$ *ca în definiţia 3.3.1 că* $(\Omega, \mathcal{M}, \mathcal{M}_t)$ *completă, şi, dacă spaţiul stărilor este* $(E, \mathcal{E})$*, se poate considera şi* $(E, \mathcal{E}^u)$ *ca spaţiu al stărilor.*

3.3.3. Proprietatea "tare Markov". *Se consideră procesul Markov* $\mathbf{X} := (\Omega, \mathcal{M}, \mathcal{M}_t, X_t, \theta_t, P^x)$ *cu spaţiul stărilor* $(E, \mathcal{E})$ *ca în definiţia 3.3.1 şi cu* $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}}$, $\mathcal{M}_t = \overline{\mathcal{M}}_t$. *Deasemenea, se poate considera şi* $(E, \mathcal{E}^u)$ *ca spaţiu al stărilor.* Se vrea ca proprietatea Markov din definiţia 3.3.1 să fie satisfăcută şi pentru "timpi variabili" T, în loc de "timpi absoluţi" t. Clasa proceselor care să îndeplinească această proprietate (numită "tare Markov") este mai restrînsă, existînd procese Markov în sensul definiţiei 3.3.1, care nu sunt "tare Markov".

DEFINIŢIA 3.3.6. ([**9**], pag.37-38) Un proces Markov $\mathbf{X}$ ca la începutul secţiunii *are proprietatea "tare Markov"* $\Longleftrightarrow \Big(\forall\, T\ \{\mathcal{M}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}\text{-opţională}\Big)\Big(\forall\, f \in b\mathcal{E}_\Delta\Big)$

(S.R.) $X_T \in \mathcal{M}_T/\mathcal{E}^u_\Delta$;
(S.M.) $\Big(\forall\, t \in \mathbb{R}_+\Big)\Big(\forall\, x \in E_\Delta\Big)\Big(E^x[f \circ X_{t+T}|\mathcal{M}_T] = E^{X_T}[f \circ X_t]\Big)$.

Se deduce imediat că

- $\Big(x \longrightarrow E^x[f \circ X_t]\Big) \in \mathcal{E}_\Delta$ şi, cum $X_T \in \mathcal{M}_T/\mathcal{E}^u_\Delta \subset \mathcal{M}_T/\mathcal{E}_\Delta$, rezultă $\Big(\Omega \ni \omega \longrightarrow E^{X_T(\omega)}[f \circ X_T]\Big) \in \mathcal{M}_T$.
- Dacă $X \equiv \{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ progresiv măsurabil (de exemplu pentru E spaţiu metric, X continuu la dreapta (X deja adaptat) $\Longrightarrow$ X progresiv măsurabil) atunci se poate arăta ([**9**]) că $X_T \in \mathcal{M}_T/\mathcal{E}^u_\Delta$ (fără ca în definiţie să fie $f \in b\mathcal{E}^u_\Delta$!).

Remarca 3.3.7. În [**9**]-pag.38-43 se demonstrează că practic se poate presupune că $\mathcal{M}_t = \mathcal{M}_{t+}$; cum $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}}$, $\mathcal{M}_t = \overline{\mathcal{M}}_t$, rezultă: *Se poate considera întotdeauna, fără a restrînge generalitatea, un proces* $\mathbf{X} := (\Omega, \mathcal{M}, \mathcal{M}_t, X_t, \theta_t, P^x)$ *"tare Markov" cu spaţiul stărilor* $(E, \mathcal{E})$ *şi* $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}}$*,* $\mathcal{M}_{t+} = \mathcal{M}_t = \overline{\mathcal{M}}_t$*,* $t \in \mathbb{R}_+$.

Dacă $\mathbf{X} := (\Omega, \mathcal{M}, \mathcal{M}_t, X_t, \theta_t, P^x)$ "tare Markov" cu spaţiul stărilor $(E, \mathcal{E})$ şi $X_T \in \mathcal{F}_T/\mathcal{E}^u$, $\forall\, T$ $\{\mathcal{F}_t\}_t$-opţională, atunci $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, \theta_t, P^x)$ "tare Markov" cu spaţiul stărilor $(E, \mathcal{E})$. Acest lucru se întîmplă de exemplu pentru E_Δ spaţiu metric, $\mathcal{E}_\Delta = \mathcal{B}(E_\Delta)$ şi $\mathbf{X}$ continuu la drepta.

Deci, concluzia acestor două subsecţiuni (privind tare markovianitatea şi completarea filtrărilor pentru un proces Markov (omogen) (cu operatori de translaţie)) este: **Se poate considera întotdeauna, fără a restrînge generalitatea, un proces** $\mathbf{X} := (\Omega, \mathcal{M}, \mathcal{M}_t, X_t, \theta_t, P^x)$ **"tare Markov" cu spaţiul stărilor** $(E, \mathcal{E})$ **şi** $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}}$**,** $\mathcal{M}_{t+} = \mathcal{M}_t = \overline{\mathcal{M}}_t$**,** $t \in \mathbb{R}_+$**, caz în care are loc şi** $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$**,** $t \in \mathbb{R}_+$.

3.4. Procese standard. Procese Hunt

În această secţiune se definesc conceptele de *proces Hunt* şi *proces standard.* "Axiomele" din aceste definiţii sunt independente (a se vedea [**48**]-XIV).

Definiţia 3.4.1. ([**9**], pag.45) Fie $\mathbf{X} := (\Omega, \mathcal{M}, \mathcal{M}_t, X_t, \theta_t, P^x)$ proces Markov cu spaţiul stărilor $(E, \mathcal{E})$ (E_Δ spaţiu metric cu $\mathcal{E}_\Delta \supseteq \mathcal{B}(E_\Delta)$) şi cu $X_T \in \mathcal{M}_T/\mathcal{E}^u_\Delta$, $\forall\, T$ $\{\mathcal{M}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$-opţională. Atunci

$\mathbf{X}$ se numeşte *quasicontinuu la stînga pe* $[0, \xi)$ $\Longleftrightarrow$ $\forall\,\{T_n\}_{n\geq 1}$ şir de $\{\mathcal{M}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$-opţionale cu $T_n \nearrow T$, are loc $X_{T_n} \longrightarrow X_T$ a.s. pe $\{T < \xi\}$.

$\mathbf{X}$ se numeşte *quasicontinuu la stînga pe* $[0, \infty)$ $\Longleftrightarrow$ $\forall\,\{T_n\}_{n\geq 1}$ şir de $\{\mathcal{M}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$-opţionale cu $T_n \nearrow T$, are loc $X_{T_n} \longrightarrow X_T$ a.s. pe $\{T < \infty\}$.

Definiţia 3.4.2. ([**9**], pag.45) Fie $\mathbf{X} := (\Omega, \mathcal{M}, \mathcal{M}_t, X_t, \theta_t, P^x)$ proces Markov normal cu spaţiul stărilor $(E, \mathcal{E})$. $\mathbf{X}$ se numeşte *proces standard* $\Longleftrightarrow$

1. E LCCB (spaţiu local compact cu bază numărabilă), $E_\Delta := E \cup \{\Delta\}$ compactificatul Alexandrov al lui E, dacă E necompact, sau Δ un punct oarecare adjuncţionat lui E, dacă E necompact; $\mathcal{E}_\Delta := \mathcal{B}(E_\Delta)$;
2. $\mathcal{M}_{t+} = \mathcal{M}_t = \overline{\mathcal{M}}_t$, $\forall\, t$;
3. traiectoriile lui $\mathbf{X}$ ($(t \longrightarrow X_t(\omega))$, $\omega \in \Omega$) sunt continue la dreapta pe $[0, \infty)$ şi au limite la stînga pe $[0, \xi)$ a.s.;
4. $\mathbf{X}$ tare Markov;
5. $\mathbf{X}$ quasicontinuu la stînga pe $[0, \xi)$.

Dacă în locul ultimei "axiome" se pune $\mathbf{X}$ quasicontinuu la stînga pe $[0, \infty)$, atunci $\mathbf{X}$ se numeşte *proces Hunt.*

Observaţia 3.4.3. ([**9**], pag.45) (1) Cum $\mathcal{M}_t = \mathcal{M}_{t+}$ şi $\mathbf{X}$ proces Markov relativ la $\{\mathcal{M}_t\}_t$, el este proces Markov şi relativ la $\{\mathcal{F}^0_{t+}\}_t$, de unde, se poate deduce că $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$; apoi, din $\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{M}, \mathcal{M}_t, X_t, \theta_t, P^x)$ tare Markov, cu remarca 3.3.7 (3) rezultă că $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, \theta_t, P^x)$ tare Markov

(2) Se poate deduce că proprietatea $\big(t \longrightarrow X_t(\omega)\big)$ are limită la stînga pe $[0, \xi)$ (respectiv $[0, \infty)$) este o consecinţă a celorlalte axiome ale procesului standard. Deci "sistemul de axiome" din definiţie nu este perfect independent, dar se preferă să se specifice şi această proprietate în definiţie, fiind importantă.

Se poate deduce uşor

Propoziţia 3.4.4. *(*[**9**]*, pag.45)* $\mathbf{X}$ *proces standard* $\Longrightarrow$ $\big(\forall\, t \geq 0\big)\big(A(\omega) := \{X_s(\omega)\,|\,0 \leq s \leq t < \xi(\omega)\}$ *a.s. mărginită* $\big)$. *Ca o consecinţă, a.s. limitele la stînga ale traiectoriilor* $\big([0, \xi) \ni t \longrightarrow X_t(\omega)\big)$ *"stau" în* E.

În fine se poate da teorema fundamentală a secţiunii. Cum "axiomele" din definiţia procesului standard au fost concepute pe modelul proprietăţilor realizării canonice a unui semigrup Feller, este natural să se întîmple "inversa acestui traseu", anume ca un semigrup Feller să genereze un proces standard. Practic se realizează un rezumat al capitolelor *Procese Feller*(XIII) şi *Procese Hunt*(XIV) din ([**48**]). Demonstraţia teoremei este o sinteză a majorităţii ideilor de demonstraţie a proprietăţilor proceselor Feller ([**48**]-XIII):

TEOREMA 3.4.5. *([**9**], pag.46-50) Fie*

(1) *E LCCB (spaţiu local compact cu bază numărabilă), $E_\Delta := E \cup \{\Delta\}$ compactificatul Alexandrov al lui E, dacă E necompact, sau Δ un punct oarecare adjuncţionat lui E, dacă E necompact şi $\mathcal{E}_\Delta := \mathcal{B}(E_\Delta)$;*

(2) *$\{P_t\}_{t\geq 0}$ semigrup de tranziţie submarkovian pe $(E, \mathcal{E})$ cu $P_0(x, \cdot)) = \varepsilon_x$, $\forall x$ astfel încît*

- $P_t C_0 \subset C_0$, $\forall t$ $\Big(C_0 := \Big\{f \in C(E) \,|\, \exists \lim\limits_{x\to\Delta} f(x) = 0\Big\}\Big)$;
- $\forall f \in C_0$, $\lim\limits_{t\to 0} ||P_t f - f|| = 0$.

Atunci există un proces standard (chiar Hunt) $\mathbf{X}$ cu spaţiul stărilor $(E, \mathcal{E})$ şi semigrup de tranziţie $\{P_t\}_t$.

Demonstraţia rezumă practic aproape întreg capitolul *Procese Feller* din [**48**]-XIII şi are ca tehnică fundamentală considerarea unui proces cu mulţimea traiectoriilor predefinită (cu proprietăţile pe care le cere definiţia procesului standard sau Hunt) via teorema 3.1.30.

3.5. Măsurabilitatea ”timpilor de intrare”

3.5.1. Rezultate generale. I. La punctul I se va considera un spaţiu măsurabil arbitrar $(E, \mathcal{E})$, Δ punctul adiţional, $E_\Delta := E \cup \{\Delta\}$ şi $\mathbf{X} := (\Omega, \mathcal{M}, \mathcal{M}_t, X_t, \theta_t, P^x)$ proces Markov cu spaţiul stărilor $(E, \mathcal{E})$.

Pentru $A \subset E_\Delta$, se definesc

$$D_A(\omega) := \inf\{t \geq 0 \,|\, X_t(\omega) \in A\},\ T_A(\omega) := \inf\{t > 0 \,|\, X_t(\omega) \in A\}.$$

Proprietăţile lui D_A şi T_A se pot consulta în [**9**], pag.52-53.

II. La punctul II se va considera un spaţiu metric local compact separabil E.

Se notează $\mathcal{K} := \{K \subset E \,|\, K$ compactă $\}$.

DEFINIŢIA 3.5.1. ([**9**], pag.53) $\varphi : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}$ se numeşte *capacitate Choquet* $\Longleftrightarrow$ φ crescătoare, tare subaditivă şi continuă la dreapta. (a se vedea 3.1.6, 3.1.7). Pentru $A \subset E$, se consideră $\varphi_*(A) := \sup\limits_{\mathcal{K}\ni K\subset A} \varphi(K)$, $\varphi^*(A) := \inf\limits_{A\subset G\in\mathcal{G}} \varphi_*(G)$.

OBSERVAŢIA 3.5.2. Conform teoremei lui Choquet (3.1.2) pentru $\mathcal{F} = \mathcal{K}$, orice mulţime boreliană ($B \in \mathcal{B}(E) \subset a(\mathcal{K})$) este $\mathcal{K}$-capacitabilă, adică $\varphi_*(B) = \varphi^*(B)$.

Se va considera la II $E_\Delta := E \cup \{\Delta\}$ (compactificatul Alexandrov al lui E pt. E necompact, şi spaţiul obţinut prin adjuncţionarea unui punct exterior Δ pt. E compact), $\mathcal{E}_\Delta := \mathcal{B}(E_\Delta) = \sigma(\mathcal{E} \cup \{\Delta\})$, $\mathcal{E} := \mathcal{B}(E)$.

Deasemenea, se va considera în plus la II $\mathbf{X} := (\Omega, \mathcal{M}, \mathcal{M}_t, X_t, \theta_t, P^x)$ proces Markov cu spaţiul stărilor $(E, \mathcal{E}^u)$, continuu la drepta, quasicontinuu la stînga, cu $\mathcal{F}_{t+} \subset \mathcal{M}_t$ ($\Longrightarrow \mathcal{F}^0_{t+} \subset \mathcal{F}_{t+} \subset \mathcal{M}_t$) $\Longrightarrow$ $\mathbf{X}$ proces Markov relativ la $\{\mathcal{F}^0_{t+}\}_t$, de unde se poate deduce şi $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$. Se poate presupune, fără a restrînge generalitatea, că $\forall \omega \in \Omega$, ($[0, \infty) \ni t \longrightarrow X_t(\omega) \in E$) continuă la drepta.

Se introduc următoarele concepte:

1. $d_A := D_A \wedge \xi = D_{A\cup\{\Delta\}}$, pentru $A \subset E$.

2. $A \subset E$, $t \geq 0 \Longrightarrow R_t(A) := \big\{\omega \,\big|\, \exists s \in [0, t],\ X_s(\omega) \in A \cup \{\Delta\}\big\}$, $R^*_t(A) := \big\{\omega \,\big|\, \exists s \in [0, t],\ X_s(\omega) \in A\big\}$.

Se poate deduce ([**9**]-pag.54-57) că:

- Pentru t şi μ fixate, aplicaţia $\varphi := \Big(\mathcal{K} \ni K \longrightarrow P^\mu(R_t(K))\Big)$ este o capacitate Choquet.
- Pentru t şi μ fixate, iar $\mathbf{X}$ quasicontinuu la stînga pe $[0, \infty)$ în loc de $[0, \xi)$, aplicaţia $\psi := \Big(\mathcal{K} \ni K \longrightarrow P^\mu(R^*_t(K))\Big)$ este o capacitate Choquet.
- $B \in \mathcal{B}(E) \Longrightarrow R_t(B) \in \mathcal{F}_t$, $\varphi(B) = \varphi_*(B) = \varphi^*(B) = P^\mu(R_t(B))$.
- $B \in \mathcal{B}(E) \Longrightarrow R^*_t(B) \in \mathcal{F}_t$, $\psi(B) = \psi_*(B) = \psi^*(B) = P^\mu(R^*_t(B))$.

Cu ajutorul acestor consideraţii se poate deduce teorema următoare, care are o importanţă deosebită; ea afirmă că *timpii de intrare într-o mulţime boreliană sunt $\{\mathcal{F}_t\}_t$-opţionale*:

TEOREMA 3.5.3. *([**9**], pag.54) $\forall B \subset \mathcal{B}(E_\Delta)$, D_B, T_B sunt $\{\mathcal{F}_t\}_t$-opţionale.*

Următoarele teoreme ”de aproximare” (3.5.4, 3.5.6) pentru d_B, D_B şi T_B sunt des utilizate:

TEOREMA 3.5.4. *([**9**], pag.57) $B \in \mathcal{B}(E)$, μ fixate $\Longrightarrow \exists (K_n)_n \subset \mathcal{K}$, $\exists (G_n)_n \subset \mathcal{G}$, $K_n \nearrow B \swarrow G_n$, cu $d_{G_n} \nearrow d_B \swarrow d_{K_n}$ P^μ-a.s. pe Ω.*

COROLARUL 3.5.5. *([**9**], pag.57-58) $B \in \mathcal{B}(E)$, μ fixate $\Longrightarrow \exists (K_n)_n \subset \mathcal{K}$, $\exists (G_n)_n \subset \mathcal{G}$, $K_n \nearrow B \swarrow G_n$, cu $D_{G_n} \nearrow D_B$ P^μ-a.s. pe $\{D_B < \infty\}$, $D_{K_n} \searrow D_B$ P^μ-a.s. pe Ω. Pentru **X** quasicontinuu la stînga pe $[0,\infty)$ în loc de $[0,\xi)$ se poate deduce chiar $D_{G_n} \nearrow D_B$ P^μ-a.s. pe Ω.*

TEOREMA 3.5.6. *([**9**], pag.58-59) $B \in \mathcal{B}(E)$, μ fixate $\Longrightarrow \exists (K_n)_n \subset \mathcal{K}$, $K_n \nearrow B$, cu $T_{K_n} \searrow T_B$ P^μ-a.s. pe Ω.*

OBSERVAŢIA 3.5.7. 1) Şirurile aproximante din teoremele 3.5.4, 3.5.6 depind în general de măsura μ.
2) Singurul loc unde se utilizează proprietatea Markov a lui **X** este în demonstraţia teoremei 3.5.6.
3) O aproximare "pe dedesubt" cu "timpi de intrare" T_{G_n} în mulţimi deschise nu e în general adevărată: de exemplu, în *procesul de mişcare uniformă la dreapta pe axa reală*, dacă se consideră $B = \{0\}$ şi G deschisă cu $0 \in G$, atunci $P^0(T_B < \infty) = 0$, $P^0(T_G = 0) = 1$ ($P^0 = P^{\varepsilon_0}$). În secţiunea următoare se prezintă o astfel de teoremă, în condiţii speciale (pentru mulţimi aproape boreliene relativ la un proces standard, cu aproape toate punctele regulate).

III. Pînă la sfîrşitul subsecţiunii se va considera X un proces standard cu spaţiul stărilor $(E,\mathcal{E})$ de la II.

Aici se prezintă generalizările rezultatelor "de aproximare" de la subpunctul precedent, pentru mulţimi "aproape boreliene" relativ la procesul standard fixat. Se extinde conceptul $R_t(B)$ în noul context al proceselor standard şi se obţine o nouă caracterizare pentru D_B.

Pentru $B \in \mathcal{B}(E)$ se pune

$$R'_t(B) := R_t(B) \cup \big\{\omega \,|\, \big(\exists\, s \in [0,t]\big)\big(\exists\, X_s(\omega) \in B \cup \{\Delta\}\big)\big\}\,.$$

Se poate arăta că $R_t(G) = R'_t(G)$, $\forall\, G$ deschisă (**X** proces standard; se poate considera o bilă în jurul lui $X_{s-}(\omega)$ etc.); utilizând acest fapt, teorema lui Choquet (pentru R_t) şi $\{\mathcal{F}_t\}_t$ filtrare completă, se poate deduce

PROPOZIŢIA 3.5.8. *([**9**], pag.59) $P^\mu\big[R'_t(B)\backslash R_t(B)\big] = 0$, $R'_t(B) \in \mathcal{F}_t$, $\forall\, t$, $\forall\, \mu$.*

DEFINIŢIA 3.5.9. ([**9**], pag.59) Pentru $\omega \in \Omega$, se defineşte

$$\xi'(\omega) := \inf\big\{t \,\big|\, X_t(\omega) = \Delta \,\vee\, \exists\, X_{t-}(\omega) = \Delta\big\}.$$

Evident $\xi' \leq \xi$. Apoi se verifică uşor că pentru $r \in \mathbb{Q}$

$$\{\xi' < r < \xi\} \subset \big\{(s \longrightarrow X_s) \text{ nemărginită în } E \text{ pe } [0,r],\ r < \xi\big\},$$

de unde, cu 3.4.4 (adică se utilizează în mod efectiv că **X** este proces standard) $\xi = \xi'$ a.s. De aici rezultă că pentru $B \in \mathcal{B}(E)$,

$$D_B = \inf\big\{t \,\big|\, X_t \in B \cup \{\Delta\}\big\} = \inf\big\{t \,\big|\, X_t \in B \cup \{\Delta\} \,\vee\, \exists\, X_{t-} \in B \cup \{\Delta\}\big\} \text{ a.s.}$$

Noţiunea de mulţime "aproape boreliană" este centrală în teoria potenţialului:

DEFINIŢIA 3.5.10. ([**9**], pag.59) $A \subset E_\Delta$ se numeşte *aproape boreliană (relativ la procesul standard fixat **X**)* $\Longleftrightarrow$

$$\big(\forall\, \mu\big)\big(\exists\, B,\, B' \in \mathcal{B}(E_\Delta)\big)\Big(B \subset A \subset B',\ P^\mu\big(\{\exists\, t,\ X_t \in B'\backslash B\}\big) = 0\Big).$$

Se observă următoarele:
1. $P^\mu\big(\{\exists\, t,\ X_t \in B'\backslash B\}\big) = 0 \Longleftrightarrow P^\mu\big(D_{B'\backslash B} < \infty\big) = 0$.
2. Dacă se notează cu $\mathcal{E}^n_\Delta$ clasa mulţimilor aproape boreliene din E_Δ în raport cu procesul standard **X**, se poate deduce simplu că $\mathcal{E}^n_\Delta$ σ-algebră, iar $\mathcal{E}_\Delta \subset \mathcal{E}^n_\Delta \subset \mathcal{E}^u_\Delta$.

Analog se poate defini $\mathcal{E}^n$ clasa mulţimilor aproape boreliene din E în raport cu procesul standard **X** şi se poate deduce că $\mathcal{E}^n$ σ-algebră pe E, iar $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^n \subset \mathcal{E}^u$. Deasemenea, se poate deduce că

$$f \in \mathcal{E}^n \Longleftrightarrow \Big(\forall\, \mu\Big)\big(\exists\, f',\, f'' \in \mathcal{E}\big)\Big(f' \leq f \leq f'',\ P^\mu(\{\exists\, t,\ f' \circ X_t \neq f'' \circ X_t\}) = 0\Big).$$

3. Se poate deduce că $R_t(B) \in \mathcal{F}_t$, $\forall\, t$ şi pentru B aproape boreliană; *toate rezultatele "de aproximare" 3.5.4, 3.5.5, 3.5.6 precum şi 3.5.8 se pot rescrie şi pentru mulţimi aproape boreliene* (utilizînd rezultatele pe boreliene şi tehnica "sandwich").

3.5.2. Alte proprietăţi ale "timpilor de intrare". Puncte regulate. *În această subsecţiune se va considera **X** un proces standard cu spaţiul stărilor $(E,\mathcal{E})$.*

DEFINIŢIA 3.5.11. ([**9**], pag.61) Pentru T $\{\mathcal{M}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$-opţională, $\alpha \geq 0$, se defineşte

$$P^\alpha_T f(x) := E^x\big[e^{-\alpha T} f \circ X_T;\, T < \infty\big],\ f \in b\mathcal{E}^u_\Delta,\ x \in E.$$

Pentru $\alpha = 0$, se notează $P_T := P^0_T$, iar pentru $A \in \mathcal{E}^n_\Delta$, $P^\alpha_A := P^\alpha_{T_A}$, $P_A := P^0_{T_A}$.

Deoarece pentru $f \in b\mathcal{E}^u$, ea se identifică cu o funcţie $\overline{f} : E_\Delta \longrightarrow \mathbb{R}$ ($\overline{f} = f$ pe E şi $\overline{f}(\Delta) = 0$, de unde $f \circ X_T = 0$ pe $\{T = \infty\}$) în definiţia de mai sus se poate considera $f \in b\mathcal{E}^u$.

Dacă T $\{\mathcal{M}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$-opţională şi $f \in b\mathcal{E}^u_\Delta$, atunci $P^\alpha_T f$ nu e neapărat măsurabilă (adică în $\mathcal{E}^u_\Delta$). Dacă însă T este $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$-opţională şi $f \in b\mathcal{E}^u_\Delta$ ($\Longleftrightarrow f \in b\mathcal{E}^u$), cum $\mathbf{X}$ un proces standard, $X_T \in \mathcal{F}_T/\mathcal{E}^u_\Delta$, deci $f \circ X_T \in \mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}$; de aici $\mathbb{I}_A \circ X_T = \{X_T \in A\} = X_T^{-1}(A) \in \mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}$. Se poate demonstra că

$$\left(x \longrightarrow P^\alpha_T(x, A) := E^x\left[e^{-\alpha T} \cdot \mathbb{I}_{X_T^{-1}(A)\cap\{T<\infty\}}\right]\right) \in \mathcal{E}^u_\Delta.$$

Cum $P^\alpha_T(x, \cdot)$ evident măsuri pe E, P^α_T nuclee pe $(E, \mathcal{E})$.

Pentru $A \in \mathcal{E}^n_\Delta$, măsura $P^\alpha_A(x, \cdot)$ se numeşte *α-distribuţia de lovire a lui A din x*, sau *α-măsura armonică a lui A relativ la x*. Suportul acestei măsuri se află în $\overline{A}$ (se uzează de continuitatea la dreapta a lui $\mathbf{X}$). Se poate deduce o estimare şi mai precisă pentru suportul acestei măsuri (a se vedea în continuare 3.5.15).

Noţiunile de punct regulat şi neregulat sunt centrale în dezvoltarea conceptelor de teoria potenţialului asociate unui proces standard:

Definiţia 3.5.12. ([**9**], pag.61) I. Dacă T este $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$-opţională, atunci $\{T = 0\} \in \mathcal{F}_0$, de unde, din legea 0-1 a lui Blumenthal $P^x(T = 0) = 0$ sau 1 pentru orice $x \in E_\Delta$. Un element $x \in E_\Delta$ se numeşte *regulat pentru T relativ la* $\mathbf{X}$ (respectiv *neregulat pentru T relativ la* $\mathbf{X}$) $\Longleftrightarrow P^x(T = 0) = 1$ (respectiv $P^x(T = 0) = 0$).

II. Dacă $A \in \mathcal{E}^n_\Delta$ (adică aproape boreliană relativ la $\mathbf{X}$), un element $x \in E_\Delta$ se numeşte *regulat pentru A relativ la* $\mathbf{X}$ (respectiv *neregulat pentru A relativ la* $\mathbf{X}$) $\Longleftrightarrow x$ regulat pentru T_A relativ la $\mathbf{X}$ (respectiv x neregulat pentru T_A relativ la $\mathbf{X}$) $\Longleftrightarrow P^x(T_A = 0) = 1$ (respectiv $P^x(T_A = 0) = 0 \Longleftrightarrow P^x(T_A > 0) = 1$).

Observaţia 3.5.13. 1. x regulat pentru $A \Longleftrightarrow$ procesul $\mathbf{X}$, "plecînd" din x, se află în A la momente de timp strict pozitive oricît de mici, cu probabilitate 1.

2. Pentru $A \in \mathcal{E}^n_\Delta$, se notează cu $A^r := \{x \in E_\Delta \mid P^x(T_A = 0) = 1\}$ mulţimea punctelor regulate ale lui A. Atunci $A^r \in \mathcal{E}^u_\Delta$ ($\{T_A = 0\} \in \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$, deci se poate aplica axioma (R) lui $Y := \big(x \longrightarrow P^x(T_A = 0)\big)$, deci $Y \in \mathcal{E}^u_\Delta$, de unde $A^r = Y^{-1}(\{1\}) \in \mathcal{E}^u_\Delta$).

3. Se poate arăta chiar $A \in \mathcal{E}^n_\Delta$, $A^r \in \mathcal{E}^n_\Delta$ şi $\mathring{A} \subset A^r \subset \overline{A}$.

Teorema următoare constituie ultimul *rezultat de aproximare "pe dedesupt" a "timpilor de intrare" T_A cu "timpi de intrare în mulţimi deschise"* (rezultat anunţat în subsecţiunea precedentă) pentru mulţimi *A aproape boreliene cu aproape toate punctele regulate relativ la o măsură fixată pe E*:

Teorema 3.5.14. *([**9**], pag.62) $A \in \mathcal{E}^n$, μ măsură pe E cu $\mu(A\backslash A^r) = 0 \Longrightarrow \exists (G_n)_n \subset \mathcal{G}$, $A \subset G_n$, $G_n \searrow$, cu $T_{G_n} \nearrow T_A$ P^μ-a.s. pe $\{T_A < \infty\}$ şi $T_{G_n} \wedge \xi \nearrow T_A \wedge \xi$ P^μ-a.s. pe Ω.*

Se aplică 3.5.4 şi spt$\mu \subset \complement A \cup A^r$ deducându-se $P^\mu[D_A \neq T_A] = 0$.

Ca şi la celelalte rezultate "de aproximare", pentru $\mathbf{X}$ quasicontinuu la stînga pe $[0, \infty)$ în loc de $[0, \xi)$, în 3.5.14 se poate spune chiar $T_{G_n} \nearrow T_A$ P^μ-a.s. pe Ω.

Tot în acest context se mai poate demonstra şi faptul că *α-măsura armonică a lui $A \in \mathcal{E}^n_\Delta$ relativ la x are suportul inclus în $A \cup A^r$*:

Teorema 3.5.15. *([**9**], pag.62) Pentru $A \in \mathcal{E}^n_\Delta$ are loc:*
i) $X_{T_A} \in A \cup A^r$ a.s. pe $\{T_A < \infty\}$;
ii) $\big(\forall x\big)\big(\forall \mu\big)\big(\mathrm{spt} P^\alpha_A(x, \cdot) \subset A \cup A^r\big)$.

3.6. Forme Dirichlet, semigrupuri şi procese Markov

Se realizează o trecere în revistă succintă a acelor "porţiuni" din teoria generală a formelor Dirichlet dar şi proceselor stocastice necesare în capitolele următoare şi urmează îndeaproape sursa [**22**].

Fie $\mathbf{X} = (X_t, t \geq 0, P^x, x \in F)$ proces Markov cu spaţiul stărilor un spaţiu metric F. (Ulterior se va presupune că $\mathbf{X}$ este chiar proces Hunt). Se consideră semigrupul $(P_t, t \geq 0)$ asociat lui X, dat de

$$P_t f(x) := E^x[f \circ X_t], \tag{3.3}$$

precum şi rezolvanta asociată $(U_\alpha, \alpha > 0)$:

$$U_\alpha f(x) := \int_0^\infty P_t f(x) e^{-\alpha t} dt = E^x\left[\int_0^\infty e^{-\alpha s} f \circ X_s ds\right]. \tag{3.4}$$

(3.3) şi (3.4) au sens pentru funcţiile f pe F pentru care variabilele aleatoare $f \circ X_t$, sau $\int_0^\infty e^{-\alpha s} f \circ X_s ds$, sunt integrabile; dar, pentru o abordare riguroasă, este nevoie de un spaţiu Banach B iar aplicaţiile P_t şi

U_α să fie considerate ca operatori $P_t : B \longrightarrow B$, or $U_\alpha : B \longrightarrow B$ (exemplele fundamentale fiind $C_0(F)$ şi $L^2(F,\mu)$, unde μ măsură Borel pe F). Considerându-se unul din aceste spaţii, se poate deduce că $(P_t)_t$ satisface proprietatea

$$P_{t+s} = P_t P_s,\ t, s \geq 0,$$

i.e. $(P_t)_t$ semigrup de operatori iar $(U_\alpha)_\alpha$ satisface

$$U_\alpha - U_\beta = (\beta - \alpha) U_\alpha U_\beta,\ \alpha, \beta > 0,$$

i.e. $(U_\alpha)_\alpha$ rezolvantă de operatori pe B.

Se spune că un semigrup de operatori $(P_t)_t$ este *tare continuu* $\Longleftrightarrow$ $||P_t f - f||_B \xrightarrow[t\searrow 0]{} 0$. Pentru un semigrup tare continuu $(P_t)_t$ se poate defini generatorul său infinitezimal $(\mathcal{L}, \mathcal{D}(\mathcal{L}))$ prin

$$\mathcal{L}f := \lim_{t\searrow 0} 1/t(P_t f - f),\ f \in \mathcal{D}(\mathcal{L})), \tag{3.5}$$

unde $\mathcal{D}(\mathcal{L}) := \{f \in B \mid$ există în $B\}$.

Teorema Hille-Yoshida permite "trecerea" de la procesul $\mathbf{X}$ prin generatorul $\mathcal{L}$, la semigrupul ori rezolvanta asociate.

Grosier, dacă se acceptă analogia dintre $\mathbf{X}$ şi un sistem mecanic clasic, $\mathcal{L}$ corespunde ecuaţiei mişcării, iar $(P_t)_t$ şi $(U_\alpha)_\alpha$ soluţiilor obţinute prin integrare. Pentru un sistem mecanic, mai există şi formulări "în termeni" de conservarea energiei. Această ecuaţie este mai simplu de manipulat pentru că conţine difernţiale cu un ordin mai mic decât celelalte.

Pentru procese Markov generale, o descriere a energiei nu este foarte intuitivă. Pentru procese reversibile sau simetrice, există o mulţime de tehnici utile şi puternice. Pentru μ măsură Radon pe F ce "încarcă" mulţimile deschise, se spune că un semigrup $(P_t)_t$ este *μ-symmetric* dacă $\forall\, f,\ g$ măsurabile mărginte, cu suport compact

$$\int P_t f(x) g(x) \mu(dx) = \int P_t g(x) f(x) \mu(dx). \tag{3.6}$$

Presupunând că $(P_t)_t$ este semigrupul unui proces Hunt ce satisface (3.6), din $P_t 1 \leq 1$, rezultă, cu inegalitatea lui Holder

$$|P_t f(x)| \leq (P_t f^2(x))^{1/2} (P_t t1(x))^{1/2} \leq (P_t f^2(x))^{1/2}$$

$((\cdot\,, \cdot)$ produsul scalar pe $L^2(F,\mu))$. Deci

$$||P_t f||_2^2 \leq ||P_t f^2||_1 = (P_t f^2, 1) = (f^2, P_t 1) \leq (f^2, 1) = ||f||_2^2,$$

deci P_t is a contracţie pe $L^2(F,\mu)$.

Definiţia formelor (energie) Dirichlet asociate cu $(P_t)_t$ este mai puţin directă decât cea a generatorului infinitezimal: această dificultate în găsirea de corespondenţe intuitive explică interesul mai scăzut pentru studiul lor, până la apariţia monografiei [**22**], în comparaţie cu atenţia acordată studiului semigrupurilor şi rezolvantelor. Deasemenea, până recent, doar teoria formelor Dirichlet simetrice era bine consolidată, cea ce restrângea domeniul de aplicabiliate la procese Markov simetrice; numeroase exemple importante de procese Markov sunt însă nesimetrice. Dar, odată cu apariţia monografiei [**36**], această restricţie a fost înlăturată, asociindu-se şi unor clase de procese nesimetrice forme Dirichlet (evident nesimetrice, cu condiţia de simetrie înlocuită cu una mai slabă, anume "condiţia de sector").

În continuare se va considera F spaţiu metric local compact cu bază numărabilă (deci metrizabil), μ măsură Radon pe F şi $H = L^2(F,\mu)$. Definiţiile următoare sunt din [**22**].

Definiţia 3.6.1. Fie $\mathcal{D}$ subspaţiu liniar al lui H. O *formă simetrică* $(\varepsilon, \mathcal{D})$ este o aplicaţie $\varepsilon : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ pentru care

(1) ε biliniară simetrică;

(2) $\varepsilon(u,u) \geq 0,\ u \in \mathcal{D}$.

Pentru $\alpha \geq 0$, se defineşte ε_α pe $\mathcal{D}$ prin $\varepsilon_\alpha(u,u) = \varepsilon(u,u) + \alpha||u||_2^2$, şi se scrie

$$||u||_{\varepsilon_\alpha}^2 = ||u||_2^2 + \alpha\varepsilon(u,u) = \varepsilon_\alpha(u,u).$$

Definiţia 3.6.2. Fie $(\varepsilon, \mathcal{D})$ formă simetrică.

(a) ε se numeşte *închisă* $\Longleftrightarrow$ $(\mathcal{D}, ||\cdot||_{\varepsilon_1})$ este complet;

(b) $(\varepsilon, \mathcal{D})$ se numeşte *Markoviană* $\Longleftrightarrow$ $\forall\, u \in D,\ \overline{u} := (0 \vee u) \wedge 1 \Longrightarrow \overline{u} \in \mathcal{D}$ şi $\varepsilon(\overline{u}, \overline{u}) \leq \varepsilon(u,u)$.

(c) $(\varepsilon, \mathcal{D})$ se numeşte *formă Dirichlet* $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{D}$ densă în $L^2(F,\mu)$ şi $(\varepsilon, \mathcal{D})$ formă simetrică, Markov, închisă.

Definiţia 3.6.3. O formă Dirichlet $(\varepsilon, \mathcal{D})$ se numeşte *regulată* $\Longleftrightarrow$

$$\mathcal{D} \cap C_0(F) \text{ dens în } \mathcal{D} \text{ în norma } ||\cdot||_{\varepsilon_1}, \tag{3.7}$$

$$\mathcal{D} \cap C_0(F) \text{ dens în } C_0(F) \text{ în norma } ||\cdot||_\infty. \tag{3.8}$$

ε se numeşte *locală* $\Longleftrightarrow$ $\varepsilon(u,v) = 0,\ \forall\, u,\ v$ continue cu suport compact.

ε se numeşte *conservativă* $\iff 1 \in \mathcal{D}$ şi $\varepsilon(1,1) = 0$.
ε se numeşte *ireductibilă* $\iff \varepsilon$ conservativă şi $\varepsilon(f,f) = 0 \implies f$ constantă.

Exemplul fundamental de formă Dirichlet este cea asociată *mişcării browniene de pe* $\mathbb{R}^d$

$$\varepsilon_{BM}(f,f) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f|^2 dx,\ f \in H^{1,2}(\mathbb{R}^d).$$

Se va vedea în continuare că structura formelor asociate *lanţurilor Markov finite* precum şi operatorii asociaţi sunt perfect determinate, având o formă simplă.

Teorema Hille-Yoshida dă o corespondenţă bijectivă între semigrupuri şi operatorii (generatorii) lor infinitezimali; dar există bijecţie şi între semigrupuri şi forme Dirichlet. Pentru $(P_t)_t$ semigrup dat, se definesc:

Definiţia 3.6.4. (a) $(P_t)_t$ se numeşte *Markovian* $\iff f \in L^2(F,\mu),\ 0 \le f \le 1 \implies 0 \le Tf \le 1$ μ-a.p.t.

(b) Un proces Markov $\mathbf{X}$ pe F se numeşte *reductibil* $\iff \exists\, A_1,\, A_2 \subset F$ cu $F = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, $\mu(E_i) > 0$ şi cu $P^x(X_t \in A_i, \forall t) = 1$, $\forall x \in A_i$, $i = \overline{1,2}$. $\mathbf{X}$ se numeşte *ireductibil* $\iff \mathbf{X}$ nu este reductibil.

Forma Dirichlet asociată se obţine astfel:

Teorema 3.6.5. *([**22**], pag.23) Pentru $(P_t)_{t\ge 0}$ semigrup tare continuu μ-simetric pe $L^2(F,\mu)$, markovian, se defineşte, pentru $f \in L^2(F,\mu)$ funcţia $\varphi_f(t)$:*

$$\varphi_f(t) := 1/t(f - P_t f, f),\ t > 0$$

$\varphi_f(t)$ pozitivă crescťoare. Fie

$$\mathcal{D} := \left\{ f \in L^2(F,\mu) \mid \lim_{t\searrow 0} \varphi_f(t) < \infty \right\},$$

$$\varepsilon(f,f) = \lim_{t\searrow 0} \varphi_f(t),\ f \in \mathcal{D}.$$

Atunci $(\varepsilon, \mathcal{D})$ este formă Dirichlet. Dacă $(\mathcal{L}, \mathcal{D}(\mathcal{L}))$ este generatorul infinitezimal al lui $(P_t)_t$, atunci $\mathcal{D}(\mathcal{L}) \subset \mathcal{D}$, $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ dens în $L^2(F,\mu)$, iar

$$\varepsilon(f,g) = (-\mathcal{L}f, g),\ f \in \mathcal{D}(\mathcal{L}),\ g \in \mathcal{D}. \tag{3.9}$$

"Trecerea" de la forma Dirichlet $(\varepsilon, \mathcal{D})$ la semigrupul asociat nu este atât de simplă. Formal $U_\alpha = (\alpha - \mathcal{L})^{-1}$, relaţia (3.9) sugerând că

$$(f,g) = ((\alpha - \mathcal{L})U_\alpha f, g) = \alpha(U_\alpha f, g) + \varepsilon(U_\alpha f, g) = \varepsilon_\alpha(U_\alpha f, g). \tag{3.10}$$

Din (3.10), dându-se o formă Dirichlet ε, din teorema lui Riesz de reprezentare se poate defini $U_\alpha f$. Se poate verifica simplu că $(U_\alpha)_\alpha$ satisface ecuaţia rezolvantei şi este tare continuă, deci, din teorema Hille- Yoshida $(U_\alpha)_\alpha)$ este rezolvanta unui semigroup $(P_t)_t$:

Teorema 3.6.6. *([**22**], pag.18) Pentru $(\varepsilon, \mathcal{D})$ formă Dirichlet pe $L^2(F,\mu)$ există atunci un semigrup markovian de contracţii tare continuu μ-simetric $(P_t)_t$ pe $L^2(F,\mu)$, cu generatorul $(\mathcal{L}, \mathcal{D}(\mathcal{L}))$ şi rezolvanta $(U_\alpha)_\alpha$ astfel încât $\mathcal{L}$ şi ε satisfac (3.9) şi*

$$\varepsilon(U_\alpha f, g) + \alpha(f,g) = (f,g),\ f \in L^2(F,\mu),\ g \in \mathcal{D}. \tag{3.11}$$

Evident teorema 3.6.5 şi teorema 3.6.6 sunt "inverse una alteia".

Remarca 3.6.7. (3.9) permite determinarea procesului corespunzător unei forme prin intermediul generatorului. De exemplu, pentru forma Dirichlet $\varepsilon(f,f) = \int |\nabla f|^2$, din formula Gauss-Green, pentru $f,\, g \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$, $(-\mathcal{L}f, g) = \varepsilon(f,g) = \int \nabla f \nabla g = -\int \triangle f$, deci $\mathcal{L} = \triangle$.

Aşadar, o formă Dirichlet $(\varepsilon, \mathcal{D})$ determină un semigrup $(P_t)_t$ pe $L^2(F,\mu)$. Întrebarea este dacă el corespunde la rândul lui unui proces Markov "bun". Dacă ε regulată se obţine chiar un proces Hunt:

Teorema 3.6.8. *([**22**], Thm.7.2.1) (a) Pentru $(\varepsilon, \mathcal{D})$ formă Dirichlet regulată pe $L^2(F,\mu)$, există un proces Hunt μ-simetric $\mathbf{X} = (X_t, t \ge 0, P^x, x \in F)$ pe F asociat formei ε.*

(b) $\mathbf{X}$ este proces de difuzie $\iff \varepsilon$ locală.

Remarca 3.6.9. Se consideră $\mathbf{X} = (X_t, t \ge 0, P^x, x \in \mathbb{R}^2)$ mişcarea browniană pe $\mathbb{R}^2$. Dacă $A \subset \mathbb{R}^2$ mulţime polară, atunci

$$P^x(T_A < \infty) = 0,\ \forall x.$$

Se obţine un nou proces Hunt $\mathbf{Y} = (Y_t, t \ge 0, Q^x, x \in \mathbb{R}^2)$ prin "îngheţarea" lui $\mathbf{X}$ pe A. Se notează $Q^x := P^x$, $x \in \complement A$, iar pentru $x \in A$ se consideră $Q^x(X_t = x, \forall t \ge 0) = 1$. Semigrupurile $(P_t^{\mathbf{X}})_t$ şi $(P_t^{\mathbf{Y}})_t$, pe $L^2(\mathbb{R}^2)$, sunt identice, deci $\mathbf{X}$ şi $\mathbf{Y}$ au asociată aceeaşi formă Dirichlet. Aşadar procesul Hunt obţinut în 3.6.8 nu e unic în general; deci semigrupurile pe L^2 sunt obiecte mai puţin precise decât procesele. Dar aceasta este singura problemă ce poate apare - a se vedea [[**22**], Thm. 4.2.7.]. De aceea, în continuare procesele se vor presupune a avea *toate punctele non-polare, deci procesul Hunt va fi determinat unic de forma Dirichlet* ε.

Conservativitatea şi ireductibilitatea lui ε se pot interpreta în termeni de procesul $\mathbf{X}$:

LEMA 3.6.10. *ε conservativă $\Longrightarrow$ $P_t 1 = 1$ iar procesul Markov asociat $\mathbf{X}$ are "durată de viaţă " infinită.*

DEMONSTRAŢIE. $f \in \mathcal{D}(\mathcal{L}) \Longrightarrow 0 \le \varepsilon(1+\lambda f, 1+\lambda f)$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, deci $\varepsilon(1, f) = 0$. De aici $(-\mathcal{L}1, f) = 0$, de unde $\mathcal{L}1 = 0$ a.s, deci $P_t 1 = 1$. $\square$

LEMA 3.6.11. *ε ireductibilă $\Longrightarrow$ $\mathbf{X}$ ireductibil.*

DEMONSTRAŢIE. Presupunând $\mathbf{X}$ reductibil şi $F = A_1 \cup A_2$ o descompunere, atunci $P_t 1_{A_1} = 1_{A_1}$, deci $\varepsilon\left(1_{A_1}, 1_{A_1}\right) = 0$. Cum $1 \neq 1_{A_1}$ în $L^2(F, \mu)$ rezultă ε nu e ireductibilă. $\square$

Unul din fenomenele remarcabile privind formele Dirichlet este acela că există echivalenţă între anumite inegalităţi de tip Sobolev pentru o formă ε şi majoranţi ai densităţii semigrupului de tranziţie ale procesului asociat $\mathbf{X}$. Aceste legături au fost deduse pentru prima dată de Varopoulos ([**63**]); [**12**] conţine o bună introducere în acest sens (a se vedea şi [**11**] şi referinţele aferente).

Se spune că $(\varepsilon, \mathcal{D})$ *satisface o inegalitate de tip Nash* $\Longleftrightarrow$

$$||f||_1^{4/\theta}\left(\delta||f||_2^2 + \varepsilon(f,f)\right) \ge c||f||_2^{2+4/\theta},\ f \in \mathcal{D}. \tag{3.12}$$

Inegalitatea este foarte greu de verificat în această formă deloc simplă. În situaţia clasică a formei asociate laplacianului pe $\mathbb{R}^d$ sau o varietate, se poate obţine din inegalităţi izoperimetrice.

Teorema ce urmează conţine un prim rezultat de acest tip. Nu se va continua prezentarea acestor lucruri; legătura menţionată este una remarcabilă şi a trebuit punctată măcar.

TEOREMA 3.6.12. *([**12**], Th.2.1) Se consideră $(\varepsilon, \mathcal{D})$ formă Dirichlet regulată conservativă, $(P_t)_t$ semigrupul pe $L^2(F, \mu)$ şi $\mathbf{X} = (X_t, t \ge 0, P^x, x \in F)$ procesul Hunt asociate cu ε.*

(a) Dacă ε satisface o inegalitate de tip Nash cu constante c, δ, θ, atunci există $c' = c'(c, \theta)$ astfel încât

$$||P_t||_{1\to\infty} \le c' e^{\delta t} t^{-\theta/2},\ t > 0. \tag{3.13}$$

(b) Dacă $(P_t)_t$ satisface (3.13) cu constantele c', δ, θ atunci ε satisface o inegalitate de tip Nash cu constantele $c'' = c''(c', \theta)$, δ, θ.

REMARCA 3.6.13. Cazurile considerate cel mai des sunt $\delta = 0$ sau $\delta = 1$, căutându-se majoranţi în special pentru $t \in (0, 1]$. Pentru $\delta = 0$ se poate absorbi $e^{\delta t}$ în constanta c. Acest rezultat produce majoranţi în termeni de proprietăţi de contractivitate ale semigrupului $(P_t)_t$. Dacă $(P_t)_t$ posedă densitate "bună" $p(t, x, y)$, atunci $||P_t||_{1\to\infty} = \sup\limits_{x,y} p(t, x, y)$, deci (3.13) produce majoranţi globali pentru $p(t, \cdot, \cdot)$.

3.7. "Urma" unei forme Dirichlet şi procesul Markov asociat

Fie $\mathbf{X} = (X_t, t \ge 0, P^x, x \in F)$ proces Hunt μ-simetric pe un spaţiu metric local compact cu bază numărabilă (F, μ), cu semigrup asociat $(P_t)_t$ şi formă Dirichlet regulată $(\varepsilon, \mathcal{D})$. Se presupune suplimentar

$$\mathrm{Cap}(\{x\}) > 0,\ \forall\, x \in F. \tag{3.14}$$

De aici x regulat pentru $\{x\}$ (a se vedea secţiunea 3.5.2), $\forall\, x \in F$, adică

$$P^x(T_x = 0) = 1,\ x \in F.$$

Deci ([**25**]) $\mathbf{X}$ posedă "timp local" (x, t)-măsurabil $(L_t^x, x \in F, t \ge 0)$ cu

$$\int_0^t f \circ X_s ds = \int_F f(x) L_t^x \mu(dx),\ f \in L^2(F, \mu)$$

.

Fie ν măsură σ-finită pe F (de obicei, se mai presupune suplimentar că ν "nu încarcă mulţimi de capacitate zero", dar ea este îndeplinită din (3.14)). Fie $(A_t)_t$ funcţională aditivă continuă (C.A.F.) asociată lui ν:

$$At = \int L_t^x \nu(dx),$$

şi $\tau_t = \inf\{s | A_s > t\}$ "inversa" lui A. Fie G închiderea suportului lui ν. Fie $\widetilde{X}_t = X_{\tau_t}$: atunci, din [**9**], pag.212, $\widetilde{\mathbf{X}} = (\widetilde{X}_t, t \ge 0, P^x, x \in G)$ este şi el un proces Hunt. $\widetilde{X}$ se numeşte *urma* lui X pe G.

Se mai consideră şi următoarea "operaţie" pe o formă Dirichlet ε. Pentru $g \in L^2(G, \nu)$ se pune

$$\widetilde{\varepsilon}(g, g) = \inf\{\varepsilon(f, f) \mid f_{|G} = g\}. \tag{3.15}$$

Are loc atunci

TEOREMA 3.7.1. *([**22**], Th.6.2.1) (a) $(\widetilde{\varepsilon}, \widetilde{\mathcal{D}})$ formă Dirichlet regulată pe $L^2(G, \nu)$.*
(b) $\widetilde{\mathbf{X}}$ este proces Hunt ν-simetric, cu formă Dirichlet $(\widetilde{\varepsilon}, \widetilde{\mathcal{D}})$.

Atunci $(\widetilde{\varepsilon}, \widetilde{\mathcal{D}})$ este forma Dirichlet asociată lui $\widetilde{\mathbf{X}}$: $\widetilde{\varepsilon}$ se va numi *urma* lui ε (pe G).

REMARCA 3.7.2. 1. Domeniul $\widetilde{\mathcal{D}}$ al lui $\widetilde{\varepsilon}$ e format cu acei g pentru care infimumul din (3.15) este finit. Dacă $g \in \widetilde{\mathcal{D}}$ atunci, cum ε închisă, infimumul în (3.15) se atinge (de exemplu, de f). Pentru h funcţie ce se anulează pe $\complement G$, cum $(f + \lambda h)_{|G} = g$, are loc

$$\varepsilon(f, f) \leq \varepsilon(f + \lambda h, f + \lambda h),$$

de unde $\varepsilon(f, h) = 0$. Deci, pentru $f \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$, şi se alege $h \in \mathcal{D}$, are loc $(-h, \mathcal{L}f) = 0$, deci $\mathcal{L}f = 0$ a.p.t. pe $\complement G$. Acest calcul sugerează fatul că funcţia minimizantă f din (3.15) este extensia armonică a lui g la F; adică, soluţia problemei Dirichlet $f = g$ pe G, $\mathcal{L}f = 0$ pe $\complement G$.

2. Se va nota $\widetilde{\varepsilon} = \mathrm{Tr}(\varepsilon | G)$ urma formei Dirichlet ε la G.

CAPITOLUL 4

Forme Dirichlet pe fractali

Se prezintă principalii paşi ai construcţiei unei forme Dirichlet pe o S.A.P.C.F. urmându-se în principal lucrarea lui J. Kigami *Analysis on Fractals* ([**30**], cap.2,3). Subiectul, deja clasic, este netrivial, dar se bazează pe rezultate simple de teoria potenţialului în reţele electrice finite ([**17**]-1, [**40**]-2). El a fost realizat prin contribuţia deosebită a lui J. Kigami ([**29**]), T. Kumagai ([**32**]), urmând ideilor excepţionale "trasate" în articole mai vechi de S. Kusuoka ([**33**]), M. Fukushima ([**21**]), Fukushima şi Shima ([**23**]) şi Kusuoka şi Zhou ([**34**]). Construcţia formei Dirichlet regulate locale pe "fractal" (S.A.P.C.F. conexă) depinde de existenţa unei *forme proprii ireductibile* (*structură armonică*) pentru aşa numita *funcţie de renormalizare asociată structurii.* Problema existenţei, unicităţii, aproximării sau chiar determinării efective a acestor forme proprii este o problemă critică, poartă denumirea de *renormalizare* şi face obiectul capitol al cincelea. Existenţa a fost complet rezolvată pe clasa fractalilor F.C. ([**35**]) şi mai general F.C.A. ([**20**]). Unicitatea a fost rezolvată complet pe F.C.A. de către C. Sabot ([**59**]). Rezultate excepţionale privind existenţa, unicitatea şi aproximarea structurilor armonice pe clasa mai largă a S.A.P.C.F. cu ipoteze suplimentare de conexiune sau simetrie au fost obţinute de V. Metz ([**38**]-[**46**]).

În acest capitol se vor schiţa aşadar etapele construcţiei de forme Dirichlet în sensul celor spuse mai sus, întâi pe sisteme finite remarcabile de puncte ale "fractalului", apoi printr-un procedeu de trecere la limită, şirul formelor Dirichlet finit dimensionale şi a operatorilor corespunzători va "produce" o formă pe fractalul propriuzis. Ea se va obţine ca închidere a şirului de reţele finite în raport cu o metrică aşa zisă *rezistivă* (cazul structurilor armonice *regulate*) sau măcar scufunda în fractal (pentru structuri armonice *neregulate*). Deasemenea se prezintă succint construcţia proceselor de difuzie asociate (urmând expoziţia din [**3**]-4,7, cu apel la dualitatea forme Dirichlet - procese, [**22**] - cap.4,7).

În prima secţiune a acestui capitol se prezintă de către autor, o nouă manieră, mai riguroasă, de introducere a conceptelor necesare punerii problemei renormalizării: forme Dirichlet, operatori asociaţi şi matrici de conductanţă.

4.1. Forme Dirichlet şi laplacieni pe mulţimi finite

Fie V finită.

4.1.1. Spaţiile vectoriale $\mathcal{L}_2(V)$ şi $\mathcal{L}_{sim}(V)$.

Se consideră spaţiul Hilbert $\Big(l(V), (\,\cdot, \cdot\,)\Big)$, cu

$$l(V) := \Big\{f \,\big|\, f : V \longrightarrow \mathbb{R}\Big\},\ (u, v) := \sum_{p\in V} u(p)v(p),\ u, v \in l(V).$$

Pentru $U \subset V$, se va nota $\chi_U^V =: \chi_U$ funcţia caracteristică a lui U. Pe $l(V)$ se consideră baza canonică $\{\chi_{\{p\}} =: \chi_p\}_{p\in V}$, $\chi_p(q) = \delta_{pq}$ (simbolul Kronecker), $\forall\, q \in V$, pentru $p \in V$. Oricărui $H : l(V) \longrightarrow l(V)$ operator liniar îi corespunde în $\{\chi_p\}_{p\in V}$ o unică matrice notată tot H, $H := \{H_{pq}\}_{p,q\in V} \in \mathcal{M}_{\#(V)}(\mathbb{R})$, cu $H_{pq} := (H\chi_q, \chi_p) = (H\chi_q)(p)$. Evident $(Hu)(p) = \sum_{q\in V} H_{pq}u(q)$, $\forall\, u \in l(V)$, $\forall\, p \in V$.

$H : l(V) \longrightarrow l(V)$ operator liniar, se va numi *simetric* $\Longleftrightarrow$ $(Hu, v) = (u, Hv)$, $\forall\, u, v \in l(V)$. În acest caz matricea asociată va fi simetrică ($H_{pq} = H_{qp}$, $p \neq q \in V$).

Se consideră $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial $\mathcal{L}(V) := \Big\{H : l(V) \longrightarrow l(V) \,\big|\, H \text{ operator liniar}\Big\}$ şi $\mathbb{R}$-subspaţiul său

$$\mathcal{L}_{sim}(V) := \Big\{H : l(V) \longrightarrow l(V) \,\big|\, H \text{ operator liniar simetric}\Big\}.$$

Se mai consideră şi $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial

$$\mathcal{L}_2(V) := \Big\{\varepsilon : l(V) \times l(V) \longrightarrow \mathbb{R} \,\big|\, \varepsilon \text{ formă biliniară simetrică}\Big\}.$$

Între cele două spaţii se poate defini $\Pi : \mathcal{L}_{sim}(V) \longrightarrow \mathcal{L}_2(V)$, $\Pi(H) := \varepsilon_H$, unde ε_H este definit prin

$$\varepsilon_H(u, v) := -(u, Hv) = -(Hu, v),\ u, v \in l(V). \tag{4.1}$$

Se verifică uşor că aplicaţia Π este bine definită, liniară şi bijectivă (simetria lui H atrage simetria lui ε_H, liniaritatea şi injectivitatea sunt triviale, din teorema lui Riesz este surjectivă), deci este izomorfism de $\mathbb{R}$-spaţii vectoriale. $\Big($$\Pi$ s-ar fi putut defini de fapt de la $\mathcal{L}(V)$ la spaţiul formelor biliniare nu neapărat simetrice $\Big)$.

4.1.2. Conuri de forme în $\mathcal{L}_2(V)$.

DEFINIŢIA 4.1.1. Se consideră $\varepsilon \in \mathcal{L}_2(V)$. Despre ε se va cere să satisfacă una din axiomele:

- (F.D.1) $\Big(\forall\, u \in l(V)\Big)\Big(\varepsilon(u,u) \geq 0\Big)$ (*Pozitiv semidefinire*);
- (F.D.2) $\Big(\varepsilon(u,u) = 0 \Longleftrightarrow u \text{ constantă}\Big)$ (*Ireductibilitate*);
- (F.D.3) $\Big(\forall\, u \in l(V)\Big)\Big(\varepsilon(\overline{u},\overline{u}) \leq \varepsilon(u,u)\Big)$ (*Proprietatea Markov*).

(pentru $u \in l(V)$, s-a noatat $\overline{u} := 0 \vee (1 \wedge u)$).

Axioma (F.D.2) va fi "spartă" în două părţi (implicaţiile "$\Leftarrow$" şi "$\Rightarrow$"):

- (F.D.2)$'$ $\Big(\varepsilon(1,1) = 0\Big)$ (*Conservativitate*);
- (F.D.2)$''$ $\Big(\varepsilon(u,u) = 0 \Longrightarrow u \text{ constantă}\Big)$ (*Ireductibilitate "slabă"*).

Se consideră mulţimile

$$\mathcal{FD}(V) := \Big\{\varepsilon \in \mathcal{L}_2(V) \,\Big|\, \varepsilon \text{ satisface (F.D.1),(F.D.2),(F.D.3)}\Big\},$$

$$(\mathcal{FD}(V))' := \Big\{\varepsilon \in \mathcal{L}_2(V) \,\Big|\, \varepsilon \text{ satisface (F.D.1),(F.D.2)}', \text{(F.D.3)}\Big\},$$

$$\widetilde{\mathcal{FD}}(V) := \Big\{\varepsilon \in \mathcal{L}_2(V) \,\Big|\, \varepsilon \text{ satisface (F.D.1),(F.D.2)}\Big\},$$

$$\Big(\widetilde{\mathcal{FD}}(V)\Big)' := \Big\{\varepsilon \in \mathcal{L}_2(V) \,\Big|\, \varepsilon \text{ satisface (F.D.1),(F.D.2)}'\Big\}.$$

OBSERVAŢIA 4.1.2. Evident $\mathcal{FD}(V) \subsetneqq (\mathcal{FD}(V))' \subsetneqq \Big(\widetilde{\mathcal{FD}}(V)\Big)'$ $\mathbb{R}$-subconuri în $\mathcal{L}_2(V)$, iar $\widetilde{\mathcal{FD}}(V) \subsetneqq \Big(\widetilde{\mathcal{FD}}(V)\Big)'$ $\mathbb{R}$-subconuri în $\mathcal{L}_2(V)$. Formele ε cu (F.D.1) şi (F.D.3) se numesc *forme Dirichlet pe V*. Elementele lui $(\mathcal{FD}(V))'$ se numesc *forme Dirichlet conservative pe V*; în mod firesc elementele lui $\mathcal{FD}(V)$ se vor numi *forme Dirichlet ireductibile*; deasemenea, elementele din $\Big(\widetilde{\mathcal{FD}}(V)\Big)'$ se vor numi *forme biliniare simetrice, pozitiv semidefinite conservative* iar elementele din $\widetilde{\mathcal{FD}}(V)$ se vor numi *forme biliniare simetrice, pozitiv semidefinite ireductibile*. Ultimele două denumiri fiind prea lungi, se vor folosi mai degrabă sintagme de forma "formă cu (F.D.1), (F.D.2)", etc.

Se mai poate considera şi axioma (F.D.3)^t pentru $\varepsilon \in \mathcal{L}_2(V)$:

- (F.D.3)^t $\Big(\forall\, u \in l(V)\Big)\Big(\varepsilon(\overline{u},\overline{u}) < \varepsilon(u,u)\Big)$ (*Proprietatea Markov strictă*).

Se va nota atunci

$$(\mathcal{FD}(V))^t := \Big\{\varepsilon \in \mathcal{L}_2(V) \,\Big|\, H \text{ satisface (F.D.1),(F.D.2),(F.D.3)}^t\Big\},$$

iar elementele lui $(\mathcal{FD}(V))^t$ se vor numi *forme Dirichlet tare ireductibile.*

Evident, axiomele anterioare pot fi definite şi pentru forme definite pe $l(V)$, cu V infinită!

4.1.3. Conuri de operatori în $\mathcal{L}_{sim}(V)$.

DEFINIŢIA 4.1.3. Se consideră $H \in \mathcal{L}_{sim}(V)$. Despre H se va cere să satisfacă una din axiomele:

- (L.1) $\Big(\forall\, u \in l(V)\Big)\Big((Hu,u) \leq 0\Big)$ (*Negativ semidefinire*);
- (L.2) $\Big(Hu = 0 \Longleftrightarrow u \text{ constantă}\Big)$ (*Ireductibilitate*);
- (L.3) $\Big(\forall\, p \neq q \in V\Big)\Big(H_{pq} = (H\chi_q)(p) \geq 0\Big)$ (*Pozitivitate*).

Axioma (L.2) va fi "spartă" în două părţi (implicaţiile "$\Leftarrow$" şi "$\Rightarrow$"):

- (L.2)$'$ $\Big(H1 = 0\Big) \Longleftrightarrow \Big(\forall\, p \in V\Big)\Big(\sum_{q \in V} H_{pq} = 0\Big)$ (*"Suma pe linii = 0"*);
- (L.2)$''$ $\Big(Hu = 0 \Longrightarrow u \text{ constantă}\Big)$ (*Ireductibilitate "slabă"*).

Se consideră mulţimile

$$\mathcal{LA}(V) := \Big\{H \in \mathcal{L}_{sim}(V) \,\Big|\, H \text{ satisface (L.1),(L.2),(L.3)}\Big\},$$

$$(\mathcal{LA}(V))' := \Big\{H \in \mathcal{L}_{sim}(V) \,\Big|\, H \text{ satisface (L.1),(L.2)}', \text{(L.3)}\Big\},$$

$$\widetilde{\mathcal{LA}}(V) := \Big\{H \in \mathcal{L}_{sim}(V) \,\big|\, H \text{ satisface (L.1),(L.2)}\Big\},$$
$$\Big(\widetilde{\mathcal{LA}}(V)\Big)' := \Big\{H \in \mathcal{L}_{sim}(V) \,\big|\, H \text{ satisface (L.1),(L.2)}'\Big\}.$$

Observaţia 4.1.4. Evident $\mathcal{LA}(V) \subsetneqq (\mathcal{LA}(V))' \subsetneqq \Big(\widetilde{\mathcal{LA}}(V)\Big)'$ $\mathbb{R}$-subconuri în $\mathcal{L}_{sim}(V)$, iar $\widetilde{\mathcal{LA}}(V) \subsetneqq \Big(\widetilde{\mathcal{LA}}(V)\Big)'$ $\mathbb{R}$-subconuri în $\mathcal{L}_{sim}(V)$. Elementele lui $\mathcal{LA}(V)$ se vor numi *Laplacieni pe V*; deasemenea, elementele din $\widetilde{\mathcal{LA}}(V)$ se vor numi *Laplacieni generalizaţi pe V*.

Se mai poate considera şi axioma $(\text{L.3})^t$ pentru $H \in \mathcal{L}_{sim}(V)$:

- $(\text{L.3})^t \Big(\forall\, p \neq q \in V\Big)\Big(H_{pq} = (H\chi_q)(p) > 0\Big)$(*Pozitivitate strictă*).

Se va nota atunci

$$(\mathcal{LA}(V))^t := \Big\{H \in \mathcal{L}_{sim}(V) \,\big|\, H \text{ satisface (L.1),(L.2),(L.3)}^t\Big\},$$

iar elementele lui $(\mathcal{LA}(V))^t$ se vor numi *Laplacieni tare ireductibili.*

4.1.4. Matrici de conductanţă şi reţele. Următoarele noţiuni au legătură cu teoria potenţialului pe grafuri (sau reţele electrice) finite.

Definiţia 4.1.5. Pentru V finită, $c : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ (i.e. matricea $C := (c_{pg})_{p,q\in V} \in \mathcal{M}_{\#(V)}(\mathbb{R})$), cu proprietăţile

- (C.0) $\Big(\forall\, p, q \in V\Big)\Big(c_{pq} := c(p, q) = c(q, p) = c_{qp}\Big)$ (*Simetrie*),
- (C.2) $\Big(\forall\, p \in V\Big)\Big(c_{pp} = c(p, p) = 0\Big)$ (*"0" pe diagonală*),
- (C.3) $\Big(\forall\, p \neq q \in V\Big)\Big(c_{pq} = c(p, q) \geq 0\Big)$ (*Pozitivitate*),

se numeşte *conductanţă pe V* (sau *matrice de conductanţă pe V*); cuplul $N := (V, c)$ se numeşte *reţea (electrică rezistivă finită).* N poate fi privit cu ajutorul grafului $\Gamma_N := (V, E)$, $E := \{\{p, q\} \subset V \,|\, c(p, q) > 0\}$. Mulţimea tuturor matricelor de conductanţă pe V se notează $\mathcal{M}_{cond}(V)$.

$N := (V, c)$ se numeşte *conexă* (sau conductanţa c se numeşte *ireductibilă*) $\Longleftrightarrow$ graful Γ_N este conex. Mulţimea tuturor matricelor de conductanţă ireductibile se notează $\mathcal{M}^{i}_{cond}(V)$.

$N := (V, c)$ se numeşte *tare conexă* (sau conductanţa c se numeşte *tare ireductibilă*) $\Longleftrightarrow$ graful Γ_N este tare conex. Mulţimea tuturor matricelor de conductanţă tare ireductibile se notează $\mathcal{M}^{ti}_{cond}(V)$.

4.1.5. Corespondenţe între conuri de operatori în $\mathcal{L}_{sim}(V)$, conuri de forme în $\mathcal{L}_2(V)$ şi matrici de conductanţă. În principiu există o corespondenţă perfectă între axiomele (F.D.) şi cele (L.), adică (F.D.1)$\longleftrightarrow$(L.1), $(\text{F.D.2})' \longleftrightarrow (\text{L.2})'$, $(\text{F.D.2})'' \longleftrightarrow (\text{L.2})''$; deasemenea, are loc corespondenţa $(\text{F.D.1})+(\text{F.D.2})'+(\text{F.D.3})\longleftrightarrow(\text{L.1})+(\text{L.2})'+(\text{L.3})$.

Trebuie remarcat întâi faptul că pentru $H \in \mathcal{L}_{sim}(V)$ cu $(\text{L.2})'$, din (4.1) rezultă

$$\varepsilon_H(u, v) := -(u, Hv) = \frac{1}{2} \sum_{p,q\in V} H_{pq}(u(p) - u(q))(v(p) - v(q)),\ u, v \in l(V), \tag{4.2}$$

evident $\varepsilon_H(\chi_p, \chi_q) = -(\chi_p, H\chi_q) = -H_{pq}$, şi

$$\varepsilon_H(u, u) := -(u, Hu) = \frac{1}{2} \sum_{p,q\in V} H_{pq}(u(p) - u(q))^2,\ u \in l(V). \tag{4.3}$$

Într-adevăr, din $(\text{L.2})'$ rezultă $-H_{pp} = \sum\limits_{q\neq p} H_{pq}$, deci

$$\begin{aligned} -(u, Hv) &= -\sum_p \sum_q H_{pq} u(p)v(q) = -\sum_p H_{pp} u(p)v(p) - \sum_p \sum_{q\neq p} H_{pq} u(p)v(q) = \\ &= \sum_p \sum_{q\neq p} H_{pq} u(p)v(p) - \sum_p \sum_{q\neq p} H_{pq} u(p)v(q) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_p \sum_{q\neq p} H_{pq}(u(p) - u(q))(v(p) - v(q)) = \varepsilon_H(u, v),\ u, v \in l(V). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Aplicaţia Π, izomorfism de $\mathbb{R}$-spaţii vectoriale (de la $\mathcal{L}_{sim}(V)$ la $\mathcal{L}_2(V)$), restric-ţionată la subconurile corespunzătoare lui $\mathcal{L}_{sim}(V)$, va fi izomorfism cu subconurile corespunzătoare lui $\mathcal{L}_2(V)$:

Propoziţia 4.1.6. *$\Pi\left(\Big(\widetilde{\mathcal{LA}}(V)\Big)'\right) = \Big(\widetilde{\mathcal{FD}}(V)\Big)'$; $\Pi\left((\mathcal{LA}(V))'\right) = (\mathcal{FD}(V))'$; $\Pi\Big(\widetilde{\mathcal{LA}}(V)\Big) = \widetilde{\mathcal{FD}}(V)$; $\Pi\left(\mathcal{LA}(V)\right) = \mathcal{FD}(V)$.*

Demonstraţie. Pentru $H \in \mathcal{L}_{sim}(V)$ cu (L.1), $\varepsilon_H(u,u) = -(u,Hu) \geq 0$, $\forall\, u \in l(V)$, adică ε_H are (F.D.1). Pentru $\varepsilon \in \mathcal{L}_2(V)$ cu (F.D.1), din Π surjectivă $\exists\, H \in \mathcal{L}_{sim}(V)$, cu $\varepsilon = \varepsilon_H$. Atunci $(Hu,u) = -\varepsilon(u,u) \leq 0$, $\forall\, u \in l(V)$, deci H are (L.1).

Pentru $H \in \mathcal{L}_{sim}(V)$ cu (L.2)$'$, $\varepsilon_H(1,1) = -(1,H1) = 0$, adică ε_H are (F.D.2)$'$. Pentru $\varepsilon \in \mathcal{L}_2(V)$ cu (F.D.2)$'$, din Π surjectivă $\exists\, H \in \mathcal{L}_{sim}(V)$, cu $\varepsilon = \varepsilon_H$. Atunci $(H1,1) = -\varepsilon(1,1) = 0$, de unde $H1 = 0$, deci H are (L.2)$'$.

Pentru $H \in \mathcal{L}_{sim}(V)$ cu (L.2)$''$, dacă $\varepsilon_H(u,u) = 0$, atunci $(u,Hu) = 0$, deci $Hu = 0$, de unde, cu (L.2)$''$, u =ct., adică ε_H are (F.D.2)$''$. Pentru $\varepsilon \in \mathcal{L}_2(V)$ cu (F.D.2)$''$, din Π surjectivă $\exists\, H \in \mathcal{L}_{sim}(V)$, cu $\varepsilon = \varepsilon_H$. Atunci dacă $Hu = 0$, atunci $\varepsilon_H(u,u) = 0$ de unde, cu (F.D.2)$''$ u =ct., deci H are (L.2)$''$.

Pentru $H \in \mathcal{L}_{sim}(V)$ cu (L.2)$'$+(L.3), rezultă $\varepsilon_H(\overline{u},\overline{u}) \leq \varepsilon_H(u,u)$, $\forall\, u \in l(V)$ (pt. că $|\overline{u}(p) - \overline{u}(q)| \leq |u(p) - u(q)|$, $H_{pq} \geq 0$, $p \neq q$ şi $\varepsilon_H(u,u) = \frac{1}{2} \sum\limits_{p \neq q \in V} H_{pq}(u(p) - u(q))^2$), deci ε_H are (F.D.3).

Dacă $H \in \mathcal{L}_{sim}(V)$ cu (L.1)+(L.2)$'$ + $\neg$(L.3), atunci ε_H are (F.D.1) şi $\exists\, p \neq q$ cu $H_{pq} < 0$. Se poate presupune $H_{pq} = -1$. Se consideră $u \in l(V)$ cu $u(p) =: x$, $u(q) =: y$ şi $u(a) =: z$, $\forall\, a \in V \backslash \{p,q\}$. Atunci $\varepsilon_H(u,u) = \alpha(x-z)^2 + \beta(y-z)^2 - (x-y)^2$, $\alpha := \frac{1}{2} \sum\limits_{a \neq p,q} H_{pa}$, $\beta := \frac{1}{2} \sum\limits_{a \neq p,q} H_{qa}$. Din (F.D.1) pentru ε_H, rezultă $\alpha, \beta \geq 0$. Pentru $x = 1$, $y < 0$, $z = 0$, $\varepsilon_H(u,u) = \alpha - 1 + 2y + (\beta - 1)y^2$, de unde $\varepsilon_H(\overline{u},\overline{u}) = \alpha - 1$. Pentru $|y|$ foarte mic are loc $\varepsilon_H(u,u) < \varepsilon_H(\overline{u},\overline{u})$, deci ε_H nu are (F.D.3); în final ε_H e cu (F.D.1)+(F.D.2)$'$ + $\neg$(F.D.3). Deci (F.D.1)+(F.D.2)$'$+(F.D.3)$\longrightarrow$(L.1)+(L.2)$'$+(L.3). $\square$

Observaţia 4.1.7. 1) Pentru $H := \begin{pmatrix} -(1+\varepsilon) & 1 & \varepsilon \\ 1 & -2 & 1 \\ \varepsilon & 1 & -(1+\varepsilon) \end{pmatrix}$, $\varepsilon_H(u,u) = (x-y)^2 + (y-z)^2 + \varepsilon(x-z)^2 = X^2 + Y^2 + \varepsilon(X+Y)^2 = (1+2\varepsilon)(X^2+Y^2) - \varepsilon(X-Y)^2$, $(x := u(p_1)$, $y := u(p_2)$, $z := u(p_3)$, $X := x - y$, $Y := y - z)$.

Se vede uşor că pentru $\varepsilon > -1/2$, ε_H satisface (F.D.1), (F.D.2) ($\Longleftrightarrow$ H satisface (L.1), (L.2)), iar pentru $\varepsilon \geq 0$, ε_H satisface (F.D.1), (F.D.2), (F.D.3) ($\Longleftrightarrow$ H satisface (L.1), (L.2), (L.3)).

Deasemenea, există o corespondenţă bijectivă trivială i_0 între mulţimea $\mathcal{M}_{cond}(V)$ şi $(\mathcal{LA}(V))'$ (dată de $i_0\left((H_{pq})_{p,q \in V}\right) = (c_{pq})_{p,q \in V}$, unde $(c_{p,q})_{p,q \in V}$ matricea de conductanţă obţinută punând 0 pe diagonală şi în rest se copiază intrările din matricea operatorului H); deci, cu 4.1.6 $\mathcal{M}_{cond}(V)$ se va afla în bijecţie şi cu $(\mathcal{DF}(V))'$ prin $\Xi := \Pi \circ i_0$. Corespondenţa bijectivă între $\mathcal{M}_{cond}(V)$ şi $(\mathcal{FD}(V))'$, anume $\Xi : \mathcal{M}_{cond}(V) \longrightarrow (\mathcal{FD}(V))'$, $\Xi(c) =: \varepsilon_c$, va fi dată de (4.4):

$$\varepsilon_c(u,v) := \frac{1}{2} \sum_{p,q \in V} (u(p) - u(q))(v(p) - v(q))c(p,q),\ u, v \in l(V), \tag{4.5}$$

iar operatorul $H_c := \Pi^{-1}(\varepsilon_c) = \Pi^{-1}(\Xi(c))$ asociat lui c va fi dat de

$$H_c(u)(p) := \sum_{q \in V} (u(q) - u(p))c(p,q),\ u \in l(V),\ p \in V. \tag{4.6}$$

Matricea de conductanţă $c = \Xi^{-1}(\varepsilon)$ se va recupera din ε, sau $H = \Pi^{-1}(\varepsilon)$ prin

$$\varepsilon(\chi_q, \chi_p) = -H(p,q) = -H_{pq} = -c(p,q),$$

$$\varepsilon(\chi_p, \chi_p) = -H(p,p) = c(p) := \sum_{q \in V} c(p,q), p, q \in V,\ p \neq q.$$

Deasemenea, se poate verifica uşor că există bijecţie (tot prin i_0, Π şi $\Xi = \Pi \circ i_0$) între $\mathcal{M}^i_{cond}(V)$, $\mathcal{LA}(V)$ şi $\mathcal{FD}(V)$, adică între matrici de conductanţă ireductibile, laplacieni şi forme Dirichlet ireductibile. Analog pentru *tare ireductibilitate*.

Observaţia 4.1.8. Pentru $H \in \widetilde{\mathcal{LA}}(V)$, (V, H) se numeşte *reţea electrică rezistivă*. Pt. $p, q \in V$, $r_{pq} := H^{-1}_{pq}$ are semnificaţia rezistenţei unui rezistor ataşat la nodurile p, q. Funcţia $v \in l(V)$ are semnificaţia unui potenţial electric ataşat fiecărui nod p, ca şi cum s-ar fi conectat la fiecare nod p câte o baterie cu " + " la p şi " − " la pământ. Pentru un astfel de potenţial v, curentul $i_{p,q}$ dintre p şi q este dat de $i_{p,q} = H_{pq}(v(p) - v(q))$, iar curentul total de la un terminal p la pământ are valoarea $i(p) = (Hv)(p)$.

4.1.6. Principiul lui Dirichlet şi principiul de minim. Problema Dirichlet discretă. I. Pentru $H \in \left(\widetilde{\mathcal{LA}}(V)\right)'$ şi $\varepsilon_H \in \left(\widetilde{\mathcal{FD}}(V)\right)'$ funcţionează următorul principiu:

Propoziţia 4.1.9. *(Principiul lui Dirichlet)([**44**]-2.2) Pentru* $U \subsetneqq V$, *V finită,* $H \in \left(\widetilde{\mathcal{LA}}(V)\right)'$ *şi* $u \in l(U)$, *atunci h minimizează* $\{\varepsilon_H(v,v) \,|\, v \in l(V), v_{|U} = u\} \Longleftrightarrow (Hh)_{V \backslash U} = 0$ *(adică h armonică pe* $V \backslash U$*). De aici* $\varepsilon_H(h,w) = 0$, $\forall\, w \in l(V)$ *cu* $w_{|U} = 0$.

El se deduce scriind

$$\varepsilon_H(h+\lambda(v-h), h+\lambda(v-h)) = \varepsilon_H(h,h) + \lambda^2\varepsilon_H(v-h,v-h) + 2\lambda\varepsilon_H(v-h,h)$$

pentru $v \in l(V)$ cu $v_{|U} = u$ şi ţinând cont că $\varepsilon_H(v-h,h) = -(Hh, v-h)$ şi ε_H pozitiv definită.

II. Pentru $c \in \mathcal{M}_{cond}(V)$ conductanţă şi $H \in (\mathcal{LA}(V))'$, $\varepsilon \in (\mathcal{FD}(V))'$ operatorul şi forma asociate via corespondenţele bijective anunţate, din (4.6) se poate deduce următoarea *proprietate de medie*:

PROPOZIŢIA 4.1.10. *(Proprietatea de medie)([**40**]-2.2) Pentru c matrice de conductanţă şi $p \in V$ neizolat, are loc*

$$\Big(\forall\, u \in l(V)\Big)\Big(Hu(p) = 0 \Longleftrightarrow u(p) = \sum_{q\in V} u(q)\frac{c(p,q)}{c(p)}\Big).$$

Variante corespunzătoare pentru "$\leq$" şi "$\geq$".

III. Cu aceasta se poate deduce (a se vedea [**44**]-pag.7, [**17**]-pag.7-8) următorul *Principiu de minim*, prezentat cu două "variante":

PROPOZIŢIA 4.1.11. *(Principiul de minim)([**40**]-2.4, [**44**]-2.3) A. Fie (V,c) reţea conexă, H şi ε operatorul şi forma asociate, $U \subset V$. Dacă h superarmonică pe $V\backslash U$ (i.e. $Hh(p) \leq 0$, $\forall\, p \in V\backslash U$), atunci h îşi atinge minimul pe U. Dacă în plus h nu e constantă pe mulţimea vecinilor elemntelor lui $V\backslash U$ şi $V\backslash U$ conexă, atunci h îşi atinge minimul doar pe U.*

B. Fie $\varepsilon \in \mathcal{FD}(V)$, c şi H matricea de conductanţă şi operatorul asociat, $U \subset V$. Dacă h superarmonică pe $V\backslash U$ şi $h \geq 0$ pe U, atunci $h \geq 0$ pe V. Dacă în plus h e strict pozitivă într-un punct din U vecin cu elemente din $V\backslash U$ şi $\varepsilon_{|V\backslash U} \in \mathcal{FD}(V\backslash U)$, atunci $h > 0$ pe $V\backslash U$.

În demonstraţie se ţine cont în mod esenţial de conexiune: alegând $p \in V$ unde u îşi atinge minimul şi presupunând $p \in V\backslash U$, din conexiune $c(p) > 0$ şi 4.1.10 plus $Hu(p) \leq 0$ pe $V\backslash U$ implică $u(p) \geq \sum\limits_{q\in V} u(q)\frac{c(p,q)}{c(p)}$, deci $u(q) = u(p)$ pentru toţi q vecini ai lui p în graful asociat lui c, etc.

Pentru $u \in l(V)$, $U \subset V$, o funcţie $v \in l(V)$ armonică pe $V\backslash U$ ($Hv = 0$ pe $V\backslash U$) cu $v_{|U} = u_{|U}$ se numeşte *soluţie a problemei Dirichlet pe V*, cu valori la frontieră u pe U.

Din Principiul de minim (4.1.11-A) rezultă imediat

CONSECINŢA 4.1.12. *(Unicitatea soluţiei problemei Dirichlet)([**40**]-2.5) Fie (V,c) reţea conexă, H şi ε operatorul şi forma asociate, $U \subset V$ şi $u \in l(V)$. Atunci există o unică funcţie $v \in l(V)$, soluţie a problemei Dirichlet pe V, cu valori la frontieră u pe U.*

Unica soluţie a problemei Dirichlet pe V cu valori la frontieră u pe U se notează $\mathcal{H}^u_{V\backslash U}$ sau, mai simplu $h(u)$; deci se poate defini $h := \mathcal{H}_{V\backslash U} := \mathcal{H}^{\varepsilon}_{V\backslash U} = \mathcal{H}^{H}_{V\backslash U} : l(V) \longrightarrow l(V)$, sau chiar $h = \mathcal{H}_{V\backslash U} : l(U) \longrightarrow l(V)$ şi se numeşte *nucleul armonic pe $V\backslash U$ asociat lui H (sau lui ε)*. Din principiul lui Dirichlet 4.1.9 şi 4.1.12 rezultă că

pentru V conexă şi $u \in l(V)$ (sau doar $u \in l(U)$) $h(u)$ este unica funcţie din $l(V)$ care minimizează aplicaţia $(v \longrightarrow \varepsilon_H(v,v))$ pe mulţimea $\{v \in l(V) \,|\, v_{|U} = u_{|U}\}$. Unicitatea funcţiei minimizante se poate obţine şi altfel, dintr-o cunoscută teoremă de minimizare a distanţelor între mulţimi convexe şi închise pe spaţii Hilbert ([**58**]-Th12.3).

OBSERVAŢIA 4.1.13. Tot referitor la 4.1.9, se mai poate spune că, pentru $H \in \Big(\widetilde{\mathcal{LA}}(V)\Big)'$ $\Big($deci $\varepsilon_H \in \Big(\widetilde{\mathcal{FD}}(V)\Big)'\Big)$, deoarece Ker$\varepsilon_H$ poate conţine mai multe funcţii decât constantele (a se vedea 4.1.14), prin aplicarea aceleiaşi teoreme de minimizare ([**58**]-Th12.3) pe spaţiul Hilbert $\Big(l(V)\Big|_{\mathrm{Ker}\varepsilon_H}, \varepsilon_H\Big)$ se va obţine un element $h(u)$ minimizant al lui $(v \longrightarrow \varepsilon_H(v,v))$ pe mulţimea $\{v \in l(V) \,|\, v_{|U} = u\}$ nu neapărat unic. Se poate însă considera că acesta este unic, luându-se cel de normă minimă. Aşadar, se poate defini nucleul armonic $\mathcal{H}_{V\backslash U}$ asociat şi unui $H \in \Big(\widetilde{\mathcal{LA}}(V)\Big)'$ $\Big($sau $\varepsilon \in \Big(\widetilde{\mathcal{FD}}(V)\Big)'\Big)$.

Pentru $U \subset V$, $H \in (\mathcal{LA}(V))'$ se notează $H^U := \Pi_U H \Pi_U^* : l(U) \longrightarrow l(U)$, unde $\Pi_U : l(V) \longrightarrow l(U)$ este "proiecţia pe U", adică $(\Pi_U v)(p) := v_{|U}(p)$, $\forall\, p \in U$, iar Π_U^* adjunctul său. Dacă $p_0 \in V$ nod fixat (numit *nod de referinţă*), se notează $H^0 := H^{V\backslash\{p_0\}}$.

Utilizând principiul de minim 4.1.11-A şi descompunerea $l(V) = l(V\backslash\{p_0\}) \oplus KerH$ pentru un $p_0 \in V$ bine ales, se poate demonstra simplu (a se vedea ([**40**]-3.1))

PROPOZIŢIA 4.1.14. *Pentru (V,c) reţea electrică, H şi ε operatorul şi forma asociate, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(1) *V conexă;*
(2) *ε formă Dirichlet ireductibilă;*

(3) *H laplacian ireductibil ($Ker H = \mathbb{R} \cdot \chi_V$);*
(4) *$\forall U \subset V$, H^U inversabil;*
(5) *H^0 inversabil.*

Se poate demonstra chiar şi pentru $H \in \widetilde{\mathcal{LA}}(V)$ că H^U inversabil (!) (a se vedea 4.1.16).

Pentru V conexă, $U \subsetneq V$, din 4.1.14 rezultă H^U inversabil. Funcţia $G^U := (-H^U)^{-1}$ se numeşte *funcţia Green a lui H pe U*. Se mai notează cu G funcţia Green asociată lui H pe $V\backslash\{p_0\}$, p_0 nod de referinţă fixat. Se poate deduce cu 4.1.14 (pentru demonstraţie a se vedea ([**40**]-3.3)):

PROPOZIŢIA 4.1.15. *Pentru V reţea conexă, H operatorul asociat, $U \subsetneq V$, $p_0 \in U$ nod de referinţă, are loc*
(a) $G_U := \Pi_{U\backslash\{p_0\}} G \Pi^*_{U\backslash\{p_0\}}$ inversabil;
(b) $G\Pi^*_{U\backslash\{p_0\}}(G_U)^{-1} = \Pi_{V\backslash\{p_0\}} \mathcal{H}_{V\backslash U} \Pi^*_{U\backslash\{p_0\}}$;
(c) $(H_U)^{(0)} = -(G_U)^{-1}$.

Discuţia despre funcţii Green se va relua în secţiunea 4.9.

4.1.7. Restricţia ("urma") formelor şi operatorilor asociaţi. Este extrem de important, pentru $U \subsetneq V$, V finită, să se "descompună" o formă ε sau operatorul asociat de pe V relativ la U şi să se găsească o modalitate de a restricţiona forma la U cu "păstrarea energiei".

Echivalent, în teoria reţelelor electrice, două reţele $N = (V, c)$ şi $N_U = (U, c_U)$, $U \subset V$ se numesc *electric echivalente* $\Longleftrightarrow$ ele nu se pot distinge aplicând voltaje pe nodurile lui U şi măsurând curenţii rezultaţi pe U. Dacă se notează H, $[H]_U$ operatorii şi ε_H, $\varepsilon_{[H]_U}$ formele asociate lui N şi N_U, iar $\mathcal{H}_{V\backslash U}$ nucleul armonic al lui H pe $V\backslash U$, din legile lui Kirchhoff, echivalenţa electrică devine $\Pi^*_U H \mathcal{H}_{V\backslash U} u = [H]_U$, $u \in l(U)$ (a se vedea [**37**], pag.23). Pentru forme are loc

$$\begin{aligned} \varepsilon_{[H]_U}(u,u) &= (-[H]_U u, u)_U = \left(-H\mathcal{H}_{V\backslash U} u, \chi^V_U u\right)_V = \left(-H\mathcal{H}_{V\backslash U} u, \chi^V_U \mathcal{H}_{V\backslash U} u\right)_V \\ &= -\sum_{p\in U} H\mathcal{H}_{V\backslash U} u(p) \mathcal{H}_{V\backslash U} u(p) = \varepsilon_H\left(\mathcal{H}_{V\backslash U} u, \mathcal{H}_{V\backslash U} u\right). \end{aligned}$$

Din principiul lui Dirichlet rezultă

$$\varepsilon_{[H]_U}(u,u) = \varepsilon_H\left(\mathcal{H}_{V\backslash U} u, \mathcal{H}_{V\backslash U} u\right) = \inf\left\{\varepsilon_H(v,v) \,\middle|\, v \in l(V),\, v_{|U} = u\right\}.$$

De aici se deduce următoarea teoremă, ce conţine şi forma efectivă a operatorului $[H]_U$ asociat reţelei "reduse", obţinută prin eliminarea vârfurilor $V\backslash U$ (formula poate fi verificată prin calcul sau se foloseşte [**2**]-Th.6):

TEOREMA 4.1.16. *([**30**]-2.1.5,2.1.6) Pentru $U \subsetneq V$, V finită, $H \in \mathcal{L}_{sim}(V)$, se consideră $T := T^U := H^U = \Pi_U H \Pi^*_U : l(U) \longrightarrow l(U)$, $J := J^U := \Pi_{V\backslash U} H \Pi^*_U : l(U) \longrightarrow l(V\backslash U)$, $X := X^U := \Pi_{V\backslash U} H \Pi^*_{V\backslash U} : l(V\backslash U) \longrightarrow l(V\backslash U)$; deci $H \cong \begin{pmatrix} T & J^t \\ J & X \end{pmatrix}$. Se presupune $H \in \widetilde{\mathcal{LA}}(V)$. Atunci*

a) $X = X_U$ negativ definit, deci $\exists\, X^{-1}$ iar

$$\varepsilon_H(u,u) = \varepsilon_X(u_1 + X^{-1}Ju_0, u_1 + X^{-1}Ju_0) + \varepsilon_{T - J^t X^{-1} J}(u_0, u_0),$$

$\forall\, u \in l(V)$ (unde $u_0 := u_{|U}$, $u_1 := u_{|V\backslash U}$);

b) $\Big(\forall\, u \in l(U)\Big)\Big(\exists!\, h(u) \in l(V)\Big)\ \Big(h(u)_{|U} := u,\ h(u)_{|V\backslash U} := -X^{-1}Ju\Big)$ cu

$$\varepsilon_{T - J^t X^{-1} J}(u,u) = \varepsilon_H(h(u), h(u)) = \min\{\varepsilon_H(v,v) \,|\, v \in l(V), v_{|U} = u\}.$$

Atunci $h : l(U) \longrightarrow l(V)$ liniar injectiv, $P_{V,U} : \widetilde{\mathcal{LA}}(V) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{LA}}(U)$, $P_{V,U}(H) := T - J^t X^{-1} J$ bine definit şi $P_{V,U}(\widetilde{\mathcal{LA}}(V)) \subset \widetilde{\mathcal{LA}}(U)$.

$P_{V,U}(H)$ se mai notează $[H]_U$ şi se numeşte *restricţia lui H la U* (d.p.d.v. electric). Operatorul $P_{V,U} : \widetilde{\mathcal{LA}}(V) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{LA}}(V)$ nu este injectiv (de exemplu pentru $H_\varepsilon := \begin{pmatrix} -(1+\varepsilon) & 1 & \varepsilon \\ 1 & -1 & 0 \\ \varepsilon & 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}$, $[H_\varepsilon]_U = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$). Pentru $H \in \widetilde{\mathcal{LA}}(V)$, $h(u)$ este unica soluţie a "problemei Dirichlet" $(Hv)_{V\backslash U} = 0$, $v_{|U} = u$.

Următoarea variantă a *Principiului de minim* (pentru $H \in \mathcal{LA}(V)$) este des utilizată:

LEMA 4.1.17. *([**44**]-2.3, [**30**]-2.1.7) a) Pentru $U \subsetneq V$, V finită, $H \in \mathcal{LA}(V)$, dacă $v \in l(V)$ cu $v_{|U} \geq 0$ şi $(Hv)_{|V\backslash U} \leq 0$, atunci $v \geq 0$ pe V.*

b) Pt. $p \in V\backslash U$, $U_p := \{q \in U \,|\, \exists\, p_1, p_2, \ldots, p_m \in V\backslash U,\, p_1 = p, H_{p_1p_2} > 0, \ldots, H_{p_{m-1}p_m} > 0, H_{p_mq} > 0\}$ şi $(Hv)_{|V\backslash U} = 0$, atunci

$$\min_{q\in U_p} u(q) \leq u(p) \leq \max_{q\in U_p} u(q),\ \forall\, p \in V\backslash U.$$

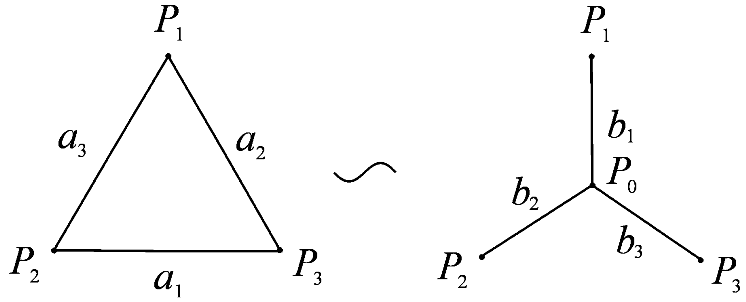

FIGURA 4.1. Transformarea $\Delta - Y$

Mai mult, $u(p) = \max_{q \in U_p} u(q) \iff u_{|U_p} = ct.$

4.1.8. Rezistenţă efectivă. Rezistenţa efectivă între două puncte p, $q \in V$ joacă un rol fundamental pentru introducerea conceptului de reţele electrice echivalente. Pentru V finită şi $H \in \widetilde{\mathcal{LA}}(V)$, p, $q \in V$, $p \neq q$, *rezistenţa efectivă între* p *şi* q *relativ la* H este dată de

$$R_H(p,q) := \left(\min\{\varepsilon_H(u,u) \mid u \in l(V),\, u(p) = 1, u(q) = 0\}\right)^{-1}.$$

Pentru $p = q \in V$, se pune $R_H(p,p) = 0$.

$R_H(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ *se dovedeşte a fi o metrică pe* V *dacă* $H \in \mathcal{LA}(V)$. Pentru a proba acest fapt este nevoie de noţiunea de *reţele electrice echivalente, sau compatibile*: pentru $V_1 \subset V_2$ finite şi $H_1 \in \widetilde{\mathcal{LA}}(V_1)$, $H_2 \in \widetilde{\mathcal{LA}}(V_2)$, atunci $(V_1, H_1) \leq (V_2, H_2) \iff V_1 \subset V_2$ şi $[H_2]_{V_1} = H_1$ ([**30**]-2.1.10). Se poate deduce atunci:

PROPOZIŢIA 4.1.18. *([**30**]-2.1.11)* $(V_1, H_1) \leq (V_2, H_2) \Rightarrow R_{H_1}(p,q) = R_{H_2}(p,q)$, $\forall\, p, q \in V_1$.

Are loc şi o reciprocă acestui rezultat, dar doar pentru $H_i \in \mathcal{LA}(V_i)$, $i = 1, 2$, unde se foloseşte în mod fundamental (L.3) pentru H_i:

TEOREMA 4.1.19. *([**30**]-2.1.12, 2.1.13) 1)* $H_i \in \mathcal{LA}(V)$, $i = 1, 2 \Longrightarrow$

$$H_1 = H_2 \iff R_{H_1}(p,q) = R_{H_2}(p,q),\ \forall\, p, q \in V;$$

2) $H_i \in \mathcal{LA}(V_i)$, $i = 1, 2 \Longrightarrow$

$$(V_1, H_1) \leq (V_2, H_2) \iff R_{H_1}(p,q) = R_{H_2}(p,q),\ \forall\, p, q \in V_1.$$

1) se demonstrează prin inducţie după $\#(V)$, $V := \{p_1, \ldots, p_n\}$, scriind $D_1^i := [H_1]_{V_i}$, $D_2^i := [H_2]_{V_i}$, $V_i := V \backslash \{p_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, etc., iar 2) e o consecinţă imediată a lui 1).

Următoarele leme sunt extrem de utile în studiul reţelelor electrice echivalente, fiind consecinţe ale formulei generale din 4.1.16:

LEMA 4.1.20. *(Transformarea $\Delta - Y$)([**30**]-2.1.15, [**3**]-4.24) Pt.* $U = \{P_1, P_2, P_3\}$, $V := \{P_0\} \cup U$, $H = (H_{P_iP_j})_{i,j=\overline{1,3}} \in (\mathcal{LA}(U))^{ti}$ *(adică cu* $H_{P_iP_j} > 0$, $\forall\, i \neq j$*) şi* $H' = (H'_{P_iP_j})_{i,j=\overline{0,3}} \in \mathcal{LA}(V)$*, atunci*

$$[H']_U = H \iff \forall\, 0 \leq i < j \leq 3,\ H'_{P_iP_j} = R_j^{-1},\ i = 0 \text{ şi } H'_{P_iP_j} = 0,\ i \neq 0,$$

unde $R_i = \dfrac{R_{ij}R_{ik}}{R_{ij} + R_{jk} + R_{ki}}$, $i, j, k = 1, 2, 3$, $i \neq j \neq k \neq i$, $R_{ij}^{-1} := H_{P_iP_j}^{-1}$.

Forma de mai sus respectă notaţiile din teoria reţelelor electrice. Pentru o manieră mai simplă a se vedea figura 4.1, pentru care au loc formulele:

- $\Delta \to Y$: $b_i = (a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1)/a_i$, $i = 1, 2, 3$;
- $Y \to \Delta$: $a_1 = b_2b_3/(b_1 + b_2 + b_3)$, $a_2 = b_1b_3/(b_1 + b_2 + b_3)$, $a_3 = b_1b_2/(b_1 + b_2 + b_3)$.

LEMA 4.1.21. *(Transformarea $X - \boxtimes$)([**37**]-pag.317) Pt.* $U = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $V := U \cup \{a_5\}$, $D = (d_{ij})_{i,j=\overline{1,5}} \in \mathcal{LA}(V)$ *cu* $d_{i5} > 0$, $i = \overline{1,4}$, $d_{ij} = 0$, *pentru* $j \neq 5$, *rezultă* $[D]_U = C = (c_{ij})_{i,j=\overline{1,4}} \in (\mathcal{LA}(U))^{ti}$, *cu* $c_{ij} = d_{i5}d_{j5}\Big/\left(\sum_{k=1}^{4} d_{k5}\right)$, $1 \leq i < j \leq 4$ *(figura 4.2-(1)).*

LEMA 4.1.22. *(Transformarea $X - |$)([**37**]) Pt.* $U = \{a_1, a_3, a_5\}$, $V := U \cup \{a_2, a_4\}$, $D = (d_{ij})_{i,j=\overline{1,5}} \in \mathcal{LA}(V)$ *cu* $d_{i5} > 0$, $i = \overline{1,4}$, $d_{ij} = 0$, *pentru* $j \neq 5$, *rezultă* $[D]_U = C = (c_{ij})_{i,j \in \{1,3,5\}} \in \mathcal{LA}(U)$, *cu* $c_{i5} = d_{i5}$, $i \in \{1, 3\}$, $c_{13} = 0$ *(figura 4.2-(2)).*

Transformarea $\Delta - Y$ se utilizează şi pentru a proba axioma triunghiului pentru a demonstra

PROPOZIŢIA 4.1.23. *([**30**]-2.1.14)* $R_H(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ *metrică pe* V *dacă* $H \in \mathcal{LA}(V)$.

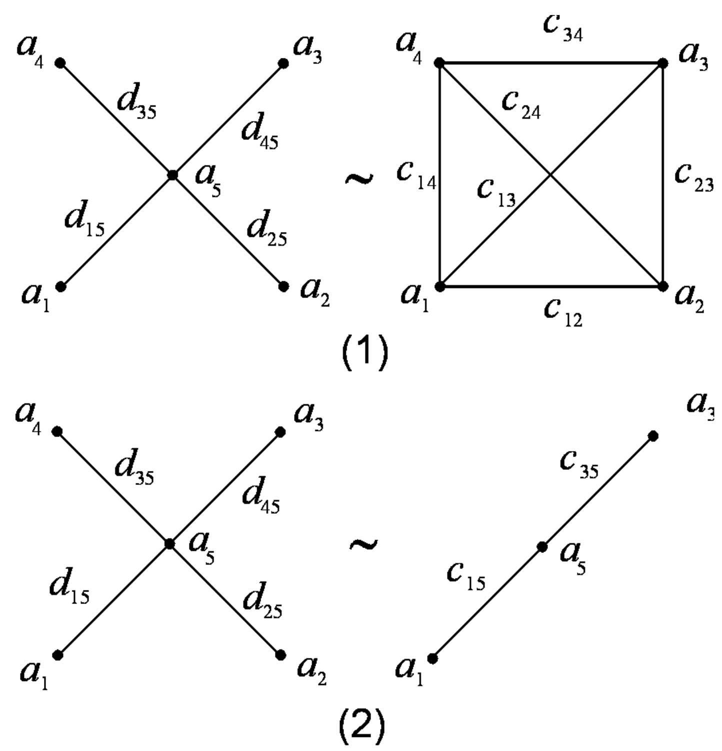

FIGURA 4.2. Transformarea $X - \boxtimes$

Deasemenea în demonstraţia faptului că R_H e metrică intervine în mod fundamental 4.1.19-2).

Dacă $H \in \widetilde{\mathcal{LA}}(V)$ doar, atunci R_H nu mai e neapărat metrică. De exemplu, $V = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, $H_{p_ip_j} = 1$, $(i,j) \neq (1,4)$, $H_{p_ip_j} = -\varepsilon$, $(i,j) = (1,4)$, $\varepsilon > 0$; pt. ε suficient de mic, $H \in \widetilde{\mathcal{LA}}(V)$ şi R_H metrică pe V (altfel nu).

Pentru $H \in \widetilde{\mathcal{LA}}(V)$ se poate deduce totuşi

PROPOZIŢIA 4.1.24. *([**30**]-2.1.18)* $\sqrt{R_H(\cdot\,,\cdot)}$ *este metrică pe* V.

Acest fapt rezultă din:

PROPOZIŢIA 4.1.25. *([**30**]-2.1.16, 2.1.17) Pentru* V *finită,* $H \in \widetilde{\mathcal{LA}}(V)$, $p,\, q \in V$, $p \neq q$,

$$R_H(p,q) = \max\left\{ \frac{|u(p) - u(q)|^2}{\varepsilon_H(u,u)} \mid u \in l(V),\, \varepsilon_H(u,u) \neq 0 \right\},$$

de unde

$$|u(p) - u(q)|^2 \leq R_H(p,q)\varepsilon_H(u,u),\, \forall\, u \in l(V),\, p,q \in V.$$

4.2. Şiruri de forme şi operatori asociaţi

4.2.1. Forme asociate şirurilor de reţele electrice. Rezistenţa efectivă. Pentru a putea construi pe fractali forme şi operatori cu proprietăţi "bune" este necesar un "procedeu" de "trecere la limită". În continuare se vor discuta limite de reţele electrice pe mulţimi finite ce satisfac în plus o condiţie de "legătură":

DEFINIŢIA 4.2.1. 1) Se consideră $\mathcal{S} := \{(V_m, H_m)\}_{m\geq 0}$ şir de reţele electrice (V_m finite şi $H_m \in \widetilde{\mathcal{LA}}(V_m)$, $\forall\, m \geq 0$). $\mathcal{S} := \{(V_m, H_m)\}_{m\geq 0}$ se numeşte *şir compatibil de reţele elctrice* $\Longleftrightarrow$ $(V_m, H_m) \leq (V_{m+1}, H_{m+1})$, $\forall\, m \geq 0$ ($\Longleftrightarrow V_m \subset V_{m+1}$ şi $[H_{m+1}]_{V_m} = H_m$, $\forall\, m \geq 0$);

2) Pentru $\mathcal{S} := \{(V_m, H_m)\}_{m\geq 0}$ şir compatibil de reţele elctrice, se defineşte $V_* := \bigcup\limits_{m\geq 0} V_m$. Din 4.1.16 $\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{H_m}\left(u_{|V_m}, u_{|V_m}\right) &= \min\left\{\varepsilon_{H_{m+1}}(v,v) \,\middle|\, v \in l(V_{m+1}),\, v_{|V_m} = u_{|V_m}\right\} \\ &\leq \varepsilon_{H_{m+1}}\left(u_{|V_{m+1}}, u_{|V_{m+1}}\right), \end{aligned}$$

deci, se poate defini

$$\mathcal{F}(\mathcal{S}) := \left\{ u \in l(V_*) \,\middle|\, \sup_{m\geq 0} \varepsilon_{H_m}\left(u_{|V_m}, u_{|V_m}\right) < \infty \right\},$$
$$\varepsilon_{\mathcal{S}}(u,v) := \sup_{m\geq 0} \varepsilon_{H_m}\left(u_{|V_m}, u_{|V_m}\right),\ u, v \in \mathcal{F}(\mathcal{S}),$$
$$R_{\mathcal{S}}(p,q) := R_{H_m}(p,q),\ p, q \in V_m \subset V_*.$$

$R_{\mathcal{S}}$ este bine definită (teorema 4.1.19), iar

$$(\varepsilon_{\mathcal{S}})_{|l(V_m)\times l(V_m)} = \varepsilon_{H_m},\ (R_{\mathcal{S}})_{|l(V_m)\times l(V_m)} = R_{H_m},\ m \geq 0.$$

Pentru $\mathcal{S} := \{(V_m, H_m)\}_{m\geq 0}$ şir compatibil de reţele elctrice se poate verifica uşor că $[H_n]_{V_m} = H_m$, $n > m$. Din 4.1.16 pentru $U := V_m$, $V := V_n$, $u \in l(V_m) \Longrightarrow$

$$\varepsilon_{H_m}(u,u) = \varepsilon_{H_n}(h_{n,m}(u), h_{n,m}(u)) = \min\left\{\varepsilon_{H_n}(v,v) \,|\, v \in l(V_n), v_{|V_m} = u\right\}.$$

Deasemenea, pentru $u \in l(V_m)$, are loc $h_{n+1,m}(u)_{|V_m} = u = h_{n,m}(u)_{|V_m}$, $h_{m+2,m+1}(h_{m+1,m}(u)) = h_{m+2,m}(u)$, de unde $h_{n+1,m}(u)_{|V_n} = h_{n,m}(u)$, $\forall\, n > m$. Aşadar, pentru $m \geq 0$ fixat şi $u \in l(V_m)$, se poate defini $h_m(u) \in l(V_*)$ prin $h_m(u)_{|V_n} := h_{n,m}(u)$, $n > m$, şi are loc

$$\varepsilon_{H_m}(u,u) = \sup_{n>m} \varepsilon_{H_n}\left(h_m(u)_{|V_n}, h_m(u)_{|V_n}\right) = \varepsilon_{\mathcal{S}}(h_m(u), h_m(u)) < \infty.$$

Adică este adevărată

LEMA 4.2.2. *([**30**]-2.2.2) Pentru $\mathcal{S} := \{(V_m, H_m)\}_{m\geq 0}$ şir compatibil de reţele electrice şi $m \geq 0$ fixat $\Longrightarrow \left(\exists\, h_m : l(V_m) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{S})\right)\left(\forall\, u \in l(V_m)\right)$*

- *$h_m(u)_{|V_m} = u$;*
- *$\varepsilon_{H_m}(u,u) = \varepsilon_{\mathcal{S}}(h_m(u), h_m(u)) = \min\left\{\varepsilon_{\mathcal{S}}(v,v) \,|\, v \in \mathcal{F}(\mathcal{S}), v_{|V_m} = u\right\}$;*
- *$h_m(u)$ unicul punct de minim al aplicaţiei $(v \longrightarrow \varepsilon_{\mathcal{S}}(v,v))$ pe mulţimea $\left\{v \in \mathcal{F}(\mathcal{S}) \,\middle|\, v_{|V_m} = u\right\}$.*

Unicitatea lui $h_m(u)$ rezultă din aceeaşi teoremă de minimizare pe spaţii Hilbert ([**58**]-Th12.3). Din comentariile de după 4.1.16, rezultă că pentru $m \geq 0$ fixat şi $u \in l(V_m)$ fixată, $h_m(u)$ este unica soluţie a sistemului $(H_n v_n)_{|V_n \setminus V_m} = 0$, $n > m$, $v_{|V_m} = u$ ($v \in l(V_*)$, $v_n := v_{|V_n}$). Deasemenea $h_m : l(V_m) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{S})$ injectivă, deci se poate identifica $l(V_m) \equiv h_m(l(V_m)) \subset \mathcal{F}(\mathcal{S})$; se poate scrie atunci $\varepsilon_{H_m}(u,u) = \varepsilon_{\mathcal{S}}(u,u)$, pentru $u \in l(V_m) \subset \mathcal{F}(\mathcal{S})$.

Principiul de minim (4.1.17) aplicat lui $U = V_m$, $V = V_n$, $n > m$, conduce la *Principiul de minim pentru reţele electrice*:

LEMA 4.2.3. *([**30**]-2.2.3) $\mathcal{S} := \{(V_n, H_n)\}_{n\geq 0}$ şir compatibil de reţele electrice cu $H_n \in \mathcal{LA}(V_n)$, $n \geq 0$ şi $v \in l(V_*)$, $m \geq 0$ cu $(H_n v_n)_{|V_n\setminus V_m} = 0$, $n > m$ ($v_n := v_{|V_n}$) $\Longrightarrow \min_{q\in V_m} v(q) \leq v(p) \leq \max_{q\in V_m} v(q)$, $\forall\, p \in V_*$.*

4.2.2. Metricile $R_{\mathcal{S}}$ şi $R_{\mathcal{S}}^{1/2}$ şi spaţiul Hilbert $\left(\mathcal{F}(\mathcal{S})_{|\sim}, \widehat{\varepsilon}_{\mathcal{S}}\right)$. Pentru $\mathcal{S} := \{(V_n, H_n)\}_{n\geq 0}$ şir compatibil de reţele electrice, 4.1.24 asigură fatul că $R_{H_m}^{1/2}$ metrică pe V_m, $\forall\, m$, iar dacă, în plus, $H_m \in \mathcal{LA}(V_m)$, $\forall\, m$, R_{H_m} metrică pe V_m, $\forall\, m$. De aici şi din modul de definire a lui $R_{\mathcal{S}}$ rezultă:

PROPOZIŢIA 4.2.4. *([**30**]-2.2.4) $\mathcal{S} := \{(V_m, H_m)\}_{m\geq 0}$ şir compatibil de reţele electrice $\Longrightarrow$*

(1) $R_{\mathcal{S}}^{1/2}$ metrică pe V_*;
(2) $R_{\mathcal{S}}$ metrică pe V_* dacă $H_m \in \mathcal{LA}(V_m)$, $\forall\, m$.

Utilizând 4.1.25 pentru $V = V_m$, $H = H_m$ şi definiţia lui $R_{\mathcal{S}}$, se poate obţine simplu un analog şi pentru $R_{\mathcal{S}}$:

PROPOZIŢIA 4.2.5. *([**30**]-2.2.5) Pentru $\mathcal{S} := \{(V_m, H_m)\}_{m\geq 0}$ şir compatibil de reţele electrice, p, $q \in V_*$, $p \neq q$,*

$$\begin{aligned} R_{\mathcal{S}}(p,q) &= \left(\min\left\{\varepsilon_{\mathcal{S}}(u,u) \,|\, u \in \mathcal{F}(\mathcal{S}),\ u(p) = 1, u(q) = 0\right\}\right)^{-1} = \\ &= \max\left\{\frac{|u(p) - u(q)|^2}{\varepsilon_H(u,u)} \,|\, u \in \mathcal{F}(\mathcal{S}),\ \varepsilon_{\mathcal{S}}(u,u) \neq 0\right\}. \end{aligned}$$

De aici

$$|u(p) - u(q)|^2 \leq R_{\mathcal{S}}(p,q)\varepsilon_{\mathcal{S}}(u,u),\ \forall\, u \in \mathcal{F}(\mathcal{S}),\ p, q \in V_*,$$

deci $\mathcal{F}(\mathcal{S}) \subset C(V_*, R_{\mathcal{S}}^{1/2})$ (clasa funcţiilor continue relativ la metrica $R_{\mathcal{S}}^{1/2}$). Mai mult, din definiţia lui $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ şi $\varepsilon_{\mathcal{S}} \Longrightarrow \varepsilon_{\mathcal{S}} \in \mathcal{L}_2(V_*)$ (de fapt formă biliniară simetrică pe $\mathcal{F}(\mathcal{S})$), pozitiv semidefinită, cu $\varepsilon_{\mathcal{S}}(u,u) = 0 \Longleftrightarrow u =$ct. pe V_*. Factorizând $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ relativ la funcţiile constante, se poate demonstra că $\left(\mathcal{F}(\mathcal{S})_{|\sim}, \widehat{\varepsilon}_{\mathcal{S}}\right)$ este spaţiu Hilbert, observând că $\left(\mathcal{F}(\mathcal{S})_{|\sim}, \widehat{\varepsilon}_{\mathcal{S}}\right) \simeq (\mathcal{F}_p, \varepsilon_{\mathcal{S}})$ (izomorfism izometric), $\mathcal{F}_p :=$

$\{u \in \mathcal{F}(\mathcal{S}) \,|\, u(p) = 0\}$, $p \in V_*$. Demonstraţia faptului că $(\mathcal{F}_p, \varepsilon_{\mathcal{S}})$ este spaţiu Hilbert se bazează pe faptul că convergenţa în $\varepsilon_{\mathcal{S}}$ implică convergenţa punctuală.

Astfel, are loc

Teorema 4.2.6. *([**30**]-2.2.6) $\mathcal{S} := \{(V_m, H_m)\}_{m\geq 0}$ şir compatibil de reţele electrice $\Longrightarrow$*

1. *$\mathcal{F}(\mathcal{S}) \subset C(V_*, R_{\mathcal{S}}^{1/2})$;*
2. *$\varepsilon_{\mathcal{S}}$ formă biliniară simetrică pe $\mathcal{F}(\mathcal{S})$, pozitiv semidefinită, cu $\varepsilon_{\mathcal{S}}(u,u) = 0 \Longleftrightarrow u =$ct. pe V_* (adică satisface (F.D.1), (F.D.2));*
3. *Pentru u, $v \in \mathcal{F}(\mathcal{S})$, se defineşte $u \sim v \Longleftrightarrow u - v =$ct. pe V_*; "$\sim$" relaţie de echivalenţă pe $\mathcal{F}(\mathcal{S})$, $\widehat{\varepsilon}_{\mathcal{S}} : \mathcal{F}(\mathcal{S})_{|\sim} \times \mathcal{F}(\mathcal{S})_{|\sim} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\widehat{\varepsilon}_{\mathcal{S}}(\widehat{u}, \widehat{u}) := \varepsilon_{\mathcal{S}}(u,u)$ bine definită şi $\big(\mathcal{F}(\mathcal{S})_{|\sim}, \widehat{\varepsilon}_{\mathcal{S}}\big)$ spaţiu Hilbert;*
4. *Dacă în plus $H_m \in \mathcal{LA}(V_m)$, $m \geq 0$, atunci $u \in \mathcal{F}(\mathcal{S}) \Longrightarrow \overline{u} := 0 \vee (u \wedge 1) \in \mathcal{F}(\mathcal{S})$ şi $\varepsilon_{\mathcal{S}}(\overline{u}, \overline{u}) \leq \varepsilon_{\mathcal{S}}(u,u)$ (adică $\varepsilon_{\mathcal{S}}$ satisface (F.D.3)).*

4.3. Forme rezistive şi metrici rezistive

4.3.1. Forme rezistive şi metrici rezistive. *Proprietăţile pe care le îndeplinesc $\varepsilon_{\mathcal{S}}$ şi $R_{\mathcal{S}}$ conduc, prin abstractizare, la noţiunile de formă rezistivă şi metrică rezistivă*:

Definiţia 4.3.1. ([**30**]-2.3.1) Fie $X \neq \emptyset$. Atunci $(\varepsilon, \mathcal{F})$ se numeşte *formă rezistivă pe X* $\Longleftrightarrow$

- (F.R.1)
  - $\mathcal{F} \subset l(X)$ $\mathbb{R}$-subspaţiu vectorial, $\mathcal{F}$ conţine constantele;
  - $\varepsilon : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ formă biliniară simetrică pe $\mathcal{F}$, pozitiv semidefinită, cu $\varepsilon(u,u) = 0 \Longleftrightarrow u =$ct. pe X;
- (F.R.2) Dacă pentru u, $v \in \mathcal{F}$, se defineşte $u \sim v \Longleftrightarrow u - v =$ct. pe X, atunci $\big(\mathcal{F}_{|\sim}, \widehat{\varepsilon}\big)$ spaţiu Hilbert;
- (F.R.3) $\Big(\forall\, V \subset X \text{ finită}\Big)\Big(\forall\, v \in l(V)\Big)\Big(\exists\, u \in \mathcal{F}\Big)\Big(u_{|V} = v\Big)$;
- (F.R.4) $\Big(\forall\, p, q \in X\Big)\left(\sup\left\{\dfrac{|u(p) - u(q)|^2}{\varepsilon(u,u)} \,\Big|\, u \in \mathcal{F},\, \varepsilon(u,u) > 0\right\} < \infty\right)$;
- (F.R.5) $\Big(\forall\, u \in \mathcal{F}\Big)\Big(\overline{u} := 0 \vee (u \wedge 1) \in \mathcal{F}, \varepsilon(\overline{u}, \overline{u}) \leq \varepsilon(u,u)\Big)$.

Se consideră mulţimile

$$\mathcal{FR}(X) := \Big\{(\varepsilon, \mathcal{F}) \,\Big|\, (\varepsilon, \mathcal{F}) \text{ satisface (F.R.1)-(R.F.5)}\Big\},$$

$$\widetilde{\mathcal{FR}}(X) := \Big\{(\varepsilon, \mathcal{F}) \,\Big|\, (\varepsilon, \mathcal{F}) \text{ satisface (F.R.1)-(F.R.4)}\Big\}.$$

Pentru V finită, evident $(\varepsilon, l(V)) \in \widetilde{\mathcal{FR}}(V) \Longleftrightarrow \varepsilon \in \widetilde{\mathcal{FD}}(V)$, respectiv $(\varepsilon, l(V)) \in \mathcal{FR}(V) \Longleftrightarrow \varepsilon \in \mathcal{FD}(V)$.

Pentru $\mathcal{S} := \{(V_m, H_m)\}_{m\geq 0}$ şir compatibil de reţele electrice, $(\varepsilon_{\mathcal{S}}, \mathcal{F}(\mathcal{S})) \in \widetilde{\mathcal{FR}}(V_*)$, iar dacă în plus $H_m \in \mathcal{LA}(V_m)$, $\forall\, m$, atunci $(\varepsilon_{\mathcal{S}}, \mathcal{F}(\mathcal{S})) \in \mathcal{FR}(V_*)$ ((F.R.1), (F.R.2) şi (F.R.5) rezultă din 4.2.6-(2),(3),(4), (F.R.3) este verificată cu 4.2.2, iar (R.F.4) din 4.2.5).

Definiţia 4.3.2. ([**30**]-2.3.2) Fie $X \neq \emptyset$. Atunci $R : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ se numeşte *metrică rezistivă pe* $X \Longleftrightarrow \Big(\forall\, V \subset X \text{ finită}\Big)\Big(\exists\, H_V \in \mathcal{LA}(V)\Big)\Big(R_{|V\times V} = R_{H_V}\Big)$.

Se consideră mulţimile

$$\mathcal{MR}(X) := \Big\{R : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+ \,\Big|\, R \text{ metrică rezistivă pe } X\Big\},$$

$$\widetilde{\mathcal{MR}}(X) := \left\{\begin{array}{c} R : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+ \,\Big|\, \Big(\forall\, V \subset X \text{ finită}\Big)\Big(\exists\, H_V \in \widetilde{\mathcal{LA}}(V)\Big) \\ \Big(R_{|V\times V} = R_{H_V} \text{ şi } V_1 \subset V_2 \subset V \Rightarrow [H_{V_2}] = H_{V_1}\Big) \end{array}\right\}$$

Din 4.1.19 rezultă $\mathcal{MR}(X) \subset \widetilde{\mathcal{MR}}(X)$.

Dacă $R \in \mathcal{MR}(X)$, atunci R metrică pe X (4.1.23), iar pentru $R \in \widetilde{\mathcal{MR}}(X)$ rezultă că $R^{1/2}$ metrică pe X (4.1.24), R nemaifiind neapărat.

Evident, pentru V finită, $R \in \widetilde{\mathcal{MR}}(V)$ (respectiv $R \in \mathcal{MR}(V)$) $\Longleftrightarrow \exists\, H \in \widetilde{\mathcal{LA}}(V)$ (respectiv $\exists\, H \in \mathcal{LA}(V)$) cu $R = R_H$.

Din 4.1.18 rezultă uşor

Propoziţia 4.3.3. *([**30**]-2.3.3) $\mathcal{S} := \{(V_m, H_m)\}_{m\geq 0}$ şir compatibil de reţele electrice $\Longrightarrow R_{\mathcal{S}} \in \widetilde{\mathcal{MR}}(V_*)$. Dacă, în plus, $H_m \in \widetilde{\mathcal{LA}}(V_m)$, $m \geq 0$, atunci $R_{\mathcal{S}} \in \mathcal{MR}(V_*)$.*

Pentru $(\varepsilon, \mathcal{F}) \in \widetilde{\mathcal{FR}}(X)$, se consideră $V \subset X$ finită, $p \in V$ fixat şi $\mathcal{F}^p := \{u \in \mathcal{F} \mid u_{V\setminus\{p\}\equiv 0}\}$. Din (F.R.3) şi (F.R.2) $\mathcal{F}^p$ nevidă şi $(\mathcal{F}^p, \varepsilon)$ spaţiu Hilbert, iar din (F.R.4) $\Phi_p : \mathcal{F}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ continuă, deci $\exists! g^p \in \mathcal{F}^p$ cu $\varepsilon(g^p, u) = u(p)$. Pentru $u \in l(V)$ se va nota $h_V(u) := \sum\limits_{p\in V} u(p)\psi_p^V$, unde $\psi_p^V := g^p/g^p(p)$; se verifică uşor că $h_V(u)$ are proprietăţile date de lema următoare (aşadar, există un analog al lui 4.2.2 pentru forme rezistive):

Lema 4.3.4. *([**30**]-2.3.5)* $(\varepsilon, \mathcal{F}) \in \widetilde{\mathcal{FR}}(X) \Rightarrow \Big(\forall V \subset X \text{ finită}\Big)\Big(\exists h_V : l(V) \to \mathcal{F}\Big)\Big(\forall u \in l(V)\Big)$

- $h_V(u)_{|V} = u$;
- $\varepsilon^V(u,u) := \min\{\varepsilon(v,v) \mid v \in \mathcal{F}, v_{|V} = u\} = \varepsilon(h_V(u), h_V(u))$;
- $h_V(u)$ *unicul punct de minim al aplicaţiei* $(v \longrightarrow \varepsilon(v,v))$ *pe mulţimea* $\{v \in \mathcal{F} \mid v_{|V} = u\}$;
- $\varepsilon^V \in \widetilde{\mathcal{FD}}(V)$.

Mai mult, dacă $(\varepsilon, \mathcal{F}) \in \mathcal{FR}(X) \Longrightarrow \Big(\forall V \subset X \text{ finită}\Big)\Big(\varepsilon^V \in \widetilde{\mathcal{FD}}(V)\Big)$.

4.3.2. Corespondenţa biunivocă $\widetilde{\mathcal{FR}}(X) \rightleftarrows \widetilde{\mathcal{MR}}(X)$. Uzând de 4.3.4 se poate deduce că *oricărei forme rezistive i se asociază o metrică rezistivă*:

Teorema 4.3.5. *([**30**]-2.3.4) a)* $(\varepsilon, \mathcal{F}) \in \widetilde{\mathcal{FR}}(X) \Longrightarrow$
$\Big(\forall p \neq q \in X\Big)\Big(\exists R(p,q)^{-1} := \min\{\varepsilon(u,u) \mid u \in \mathcal{F}, u(p) = 1, u(q) = 0\} < \infty\Big)$;
în plus,

$$R(p,q) = \max\left\{\frac{|u(p) - u(q)|^2}{\varepsilon(u,u)} \,\Big|\, u \in \mathcal{F},\ \varepsilon(u,u) > 0\right\},\ p,\ q \in X, \tag{4.7}$$

şi $R \in \widetilde{\mathcal{RM}}(X)$;
b) $(\varepsilon, \mathcal{F}) \in \mathcal{FR}(X) \Longrightarrow R \in \mathcal{RM}(X)$.

Pentru a deduce finitudinea lui $R(p,q)^{-1}$ se aplică 4.3.4 pentru $V = \{p,q\}$ şi $u_0 : \{p,q\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $u_0(p) = 1$, $u_0(q) = 0$; pentru $V \subset X$ finită, tot din 4.3.4 se consideră $\varepsilon^V \in \widetilde{\mathcal{FD}}(V)$ şi $H_V \in \widetilde{\mathcal{LA}}(V)$ pentru care $\varepsilon^V = \Pi(H_V)$; se deduce apoi că $R_{H_V} = R_{|V\times V}$. Pentru deducerea lui (4.7) se ţine cont că pentru $u \in \mathcal{F}$ cu $u(p) \neq u(q)$, $\exists\, \alpha \neq 0$, $\exists \beta$, $\exists\, v = \alpha u + \beta$, $v(p) = 1$, $v(q) = 0$, şi atunci $\frac{|u(p)-u(q)|^2}{\varepsilon(u,u)} = \frac{|v(p)-v(q)|^2}{\varepsilon(v,v)} = \frac{1}{\varepsilon(v,v)}$. De remarcat că supremumul este atins, spre deosebire de axioma (F.R.4).

Din teorema 4.3.5 rezultă că *se poate defini aplicaţia*

$$FM_X : \widetilde{\mathcal{FR}}(X) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{MR}}(X),\ FM_X((\varepsilon, \mathcal{F})) := R,$$

R dat de teoremă şi care satisface relaţia (4.7). Se pune problema dacă se poate defini o corespondenţă inversă. Răspunsul este da, dar demonstraţia în cazul general este foarte laborioasă. Se va schiţa doar în situaţia când $R \in \widetilde{\mathcal{MR}}(X)$ *cu* $(X, R^{1/2})$ *spaţiu metric separabil.*

Fie aşadar $R \in \widetilde{\mathcal{MR}}(X)$ cu $(X, R^{1/2})$ separabil. Rezultă atunci că $\exists \{V_m\}_{m\geq 0}$ cu $V_m \subset V_{m+1}$ şi $V_* := \cup_m V_m$ densă în $(X, R^{1/2})$. Cum $R \in \widetilde{\mathcal{MR}}(X)$, $\forall m\ \exists H_{V_m} =: H_m \in \widetilde{\mathcal{LA}}(V_m)$ cu $R_{|V_m\times V_m} = R_{H_m}$ şi $[H_{m+1}]_{V_m} = H_m$, deci $\mathcal{S} := \{(V_m, H_m)\}_{m\geq 0}$ şir compatibil de reţele electrice. Din 4.2.6 şi 4.2.5 $(\varepsilon_{\mathcal{S}}, \mathcal{F}(\mathcal{S})) \in \widetilde{\mathcal{FR}}(V_*)$, $R = R_{\mathcal{S}}$ pe V_* şi $\varepsilon_{\mathcal{S}}$ satisface (4.7); de aici şi din V_* densă în $(X, R^{1/2})$ se poate presupune că $\mathcal{F}(\mathcal{S}) \subset C(X, R^{1/2})$. $(\varepsilon_{\mathcal{S}}, \mathcal{F}(\mathcal{S}))$ satisface evident (F.R.1), (F.R.2) şi (F.R.4) pe V_* (din (4.7)). Problema dificilă este demonstrarea lui (F.R.3) şi (F.R.4) pe tot X. $(\varepsilon_{\mathcal{S}}, \mathcal{F}(\mathcal{S}))$ este forma ce ar asigura o teoremă "inversă" lui 4.3.5:

Teorema 4.3.6. *([**30**]-2.3.7)* $R \in \widetilde{\mathcal{MR}}(X)$ *cu* $(X, R^{1/2})$ *separabil şi* $\{V_m\}_{m\geq 0}$ *cu* $V_m \subset V_{m+1}$ *şi* $V_* := \cup_m V_m$ *densă în* $(X, R^{1/2}) \Longrightarrow \mathcal{S} := \{(V_m, H_m)\}_{m\geq 0}$ *şir compatibil de reţele electrice şi*

(a) $(\varepsilon_{\mathcal{S}}, \mathcal{F}(\mathcal{S})) \in \widetilde{\mathcal{FR}}(X)$;
(b) $R(p,q) = \max\left\{\dfrac{|u(p) - u(q)|^2}{\varepsilon(u,u)} \,\Big|\, u \in \mathcal{F}(\mathcal{S}),\ \varepsilon_{\mathcal{S}}(u,u) > 0\right\}$, $p,\ q \in X$;
(c) $(\varepsilon_{\mathcal{S}}, \mathcal{F}(\mathcal{S}))$ *independent de alegerea lui* $\{V_m\}_{m\geq 0}$.

În plus $R \in \mathcal{RM}(X) \Longrightarrow (\varepsilon_{\mathcal{S}}, \mathcal{F}(\mathcal{S})) \in \mathcal{FR}(X)$.

Aşadar, are sens şi *considerarea aplicaţiei*

$$MF_X : \widetilde{\mathcal{MR}}(X) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{FR}}(X),\ MF_X(R) := (\varepsilon, \mathcal{F}),$$

$(\varepsilon, \mathcal{F}) = (\varepsilon_{\mathcal{S}}, \mathcal{F}(\mathcal{S}))$ *dat de teorema 4.3.6 ($(\varepsilon, \mathcal{F})$ independentă de $\mathcal{S}$).*

Pentru demonstrarea acestui fapt este nevoie de două rezultate auxiliare:

Lema 4.3.7. *([**30**]-2.3.8)* $(\varepsilon, \mathcal{F}) \in \widetilde{\mathcal{FR}}(X)$ *şi* $\{V_m\}_{m\geq 0}$ *cu* $V_m \subset V_{m+1}$, $V_* := \cup_m V_m$ *densă în* $(X, R^{1/2})$ $(R := FM_X((\varepsilon, \mathcal{F}))$ *din 4.3.5)* $\Longrightarrow (\varepsilon_{\mathcal{S}}, \mathcal{F}(\mathcal{S})) = (\varepsilon, \mathcal{F})$.

(se deduce simplu $\varepsilon = \varepsilon_{\mathcal{S}}$, iar pentru $\mathcal{F}(\mathcal{S}) = \mathcal{F}$, se consideră, pentru $u \in \mathcal{F}(\mathcal{S})$, şirul $u_n := h_{V_n}\left(u_{|V_n}\right)$, care este ε-Cauchy în $(\mathcal{F}_p, \varepsilon)$ ($p \in V_0$ cu $u(p) = 0$), deci ε-convergent la $u^* \in \mathcal{F}_p$ şi se deduce că $u = u^*$).

LEMA 4.3.8. *([**30**]-2.3.9) Fie $(\varepsilon, \mathcal{F}) \in \widetilde{\mathcal{FR}}(Y)$, $R := FM_Y((\varepsilon, \mathcal{F}))$ din 4.3.5 şi $\left(\overline{Y}, \overline{R}^{1/2}\right)$ completatul lui $(Y, R^{1/2})$. Atunci (4.7) se poate extinde "la $\overline{Y}$ şi $\overline{R}$":*

$$\overline{R}(p,q) = \max\left\{\frac{|u(p)-u(q)|^2}{\varepsilon(u,u)} \,\Big|\, u \in \mathcal{F},\, \varepsilon(u,u) > 0\right\},\ p \neq q \in \overline{Y},\ \mathcal{F} \subset l(Y) \subset l(\overline{Y}). \tag{4.8}$$

(demonstraţie tehnică, dar elementară).

Verificarea lui (F.R.3) pentru $(\varepsilon_{\mathcal{S}}, \mathcal{F}(\mathcal{S}))$ din teorema 4.3.6 este imediată, considerând, pentru $V \subset X$ finită, şirul auxiliar $\{V'_m := V_m \cup V\}_m$ şi $\mathcal{S}' := \{(V'_m, H'_m)\}_{m\geq 0}$ (cu H'_m date de definiţia lui R). Pentru $u \in l(V)$, va exista $v \in \mathcal{F}(\mathcal{S}')$ cu $v_{|V} = u$, iar $\varepsilon_{\mathcal{S}}(v,v) \leq \varepsilon_{\mathcal{S}'}(v,v) < \infty$, deci $v \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$.

Pentru a proba (F.R.4) pentru $(\varepsilon_{\mathcal{S}}, \mathcal{F}(\mathcal{S}))$ pe tot X se aplică 4.3.8 pentru $Y = V_*$ (deoarece $X \subset \overline{Y}$), deci are loc (b) în 4.3.6, de unde şi $R = FM_X\left((\varepsilon_{\mathcal{S}}, \mathcal{F}(\mathcal{S}))\right)$. (c) rezultă din 4.3.7 (prin considerarea unui alt şir $\{U_m\}_m$ şi a lui $\mathcal{S}_1$ asociat, va rezulta $(\varepsilon_{\mathcal{S}}, \mathcal{F}(\mathcal{S})) = (\varepsilon_{\mathcal{S}_1}, \mathcal{F}(\mathcal{S}_1))$).

Totuşi, chiar dacă $(\varepsilon_{\mathcal{S}}, \mathcal{F}(\mathcal{S})) \in \widetilde{\mathcal{FR}}(V_*)$ şi $R_{\mathcal{S}} \in \widetilde{\mathcal{MR}}(V_*)$, mulţimea V_* este doar numărabilă. Prin considerarea completatului $(\Omega_{\mathcal{S}}, R_{\mathcal{S}}^{1/2})$ al lui $(V_*, R_{\mathcal{S}}^{1/2})$ este posibil să se obţină o mulţime nenumărabilă interesantă şi $\mathcal{F}(\mathcal{S}) \hookrightarrow C(V_*, R_{\mathcal{S}}^{1/2}) \hookrightarrow C(\Omega_{\mathcal{S}}, R_{\mathcal{S}}^{1/2})$. Se poate pune întrebarea dacă $(\varepsilon_{\mathcal{S}}, \mathcal{F}(\mathcal{S})) \in \widetilde{\mathcal{FR}}(\Omega_{\mathcal{S}})$, sau, echivalent, $R_{\mathcal{S}} \in \widetilde{\mathcal{MR}}(\Omega_{\mathcal{S}})$? Răspunsul este în general negativ (a se vedea [**30**]-2.6,2.7). Pentru $\mathcal{S} := \{(V_m, H_m)\}_{m\geq 0}$ şir compatibil de reţele electrice cu $H_m \in \mathcal{LA}(V_m)$, se poate demonstra acest fapt (adică răspunsul este pozitiv):

TEOREMA 4.3.9. *([**30**]-2.3.10) $(\varepsilon, \mathcal{F}) \in \mathcal{FR}(X)$, $R := FM_X((\varepsilon, \mathcal{F})) \in \mathcal{MR}(X)$, $\left(\overline{X}, \overline{R}\right)$ completatul lui $(X, R) \Longrightarrow (\varepsilon, \mathcal{F}) \in \mathcal{FR}(\overline{X})$, $R \in \mathcal{MR}(\overline{X})$.*

4.4. Forme rezistive şi forme Dirichlet

În secţiunea precedentă s-a "plecat" cu un şir compatibili de reţele electrice $\mathcal{S} := \{(V_m, H_m)\}_{m\geq 0}$ şi s-au obţinut o formă rezistivă $(\varepsilon, \mathcal{F})$ şi o metrică rezistivă R, printr-un procedeu de trecere la limită. Pentru a putea defini un analog al operatorului Laplace pe X este nevoie şi de o măsură pe X. Se poate deduce următorul rezultat:

TEOREMA 4.4.1. *([**30**]-2.4.1) Fie*

- *$R \in \widetilde{\mathcal{MR}}(X)$ cu $\left(X, R^{1/2}\right)$ separabil, $(\varepsilon, \mathcal{F}) := MF_X(R) \in \mathcal{FR}(X)$ ($(\varepsilon, \mathcal{F}) = (\varepsilon_{\mathcal{S}}, \mathcal{F}(\mathcal{S}))$, $\forall\, \mathcal{S}$ şir compatibili de reţele electrice, cf. 4.3.6);*
- *μ măsură boreliană σ-finită pe $\left(X, R^{1/2}\right)$;*
- *$\varepsilon_1(u,v) := \varepsilon(u,v) + (u,v)_{L^2(X,\mu)}$, $\forall\, u, v \in L^2(X,\mu) \cap \mathcal{F}$;*

Atunci

(a) *$\left(L^2(X,\mu) \cap \mathcal{F}, \varepsilon_1\right)$ spaţiu Hilbert;*

(b) *dacă $\mu(X) < \infty$ şi $\exists\, p_* \in X$ cu $\int_X R(p, p_*)\mu(dp) < \infty$, atunci oparatorul identitate $\left(L^2(X,\mu) \cap \mathcal{F}, \varepsilon_1\right) \hookrightarrow_i \left(L^2(X,\mu), ||\cdot||_2\right)$ este compact.*

Demonstraţia se bazează pe faptul că orice şir $(u_n)_n \subset L^2(X,\mu) \cap \mathcal{F}$ ε_1-Cauchy este convergent în $||\cdot||_2$ la un $u^* \in L^2(X,\mu)$. Pentru $p \in X$ fixat, dacă se notează $v_n := u_n - u_n(p)$, $\exists\, v \in \mathcal{F}_p$ cu $\varepsilon(v_n - v, v_n - v) \longrightarrow 0$ ($(\mathcal{F}_p, \varepsilon)$ spaţiu Hilbert, din (F.R.2)). De aici şi din (F.R.4) $v_n \longrightarrow v$ în $L^2(K_m, \mu)$, $\forall\, m$, pentru $\{K_m\}_m$ compacte cu $\cup_m K_m = X$ şi $\mu(K_m) < \infty$, $m \geq 0$; deasemenea, $\exists\, c \in \mathbb{R}$ cu $u_n(p) \longrightarrow c$. Punând $u := v + c$, $\varepsilon(u - u_n, u - u_n) \longrightarrow 0$; dar $u_n(p) = u_n - v_n$, deci $(u_n)_{|K_m} \xrightarrow{n} u_{|K_m}$ în $L^2(K_m, \mu)$, $\forall\, m$, de unde $u = u^*$ pe K_m, $\forall\, m$, deci pe X. În final $u_n \longrightarrow u$ în $\left(L^2(X,\mu) \cap \mathcal{F}, \varepsilon_1\right)$.

Pentru a putea construi o formă Dirichlet pe $L^2(X,\mu)$ şi operatorul asociat este nevoie de următorul rezultat ce se poate găsi în Davies ([**13**]). Un rezumat excelent al conceptelor ataşate se poate găsi în ([**30**]-B.1.1-B.1.6):

TEOREMA 4.4.2. *Pentru $Q(\cdot\,,\cdot) : Dom(Q) \times Dom(Q) \longrightarrow \mathbb{R}$ formă biliniară simetrică pozitiv semidefinită cu $Dom(Q)$ dens într-un spaţiu Hilbert $\mathcal{H}$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(1) *$\Big(\exists\, H$ operator autoadjunct pozitiv$\Big)\Big(Dom(Q) = Dom(H^{1/2}),\ Q = Q_H\Big)$;*

(2) *$(Dom(Q), Q_*)$ spaţiu Hilbert, unde $Q_* : Dom(Q) \times Dom(Q) \longrightarrow \mathbb{R}$, $Q_*(f,g) := Q(f,g) + (f,g)$, $f, g \in Dom(Q)$.*

(se cunoaşte faptul că orice operator autoadjunct pozitiv H are o "rădăcină" $H^{1/2}$, cu $Dom\,(H) = \{f \mid f \in Dom\left(H^{1/2}\right),\ H^{1/2}f \in Dom\left(H^{1/2}\right)\} \subset Dom\left(H^{1/2}\right)$ şi $\left(H^{1/2}\right)^2 = H$, iar $Q_H : \left(Dom\left(H^{1/2}\right)\right)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $Q_H(f,g) := \left(H^{1/2}f, H^{1/2}g\right)$, $f, g \in Dom\left(H^{1/2}\right)$).

Punând $\mathcal{H} = L^2(X,\mu)$, $Q = \varepsilon$, $Dom(Q) = \mathcal{F}$ în 4.4.2, cu 4.4.1 rezultă:

TEOREMA 4.4.3. *([**30**]-2.4.2) Fie*

- $R \in \widetilde{\mathcal{MR}}(X)$ *cu* $\big(X, R^{1/2}\big)$ *separabil,* $(\varepsilon,\mathcal{F}) := MF_X(R) \in \mathcal{FR}(X)$ $((\varepsilon,\mathcal{F}) = (\varepsilon_{\mathcal{S}}, \mathcal{F}(\mathcal{S})),\ \forall \mathcal{S}$ *şir compatibili de reţele electrice, cf. 4.3.6);*
- μ *măsură boreliană σ-finită pe* $\big(X, R^{1/2}\big)$*;*
- $\overline{L^2(X,\mu)\cap\mathcal{F}}^{\|\cdot\|_2} = L^2(X,\mu)$*;*

Atunci

(a) $\Big(\exists\, H$ *operator liniar autoadjunct pozitiv pe* $L^2(X,\mu)\Big)$
$\Big(Dom(H^{1/2}) = \mathcal{F},\ \varepsilon(u,v) = \big(H^{1/2}u, H^{1/2}v\big),\ \forall\, u,v\in\mathcal{F}\Big)$*;*

(b) *dacă* $\mu(X) < \infty$ *şi* $\exists\, p_* \in X$ *cu* $\int_X R(p,p_*)\mu(dp) < \infty \Longrightarrow H$ *are rezolvantă compactă.*

Ca o consecinţă imediată a acestui fapt rezultă

CONSECINŢA 4.4.4. *Fie*

- $R \in \widetilde{\mathcal{MR}}(X)$ *cu* $\big(X, R^{1/2}\big)$ *separabil,* $(\varepsilon,\mathcal{F}) := MF_X(R) \in \mathcal{FR}(X)$ $((\varepsilon,\mathcal{F}) = (\varepsilon_{\mathcal{S}}, \mathcal{F}(\mathcal{S})),\ \forall \mathcal{S}$ *şir compatibili de reţele electrice, cf. 4.3.6);*
- μ *măsură boreliană σ-finită pe* $\big(X, R^{1/2}\big)$*;*
- $\overline{L^2(X,\mu)\cap\mathcal{F}}^{\|\cdot\|_2} = L^2(X,\mu)$*;*

Atunci $\big(\varepsilon, L^2(X,\mu)\cap\mathcal{F}\big)$ *formă Dirichlet pe* $L^2(X,\mu)$*, regulată dacă*

$$\overline{L^2(X,\mu)\cap\mathcal{F}\cap C_0(X)}^{\|\cdot\|_\infty} = C_0(X).$$

4.5. Structuri armonice pe S.A.P.C.F. conexe

Se consideră $\Big\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\Big\}$ S.A.P.C.F. conexă (a se vedea subsecţiunile 2.1.2 şi 2.6.2), V_0 "frontiera iniţială" a sa, şirul $\{(V_m, H_m)\}_{m\geq 0}$. Se consideră $D \in \mathcal{LA}(V_0)$ şi $\mathbf{r} := (r_1, r_2, \ldots, r_N)$ cu $r_i > 0$, $i = 1,\ldots,N$. Dacă $\varepsilon_D = \Pi(D) \in \mathcal{FD}(V_0)$ forma asociată lui D, se poate defini şirul de forme

$$\varepsilon_m(u,v) := \sum_{w\in W_m} \frac{1}{r_w}\varepsilon_D(u\circ\psi_w, v\circ\psi_w),\ u,v\in l(V_m),\ m\geq 0. \tag{4.9}$$

Evident $\varepsilon_m \in \mathcal{FD}(V_m)$, deci $\exists !H_m \in \mathcal{LA}(V_m)$ cu $\varepsilon_m = \varepsilon_{H_m}$, deci $\varepsilon_m(u,v) = -(u, H_m v)$, $u,v\in l(V_m)$. Despre ε_m şi H_m se pot deduce uşor următoarele

$$\varepsilon_{m+1}(u,v) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{r_w}\varepsilon_m(u\circ\psi_i, v\circ\psi_i),\ u,v\in l(V_{m+1}),\ m\geq 0; \tag{4.10}$$

$$H_m = \sum_{w\in W_m} \frac{1}{r_w} R_w^t D R_w,\ R_w : l(V_m) \longrightarrow l(V_0), R_w u := u\circ\psi_w; \tag{4.11}$$

$$(H_m)_{p,q} = \sum_{w\in W_m, p,q\in\psi_w(V_0)} \frac{1}{r_w} D_{\psi_w^{-1}(p)\psi_w^{-1}(q)}, p,q\in V_m. \tag{4.12}$$

4.5.1. Structuri armonice.

DEFINIŢIA 4.5.1. Fie $\mathcal{L} := \Big\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\Big\}$ S.A.P.C.F. conexă şi $\{(V_m, H_m)\}_{m\geq 0}$, $D \in \mathcal{LA}(V_0)$, $\mathbf{r}$ ca mai sus; atunci $(D, \mathbf{r})$ se numeşte *structură armonică pentru* $\mathcal{L} \Longleftrightarrow \{(V_m, H_m)\}_{m\geq 0}$ şir compatibil de reţele electrice. Dacă în plus, $0 < r_i < 1$, $i = 1,\ldots,N$, ea se numeşte *regulată.*

Se pot aplica atunci rezultatele din secţiunile anterioare (4.2.6, 4.3.9, 4.4.1, 4.4.3), deci există $(\varepsilon,\mathcal{F}) \in \mathcal{FR}(V_*)$ şi $R := FM_{V_*}((\varepsilon,\mathcal{F})) \in \mathcal{MR}(V_*)$. Dacă Ω completatul lui (V_*, R) şi μ măsură boreliană σ-finită pe (Ω, R), se poate construi un operator autoadjunct pozitiv H pe $L^2(X,\mu)$; acesta ar putea fi "laplacianul" dorit; rămîne problema că urma topologiei de pe F la V_* poate să difere de topologia lui R pe V_*, deci $\overline{V_*}^R = \Omega \neq F = \overline{V_*}^d$ (d metrica lui F). Se va vedea că $\Omega = F$ pentru structuri armonice regulate.

Raţionând prin inducţie după m şi ţinând cont de (4.11) se poate deduce imediat că $(D,\mathbf{r})$ *structură armonică pentru* $\mathcal{L} \Longleftrightarrow (V_0, D) \leq (V_1, H_1)$([**30**]-3.1.3). Se poate introduce

DEFINIŢIA 4.5.2. ([**30**]-3.1.2) Pentru $\mathcal{L}$ şi $(D,\mathbf{r})$ ca mai sus, se poate defini *funcţia de renormalizare pe* $\mathcal{LA}(V_0)$: $\Lambda_{\mathbf{r}} : \mathcal{LA}(V_0) \longrightarrow \mathcal{LA}(V_0)$, $\Lambda_{\mathbf{r}}(D) = [H_1]_{V_0}$.

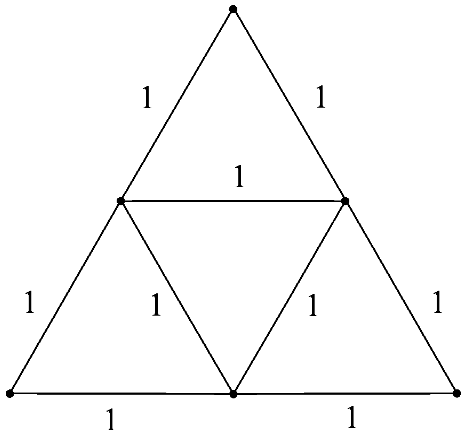

FIGURA 4.3. Graful corespunzător lui H_1

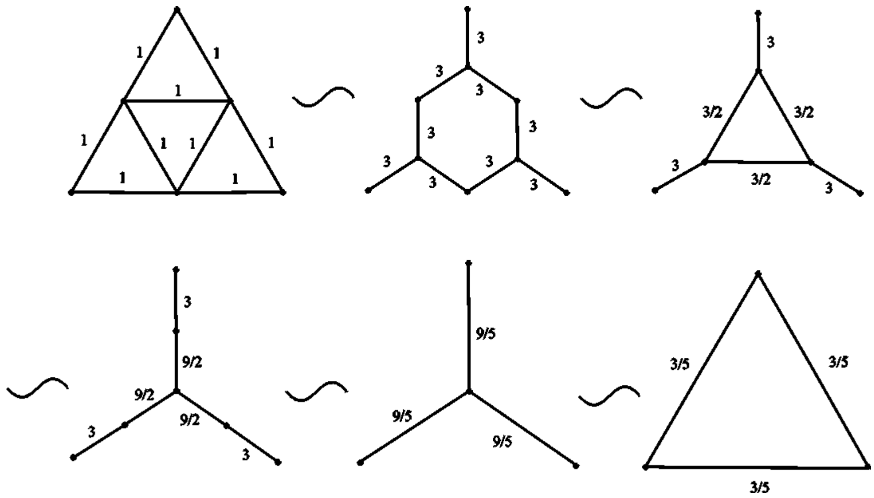

FIGURA 4.4. Transformări $\Delta - Y$ şi $Y - \Delta$ pentru triunghiul lui Sierpinski

Atunci $(D, \mathbf{r})$ structură armonică pentru $\mathcal{L} \Longleftrightarrow \Lambda_{\mathbf{r}}(D) = D$. Deasemenea, pentru α, $\lambda > 0$, $\Lambda_{\lambda\mathbf{r}}(\alpha D) = \dfrac{\alpha}{\lambda}\Lambda_{\mathbf{r}}(D)$, de unde $\Lambda_{\mathbf{r}}(D) = \lambda D \Longleftrightarrow \Lambda_{\lambda\mathbf{r}}(D) = D$. Aşadar, problema existenţei structurilor armonice pe o S.A.P.C.F. conexă se reduce la determinarea vectorilor proprii pentru funcţia de renormalizare (neliniară), problemă foarte dificilă, rămasă deschisă şi care va fi abordată în detaliu în ultimele capitole. Datorită corespondenţei bijective între forme şi operatori, funcţia de renormalizare se poate defini şi "pe forme", în loc de operatori.

În capitolul următor operatorul de renormalizare se va introduce şi pe conuri mai largi de operatori $(\widetilde{\mathcal{LA}(V_0)}$, $(\mathcal{LA}(V_0))')$ (sau de forme), punându-se problema existenţei, unicităţii şi aproximării punctelor sale fixe.

EXEMPLUL 4.5.3. Fie triunghiul lui Sierpinski (T.S.), pentru care $V_0 = \{a_1, a_2, a_3\}$. Atunci $V_1 = \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\}$ (exemplul 2.1.14, figura 2.1). Se consideră $D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ şi $\mathbf{r} := (1, 1, 1)$. Graful corespunzător lui H_1 este figurat în Fig.4.3.

Prin aplicarea succesivă de transformări $\Delta - Y$ sau $Y - \Delta$ (4.1.20), se obţine că $\Lambda_{(1,1,1)}(D) = \frac{3}{5}D$ (figura 4.4), sau $\Lambda_{(3/5,3/5,3/5)}(D) = D$, adică $(D, (3/5, 3/5, 3/5))$ structură armonică pentru T.S.

Dacă $(D, \mathbf{r})$ *structură armonică pentru* $\mathcal{L}$ *şi* $r_1 = \ldots = r_N$*, se poate demonstra că* $(D, \mathbf{r})$ *este regulată* ([**30**]-3.1.8,3.1.10, cu demonstraţii destul de tehnice, unde se utilizează în mod fundamental principiul de minim pentru a deduce că $D_{pp} > (H_1)_{pp}$ pentru $p \in V_0$). Mai precis, se poate deduce

PROPOZIŢIA 4.5.4. *([**30**]-3.1.8)* $(D, \mathbf{r})$ *structură armonică şi* $w \in W_*$ *cu* $\dot{w} \in \mathcal{P} \Longrightarrow r_w < 1$.

4.5.2. Funcţii armonice. *Pe parcursul acestei subsecţiuni se vor considera fixate* $\mathcal{L} := \left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ *S.A.P.C.F. conexă şi* $(D, \mathbf{r})$ *structură armonică pentru* $\mathcal{L}$. Atunci $\{(V_m, H_m)\}_{m \geq 0}$ şir compatibil de reţele electrice cu $D = H_0 \in \mathcal{LA}(V_0)$ şi H_m construite la începutul secţiunii, rezultând $(\varepsilon_{\mathcal{S}}, \mathcal{F}(\mathcal{S})) =: (\varepsilon, \mathcal{F}) \in \mathcal{FR}(V_*)$. Aplicând 4.2.2 pentru $m = 0$ rezultă

Propoziţia 4.5.5. *([**30**]-3.2.1)* $\Big(\forall\, \rho \in l(V_0)\Big)\Big(\exists !\, u \in \mathcal{F}(\mathcal{S})\Big)$ *cu*

- $u_{|V_0} = \rho$;
- $\varepsilon(u,u) = \min\big\{\varepsilon(v,v)\,|\, v \in \mathcal{F}, v_{|V_0} = \rho\big\}$;
- *u unica soluţie a sistemului* $(H_m v)_{|V_m\setminus V_0} = 0$, $m \geq 1$, $v_{|V_0} = \rho$.

Funcţia dată de propoziţia de mai sus se numeşte *funcţie armoncă cu valori la frontieră* ρ. Pentru o astfel de funcţie $u \in \mathcal{F}$ se verifică uşor că $(H_m u)(p) = (Du)(p)$, $\forall\, p \in V_0$, $m \geq 0$. Deasemenea, orice astfel de funcţie poate fi gândită ca fiind din $C(V_*, \mathbb{R})$, însă, cum $(\mathcal{T}_F)_{V_*} \neq \mathcal{T}_R$ nu e obligatoriu ca $u \in C(F)$. Orice astfel de funcţie admite însă o prelungire:

Propoziţia 4.5.6. *([**30**]-3.2.4) u armonică* $\Longrightarrow \Big(\exists !\widetilde{u} \in C(F)\Big)\Big(\widetilde{u}_{|V_*} = u_{|V_*}\Big)$.

Demonstraţia este importantă şi va fi prezentată succint: se consideră $u_{|V_0} = \rho$, $H_1 = \begin{pmatrix} T & J^t \\ J & X \end{pmatrix}$, $T : l(V_0) \longrightarrow l(V_0)$, etc. Atunci $H_1 \begin{pmatrix} \rho \\ u_{|V_1\setminus V_0} \end{pmatrix} = 0$, de unde $u_{|V_1\setminus V_0} = -X^{-1}J\rho$. Cum $V_0 \longleftrightarrow \psi_w(V_0)$,

$$u_{|\psi_i(V_0)} \equiv (u \circ \psi_i)_{|V_0} = u_{|\psi_i(V_0)} \circ \psi_i(V_0) = R_i\left(u_{|V_1}\right) = R_i \begin{pmatrix} \rho \\ -X^{-1}J\rho \end{pmatrix} =: A_i\rho.$$

Astfel se pot considera operatorii $A_i : l(V_0) \longrightarrow l(V_0)$, iar matricile asociate în baza canonică a lui $l(V_0)$ se numesc *matrici stocastice*. Cu ajutorul lor se poate determina u pe V_*:

$$w = w_1 \dots w_m \in W_m \Longrightarrow u_{|\psi_w(V_0)} \equiv A_{w_m} \cdot \ldots \cdot A_{w_1}\rho.$$

Se vede că $(A_i)_{pq} \geq 0$, p, $q \in V_0$, $A_i 1 = 1$.

Se poate presupune că $\#(\psi_i(V_0) \cap V_0) \leq 1$, $\forall\, i$, pentru a putea aplica principiul de minim. Uzând de el se poate deduce că $v(A_i f) < v(f)$, pentru $v(f) \neq 0$, $f \in l(V_0)$, $v(f)$ fiind variaţia lui f pe V_0. Mai mult, se poate deduce chiar

$$\Big(\forall\, i \in \{1,\dots,N\}\Big)\Big(\exists\, c_i \in (0,1)\Big)\Big(\forall\, f \in l(V_0)\Big)\Big(v(A_i f) \leq c_i v(f)\Big).$$

De aici $w = w_1 \dots w_m \in W_m \Longrightarrow v_w(u) \leq c_{w_1} \dots c_{w_m} v\left(u_{|V_0}\right) \leq c^m v(\rho)$. Rezultă că pentru orice şir $\{p_i\}_i \subset V_*$ d-Cauchy $\{u(p_i)\}$ Cauchy în $\mathbb{R}$, deci convergent; aşadar u se poate extinde la o funcţie continuă $\widetilde{u}$ pe F.

Comportamentul funcţiilor armonice în jurul unui punct $\pi(\omega)$, $\omega \in \Sigma$, este dat de comportamentul asimtotic al produselor de tip $A_{w_m} \cdot \ldots \cdot A_{w_1}$ când $m \longrightarrow \infty$; problema este foarte dificilă, chiar şi pentru cazul triunghiului lui Sierpinski, în afară de situaţia $\omega \in Per(\Sigma)$ (Kusuoka a reuşit primul să construiască forme Dirichlet pe S.A.F.R. şi a obţinut rezultate privind iteraţiile aleatoare ale lui $(A_i)_{i\in S}$ - [**33**]).

Din 4.2.3 şi 4.5.6 se poate obţine o nouă versiune, mai specializată, a principiului de minim (pentru S.A.P.C.F. conexe):

Teorema 4.5.7. *([**30**]-3.2.5) Pentru* $\mathcal{L}$ *şi* $(D, \mathbf{r})$ *ca la începutul susbsecţiunii,* $w \in W_*$ *şi u armonică* $\Longrightarrow$

$$\min_{p\in(V_0)_w} u(p) \leq u(x) \leq \max_{p\in(V_0)_w} u(p),\ \forall\, x \in (V_*)_w,\ \textit{apoi}\ x \in F_w. \tag{4.13}$$

În princpiul de mai sus nu se spune nimic cu privire la egalitatea ce ar avea loc în (4.13). Până la sfârşitul acestei subsecţiuni se va construi cadrul pentru prezentarea unui principiu de minim "tare", ce tratează această situaţie. Este nevoie de concepte şi rezultate suplimentare, faţă de secţiunea 2.6 privind conexiunea structurilor S.A.P.C.F. conexe.

Exemplele fundamentale de funcţii armonice sunt ψ_p *(*$p \in V_0$*), aplicaţiile armonice pentru care* $(\psi_p)_{|V_0} = \chi_p^{V_0}$. Aplicaţiile $\{\psi_p\}_{p\in V_0}$ formează partiţie a unităţii pe F $\Big(\sum\limits_{p\in V_0} \psi_p(x) = 1,\ \forall\, x \in F\Big)$. Prin intermediul lor se vor putea "codifica" proprietăţi de conexiune foarte interesante ale lui F. Pentru aceasta este necesar să se introducă conceptul de H_m-drum între două puncte: pentru p, $q \in V_m$, $\{p_i\}_{i=\overline{1,n}}$ se numeşte *H_m-drum între p şi q* $\Longleftrightarrow p_i \in V_m\setminus V_0$, $i = \overline{1,n}$ şi $(H_m)_{pp_1} > 0$, $(H_m)_{p_ip_{i+1}} > 0$, $i = 1,\dots,n-1$, $(H_m)_{p_nq} > 0$. Pentru p, $q \in V_m\setminus V_0$ se va scrie $p \sim_m q$. Din $D \in \mathcal{LA}(V_0)$ şi (4.12) se poate deduce uşor

4.5.8. ([**30**]-3.2.10) $w \in W_m$, p, $q \in \psi_w(V_0) \Longrightarrow$

- $\psi_w(V_0) \cap V_0 = \emptyset \Longrightarrow$ există un H_m-drum între p şi q conţinut în $\psi_w(V_0)$;
- $\psi_w(V_0) \cap V_0 = \{q\}$, $q \neq p \Longrightarrow$ există un H_m-drum între p şi q conţinut în $\psi_w(V_0)$;

Din 2.6.4, 4.5.8 şi Principiul de minim (general, dar şi forma 4.5.7) se poate deduce (pentru demonstraţie a se vedea [**30**]-pag.78-79)

TEOREMA 4.5.9. *([**30**]-3.2.8) Pentru $\mathcal{L}$ şi $(D, \mathbf{r})$ ca la începutul susbsecţiunii, $p \in V_0$, $x \in F \backslash V_0 \Longrightarrow \psi_p(x) > 0 \Longleftrightarrow \exists C \in J(p, V_0)$, $x \in C$ (prin $J(p, V_0)$ s-a notat mulţimea componentelor conexe ale lui $F \backslash V_0$ a căror închidere conţine p).*

Prin această teoremă se obţine o relaţie foarte interesantă între proprietăţile topologice al lui F şi pozitivitatea funcţiilor armonice ψ_p. Aceste informaţii pot fi întărite. Pentru aceasta se observă mai întâi următoarele (pentru demonstraţii a se vedea din nou [**30**]-3.2.12,3.2.13):

4.5.10.
- p, $q \in V_0$, $D_{pq} > 0 \Longrightarrow \exists \gamma : [0,1] \longrightarrow F$ drum cu $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$, $\gamma((0,1)) \subset F \backslash V_0$.
- p, $q \in V_m$, $\{p_i\}_{i=\overline{1,n}}$ H_m-drum între p şi $q \Longrightarrow \exists C$ componentă conexă a lui $F \backslash V_0$ cu $p_i \in C$, $i = \overline{1,n}$, p, $q \in \overline{C}$.

Din 2.6.4 şi 4.5.10 se poate deduce (a se vedea [**30**]-pag.80-81)

TEOREMA 4.5.11. *([**30**]-3.2.11) $\mathcal{L}$ şi $(D, \mathbf{r})$ ca la începutul susbsecţiunii $\Longrightarrow D_{pq} > 0 \Longleftrightarrow J(p, V_0) \cap J(q, V_0) \neq \emptyset$ (adică $\exists C$ componentă conexă a lui $F \backslash V_0$ cu p, $q \in \overline{C}$).*

Rezultatul face *legătura între pozitivitatea elementelor lui D (pentru $(D, \mathbf{r})$ structură armonică) şi proprietă ţi de conexiune ale lui $F \backslash V_0$* şi permite, împreună cu teorema 4.5.9 şi princiul de minim (general şi 4.5.7) să se deducă ([**30**]-pag.81):

TEOREMA 4.5.12. *([**30**]-3.2.14)(Principiul de minim "tare" pentru funcţii armonice) Pentru $\mathcal{L}$ şi $(D, \mathbf{r})$ ca la începutul susbsecţiunii, C componentă conexă a lui $F \backslash V_0$, $x \in \overline{C}$ şi u armonică $\Longrightarrow$*

$$\min_{p \in V_0 \cap \overline{C}} u(p) \leq u(x) \leq \max_{p \in V_0 \cap \overline{C}} u(p). \tag{4.14}$$

Dacă are loc egalitatea, atunci u constantă pe $\overline{C}$.

Rezultatele 4.5.7-4.5.12 din această subsecţiune sunt foarte importante pentru construcţia de funcţii Green, într-o secţiune ulterioară, ce permite ulterior degrevarea unor rezulatate originale.

4.5.3. Proprietăţile funcţiilor armonice. Proprietăţile funcţiilor armonice fac posibilă construcţia unei forme Dirichlet pe o structură S.A.P.C.F. conexă dotată cu o structură armonică $(D, \mathbf{r})$ relativ la o măsură autosimilară bine aleasă.

Şi pe parcursul acestei subsecţiuni se vor considera fixate $\mathcal{L} := \left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ S.A.P.C.F. conexă şi $(D, \mathbf{r})$ structură armonică pentru $\mathcal{L}$. Analog propoziţiilor 4.5.5 şi 4.5.6 se poate deduce

PROPOZIŢIA 4.5.13. *([**30**]-3.2.15) $\Big(\forall \rho \in l(V_m)\Big)\Big(\exists !\, u \in C(F, d)\Big)$ cu*
- *$u_{|V_m} = \rho$;*
- *$\varepsilon\left(u_{|V_*}, u_{|V_*}\right) = \min\left\{\varepsilon(v,v) \,|\, v \in \mathcal{F}, v_{|V_m} = \rho\right\}$;*
- *u unica soluţie a sistemului $(H_n v_n)_{|V_n \backslash V_m} = 0$, $n \geq m$, $v_{|V_m} = \rho$ ($v_n := v_{|V_n}$, $n \geq m$).*

Funcţia u din propoziţia de mai sus se numeşte *funcţie m-armonică cu valori la frontieră ρ*. Se va nota $u =: h_\rho^m$. Ea se va considera ca fiind din $\mathcal{F} \subset C(V_*, \mathbb{R})$, pentru simplitate, prelungindu-se unic apoi la $C(F, d)$. Ia naştere astfel operatorul liniar $\Phi_m : l(V_m) \longrightarrow \mathcal{F}$, $\Phi_m(\rho) = h_\rho^m$. De fapt $\Phi_m(l(V_m)) = \mathcal{H}_m := \{u \in \mathcal{F} \,|\, u - m - \text{armonică}\}$. Se pot obţine simplu următoarele proprietăţi ale m-armonicelor:

4.5.14. (Proprietăţi ale armonicelor)
1. u m-armonică $\Longleftrightarrow \Big(\forall w \in W_m\Big)\Big(u \circ \psi_w - 0 - \text{armonică }\Big)$;
2. u m-armonică $\Longrightarrow u$ $m+1$-armonică $\left(\text{se deduce uşor că } h_\rho^m = \left(h_\rho^m\right)^{m+1}_{h_\rho^m}\right)$, deci $\mathcal{H}_m \subset \mathcal{H}_{m+1}$;
3. Pentru $p \in V_m$ se consideră ψ_p^m funcţia m-armonică cu valori la frontieră $\chi_p^{V_m}$. Atunci pentru orice u m-armonică $\Longrightarrow u = \sum\limits_{p \in V_m} u(p)\psi_p^m$ (din $u_{|V_m} = \sum\limits_{p \in V_m} \chi_p^{V_m}$ şi Φ_m operator liniar);
4. Se consideră $P_m : l(V_*) \longrightarrow \mathcal{H}_m$, $P_m u := \sum\limits_{p \in V_m} u(p)\psi_p^m =: u_m$. Rezultă P_m liniar, surjectiv, $\mathcal{H}_m$ finit dimensional, iar elemntele lui $\mathcal{H}_m$ sunt puncte fixe ale lui P_m;
5. $u \in \mathcal{F} \Longrightarrow \varepsilon(u_m, u_m) = \varepsilon_m\left(u_{|V_m}, u_{|V_m}\right)$;
6. ([**30**]-3.2.16) u m-armonică, $f \in \mathcal{F}$ cu $f_{|V_m} = 0 \Longrightarrow \varepsilon(u, f) = 0$
(din $(H_n u)(p) = 0$, $p \in V_n \backslash V_m$ şi deci $\varepsilon_n(u, f) = -(f, H_n u) = -\sum\limits_{p \in V_n} f(p)(H_n u)(p) = 0$, $n > m$);
7. ([**30**]-3.2.17) $u \in \mathcal{F} \Longrightarrow \varepsilon(u - u_m, u - u_m) \xrightarrow{m} 0$
(din $\varepsilon(u - u_m, u - u_m) = \varepsilon(u,u) - \varepsilon(u_m, u_m) = \varepsilon(u,u) - \varepsilon_m(u,u) \xrightarrow{m} 0$, pentru că $(u - u_m)_{|V_m} = 0 \Longrightarrow \varepsilon(u_m, u - u_m) = 0$).

Pentru $u \in l(V_*)$, $m \geq 0$ şi $p \in V_m \backslash V_{m-1}$, se notează $\alpha_p(u) := u_m(p) - u_{m-1}(p) = u(p) - u_{m-1}(p)$ (pentru $p \in V_{m-1}$, $u_m(p) = u_{m-1}(p)$). Atunci

- $u \in l(V_*) \Longrightarrow u_m = \sum_{p \in V_m} \alpha_p(u)\psi_p^m$ $\Big(((u-u_1)-(u-u_1)_2)_{|V_2} = 0$, pentru că $(u-u_1)_{|V_1} = 0$ şi $(u-u_1)_2 = u_2 - (u_1)_2 = u_2 - u_1$, etc.$\Big)$;
- dacă se defineşte ψ_p astfel încât $(\psi_p)_{|V_m \backslash V_{m-1}} =: \psi_p^m$, $m \geq 1$, atunci
$$u \in l(V_*) \Longrightarrow u = \sum_{p \in V_*} \alpha_p(u)\psi_p.$$
(suma în fiecare punct este finită)

Pentru $u \in l(V_*)$, $m \geq 0$, $w \in W_m$, se defineşte $a_w(u) := u_{m+1} \circ \psi_w - u_m \circ \psi_w$. Atunci $a_w(u) \in \mathcal{H}_1$, deci $a_w(u) = (a_w(u))_1 = \sum_{p \in V_1} \alpha_p(a_w(u))\psi_p = \sum_{p \in V_1 \backslash V_0} \alpha_{\psi_w(p)}(u)\psi_p$, iar din 4.5.14-(6)
$$\begin{aligned}\varepsilon_m(u,u) = & \sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon_{k+1}(u_{k+1}-u_k, u_{k+1}-u_k) + \varepsilon_0(u,u) = \\ = & \quad \varepsilon_0(u,u) + \sum_{k=0}^{m} \sum_{w \in W_k} \frac{1}{r_w} \varepsilon_1(a_w(u), a_w(u)).\end{aligned}$$
De aici rezultă că are loc următorul *Criteriu de apartenenţă la $\mathcal{F}$ pentru funcţii din $l(V_*)$ în termeni de funcţii armonice*:

Propoziţia 4.5.15. *([**30**]-3.2.19)(Criteriu de apartenenţă la $\mathcal{F}$)*
$u \in l(V_*) \Longrightarrow u \in \mathcal{F} \Longleftrightarrow \varepsilon(u,u) = \varepsilon_0(u,u) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{w \in W_m} \frac{1}{r_w} \varepsilon_1(a_w(u), a_w(u)) < \infty.$

4.6. Cazul $(\Omega, R) \equiv (F, d)$

Se consideră din nou fixate $\mathcal{L} := \Big\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\Big\}$ S.A.P.C.F. conexă şi $(D, \mathbf{r})$ structură armonică pentru $\mathcal{L}$. Atunci $\{(V_m, H_m)\}_{m \geq 0}$ şir compatibil de reţele electrice şi $(\varepsilon_{\mathcal{S}}, \mathcal{F}(\mathcal{S})) =: (\varepsilon, \mathcal{F}) \in \mathcal{FR}(V_*)$, sau chiar $(\varepsilon, \mathcal{F}) \in \mathcal{FR}(\Omega)$, (Ω, R) completatul lui (V_*, R) (ca la începutul secţiunii 4.5). *Se pune întrebarea dacă $\Omega = F$. Răspunsul este afirmativ pentru $(D, \mathbf{r})$ structură armonică regulată, ceea ce va fi prezentat în această secţiune (iar situaţia $(\Omega, R) \hookrightarrow (F, d)$ în secţiunea următoare).*

4.6.1. Scufundarea lui Ω în F. În condiţiile de mai sus $(\varepsilon, \mathcal{F})$ este "autosimilară": din definiţia lui $(\varepsilon, \mathcal{F})$ şi (4.10) se deduce uşor că

$$u \in \mathcal{F}, i \in \overline{1,N} \Longrightarrow u \circ \psi_i \in \mathcal{F}, \varepsilon(u,u) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{r_w} \varepsilon(u \circ \psi_i, u \circ \psi_i). \tag{4.15}$$

Deasemenea, se poate deduce

Lema 4.6.1. *([**30**]-3.3.2)*
w, $v \in W_*$ cu $\psi_w(V_*) \cap \psi_v(V_*) = \emptyset \Longrightarrow \inf\{R(p,q) \,|\, p \in \psi_w(V_*), q \in \psi_v(V_*)\} > 0.$

(se consideră $m \geq 0$ cu w, $v \in W_m$, $\rho \in l(V_m)$, $\rho = \chi^{V_m}_{V_m \cap \psi_w(V_*)}$ şi $u = h^m_\rho$; din 4.2.5 $R(p,q) \geq \frac{|u(p)-u(q)|^2}{\varepsilon(u,u)} \geq \frac{1}{\varepsilon(u,u)}$, etc.)

Acest rezultat permite deducerea implicaţiei:
$$\{p_i\}_i \text{ Cauchy în } (V_*, R) \Longrightarrow \{p_i\}_i \text{ Cauchy în } (F, d).$$
Cu ajutorul acestui fapt se poate construi aplicaţia de scufundare: pentru $p \in \Omega$, $\exists\, \{p_k\}_k \subset V_*$, $p_k \xrightarrow[k]{R} p$, deci $\{p_k\}_k$ Cauchy în (V_*, R), deci şi în (F, d), deci $\exists\, \theta(p) := \lim_k p_k$ în (F, d). Aplicaţia $\theta : \Omega \longrightarrow F$ este bine definită, $\theta_{|V_*} = \mathrm{id}_{V_*}$, θ continuă. Deasemenea, θ este injectivă: pentru p, $q \in \Omega$ cu $\theta(p) = \theta(q)$, $\exists\, \{p_k\}_k$, $\{q_k\}_k$, $R(p_k, p) \underset{k}{\longrightarrow} 0$, $R(q_k, q) \underset{k}{\longrightarrow} 0$ şi $d(p_k, \theta(p)) \underset{k}{\longrightarrow} 0$, $d(q_k, \theta(q)) \underset{k}{\longrightarrow} 0$. Pentru $v \in \mathcal{H}_m$, există extensii ale sale la $C(\Omega, R)$ sau $C(F, d)$, deci $v(p) = \lim_k v(p_k) = v(\theta(p)) = v(\theta(q)) = \lim_k v(q_k) = v(q)$; deasemenea, pentru $u \in \mathcal{F}$, $u_m \xrightarrow[m]{\varepsilon} u$, deci, din 4.3.5, $u_m(p) \underset{m}{\longrightarrow} u(p)$, $u_m(q) \underset{m}{\longrightarrow} u(q)$, aşadar, în final şi $u(p) = u(q)$. Cum $u \in \mathcal{F}$ arbitrară, $R(p,q) = \max\left\{ \frac{|u(p)-u(q)|^2}{\varepsilon(u,u)} \,\Big|\, u \in \mathcal{F},\, \varepsilon(u,u) > 0 \right\} = 0$, deci $p = q$. Aşadar are loc

Propoziţia 4.6.2. *([**30**]-3.3.2) Pentru $\mathcal{L}$ şi $(D, \mathbf{r})$ date*
$$\Big(\exists\, \theta : \Omega \longrightarrow F\Big)\Big(\theta \text{ continuă, injectivă, } \theta_{|V_*} = \mathrm{id}_{V_*}\Big).$$

4.6.2. $(D,\mathbf{r})$ **regulată** $\Longrightarrow (\Omega, R) \equiv (F,d)$**.** *Pentru deducerea teoremei fundamentale care afirmă că* $\Omega = F$ *şi* $R \sim d$ *pentru* $(D,\mathbf{r})$ *structură armonică regulată este nevoie de trei rezultate auxiliare (*[**30**]*-pag.85-86)*, 4.6.3, 4.6.4, 4.6.5:

4.6.3. $\Big(\forall\, w \in W_*\Big)\Big(\forall\, p,q \in \Omega\Big)\Big(R(\psi_w(p),\psi_w(q)) \le r_w R(p,q)\Big)$.

(din ε autosimilară $\Longrightarrow \frac{|u\circ\psi_w(p)-u\circ\psi_w(q)|^2}{\varepsilon(u,u)} \le r_w \frac{|u\circ\psi_w(p)-u\circ\psi_w(q)|^2}{\varepsilon(u\circ\psi_w,u\circ\psi_w)}$, pt. $w \in W_m$, $u \in \mathcal{F}$ cu $\varepsilon(u,u) > 0$, de unde, cu 4.3.8 şi 4.3.5 $R(\psi_w(p),\psi_w(q)) \le r_w R(p,q)$, pentru p, $q \in V_*$ şi apoi $\overline{V_*}^R = \Omega$).

4.6.4. $\omega \in \Sigma$ cu $\limsup\limits_m \min\limits_{\omega' \in P} \delta(\sigma^m\omega,\omega') > 0$ şi $\liminf\limits_m r_{\omega_1\ldots\omega_m} > 0 \Longrightarrow \pi(\omega) \notin \Omega$.

(din ipoteze $\exists\, \tau \notin P$, $\exists\,\{m_n\}_n \subset \mathbb{N}$ crescător cu $\delta(\sigma^{m_n}\omega,\tau) \underset{n}{\to} 0$ şi $\liminf\limits_n r_{w^n} > 0$, unde $w^n := \omega_1\ldots\omega_{m_n}$, $n \ge 1$. Se consideră apoi $u := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_{w^n}$, unde $\varphi := \sum\limits_{p\in V_1\setminus V_0} \psi_p$, $\varphi_w := \varphi \circ \psi_w^{-1} \cdot \chi^F_{F_w}$; pe scurt, se poate arăta că $u \in \mathcal{F}$ (se satisface 4.5.15), apoi presupunând $\#(\psi_i(V_0)\cap V_0) \le 1$, $\forall\, i$ şi uzând de prinipiul de minim şi 4.5.9 se deduce că $\sup\limits_n \inf\limits_{F_{w(n)}} u = \infty$, unde $w(n) := w^n\tau_1\ldots\tau_m$, $n \ge 0$; dacă $\pi(\omega) \in \Omega$, $\exists\,\{q_l\}_l \subset V_*$, $q_l \longrightarrow \pi(\omega)$ în (Ω,R) şi în (F,d), deci $q_l \in F_{w(n)}$ pt. l suficient de mare, deci $u(q_l) \longrightarrow \infty$, ceea ce contrazice faptul că u se poate prelungi la o funcţie continuă, etc.).

4.6.5. $(D,\mathbf{r})$ nu e regulată $\Longrightarrow \Omega \ne F$ şi $\exists\, u \in \mathcal{F}$, $\sup\limits_{p\in V_*} |u(p)| = +\infty$.

($(D,\mathbf{r})$ nu e regulată $\Longrightarrow \exists\, k$ cu $r_k \ge 1$, deci $\omega = \dot{k} \notin P$, de unde rezultă că cele două ipoteze ale lui 4.6.4 sunt îndeplinite, aşadar $\pi(\omega) \notin \Omega$).

Cu ajutorul lui 4.6.3, 4.6.4, 4.6.5 se poate deduce uşor

Teorema 4.6.6. *(*[**30**]*-3.3.4) Pentru* $\mathcal{L}$ *S.A.P.C.F. şi* $(D,\mathbf{r})$ *structură armonică, următoarele relaţii sunt echivalente:*

(1) $\Omega = F$*;*
(2) (Ω,R) *compact;*
(3) (Ω,R) *mărginit;*
(4) $\Big(\forall\, u \in \mathcal{F}\Big)\Big(\sup\limits_{\Omega} |u| < \infty\Big)$*;*
(5) $(D,\mathbf{r})$ *regulată.*

(1)⇒(2) reiese din faptul că θ devine homeomorfism; (2)⇒(3) evident; (3)⇒(4) din (F.R.4); (4)⇒(5) din 4.6.5; (5)⇒(1) Din 4.6.3, ψ_i devin contracţii pe (Ω,R), deci, cu 1.2.3, $\exists\,\widetilde{F}$ compactă în (Ω,R) cu $\widetilde{F} = \bigcup\limits_{i=1}^{N} \widetilde{F}_i$. Cum θ continuă $\Longrightarrow \theta(\widetilde{F}) \equiv F$ compactă în (F,d). Dar $x \in \widetilde{F} \Longrightarrow \bigcup\limits_{w\in W_*} \psi_w(x) \subset \widetilde{F}$, iar $\left\{\bigcup\limits_{w\in W_*} \psi_w(x)\right\}_{x\in\widetilde{F}}$ densă în (F,d); de aici $F = \widetilde{F}$, deci $\Omega = F$, (Ω,R) compact iar θ devine homeomorfism.

4.7. Compararea măsurilor autosimilare cu măsurile Hausdorff

Se continuă ideile din 2.2.4, arătându-se practic faptul că pentru o S.A.P.C.F. conexă $\mathcal{L} := \Big\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\Big\}$ şi $(D,\mathbf{r})$ structură armonică *regulată* pentru $\mathcal{L}$, măsura autosimilară $\mu := \nu^p$ asociată lui $\mathcal{L}$ şi $p := \Big\{r_i^{d_H}\Big\}_{\overline{i1,N}}$ (conform 2.2.10) este comparabilă cu măsura Hausdorff $\mathcal{H}^{d_H}$ $\Big(d_H$ este unica soluţie a ecuaţiei $\sum\limits_{i=1}^{N} r_i^{d_H} = 1\Big)$.

Se deduc întâi următoarele rezultate auxiliare ([**30**]-pag.139-140):

4.7.1. Pentru $\Lambda \subset W_*$ şi $w \in \Lambda$, se notează $\Lambda_w := \{v \in \Lambda \,|\, F_w \cap F_v \ne \emptyset\}$. Atunci $\#(\Lambda_w) \le \#(\Gamma)\#(V_0)$.

(cum $\#(\Lambda_w) \le \sum\limits_{p\in\psi_w(V_0)} \#\left(\pi^{-1}(p)\right)$, e suficient să se demonstreze că $\#(\pi^{-1}(p)) \le \#(\Gamma)$, $\forall\, p \in F$, etc.)

4.7.2. Există c, $M > 0$, astfel încât, pentru $a > 0$ suficinet de mic şi $\forall\, x \in F$, $\#\{w \in \Lambda(a,\mathbf{r}) \,|\, d(x,F_w) \le ca\} \le M$ ($\Lambda(a,\mathbf{r})$ definit în 2.2.4).

Demonstraţia utilizează noţiunea de funcţie Λ-armonică (*pentru* $\Lambda \subset V_*$*,* $f \in \mathcal{F}$ *se numeşte* Λ*-armonică* $\Longleftrightarrow$ $f \circ \psi_w$ *armonică* $\forall\, w \in \Lambda$):
pentru $w \in \Lambda(\mathbf{r},a)$, se defineşte $u = \sum\limits_{p\in\psi_w(V_0)} \psi_p^{\Lambda(\mathbf{r},a)}$ $\Big($dacă $\Lambda \subset V_*$, $f \in \mathcal{F}$, $p \in V(\Lambda) := \cup_{w\in\Lambda}\psi_w(V_0)$,

ψ_p^Λ este funcţia Λ-armonică cu $\left(\left(\psi_p^\Lambda\right)_{|V(\Lambda)} = \chi_p^{V(\Lambda)}\right)$. Din autosimilaritatea lui ε ((4.15)), 4.3.5 şi 4.7.1 se poate deduce că $\varepsilon(u,u) \leq \#(\Gamma)\#(V_0)\frac{c'}{ar'}$, unde $r' := \min\limits_{i=\overline{1,N}} r_i$, $c' := \max\limits_{\emptyset \neq V \subset V_0} \varepsilon\big(\sum\limits_{p\in V}\psi_p, \sum\limits_{p\in V}\psi_p\big)$. De aici $R(x,y) \geq \varepsilon(u,u)^{-1} \geq c''a$, pentru $x \in F_w$, $y \in F_v$, w, $v \in \Lambda(\mathbf{r}, a)$ cu $F_w \cap F_v = \emptyset$, unde $c'' := \frac{r'}{\#(\Gamma)\#(V_0)c'}$. Se poate deduce în final, utilizând din nou 4.7.1 şi $R \sim d$ pe F ($(D, \mathbf{r})$ este *regulată*)

$$\#\{v \in \Lambda(\mathbf{r}, a) \,|\, d(x, F_v) \leq ca\} \leq \#\{w \in \Lambda(\mathbf{r}, a) \,|\, x \in F_w\}\#(\Gamma)\#(V_0),$$

$(c = c''/2)$ de unde 4.7.2.

Din 4.6.3 rezultă că $\exists\, C > 0$ cu $|F_w| \leq C r_w$, $\forall\, w \in W_*$, deci condiţia (2.1) este verificată. Din 4.7.2 se verifică şi (2.2). Cu teorema 2.2.13 rezultă atunci

TEOREMA 4.7.3. *([**30**]-4.2.1) Fie $\mathcal{L} := \Big\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\Big\}$ S.A.P.C.F. conexă, $(D, \mathbf{r})$ structură armonică **regulată** a lui $\mathcal{L}$, d_H este unica soluţie a ecuaţiei $\sum\limits_{i=1}^{N} r_i^{d_H} = 1$, $\mathcal{H}_*^{d_H}$ normalizata măsurii Hausdorff $\mathcal{H}^{d_H}$ de pe F, ν^p măsura autosimilară asociată lui $\mathcal{L}$ şi $p := \Big\{r_i^{d_H}\Big\}_{i\overline{1,N}}$. Atunci*

$$\Big(\exists\, c_1, c_2 > 0\Big)\Big(\forall\, B \in \mathcal{B}(F,d)\Big)\Big(c_1\nu^p(B) \leq \mathcal{H}_*^{d_H}(B) \leq c_2\nu^p(B)\Big).$$

Deci măsurile de probabiliate pe F ν^p şi $\mathcal{H}_*^{d_H}$ sunt "comparabile", adică se poate presupune că practic coincid.

4.8. Forme Dirichlet pe S.A.P.C.F. şi cazul $(\Omega, R) \hookrightarrow (F, d)$

Se considera din nou $\mathcal{L} := \Big\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\Big\}$ S.A.P.C.F. conexă şi $(D, \mathbf{r})$ structură armonică pentru $\mathcal{L}$; rezultă $\{(V_m, H_m)\}_{m\geq 0}$ şir compatibil de reţele electrice şi $(\varepsilon_\mathcal{S}, \mathcal{F}(\mathcal{S})) =: (\varepsilon, \mathcal{F}) \in \mathcal{FR}(V_*)$, şi chiar $(\varepsilon, \mathcal{F}) \in \mathcal{FR}(\Omega)$ (din 4.3.9), (Ω, R) completatul lui (V_*, R).

Dacă $(D, \mathbf{r})$ regulată, din 4.6.6 $\Omega = F$ şi $R \sim d$, d metrica nativă a "fractalului". Atunci, cu 4.4.1 şi 4.4.3 $(\varepsilon, \mathcal{F})$ formă Dirichlet regulată locală pe $L^2(F, \mu)$, $\forall\, \mu$ probabilitate regulată pe F.

Dacă $(D, \mathbf{r})$ nu e regulată, din 4.6.6 $\Omega \subsetneqq F$ şi $\mathcal{F}$ conţine cel puţin o funcţie nemărginită. Se poate demonstra că $\mathcal{F}$ se poate scufunda într-un $L^2(F, \mu)$, μ măsură bine aleasă - de exemplu măsură autosimilară cu ponderi p_i cu $p_i r_i < 1$ - astefl încât $(\varepsilon, \mathcal{F})$ să devină formă Dirichlet regulată locală pe $L^2(F, \mu)$. Această construcţie a fost realizată de către T. Kumagai în [**32**] *şi va fi schiţată în continuare succint.*

Se consideră mulţimea $\mathcal{M}(F)$ a măsurilor de probabilitate boreliene regulate pe F şi $\widetilde{\mathcal{M}}(F) := \big\{\mu \in \mathcal{M}(F) \,\big|\, \mu(V_*) = 0,\ \mu(D) > 0, \forall\, D \subset F \text{ deschisă}\big\}$, i.e. mulţimea măsurilor din $\mathcal{M}(F)$ ce nu încarcă puncte dar încarcă deschişii lui F. Conform seţiunii 2.2, măsurile autosimilare asociate structurii S.A.P.C.F. $\mathcal{L}$ (notate $\mathcal{M}_{as,\mathcal{L}}(F)$) considerate sunt din $\widetilde{\mathcal{M}}(F)$.

Se mai consideră, în plus faţă de spaţiile $\mathcal{H}_m$ şi $\mathcal{H}_{1,0} := \big\{u \in \mathcal{H}_1 \,\big|\, u_{|V_0} \equiv 0\big\}$.

Din faptul că orice funcţie m-armonică este în $\mathcal{F}$, putînd fi considerată în $C(F, d)$ şi din proprietăţile m-armonicelor (4.5.14) se poate scrie

$$\mathcal{H}_{1,0} \subset \mathcal{H}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{H}_m \subset \mathcal{H}_{m+1} \subset \ldots \subset \mathcal{F} \subset C(F,d).$$

Familia $\mathcal{H}_* := \bigcup\limits_{m\geq 0} \mathcal{H}_m$ se va dovedi a fi "miezul" formei Dirichlet dorite.

Rezultatul fundamental privind construcţia formei Dirichlet pentru cazul $(D, \mathbf{r})$ structură armonică pentru $\mathcal{L}$ nu neapărat regulată necesită nişte rezultate ajutătoare (4.8.1-4.8.4). Demonstraţiile acestora se vor prezenta pe cazul măsurilor autosimilare, spre deosebire de [**30**], *unde se tratează o situaţie mai generală*:

4.8.1. $\Big(\exists\, c > 0\Big)\Big(\forall\, u \in \mathcal{H}_{1,0}\Big)\Big(\forall\, \mu \in \mathcal{M}(F)\Big)\Big((u,u)_\mu \leq c\varepsilon(u,u)\Big)$.

Cum pe $\mathcal{H}_{1,0}$ (finit dimensional), orice două norme sunt echivalente, puterea rezultatului este independenţa lui c de μ. Orice $u \in \mathcal{H}_{1,0}$ se scrie $u = \sum\limits_{p\in V_1\setminus V_0} u(p)\psi_p$; apoi $0 \leq \psi_p \leq 1$ pe $F \Longrightarrow a_{pq} := \int_F \psi_p\psi_q d\mu \in [0,1]$, deci

$$(u,u)_\mu = \sum_{p\in V_1\setminus V_0} a_{pq}u(p)u(q) \leq \frac{1}{2}\sum_{p\in V_1\setminus V_0}(u(p)^2 + u(q)^2) =$$
$$= \#(V_1\setminus V_0)\sum_{p\in V_1\setminus V_0} u(p)^2 \leq c\varepsilon(u,u).$$

Cu ajutorul acestuia se poate deduce

4.8.2. $\Big(\mu \in \mathcal{M}_{as,\mathcal{L}}(F) \text{ cu } r_i p_i < 1\Big) \Longrightarrow \Big(\forall\, u \in \mathcal{F}\Big)\Big(\{u_m\}_m \xrightarrow[m]{L^2(F,\mu)} i_\mu(u)\Big)$.

Dacă se consideră $\mu^w := \frac{1}{p_w}\mu\circ\psi_w$, $w \in W_m$, din "autosimilaritatea" lui ε (4.15), 4.8.1, $p_w\mu^w\circ\psi_w^{-1} = \mu$ şi formula de transport rezultă

$$\varepsilon(u_{m+1}-u_m, u_{m+1}-u_m) = \sum_{w\in W_m}\frac{1}{r_w}\varepsilon((u_{m+1}-u_m)\circ\psi_w, (u_{m+1}-u_m))\circ\psi_w \geq$$
$$\geq \sum_{w\in W_m}\frac{1}{cr_w}\int_F((u_{m+1}-u_m)\circ\psi_w)^2 d\mu^w = \sum_{w\in W_m}\frac{1}{cr_wp_w}\int_{F_w}(u_{m+1}-u_m)^2 d\mu \geq$$
$$\geq \frac{1}{cq^m}\int_F(u_{m+1}-u_m)^2 d\mu = \frac{1}{cq^m}||u_{m+1}-u_m||^2_{mu},\ q := \max_i p_ir_i,$$

de unde $\sqrt{c}\sum_{j=m+1}^{n}\sqrt{q^m}\sqrt{\varepsilon(u_j-u_{j-1}, u_j-u_{j-1})} \geq ||u_n-u_m||_\mu$.

Dar cum $\sum_{j=m+1}^{n}\varepsilon(u_j-u_{j-1}, u_j-u_{j-1}) = \varepsilon(u_n-u_m, u_n-u_m)$ (4.5.14-(6)), rezultă

$$c\left(\sum_{j=m+1}^{n}q^j\right)\varepsilon(u_n-u_m, u_n-u_m) \geq ||u_n-u_m||^2_\mu, \tag{4.16}$$

deci $\{u_m\}_m$ Cauchy în $L^2(F,\mu)$, adică $\exists\, i_\mu(u) := \lim_m u_m \in L^2(F,\mu)$.

$i_\mu : \mathcal{F} \longrightarrow L^2(F,\mu)$ evident operator liniar. Mai mult:

4.8.3. $\mu \in \mathcal{M}_{as,\mathcal{L}}(F)$ cu $r_ip_i < 1 \Longrightarrow i_\mu : \mathcal{F} \longrightarrow L^2(F,\mu)$ operator injectiv.

Din (4.16), pentru $n \longrightarrow \infty$

$$c\left(\sum_{j=m+1}^{n}q^j\right)\varepsilon(u-u_m, u-u_m) \geq ||i_\mu(u)-u_m||^2_\mu. \tag{4.17}$$

Dacă $M_1 := \max\left\{1, \sum_{m=0}^{\infty}q^m\right\}$, se poate deduce ([**30**]-pag.91) uzând de (4.17) că

$$\Big(\exists\, c_1 > 0\Big)\Big(\forall\, \mu \in \mathcal{M}(F)\Big)\Big(\forall\, u \in \mathcal{F}, i_\mu(u) = 0\Big)\Big(M_1\varepsilon(u,u) \geq c_1\max_{p\in V_0}|u(p)|^2\Big). \tag{4.18}$$

Pentru $i_\mu(u) = 0$, $i_{\mu^w}(u\circ\psi_w)$, $w \in W_*$, de unde, cu (4.18) (pentru $\mu = \mu^w$ şi $u\circ\psi_w$)

$$c_1r_w\varepsilon(u,u) \geq c_1\varepsilon(u\circ\psi_w, u\circ\psi_w) \geq \max_{p\in\psi_w(V_0)}|u(p)|^2.$$

De aici, pentru $p = \pi(\omega) \in V_m$, rezultă $c_1r_{\omega|m}\varepsilon(u,u) \geq |u(p)|^2$. Cum $r_{\omega|m} \underset{m}{\longrightarrow} 0$ (din 4.5.4) $u(p) = 0$, $p \in V_*$, adică $u = 0$.

4.8.4. $\Big(\mu \in \mathcal{M}_{as,\mathcal{L}}(F)$ cu $r_ip_i < 1$, $\varepsilon_*(\,\cdot\,,\,\cdot\,) := \varepsilon(\,\cdot\,,\,\cdot\,) + (\,\cdot\,,\,\cdot\,)_\mu\Big) \Longrightarrow$ $\Big((\varepsilon_*, \mathcal{F}) \xrightarrow{i_\mu} L^2(F,\mu)$ operator compact$\Big)$.

Din (4.17) rezultă $\sqrt{c\left(\sum_{j=m+1}^{\infty}q^j\right)} \geq (||i_\mu(u)-P_mu||_\mu)/\sqrt{\varepsilon_*(u,u)}$. De aici $||i_\mu - P_m||_{(\mathcal{F},\varepsilon_*)\to L^2(F,\mu)} \underset{m}{\longrightarrow}$ 0, şi cum P_m operator de rang finit, i_μ este compact: se utilizează faptul că *Orice operator de rang finit pe un spaţiu Hilbert este compact* şi *$T : E_1 \longrightarrow E_2$ operator mărginit (E_1, E_2 spaţii Banach) şi $\exists\{T_n\}_n$ operatori compacţi cu $||T_k - T|| \underset{k}{\longrightarrow} 0 \Longrightarrow T$ compact*([**13**] sau [**30**]-B.1.10-B.1.11).

În [**30**] (3.4.3-3.4.5) se demonstrează rezultatele 4.8.2-4.8.4 pe situaţia mai generală a unor măsuri $\lambda \in \widetilde{\mathcal{M}}(F)$ cu $\sup_{w\in W_*}\sum_{m=0}^{\infty}R_m(\lambda^w) < \infty$, unde $R_m(\lambda) := \max_{w\in W_m} r_w\lambda(F_w)$, iar $\lambda^w := \lambda\circ\psi_w/\lambda(F_w)$ (condiţie pe care măsurile autosimilare cu ponderi p_i pentru care $p_ir_i < 1$ o satisfac).

Deasemenea, teoremea principală mai face apel la un rezultat privind operatorii compacţi ([**13**] sau [**30**]-B.1.13):

Propoziţia 4.8.5. *Pentru H operator autoadjunct nenegativ pe $\mathcal{H}$ spaţiu Hilbert, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(1) *H are rezolvantă compactă ($\Longleftrightarrow$ $(H+I)^{-1}$ operator compact);*
(2) *$\exists\{\varphi_n\}_n \subset \mathcal{H}$ bază ortonormală completă cu $H\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$, unde $0 \leq \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n \leq \ldots$, $\lambda_n \longrightarrow \infty$;*

(3) $\left(Dom\left(H^{1/2}\right), (Q_H)_*\right) \xrightarrow{\text{id}} (\mathcal{H}, (\,\cdot\,,\,\cdot\,))$ *operator compact, unde* Q_H *definit ca în 4.4.2.*

Astfel, se poate deduce

TEOREMA 4.8.6. *([**30**]-3.4.6) Fie* $\mathcal{L} := \left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ *S.A.P.C.F. conexă,* $(D, \mathbf{r})$ *structură armonică pentru* $\mathcal{L}$ *(nu neapărat regulată),* $p := \{p_i\}_{i=\overline{1,N}}$ *sistem de ponderi cu* $r_i p_i < 1$ *şi* $\mu := \nu^p$ *măsura autosimilară asociată lui* $\mathcal{L}$ *şi* p *(a se vedea 2.2.10-a)). Atunci* $(\varepsilon, \mathcal{F})$ *(construită în rezultatele anterioare) este formă Dirichlet regulată locală pe* $L^2(F, \mu)$*, iar operatorul* H_N *asociat lui* $(\varepsilon, \mathcal{F})$ *are rezolvantă compactă.*

Operatorul autoadjunct pozitiv definit pe $L^2(F, \mu)$ H_N este construit via 4.4.2, deci $\varepsilon = Q_{H_N}$, $\mathcal{F} = Dom(H_N^{1/2})$; mai precis, pentru $u \in \mathcal{F}$, $u \in Dom(H_N) \iff \exists\, f \in \mathcal{F}$ cu $\varepsilon(u, v) = (f, v)_\mu$, $\forall\, v \in \mathcal{F}$. Se pune $f =: H_N u$, "N" fiind de la Neumann, deoarece se poate arăta că $-H_N$ corespunde laplacianului problemei Neumann (a se vedea [**30**]- secţiunea 3.7).

Cu "ingredientele" anterioare se poate demonstra elegant teorema principală:

(*Închidere*) Dacă $\widehat{\mathcal{F}} := \left\{u \in \mathcal{F} \,\middle|\, \int_F u d\mu = 0\right\}$, atunci $\left(\widehat{\mathcal{F}}, \varepsilon_{\widehat{\mathcal{F}} \times \widehat{\mathcal{F}}}\right)$ spaţiu Hilbert. Pentru $u \in \mathcal{F}$, se pune $\widehat{u} := u - \int_F u d\mu$; atunci $\int_F u^2 d\mu = \int_F \widehat{u}^2 d\mu + \left(\int_F u d\mu\right)^2$. Dacă $(u_n)_n$ Cauchy în $(\mathcal{F}, \varepsilon_*)$, atunci $(\widehat{u}_n)_n$ Cauchy în $(\widehat{\mathcal{F}}, \varepsilon)$, deci convergent la $v \in \widehat{\mathcal{F}}$, iar $\left(\int_F u_n d\mu\right)_n$ Cauchy în $\mathbb{R}$, deci convergent la c; în final $u_n \xrightarrow[n]{(\mathcal{F}, \varepsilon_*)} u := v + c$.

(*Regularitate*) Din principiul de minim $\forall\, u \in C(F)$, $u_n \xrightarrow[F]{u} u$, $(u_n)_n \subset \mathcal{H}_* := \cup_{m \geq 0} \mathcal{H}_m$, deci $C(F) = \overline{\mathcal{H}_*}^{\|\cdot\|_\infty}$. Cum însă $\mathcal{F} = \overline{\mathcal{H}_*}^{\varepsilon_*}$, $\mathcal{H}_*$ "miez" pentru $(\mathcal{F}, \varepsilon)$.

(*Proprietatea Markov*) Cum $(\mathcal{F}, \varepsilon) \in \mathcal{FR}(\Omega)$, $\varepsilon(\overline{u}, \overline{u}) \leq \varepsilon(u, u)$. Dar $i_\mu(u) = \overline{i_\mu(u)}$, adevărată pentru $u \in C(F) \cap \mathcal{F}$, deoarece $u_n \xrightarrow[F]{u} u$, deci $(C(F) \cap \mathcal{F}, \varepsilon)$ are proprietatea Markov. Cum $\mathcal{H}_* \subset C(F) \cap \mathcal{F}$, $(\mathcal{F}, \varepsilon)$ extensia minimală închisă a lui $(C(F) \cap \mathcal{F}, \varepsilon)$, din [**22**]-3.1.1 $(\mathcal{F}, \varepsilon)$ are proprietatea Markov.

(*Proprietatea locală*) Dacă $i_\mu(u) = 0$ pe o mulţime deschisă D, atunci $\forall\, p \in \Omega \cap D$, $\exists\, w \in W_*$ cu $p \in F_w \subset D$; atunci $i_{\mu^w}(u \circ \psi_w) = 0$, şi din 4.8.3 pentru μ^w rezultă $u \circ \psi_w = 0$ în $\mathcal{F}$, deci $u = 0$ pe $\Omega \cap D$. Dacă $\mathrm{supp}(i_\mu(u)) \cap \mathrm{supp}(i_\mu(v)) = \emptyset$, u, $v \in \mathcal{F}$, atunci $\mathrm{supp}(u) \cap \mathrm{supp}(v) = \emptyset$, şi, cum $\varepsilon_m(u, v) = 0$ pentru m mare, rezultă $\varepsilon(u, v) = 0$.

(*H are rezolvantă compactă*) rezultă din 4.8.4 şi 4.8.5.

OBSERVAŢIA 4.8.7. În condiţiile teoremei 4.8.6, dacă $\mathcal{F}_0 := \left\{u \in \mathcal{F} \,\middle|\, u_{|V_0} = 0\right\}$, atunci $(\varepsilon, \mathcal{F}_0)$ formă Dirichlet regulată pe $L^2(F \backslash V_0, \mu)$; se poate spune, grosier, că e o formă Dirichlet chiar pe $L^2(F, \mu)$ (nefiind şi regulată pe $L^2(F, \mu)$ deoarece $\mathcal{F}_0$ nu e neapărat $\|\cdot\|_\infty$-dens în $C(F)$). Operatorul autoadjunct pozitiv definit corespunzător se notează H_D şi are rezolvantă compactă. $-H_D$ se numeşte *laplacianul Dirichlet*. Evident $\varepsilon_{|\mathcal{F}_0 \times \mathcal{F}_0} = Q_{H_D}$, $\mathcal{F}_0 = Dom(H_D^{1/2})$, iar $u \in Dom(H_D) \iff \exists\, f (=: H_D u) \in \mathcal{F}_0$ cu $\varepsilon(u, v) = (u, v)_\mu$, $\forall\, v \in \mathcal{F}_0$.

Cum $(\mathcal{F}_0, \varepsilon)$ spaţiu Hilbert şi ε pozitiv definită pe $\mathcal{F}_0$, 0 nu poate fi valoare proprie a lui H_D; deoarece H_D are rezolvantă compactă, rezultă G_D operator compact. Din $\varepsilon(u, v) = (H_D u, v)_\mu$, $\forall\, u \in Dom(H_D)$, $v \in \mathcal{F}_0$ rezultă $\varepsilon(G_D f, v) = (f, v)_\mu$, $\forall\, f \in L^2(F\mu)$, $v \in \mathcal{F}_0$. Aşadar, are loc

PROPOZIŢIA 4.8.8. *([**30**]-3.4.8)* H_D *(definit în 4.8.7) este inversabil şi* $G_D := (H_D)^{-1}$ *operator compact pe* $L^2(F, \mu)$ *cu* $\varepsilon(G_D f, v) = \int_F f v d\mu$, $\forall\, f \in L^2(F, \mu)$, $v \in \mathcal{F}_0$.

4.9. Funcţii Green

Fie $\mathcal{L} := \left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ S.A.P.C.F. conexă, $(D, \mathbf{r})$ structură armonică a lui $\mathcal{L}$, $p := \{p_i\}_{i=\overline{1,N}}$ cu $r_i p_i < 1$ şi $\mu := \nu^p$ măsura autosimilară asociată lui $\mathcal{L}$ şi p.

Se va prezenta succint (urmând [**30**]-sect.3.5) *construcţia funcţiei Green asociate formei rezistive* $(\varepsilon, \mathcal{F})$ (asociată, la rândul să lui $\mathcal{L}$ şi $(D, \mathbf{r})$ conform lui 4.8.6). Se poate proba ulterior (a se vedea [**30**]-Sect.3.7) că funcţia Green este exact nucleul operatorului Green dat de 4.8.8 ($G_D = (H_D)^{-1}$, H_D Laplacianul problemei Dirichlet), i.e.

$$(G_D u)(x) = \int_F g(x, y) u(y) \mu(dy), \forall\, u \in L^2(F, \mu),$$

g fiind funcţia Green.

Următoarul rezultat este necesar în definirea funcţiei Green:

LEMA 4.9.1. *([**30**]-3.5.1) Dacă* $X = (X_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ *matrice simetrică cu:*

- $X_{ii} < 0$, $i = 1, \ldots n$;
- $X_{ij} \geq 0$ *pentru* $i \neq j$;
- $\forall\, j = \overline{1, n}$, $\sum\limits_{i=1}^{n} X_{ij} \leq 0$ *(şi* < 0 *pentru un* j*);*

- $\forall\, i \neq j$, $\exists\, m \geq 1$, $\exists\, i_0, \ldots, i_m \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i_0 = i$, $i_m = j$ *cu* $X_{i_k i_{k+1}} > 0$, $k = 0, \ldots, m-1$*;*

atunci X *inversabil şi* $G_{ii} \geq G_{ij} > 0$, $\forall\, i, j = \overline{1, n}$ *(unde* $G = (G_{ij}) := (-X)^{-1}$*).*

Se consideră matricea $X := X_1$, X_1 din "descompunerea" (dată de 4.1.16) a lui H_1 (dat de (4.11)). Apoi $G := G_1$ şi $G_{pq} := (G_1)_{pq}$, pentru $p, q \in V_1 \backslash V_0$. Se poate da

Definiţia 4.9.2. ([**30**]-pag.97-98) Se consideră

- $\Psi(x, y) := \sum\limits_{p,q \in V_1 \backslash V_0} G_{pq} \psi_p(x) \psi_q(y)$ şi $\Psi^x(y) := \Psi(x, y)$, $x, y \in F$;
- $\Psi_w(x, y) := \Psi(\psi_w^{-1}(x), \psi_w^{-1}(y))$, $w \in W_*$, $x, y \in F_w$, $\Psi_w(x, y) := 0$ altfel şi $\Psi_w^x(y) := \Psi_w(x, y)$;
- $g_m(x, y) := \sum\limits_{k=0}^{m-1} \sum\limits_{w \in W_k} r_w \Psi_w(x, y)$ şi $g_m^x(y) := g_m(x, y)$, $x, y \in F$.

Se poate deduce că

- g_m^x m-armonică; $g_m^x(y) = 0$, $\forall\, y \in V_0$;
- $\varepsilon(g_m^x, u) = u_m(x) - u_0(x)$, $\forall\, u \in \mathcal{F}$;
- $g_m(x, y) = \sum\limits_{p,q \in V_m \backslash V_0} (G_m)_{pq} \psi_p^m(x) \psi_q^m(y)$;
- $\Psi_w(x, y) \geq 0$; $\{g_m(x, y)\}_m \nearrow$.

Se poate defini atunci $g(x, y) := \lim\limits_m g_m(x, y) = \sum\limits_{w \in W_*} r_w \Psi_w(x, y)$ (putând fi şi $+\infty$) care se va numi, pe scurt, *funcţia Green asociată structurii armonice* $(D, \mathbf{r})$. Se poate demonstra ([**30**]-pag.98-99):

(1) g continuă pe $F \times F \backslash \{(x, x) | x \in F\}$;
(2) pentru $x, y \in F \backslash V_0$, $g(x, y) > 0 \Longleftrightarrow x$ şi y aparţin aceleiaşi componente conexe a lui $F \backslash V_0$;
(3) g continuă pe $F \times F$ dacă $(D, \mathbf{r})$ regulată.

Dacă $(D, \mathbf{r})$ nu e regulată, atunci este posibil ca $g(x, x) = \infty$. Rezultatul fundamental este dat de

Teorema 4.9.3. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(1) $g(x, x) < \infty$*;*
(2) $g^x \in \mathcal{F}$, $g^x(y) := g(x, y)$*;*
(3) $x \in \Omega$.

Dacă una din aceste condiţii este satisfăcută, atunci $\varepsilon(g^x, u) = u(x) - u_0(x)$, $\forall\, u \in \mathcal{F}$.

Demonstraţia se prezintă pe scurt, fiind *punctul de plecare pentru o generalizare din ultimul capitol*:

(3)$\Longrightarrow$(2) Pentru $\mathcal{F}_0 := \left\{u \in \mathcal{F} \,\middle|\, u_{|V_0} = 0\right\}$, $(\mathcal{F}_0, \varepsilon)$ este spaţiu Hilbert, iar pentru $x \in \Omega$, $p \in V_0$, $|u(x)|^2 \leq \varepsilon(u, u) R(x, p)$, $\forall\, u \in \mathcal{F}_0$; deci $\mathcal{F}_0 \ni u \longrightarrow u(x) \in \mathbb{R}$ funcţională liniară şi continuă, adică $\exists h \in \mathcal{F}_0$ cu $\varepsilon(h, u) = u(x)$, $\forall\, u \in \mathcal{F}_0$. Dar $\varepsilon(h_m, u) = \varepsilon(h, u_m) = u_m(x) = \varepsilon(g_m^x, u)$, $\forall\, u \in \mathcal{F}_0$, $m \geq 0$, deci $h_m = g_m^x$, $\forall\, m$, adică $h = g^x$ şi $g^x \in \mathcal{F}_0$.

(2)$\Longrightarrow$(1) rezultă din

$$\varepsilon(g^x, g^x) = \lim_{m \to \infty} \varepsilon(g_m^x, g_m^x) = \lim_{m \to \infty} g_m(x, x) = g(x, x).$$

(1)$\Longrightarrow$(3) Pentru $\omega \in \Omega$ cu $\pi(\omega) = x$, se notează $x_m = \pi(\sigma^m \omega)$. Dacă $\lim_m \varphi(x_m) = 0$, atunci, se poate deduce, uzând de câteva rezultate tehnice auxiliare, dar simple, că $x \in \Omega$. Dacă $\lim_m \varphi(x_m) > 0$, se poate construi un şir Cauchy $\{p_k\}_k \subset (\Omega, R)$ care să conveargă chiar la x (demonstraţie foarte tehnică, [**30**]-pag.100-102).

4.10. Procese de difuzie asociate formelor pe fractali

În această secţiune se pune în evidenţă succint modul în care se construiesc procese asociate cu forme Dirichlet pe fractali şi câteva proprietăţi remarcabile; se prezintă şi o scurtă abordare probabilistă a nucleelor căldurii $p_B(t, x, y)$.

Pe parcursul secţiunii se consideră fixate $\mathcal{L} := \left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ *S.A.P.C.F. conexă,* $(D, \mathbf{r})$ *structură armonică pentru* $\mathcal{L}$ *(nu neapărat regulată),* $p := \{p_i\}_{i=\overline{1,N}}$ *sistem de ponderi cu* $r_i p_i < 1$ *şi* $\mu := \nu^p$ *măsura autosimilară asociată lui* $\mathcal{L}$ *şi* p. Din teorema 4.8.6, *forma rezistivă* $(\varepsilon, \mathcal{F})$ (ataşată lui $\mathcal{L}$ şi structurii armonice $(D, \mathbf{r})$) este *formă Dirichlet regulată locală pe* $L^2(F, \mu)$. În plus se verifică uşor că forma este ireductibilă. Deasemenea, din

$$|u(p) - u(q)|^2 \leq c r_w \varepsilon(u, u),\ p, q \in F_w,\ w \in W_n,$$

rezultă

$$\int u^2 d\mu \leq c' \varepsilon(u, u) + \left(\int u d\mu\right)^2, \tag{4.19}$$

$$u(p)^2 \leq 2 \int u^2 d\mu + 2c\varepsilon(u, u),\ p \in F. \tag{4.20}$$

4.10.1. Procesul asociat lui $(\varepsilon, \mathcal{F})$. Din teorema 3.6.8 există un proces Hunt μ-simetric $\mathbf{X} = (X_t, t \geq 0, P^x, x \in F)$ asociat lui $(\varepsilon, \mathcal{F})$ pe $L^2(F, \mu)$.

Se observă că se construieşte practic câte un proces pentru fiecare măsură μ. Dar teorema 3.7.1 spune că toate aceste procese pot fi obţinute unele din celelalte prin "schimbare de timp". Proprietăţile de regularitate ale formei $(\varepsilon, \mathcal{F})$ s-au obţinut simplu, acesta fiind avantajul abordării "cu forme Dirichlet"; toate abordările probabiliste ce privesc proprietatea Markov sunt greoaie. Construcţia probabilistă a lui T. Lindstrom ([**35**]) se loveşte deasemenea de dificultatea găsirii unei mulţimi invariante pentru probabilităţile de tranziţie, ceea ce construcţia "cu forme Dirichlet" evită.

Dacă $(U_\alpha)_{\alpha > 0}$ rezolvanta lui $\mathbf{X}$, din (3.10) rezultă $(f, g) = \varepsilon_\alpha(U_\alpha f, g)$, $f,\, g \in \mathcal{F}$.

Dacă U_α are densitatea u_α relativ la μ, atunci, cu un calcul formal, se poate obţine

$$\varepsilon_\alpha(u_\alpha(p, \cdot\,), g) = \varepsilon_\alpha(U_\alpha \chi_p, g) = (\chi_p, g) = g(p).$$

Din aceasta, (F.R.4) pentru $(\varepsilon, \mathcal{F})$, (4.20) şi teorema lui Riesz (pentru aplicaţii de forma $\phi(u) := u(p)$) se poate deduce

TEOREMA 4.10.1. *([**22**], pag.73) (1) $\forall\, p \in F$, $\exists\, u_\alpha^p \in \mathcal{F}$, $\forall\, v \in \mathcal{F}$, $\varepsilon_\alpha(u_\alpha^p, v) = v(p)$;*
(2) Pentru $u_\alpha(p, q) := u_\alpha^p(q)$, are loc $u(p, q) = u(q, p)$, $\forall\, p, q \in F$;
(3) $|u_\alpha(p, q) - u_\alpha(p, q')|^2 \leq R(q, q')u_\alpha(p, p)$ (deci $u_\alpha(\,\cdot\,, \cdot\,)$ continuă pe $F \times F$).

Pentru ν măsură pe F, dacă se notează

$$V_\nu u(p) := \int u_\alpha(p, q)v(q)\nu(q),\ u \in \mathcal{F},$$

utilizând 4.10.1-(1) şi 2.2.14 (considerându-se şirul $\{\nu_n\}_n$ ce aproximează slab măsura autosimilară μ) se poate deduce chiar că

$$E^p\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} v \circ X_t dt\right] = U_\alpha v(p) = \int u_\alpha(p, q)v(q)\mu(dq).$$

Despre procesul $\mathbf{X}$ se mai poate spune

TEOREMA 4.10.2. *([**3**]-7.21) (a) $\forall\, p \in F$, p regulat pentru $\{p\}$.*
(b) $\mathbf{X}$ posedă "timp local" $(L_t^x, t \geq 0,\, x \in F)$ continuu în raport cu (x, t) cu

$$\int_0^t u \circ X_s ds = \int u(p) L_t^p \mu(dp),\ \text{a.s.},$$

pentru orice u măsurabilă mărginită.

Rezultatul este consecinţă a estimărilor densităţii rezolvantelor u_α. Cum u_α mărginită şi continuă, orice $\{p\}$ este regulat pentru $\{p\}$. De aici $\mathbf{X}$ posedă "timp local" $(L_t^x, t \geq 0,\, x \in F)$ măsurabil în raport cu (x, t) (a se vedea [**50**]). cum $\mathbf{X}$ proces Markov simetric, din Th.8.6 ([**50**]) $(L_t^x, t \geq 0,\, x \in F)$ continuu în raport cu $(x, t) \Longleftrightarrow$ procesul Gaussian $\mathbf{Y} := (Y_x,\, x \in F)$, de funcţie de covarianţă dată de $E[Y_x Y_y] = u_1(x, y)$, $x,\, y \in F$ este continuu. Acest lucru se poate demonstra utilizând condiţii suficiente în termeni de entropie metrică (a se vedea de exemplu [**51**]-6.1).

Continuitatea lui $(L_t^x, t \geq 0,\, x \in F)$ permite deducerea simplă a faptului că $\mathbf{X}$ este limita unui şir de lanţuri Markov continue. Se consideră din nou şirul aproximant $\{\nu_n\}_n$ din 2.2.14; ν_n măsură discretă pe V_n, $\forall\, n$ ("distribuţie de masă" "naturală"). Se consideră $A_t^n := \int_F L_t^x \nu_n(dx)$, $\sigma_t^n := \inf\{s : A_s^n > t\}$, $X_t^n := X_{\sigma_t^n}$ (a se vedea [**51**], pg.93). Se poate enunţa în sfârşit

TEOREMA 4.10.3. *([**3**]-7.22) (a) $\mathbf{X}^n := (X_t^n, t \geq 0, P^x, x \in V_n)$ proces Markov simetric asociat lui ε_n pe V_n;*
(b) $X_t^n \longrightarrow X_t$ a.s. şi uniform pe compacte.

Pentru a deduce (a) se utilizează 4.10.2-a), deci toate "punctele" lui F nu sunt polare pentru $\mathbf{X}$. Din 3.7.1 (teorema "urmei" formelor Dirichlet) $\mathbf{X}^n$ este procesul Markov asociat urmei lui ε pe $L^2(V_n, \nu_n)$. Se ţine cont şi de $\mathrm{Tr}(\varepsilon|V_n)(u, u) = \varepsilon_n\left(u_{|V_n}, u_{|V_n}\right)$.

Deasemenea, cum F compact, pentru orice $T > 0$, $(L_t^x, 0 \leq t \leq T, x \in F)$ este uniform continuu. Din convergenţa slabă a şirului ν_n către μ, dacă $T_2 < T_1 < T$, atunci $A_t^n \longrightarrow t$ uniform pe $[0, T_1]$, deci $\sigma_t^n \longrightarrow t$ uniform pe $[0, T_2]$. Cum $\mathbf{X}$ continuu, $X_t^n \longrightarrow X_t$ uniform pe $[0, T_2]$.

REMARCA 4.10.4. Se pot obţine simplu operatorii asociaţi H_n ai lui $\mathbf{X}^n$, sau echivalent, lui ε_n. Dacă $\{c^n(p, q)\}_{p, q \in V_n}$ matricea de conductanţă asociată, atunci

$$\varepsilon_n(u, u) = \frac{1}{2} \sum_{p, q \in V_n} c^n(p, q)(u(p) - u(q))^2.$$

Din (4.12) rezultă

$$c^n(p,q) = \sum_{w \in W_n, p,q \in \psi_w(V_0)} \frac{1}{r_w} D_{\psi_w^{-1}(p)\psi_w^{-1}(q)}, p, q \in V_n,$$

iar

$$H_n u(p) = \frac{1}{\nu_n(\{p\})} \sum_{q \in V_n} c^n(p,q)(u(p) - u(q)).$$

4.10.2. Nucleele $p_B(t,x,y)$. Se poate deduce (a se vedea capitolul 4 din [**30**], mai exact secţiunea 4.1) că pentru $b \in \{D, N\}$ (notaţie pentru condiţii la frontieră (Dirichlet sau Neumann)), $\exists \{\lambda_n^b\}_{n \geq 1}$, $\exists \{\varphi_n^b\}_{n \geq 1} \subset C(F,d) \cap \mathcal{D}_{b,\mu}$ valori proprii şi vectori proprii pentru H_D sau H_N astfel încât

$$0 \leq \lambda_1^b \leq \lambda_2^b \leq \ldots \leq \lambda_n \leq \lambda_{n+1}^b \leq \ldots$$

iar $\{\varphi_n^b\}_{n \geq 1}$ sistem ortonormal complet în $L^2(F,\mu)$.

Pentru $b \in \{D, N\}$, se poate defini nucleul $p_b(t,x,y)$ pe $(0,\infty) \times F \times F$:

$$p_b(t,x,y) := \sum_{n \geq 1} e^{-\lambda_n^b} t \varphi_n^b(x) \varphi_n^b(y).$$

(suma fiind formală, putându-se demonstra că ea converge uniform pe orice $[a,\infty) \times F \times F$, $\forall\, a > 0$, de unde se poate deduce şi continuitatea lui p_b pe $(0,\infty) \times F \times F$). Cele mai importante proprietăţi ale acestor nuclee sunt rezumate de

Propoziţia 4.10.5. *([**30**]-5.1.2)*

(1) *$p_b(t,x,y)$ ia valori pozitive şi este continuu pe $(0,\infty) \times F \times F$;*

(2) *$\forall\, (x,y) \in F \times F$, $p_b(\,\cdot\,,x,y) \in C^1(0,\infty)$;*

(3) *$\forall\, s,t > 0$, $\forall\, x,y \in F$,*

$$p_b(t+s,x,y) = \int_F p_b(t,x,z) p_b(s,z,y) \mu(dz).$$

Din teorema 4.8.6 rezultă existenţa unei forme rezistive $(\varepsilon, \mathcal{F})$ asociate structurii $\mathcal{L}$ şi lui $(D, \mathbf{r})$. $(\varepsilon, \mathcal{F})$ este o formă Dirichlet locală, regulată pe $L^2(F,\mu)$. Din subsecţiunea precedentă, formei $(\varepsilon, \mathcal{F})$ i se poate asocia un proces de dufuzie $\mathbf{X} = (X_t, t \geq 0, P^x, x \in F)$. Din continuitatea lui p_N se poate deduce că acest proces satisface în plus (([**30**]-A.3.1))

$$\Big(\forall\, x \in F\Big)\Big(\forall\, f \in C(F)\Big)\Big(E^x\left[f \circ X_t\right] = \int_F p_N(t,x,y) f(y) \mu(dy)\Big).$$

CAPITOLUL 5

Renormalizare pe S.A.P.C.F.

Aşa cum pe $\mathbb{R}^d$ mişcarea browniană este procesul "natural" (cu operatorul Laplace şi integrala Dirichlet asociate), se doreşte identificarea, pe o mulţime de tip fractal, a unui proces de difuzie (eventual unic) (sau a "laplacienilor", ori a formelor Dirichlet asociate). Existenţa şi unicitatea unui proces de difuzie (i.e. "laplacian", sau formă Dirichlet) pe o S.A.P.C.F. $\mathcal{L}$ este asigurată dacă în prealabil se rezolvă o altă problemă, numită *renormalizare*, anume determinarea valorilor şi vectorilor proprii pentru funcţia de renormalizare, i.e. a structurilor armonice asociate lui $\mathcal{L}$ (secţiunea 4.5.1). Îndată ce un astfel de operator propriu ireductibil (formă proprie ireductibilă) a fost găsit, se poate construi o formă Dirichlet regulată locală pe "fractal" şi procesul de difuzie asociat. Acest lucru a fost descris în capitolul precedent.

Problema determinării formelor (operatorilor) proprii a fost abordată pentru prima dată probabilist de către T. Lindstrom ([**35**]); el a demonstrat existenţa pentru fractali cuib (F.C.) utilizând teorema lui Brouwer de punct fix; generalizarea acestui rezultat la fractali cuib afini (F.C.A.) a fost realizată de Fitzsimmons, Hambly şi Kumagai ([**20**]). Unicitatea a fost demonstrată de Sabot ([**59**]) pentru fractali cuib afini (F.C.A.). Aşadar, odată cu [**59**], problema existenţei şi unicităţii formelor (operatorilor) proprii (i.e. structurilor armonice) pentru clasa fractalilor cuib afini a fost rezolvată. Pentru structurile S.A.P.C.F. generale a rămas încă o problemă deschisă.

O nouă metodă de studiu în ceea ce priveşte renormalizarea pe S.A.P.C.F. este utilizarea teoriei formelor Dirichlet, abordându-se o tehnică diferită de punct fix, cu ajutorul metricii proiective Hilbert pe conuri; ea a fost propusă de V. Metz în [**39**]. Funcţia de renormalizare Λ este nonexpansivă relativ la metrica hilbertiană proiectivă h. Această funcţie de renormalizare a fost definită în 4.5.1 pe mulţimea $\mathcal{LA}(V_0)$ (sau echivalent $\mathcal{DF}(V_0)$), adică pe mulţimea laplacienilor sau a formelor Dirichlet ireductibile pe V_0 ("frontiera" fractalului). Se impune însă să se considere extensia sa la toate formele energie (sau operatori asociaţi) pe V_0, adică la $\left(\widetilde{\mathcal{DF}}(V_0)\right)'$ (sau $\left(\widetilde{\mathcal{LA}}(V_0)\right)'$). Ea contractă h-distanţele în caz de ireductibilitate sau neliniaritate; aceasta permite demonstrarea unor rezultate privind renormalizarea, în special în ce priveşte unicitatea şi aproximarea formelor proprii.

Studiul renormalizării prin intermediul metricii Hilbert a fost perfecţionat continuu de către V. Metz în articolele ([**40**]-[**45**]); el a dezvoltat un aşa numit "test de scurtcircuitare" în [**44**], care permite să se vadă cum geometria unui fractal inluenţează existenţa formelor proprii; rafinarea tehnicilor de renormalizare în această direcţie culminează cu [**46**], unde se extind şi îmbunătăţesc rezultate datorate lui Metz, Sabot, Nussbaum; se combină tehnici spectrale, dinamice şi analitice, ansamblul lor permiţând degrevarea unui algoritm general de decizie a existenţei şi unicităţii formelor proprii pentru un fractal P.C.F. dat.

Deasemenea, tot Volker Metz este cel care a obţinut rezultate concrete privind aproximarea formelor (operatorilor) proprii ([**39**], [**40**]). În special în cazul F.C.A., unde are loc exitenţa şi unicitatea formelor proprii invariante la grupul maximal de simetrie al fractalului, aceste rezultate permit elaborarea unor algoritmi şi scrierea unor programe în C++ şi Java în scopul determinării efective a acestor forme proprii pentru clasa restrânsă a fractalilor cuib afini.

Deasemenea, o altă problemă interesantă, a existenţei şi neunicităţii, a fost rezolvată de către R. Peirone ([**54**]) pe fractali P.C.F. cu frontiera formată cu trei elemente.

În continuare, în acest capitol, se prezintă o sinteză riguroasă, conform conceptelor din secţiunea 4.1, a tuturor rezultatelor obţinute până acum (în special de către V. Metz), privind renormalizarea, descrise mai sus.

5.1. Funcţia de renormalizare

5.1.1. Definiţia funcţiei de renormalizare. Fie $\mathcal{L} := \left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ S.A.P. C.F. conexă, $\mathbf{r} := (r_1, \dots, r_n)$, cu $r_i > 0$, V_0 "frontiera" "iniţială" a structurii şi $\{V_m\}_{m\geq 0}$ şirul "generaţiilor" succesive ale lui V_0 (ca în secţiunea 4.5).

Pentru simplitate, se vor renota conurile de forme definite în subsecţiunea 4.1.2 pentru $V = V_0$: anume $\left(\widetilde{\mathcal{FD}}(V_0)\right)' =: \mathbb{P}_0 =: \mathbb{P}$, $(\mathcal{FD}(V_0))' =: \mathbb{D}_0 =: \mathbb{D}$, $\mathcal{FD}(V_0) =: \mathbb{D}_0^i =: \mathbb{D}^i$, $(\mathcal{FD}(V_0))^t =: \mathbb{D}_0^{ti} =: \mathbb{D}^{ti}$. Mai precis, $\mathbb{P}$ este conul formelor pozitiv semidefinite conservative pe V_0, $\mathbb{D}$ este conul formelor Dirichlet conservative pe V_0, iar $\mathbb{D}^i$ (respectiv $\mathbb{D}^{ti}$) este conul formelor Dirichlet ireductibile (respectiv tare ireductibile) pe V_0. Evident

$$\mathbb{D}^{ti} \subset \mathbb{D}^i \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{P}.$$

Analog, se vor defini şi $\left(\widetilde{\mathcal{FD}}(V_1)\right)' =: \mathbb{P}_1$, $(\mathcal{FD}(V_1))' =: \mathbb{D}_1$, $\mathcal{FD}(V_1) =: \mathbb{D}_1^i$, $(\mathcal{FD}(V_1))^t =: \mathbb{D}_1^{ti}$.

Dacă se consideră $\mathbb{B} := \mathbb{D} - \mathbb{D}$, evident $\mathbb{P} \subset \mathbb{B}$, iar $(\mathbb{B}, ||\cdot||)$ spaţiu normat finit dimensional $\Big($unde $||\varepsilon||^2 := \sup\left\{\varepsilon(u,u) \,\middle|\, u \in l(V_0),\, ||u||_{V_0} = 1\right\}\Big)$. Se poate deduce atunci că

$$\mathbb{D}^\circ = \left\{\varepsilon \in \mathbb{D} \,\middle|\, \varepsilon(\chi_p, \chi_q) < 0,\, p \neq q \in V_0\right\} = \mathbb{D}^{ti},$$

$$\mathbb{P}^\circ = \left\{\varepsilon \in \mathbb{P} \,\middle|\, \varepsilon(u,u) = 0 \Leftrightarrow u = \text{ ct.}\right\} = \widetilde{\mathcal{DF}}(V_0).$$

Acest lucru rezultă uşor din faptul că există corespondenţă bijectivă între $\mathcal{M}_{cond}(V_0)$ şi $(\mathcal{FD}(V_0))'$, anume $\Xi : \mathcal{M}_{cond}(V_0) \longrightarrow (\mathcal{FD}(V_0))' = \mathbb{D}$ (a se vedea subsecţiunea 4.1.5); aplicaţia Ξ se poate extinde la $\mathcal{M}^0_{sim}(V_0)$ (matricile simetrice $\#(V_0)$ dimensionale, "0 pe diagonală"), anume $\Xi : \mathcal{M}^0_{sim}(V_0) \longrightarrow \mathbb{B}$, fiind deasemenea bijecţie (chiar izomorfism izometric de $\mathbb{R}$-spaţii normate). Dar $\mathcal{M}_{cond}(V_0)$ este în izomorfism izometric de conuri cu $\mathbb{D}$ prin Ξ, deci şi cu $\mathbb{R}_+^{n(n-1)/2}$, unde $n = \#(V_0)$, iar $\mathcal{M}^0_{sim}(V_0)$ este în izomorfism izometric de spaţii normate (cu matricile simetrice, cu "suma pe linii 0") şi apoi cu $\mathbb{B}$ prin Ξ, deci şi cu $\mathbb{R}^{n(n-1)/2}$. De aici $\mathbb{D}^\circ$ izomorf izometric cu $(0,\infty)^{n(n-1)/2}$, etc.

Din cele de mai sus rezultă şi că $\mathbb{D}$ *este con poliedral*. Se va vedea mai târziu că $\mathbb{P}$ *nu este, în genral, con poliedral*.

Deasemenea, se remarcă faptul că $\mathbb{D} \cap \mathbb{P}^\circ = \mathbb{D}^i$.

Se introduc următoarele două operaţii pe $\mathbb{P}$, respectiv $\mathbb{P}_1$ (acestea mai fuseseră considerate în capitolul precedent, dar doar pentru $\mathbb{D}^i$ şi $\mathbb{D}_1^i$):

(1) (**Multiplicare**) Pentru $\varepsilon_0 \in \mathbb{P}_0$, se defineşte $\Psi(\varepsilon_0) =: \varepsilon_1$, unde

$$\varepsilon_1(u,u) := \sum_{i=1}^{N} r_i \varepsilon_0(u \circ \psi_i, u \circ \psi_i),\ \forall\, u \in l(V_1);$$

se verifică imediat că $\Psi(\varepsilon_0) = \varepsilon_1 \in \mathbb{P}_1$, deci $\Psi(\mathbb{P}_0) \subset \mathbb{P}_1$.

(2) (**Reducere**) Pentru $\varepsilon_1 \in \mathbb{P}_1$, se defineşte $\Phi(\varepsilon_1) =: \varepsilon_0$, unde

$$\varepsilon_0(u,u) := \inf\left\{\varepsilon_1(v,v) \,\middle|\, v \in l(V_1),\, v_{|V_0} = u\right\},\ u \in l(V_0);$$

se verifică imediat că $\Phi(\varepsilon_1) = \varepsilon_0 \in \mathbb{P}_1$, deci $\Psi(\mathbb{P}_1) \subset \mathbb{P}_0$.

Se observă că aplicaţia Ψ depinde de $\mathbf{r}$ (deci $\Psi = \Psi_{\mathbf{r}}$).

Deasemenea, din $\varepsilon_0(\overline{v} \circ \psi_i, \overline{v} \circ \psi_i) \leq \varepsilon_0(\overline{v \circ \psi_i}, \overline{v \circ \psi_i})$, $\forall\, v \in l(V_1)$, $\forall\, i$, rezultă $\Psi(\mathbb{D}_0) \subset \mathbb{D}_1$.

Apoi, pentru $\varepsilon_1 \in \mathbb{D}_1$, $u \in l(V_0)$ şi $\overline{u} := (0 \vee u) \wedge 1$ are loc

$$\begin{aligned}\Phi(\varepsilon_1)(\overline{u}, \overline{u}) &= \inf\left\{\varepsilon_1(v,v) \,\middle|\, v \in l(V_1),\, v_{|V_0} = \overline{u}\right\} \leq \\ &\leq \varepsilon_1\left(\overline{\mathcal{H}^{\varepsilon_1}_{V_1\setminus V_0} u}, \overline{\mathcal{H}^{\varepsilon_1}_{V_1\setminus V_0} u}\right) \leq \varepsilon_1\left(\mathcal{H}^{\varepsilon_1}_{V_1\setminus V_0} u, \mathcal{H}^{\varepsilon_1}_{V_1\setminus V_0} u\right) = \Phi(\varepsilon_1)(u,u).\end{aligned}$$

(s-a utilizat faptul că $\left(\overline{\mathcal{H}^{\varepsilon_1}_{V_1\setminus V_0} u}\right)_{|V_0} = \overline{u}$, principiul lui Dirichlet 4.1.9, observaţia 4.1.13 şi (F.D.3) pentru ε_1). Aşadar $\Phi(\varepsilon_1) \in \mathbb{D}_0$; deci $\Phi(\mathbb{D}_1) \subset \mathbb{D}_0$.

Pentru $\varepsilon_0 \in \mathbb{P}_0^\circ$, $\varepsilon_1 := \Psi(\varepsilon_0)$, $v \in l(V_1)$, dacă $\varepsilon_1(v,v) = 0$, atunci $\varepsilon_0(v \circ \psi_i, v \circ \psi_i) = 0$, $\forall\, i$, deci $v \circ \psi_i =$ct., $\forall\, i$ de unde, din conexiunea structurii $\mathcal{L}$, $v =$ct. pe V_1. Deci $\varepsilon_1 \in \mathbb{P}_1^\circ$. În final $\Psi(\mathbb{P}_0^\circ) \subset \mathbb{P}_1^\circ$.

Pentru $\varepsilon_1 \in \mathbb{P}_1^\circ$, $\varepsilon_0 := \Phi(\varepsilon_1)$, $u \in l(V_0)$, dacă $\varepsilon_0(u,u) = 0$, atunci, din 4.1.16 (se poate aplica, ε_1 satisface (F.D.2)) $\varepsilon_0(u,u) = \varepsilon_1(h(u), h(u)) = 0$, deci $h(u) =$ct. pe V_1, deci $u =$ct. pe V_0. Deci $\varepsilon_0 \in \mathbb{P}_0^\circ$. În final $\Phi(\mathbb{P}_1^\circ) \subset \mathbb{P}_0^\circ$.

Funcţia de renormalizare se defineşte acum astfel:

Definiţia 5.1.1. $\Lambda := \Lambda_{\mathbf{r}} : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$, $\Lambda := \Phi \circ \Psi$.

Din cele de mai sus, Λ bine definită şi $\Lambda(\mathbb{P}^\circ) \subset \mathbb{P}^\circ$, $\Lambda(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, $\Lambda(\mathbb{D}^\circ) \subset \mathbb{D}^\circ$.

Pentru $\mathbb{K} \in \{\mathbb{P}, \mathbb{D}\}$, se defineşte, pentru $\mathcal{E}$, $\mathcal{F} \in \mathbb{B}$,

$$\mathcal{E} \leq_{\mathbb{K}} \mathcal{F} \Longleftrightarrow \mathcal{F} - \mathcal{E} \in \mathbb{K}.$$

Se poate deduce simplu că $\mathcal{E} \leq_{\mathbb{P}} \mathcal{F} \Longleftrightarrow \mathcal{E}(u,u) \leq \mathcal{F}(u,u)$, $\forall\, u \in l(V_0)$ (deoarece $\mathcal{E}$, $\mathcal{F} \in \mathbb{B}$, deci sunt simetrice) iar $\mathbb{P} = \left\{\mathcal{A} - \mathcal{B} \,\middle|\, \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{D},\, \mathcal{B} \leq_{\mathbb{P}} \mathcal{A}\right\}$.

5.1.2. Proprietăţile funcţiei de renormalizare. Funcţia de renormalizare este compunerea dintre o aplicaţie liniară (aplicaţia "de multiplicare" Ψ) şi una supraaditivă (aplicaţia "de restricţie" Φ). Toate proprietăţile importante sunt listate mai jos (pentru demonstraţii se poate consulta [**39**]-sect.2 şi referinţele corespunzătoare):

PROPOZIŢIA 5.1.2. *(Propritătţile funcţiei de renormalizare)*

(a) *(Λ invariază $\mathbb{D}$, $\mathbb{D}^\circ$, $\mathbb{P}^\circ$)* $\Lambda(\mathbb{P}^\circ) \subset \mathbb{P}^\circ$, $\Lambda(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, $\Lambda(\mathbb{D}^\circ) \subset \mathbb{D}^\circ$;

(b) *(Λ pozitiv omogenă)* $\Big(\forall\, \mathcal{A} \in \mathbb{P}\Big)\Big(\forall\, \alpha > 0\Big)\Big(\Lambda(\alpha\mathcal{A}) = \alpha\Lambda(\mathcal{A})\Big)$;

(c) *(Λ $\le_{\mathbb{P}}$-monotonă)* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{P}$, $\mathcal{A} \le_{\mathbb{P}} \mathcal{B} \Longrightarrow \Lambda(\mathcal{A}) \le \Lambda(\mathcal{B})$;

(d) *(Λ supraaditivă)* $\Big(\forall\, \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{P}\Big)\Big(\Lambda(\mathcal{A}+\mathcal{B}) \ge \Lambda(\mathcal{A}) + \Lambda(\mathcal{B})\Big)$;

(e) $\Lambda(\varepsilon)(u,u) = \Psi(\varepsilon)\left(\mathcal{H}^{\Psi(\varepsilon)}_{V_1\backslash V_0} u, \mathcal{H}^{\Psi(\varepsilon)}_{V_1\backslash V_0} u\right)$, $\forall\, u \in l(V_0)$, $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{P}$;

(f) $\Lambda(E) = \left(\Pi_0\left(\Psi(E)\right)\Pi_0^t\right) - \left(\Pi_0\left(\Psi(E)\right)\Pi_1^t\right)\left(\Pi_1\left(\Psi(E)\right)\Pi_1^t\right)^{-1}\left(\Pi_1\left(\Psi(E)\right)\Pi_0^t\right)$, *unde* $\Pi_0 := \Pi_{V_0}$ *iar* $\Pi_1 := \Pi_{V_1\backslash V_0}$ *sunt proiectorii de pe* $l(V_1)$ *pe* $l(V_0)$, *respectiv* $l(V_1\backslash V_0)$ *şi s-au considerat analoagele lui* Ψ, Φ, Λ *"pe operatori";*

(g) $\Lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{P}^\circ) \cap \mathcal{C}(\mathbb{D})$ *şi* $d\Lambda(\mathcal{A})(\mathcal{B})(u,u) = \Psi(\mathcal{B})\left(\mathcal{H}^{\Psi(\mathcal{A})}_{V_1\backslash V_0} u, \mathcal{H}^{\Psi(\mathcal{A})}_{V_1\backslash V_0} u\right)$, $\forall\, u \in l(V_0)$, $\forall\, \mathcal{A} \in \mathbb{P}^\circ$, $\forall\, \mathcal{B} \in \mathbb{B}$, *sau* $d\Lambda(\mathcal{A})(\mathcal{B}) = \left(\mathcal{H}^{\Psi(\mathcal{A})}_{V_1\backslash V_0}\right)^t \Psi(\mathcal{B})\left(\mathcal{H}^{\Psi(\mathcal{A})}_{V_1\backslash V_0}\right)$.

Majoritatea proprietăţilor rezultă aproape trivial din definiţii, principiul lui Dirichlet şi considerarea nucleelor armonice discutate în secţiunea 4.1.6: (a) s-a dedus deja, (b),(d) rezultă din definiţia lui Φ ca infimum, iar (c) rezultă din (d). Se poate deduce şi faptul că Λ nu este $\le_{\mathbb{D}}$-monotonă. (e) rezultă din

$$\Lambda(\varepsilon)(u,u) = \Phi \circ \Psi(u,u) = \Psi(\varepsilon)\left(\mathcal{H}^{\Psi(\varepsilon)}_{V_1\backslash V_0} u, \mathcal{H}^{\Psi(\varepsilon)}_{V_1\backslash V_0} u\right),\ u \in l(V_0),\ \varepsilon \in \mathbb{P}$$

(din principiul lui Dirichlet 4.1.9 şi observaţia 4.1.13 există nucleu armonic asociat şi lui $\Psi(\varepsilon) \in \mathbb{P}_1$).

La (f) există invers al lui $\Pi_1\Psi(E)\Pi_1^t$ doar pentru $\varepsilon \in \mathbb{P}^\circ$, formula fiind dată de 4.1.16 (cu $T = \Pi_0\left(\Psi(E)\right)\Pi_0^t$, $X = \Pi_1\left(\Psi(E)\right)\Pi_1^t$, $J = \Pi_1\left(\Psi(E)\right)\Pi_0^t$). Se poate deduce formula şi pentru situaţia $\varepsilon \in \mathbb{P}$, dar considerându-se inversa generalizată Moore-Penrose a matricii operatorului $\Pi_1\Psi(E)\Pi_1^t$ (a se vedea [**2**]-Th.6).

Pentru (g) se foloseşte principiul de minim pentru deducerea continuităţii lui Λ pe $\mathbb{D}$ iar formula este binecunoscută tot din rezultate privind "shorted operators" (a se vedea [**39**]-sect.2 şi referinţele aferente).

OBSERVAŢIA 5.1.3. ([**41**]-Prop.2.1-g)) (a) se poate îmbunătăţi: $\Lambda(\mathbb{D} \cap \mathbb{P}^\circ) \subset \mathbb{D}^\circ$, adică *imaginea prin funcţia de renormalizare a conului formelor Dirichlet ireductibile e formată cu forme Dirichlet tare ireductibile.* Într-adevăr, pentru p, $q \in V_0$, $p \neq q$ şi $\mathcal{A} \in \mathbb{D} \cap \mathbb{P}^\circ$, A operatorul corespunzător, $\left(\Psi(A)\mathcal{H}^{\mathcal{A}}_{V_1\backslash V_0}\chi_p\right)_{|V_1\backslash V_0} \equiv 0$, iar din definiţia lui Λ

$$\begin{aligned}\Lambda(\mathcal{A})(\chi_p,\chi_q) &= \Psi(\mathcal{A})(\mathcal{H}^{\mathcal{A}}_{V_1\backslash V_0}\chi_p, \mathcal{H}^{\mathcal{A}}_{V_1\backslash V_0}\chi_q) = \Psi(\mathcal{A})(\mathcal{H}^{\mathcal{A}}_{V_1\backslash V_0}\chi_p, \chi_q) = \\ &= \Psi(A)\mathcal{H}^{\mathcal{A}}_{V_1\backslash V_0}\chi_p(q) < 0,\end{aligned}$$

din principiul de minim aplicat lui $\mathcal{A}$ (ireductibilă).

5.2. Metrica proiectivă Hilbert şi funcţia de renormalizare

5.2.1. "Metrica proiectivă" şi "metrica" Thompson: definiţii. Cum funcţia de renormalizare se poate defini pe conul $\mathbb{P}$, V.Metz a încercat primul, în [**39**] - dat fiind rezulatele deja existente privind punctele fixe ale operatorilor nonexpansivi neliniari definiţi pe conuri, cuprinse în lucrarea [**53**] - să încerce aplicarea lor pentru Λ. Ingredientul principal este în [**53**] *metrica proiectivă Hilbert* şi *metrica Thompson.* Se vor prezenta succint aceste două concepte (prezentarea respectă [**39**] şi trimiterile la [**53**]).

Se consideră $\mathbb{K} \in \{\mathbb{P}, \mathbb{D}\}$, $\mathbb{P}$, $\mathbb{D}$ conurile de forme asociate ca în secţiunea precedentă unei structuri S.A.P.C.F. conexe $\mathcal{L}$ şi $\mathbb{B} := \mathbb{K} - \mathbb{K}$. Atunci $\mathbb{K}$ con convex închis în $(\mathbb{B}, ||\cdot||)$ ($\mathbb{K}$ fiind finit dimensional, deoarece $\mathbb{B}$ este $n(n-1)/2$ dimensional, $n = \#(V_0)$), cu vârf, generator al lui $\mathbb{B}$, $\mathbb{K}^\circ$ total şi normal ($\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{B}$, $\mathcal{A} \le_{\mathbb{K}} \mathcal{B} \Longrightarrow ||\mathcal{A}|| \le ||\mathcal{B}||$).

DEFINIŢIA 5.2.1. Pentru $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$, se spune că $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sunt $\mathbb{K}$-comparabile (se scrie $\mathcal{A} \sim_{\mathbb{K}} \mathcal{B}$) $\Longleftrightarrow$ $\exists\, \alpha$, $\beta > 0$ cu $\alpha\mathcal{A} \le_{\mathbb{K}} \mathcal{B} \le_{\mathbb{K}} \beta\mathcal{A}$.

Se deduce simplu că "$\sim_{\mathbb{K}}$" relaţie de echivalenţă pe $\mathbb{K}\backslash\{0\}$; clasele de echivalenţă se numesc *părţi*, care, sunt evident subconuri ale lui $\mathbb{K}$. $\mathbb{K}^\circ$ este cea mai importantă dintre părţi.

Datorită faptului că Λ nu este neapărat $\le_{\mathbb{D}}$-monotonă, se va considera în continuare doar $\le_{\mathbb{P}}$, care se va nota simplu $\le$.

DEFINIŢIA 5.2.2. Pentru $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$, cu $\mathcal{A} \sim_{\mathbb{K}} \mathcal{B}$, se consideră

$$\begin{aligned} m(\mathcal{B}|\mathcal{A}) &:= \sup\left\{\alpha > 0 \,\middle|\, \alpha\mathcal{A} \le \mathcal{B}\right\},\\ M(\mathcal{B}|\mathcal{A}) &:= \inf\left\{\beta > 0 \,\middle|\, \mathcal{B} \le \beta\mathcal{A}\right\},\\ h(\mathcal{A},\mathcal{B}) &:= \ln\frac{M(\mathcal{B}|\mathcal{A})}{m(\mathcal{B}|\mathcal{A})},\\ p(\mathcal{A},\mathcal{B}) &:= \max\left\{\ln M(\mathcal{A}|\mathcal{B}), \ln M(\mathcal{B}|\mathcal{A})\right\}. \end{aligned}$$

Pentru $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ cu $\mathcal{A} \nsim_{\mathbb{K}} \mathcal{B}$, se consideră $h(\mathcal{A},\mathcal{B}) := p(\mathcal{A},\mathcal{B}) := \infty$, iar $h(0,0) := p(0,0) := 0$. h şi p se numesc *"metrica" proiectivă Hilbert* şi *"metrica" Thompson* (deşi, definite pe $\mathbb{K}$, ele nu sunt, evident, metrici).

Se observă că pentru $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$, cu $\mathcal{A} \sim_{\mathbb{K}} \mathcal{B}$, are loc $0 < m(\mathcal{B}|\mathcal{A}) \le M(\mathcal{B}|\mathcal{A}) < \infty$ şi $m(\mathcal{B}|\mathcal{A}) = M(\mathcal{A}|\mathcal{B})^{-1}$, $M(\mathcal{B}|\mathcal{A}) = m(\mathcal{A}|\mathcal{B})^{-1}$.

5.2.2. "Metrica" proiectivă şi "metrica" Thompson: proprietăţi. Se deduce simplu faptul că

(1) $h(\mathcal{A},\mathcal{B}) = h(\mathcal{B},\mathcal{A})$, $\forall\,\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$;
(2) $h(\mathcal{A},\mathcal{C}) \le h(\mathcal{A},\mathcal{B}) + h(\mathcal{B},\mathcal{C})$, $\forall\,\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C} \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$;
(3) $h(\mathcal{A},\mathcal{B}) = 0 \iff (\exists\,\alpha > 0)(\mathcal{A} = \alpha\mathcal{B})$;
(4) $h(\mathcal{A},\mathcal{B}) = h(\alpha\mathcal{A},\beta\mathcal{B})$, $\forall\,\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$, $\forall\,\alpha$, $\beta > 0$;
(5) $h(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \infty \iff \mathcal{A} \nsim_{\mathbb{K}} \mathcal{B}$.

(1), (2) şi (5) se pot deduce şi pentru p, (3) şi (4) se înlocuiesc cu faptul că $p(\mathcal{A},\mathcal{B}) = 0 \iff \mathcal{A} = \mathcal{B}$.
Uzând sistematic de [**53**], V. Metz, deduce în [**39**]-sect.3 că:

- pentru orice parte C, $h_{|C\times C}$ pseudometrică, $h_{|\left(C\cap S_1^{\mathbb{B}}(0)\right)\times\left(C\cap S_1^{\mathbb{B}}(0)\right)}$ metrică ($S_1^{\mathbb{B}}(0)$ sfera unitate din $(\mathbb{B}, ||\cdot||)$); de exemplu $C = \mathbb{K}^\circ$;
- $\left(C \cap S_1^{\mathbb{B}}(0), h_{|\left(C\cap S_1^{\mathbb{B}}(0)\right)\times\left(C\cap S_1^{\mathbb{B}}(0)\right)}\right)$ spaţiu metric complet (Rem 1.1 din [**53**]); de exemplu $C = \mathbb{K}^\circ$;
- pentru orice parte C, $p_{|C\times C}$ metrică; cum $\mathbb{K}$ con normal, $(C, p_{C\times C})$ spaţiu metric complet (Th 1.1 (Thompson) din [**53**]); de exemplu $C = \mathbb{K}^\circ$;
- $\frac{1}{2}h(\mathcal{A},\mathcal{B}) \le p(\mathcal{A},\mathcal{B}) \le h(\mathcal{A},\mathcal{B})$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{P}^\circ \cap S_1^{\mathbb{B}}(0)$ (din Rem 1.3 - [**53**] pentru $C = \mathbb{P}^\circ$, $\psi = ||\cdot||$, $\Sigma_1 := \mathbb{P}^\circ \cap S_1^{\mathbb{B}}(0)$);
- $||\mathcal{A} - \mathcal{B}|| \le e^{h(\mathcal{A},\mathcal{B})} - 1$, $\forall\,\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{P} \cap S_1^{\mathbb{B}}(0)$ (din Prop.1.4 - [**53**] pentru $K = \mathbb{P}$ con normal în spaţiul Banach $\mathbb{B}$: există $\mathcal{U} \in \mathbb{P}$ cu $||\mathcal{U}|| = 1$, ($\mathcal{V} \in \mathbb{P}$, $||\mathcal{V}|| \le 1 \Longrightarrow \mathcal{V} \le_{\mathbb{P}} \mathcal{U}$) şi ($\mathcal{U}' \in \mathbb{P} - \mathbb{P}$, $-\mathcal{U} \le_{\mathbb{P}} \mathcal{U}' \le_{\mathbb{P}} \mathcal{U} \Longrightarrow ||\mathcal{U}'|| \le 1$), deci ipotezele Prop.1.4 sunt verificate);
- $h(\mathcal{A},\mathcal{B}) \le \ln\frac{r+||\mathcal{A}-\mathcal{B}||}{r-||\mathcal{A}-\mathcal{B}||}$, $\forall\,\mathcal{B} \in \mathbb{P}^\circ$, $\mathcal{A} \in B_r^{\mathbb{B}}(\mathcal{B}) \subset \mathbb{P}^\circ$ (din Rem.1.4 - [**53**]).
- $h_{|\Sigma_1\times\Sigma_1} \sim p_{|\Sigma_1\times\Sigma_1} \sim \left(d_{||\cdot||}\right)_{|\Sigma_1\times\Sigma_1}$ (din ultimele trei inegalităţi), deci, pe Σ_1 topologia generată de normă coincide cu ce cea generată de h, sau p;
- dacă $\mathbb{B}^* := \{\theta : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{R} \,|\, \theta \text{ liniară}\}$, $\mathbb{P}^* := \left\{\theta \in \mathbb{B}^* \,\middle|\, \theta(\mathcal{A}) \ge 0, \forall\,\mathcal{A} \in \mathbb{P}\right\}$ iar pentru $\theta \in \mathbb{P}^*\backslash\{0\}$, $S^\theta := \{\mathcal{A} \in \mathbb{P}^\circ \,|\, \theta(\mathcal{A}) = 1\}$, rezultă $B_\alpha^{S^\theta,h}(\mathcal{A}) := \left\{\mathcal{B} \in S^\theta \,\middle|\, h(\mathcal{A},\mathcal{B}) \le \alpha\right\}$ (bila hilbertiană, "închisă", restricţionată la S^θ, de centru $\mathcal{A}$ şi rază α) este convexă, nu neapărat strict convexă (conform Lema 4.1 - [**53**]), chiar dacă metrica hilbertiană nu provine dintr-o normă.

5.2.3. Λ h-nonexpansivă. Se consideră $\mathcal{L} := \left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ S.A.P.C.F. conexă, $\mathbf{r} := (r_1, \ldots, r_n)$, cu $r_i > 0$, V_0 "frontiera" structurii, conurile $\mathbb{P}$, $\mathbb{D}$ asociate lui V_0 şi Λ funcţia de renormalizare.
Utilizând un argument simplu al lui Bushell ([**10**]-Th 3.1), V.Metz observă în [**39**]-Prop.4.1 că Λ este h şi p- *nonexpansivă* pe $\mathbb{P}^\circ$:

PROPOZIŢIA 5.2.3. *$h(\Lambda(\mathcal{A}),\Lambda(\mathcal{B})) \le h(\mathcal{A},\mathcal{B})$, $p(\Lambda(\mathcal{A}),\Lambda(\mathcal{B})) \le p(\mathcal{A},\mathcal{B})$, $\forall\,\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{P}^\circ$.*

Într-adevăr, din Λ monotonă şi pozitiv omogenă, şi $m(\mathcal{B}|\mathcal{A})\mathcal{A} \le \mathcal{B} \le M(\mathcal{B}|\mathcal{A})\mathcal{A}$, pentru $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{P}^\circ$, rezultă $m(\mathcal{B}|\mathcal{A})\Lambda(\mathcal{A}) \le \Lambda(\mathcal{B}) \le M(\mathcal{B}|\mathcal{A})\Lambda(\mathcal{A})$, deci $m(\mathcal{B}|\mathcal{A}) \le m(\Lambda(\mathcal{B})|\Lambda(\mathcal{A})) \le M(\Lambda(\mathcal{B})|\Lambda(\mathcal{A})) \le M(\mathcal{B}|\mathcal{A})$, de unde $h(\Lambda(\mathcal{A}),\Lambda(\mathcal{B})) \le h(\mathcal{A},\mathcal{B})$, $p(\Lambda(\mathcal{A}),\Lambda(\mathcal{B})) \le p(\mathcal{A},\mathcal{B})$.

OBSERVAŢIA 5.2.4. ([**41**]-Prop.3.1, Prop.3.2) 1. O altă modalitate de a deduce 5.2.3 este următoarea:
- se definesc, pentru $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{P}^\circ$,

$$\underline{\varepsilon}(\mathcal{A}|\mathcal{B}) := \mathcal{A} - m(\mathcal{A}|\mathcal{B})\mathcal{B} \in \partial\mathbb{P},\ \overline{\varepsilon}(\mathcal{A}|\mathcal{B}) := M(\mathcal{A}|\mathcal{B})\mathcal{B} - \mathcal{A} \in \partial\mathbb{P}.$$

- se observă că pentru $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{P}^\circ$, $\exists\,\mathcal{R}$, $\mathcal{S} \in \mathbb{P}$ cu

$$\Lambda(\mathcal{A}) = \Lambda(\underline{\varepsilon}(\mathcal{A}|\mathcal{B})) + m(\mathcal{A}|\mathcal{B})\Lambda(\mathcal{B}) + \mathcal{R},$$

$$M(\mathcal{A}|\mathcal{B})\Lambda(\mathcal{B}) = \Lambda(\mathcal{A}) + \Lambda(\overline{\varepsilon}(\mathcal{A}|\mathcal{B})) + \mathcal{S}.$$

- rezultă atunci că

$$m(\mathcal{A}|\mathcal{B}) \leq m(\Lambda(\mathcal{A})|\Lambda(\mathcal{B})) \leq M(\Lambda(\mathcal{A})|\Lambda(\mathcal{B})) \leq M(\mathcal{A}|\mathcal{B}),$$
$$m(\mathcal{A}|\mathcal{B}) < m(\Lambda(\mathcal{A})|\Lambda(\mathcal{B})) \Longleftrightarrow \Lambda(\underline{\varepsilon}(\mathcal{A}|\mathcal{B})) + \mathcal{R} \in \mathbb{P}^\circ,$$
$$M(\Lambda(\mathcal{A})|\Lambda(\mathcal{B})) < M(\mathcal{A}|\mathcal{B}) \Longleftrightarrow \Lambda(\overline{\varepsilon}(\mathcal{A}|\mathcal{B})) + \mathcal{S} \in \mathbb{P}^\circ,$$

Acestea permit deducerea h-nonexpansivităţii lui Λ. Deasemenea, h-contracta-rea lui Λ ar putea rezulta din $\Lambda(\mathbb{P}) \subset \mathbb{P}^\circ$ sau Λ strict concavă. Dar chiar şi pe exemple simple (Fulgul lui Vicsek cu grupul de simetrie maximal, a se vedea ultimul capitol) se va vedea că nu se întâmplă niciuna din aceste situaţii (deoarece $\Lambda(\partial\mathbb{P}\backslash\mathbb{D}) = \{0\}$).

2. Pentru $u \in l(V_0)$, deoarece $\left(\Psi(B)\mathcal{H}^{\mathcal{B}}_{V_1\backslash V_0}u\right)_{V_1\backslash V_0} \equiv 0$, $\left(\mathcal{H}^{\mathcal{B}}_{V_1\backslash V_0}u\right)_{|V_0} = \left(\mathcal{H}^{\mathcal{A}}_{V_1\backslash V_0}u\right)_{|V_0}$ (B operatorul asociat lui $\mathcal{B}$), rezultă $\Psi(\mathcal{B})\left(\mathcal{H}^{\mathcal{A}}_{V_1\backslash V_0}u - \mathcal{H}^{\mathcal{B}}_{V_1\backslash V_0}u, \mathcal{H}^{\mathcal{B}}_{V_1\backslash V_0}u\right) = 0$, de unde, cu un calcul simplu ([**41**]-Prop.3.2) va rezulta (pentru $\underline{\varepsilon}(\mathcal{A}|\mathcal{B}) =: \underline{\varepsilon}$, $\overline{\varepsilon}(\mathcal{A}|\mathcal{B}) =: \overline{\varepsilon}$)

$$\Lambda(\underline{\varepsilon}) + \mathcal{R} = d\Lambda(\mathcal{A})(\underline{\varepsilon}) + m(\mathcal{A}|\mathcal{B})\Psi(\mathcal{B})\left(\left(\mathcal{H}^{\mathcal{A}}_{V_1\backslash V_0} - \mathcal{H}^{\mathcal{B}}_{V_1\backslash V_0}\right)\cdot, \left(\mathcal{H}^{\mathcal{A}}_{V_1\backslash V_0} - \mathcal{H}^{\mathcal{B}}_{V_1\backslash V_0}\right)\cdot\right) \in \mathbb{P} \tag{5.1}$$

şi, analog,

$$\Lambda(\overline{\varepsilon}) + \mathcal{S} = d\Lambda(\mathcal{B})(\overline{\varepsilon}) + M(\mathcal{A}|\mathcal{B})\Psi(\mathcal{A})\left(\left(\mathcal{H}^{\mathcal{A}}_{V_1\backslash V_0} - \mathcal{H}^{\mathcal{B}}_{V_1\backslash V_0}\right)\cdot, \left(\mathcal{H}^{\mathcal{A}}_{V_1\backslash V_0} - \mathcal{H}^{\mathcal{B}}_{V_1\backslash V_0}\right)\cdot\right) \in \mathbb{P} \tag{5.2}$$

Aceasta va permite ca, în cazul unei diferenţiale strict pozitive a lui Λ să aibă loc h-contractarea lui Λ. Acest lucru se va întâmpla în cazul F.C.A.-urilor (a se vedea secţiunea 5.8).

3. Nu se poate aştepta inegalitate strictă pentru situaţia generală a fractalilor P.C.F. Doar pentru F.C. (se va vedea mai târziu) V. Metz (în [**43**]) a obţinut că $h(\Lambda^n(\mathcal{A}), \Lambda^n(\mathcal{B})) \leq 2 \cdot \xi(\mathcal{A},\mathcal{B})^n \cdot h(\mathcal{A},\mathcal{B})$, $\xi(\mathcal{A},\mathcal{B})$ fiind o constantă din $(0,1)$ ce depinde de $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$.

4. D. Weller a demonstrat că nu toate funcţiile nonexpansive provin din funcţii monotone, pozitiv omogene.

5. Pt. anumite exemple de fractali ("Fulgul" lui Vicsek cu grupul de simetrie "generat doar de diagonale") se poate deduce că Λ nu e $\mathbb{D}$-monotonă nici $p_{\mathbb{D}}$ nonexpansivă; acesta este motivul pentru care se consideră h şi p înţelegându-se $h_{\mathbb{P}}$ şi $p_{\mathbb{P}}$.

Deasemenea, foarte important este faptul că *există o singură valoare proprie pentru* Λ *pe* $\mathbb{P}$*-părţi* ([**39**]-Prop4.2, cu argument tot din [**10**]-sect.3):

Propoziţia 5.2.5. *$\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{P}$, $\mathcal{A} \sim_{\mathbb{P}} \mathcal{B}$, $\Lambda(\mathcal{A}) = \alpha\mathcal{A}$, $\Lambda(\mathcal{B}) = \beta\mathcal{B} \Longrightarrow \alpha = \beta$.*

Concluzia rezultă din $m(\mathcal{B}|\mathcal{A}) \leq m(\Lambda(\mathcal{B})|\Lambda(\mathcal{A})) = m(\beta\mathcal{B}|\alpha\mathcal{A}) = (\beta/\alpha)m(\mathcal{B}|\mathcal{A})$, de unde $\beta \geq \alpha$, apoi se interschimbă α cu β.

5.3. Renormalizare pe P.C.F.S.S. conexe. Existenţă

Se vor prezenta rezultate generale privind existenţa formelor proprii pentru P.C.F.S.S. conexe, în conformitate cu [**39**].

Fie $\mathcal{L} := \left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ S.A.P.C.F. conexă, $\mathbf{r} := (r_1, \ldots, r_n)$, cu $r_i > 0$, V_0 "frontiera" structurii, conurile $\mathbb{P}$, $\mathbb{D}$ asociate lui V_0 şi Λ funcţia de renormalizare.

5.3.1. Rezultate generale privind existenţa pentru S.A.P. C.F. conexe. V. Metz a observat, în [**39**], că dacă se consideră $B^{\mathbb{B}}_1(0) := \left\{\mathcal{A} \in \mathbb{B} \,\middle|\, ||\mathcal{A}|| \leq 1\right\}$ bila unitate "închisă" din $(\mathbb{B}, ||\cdot||)$, ea este compactă ($\mathbb{B}$ finit dimensional) şi convexă, deci şi $B^{\mathbb{B}}_1(0) \cap \mathbb{D}$ compactă şi convexă ($\mathbb{D} \subset \mathbb{B}$ închisă). Dacă $\alpha := \sup\left\{||\Lambda(\mathcal{A})|| \,\middle|\, \mathcal{A} \in B^{\mathbb{B}}_1(0) \cap \mathbb{D}\right\}$, atunci din $\Lambda \in \mathcal{C}(\mathbb{D})$ şi $\Lambda(\mathbb{P}^\circ) \subset \mathbb{P}^\circ$, rezultă $0 < \alpha < \infty$. Se poate considera atunci $\frac{1}{\alpha}\Lambda$, pentru care $\frac{1}{\alpha}\Lambda(B^{\mathbb{B}}_1(0) \cap \mathbb{D}) \subset B^{\mathbb{B}}_1(0) \cap \mathbb{D}$ (Λ omogenă), deci se poate aplica teorema lui Brouwer lui $\frac{1}{\alpha}\Lambda : B^{\mathbb{B}}_1(0) \cap \mathbb{D} \longrightarrow B^{\mathbb{B}}_1(0) \cap \mathbb{D}$, pentru a obţine

Propoziţia 5.3.1. *$\mathcal{L} := \left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ S.A.P.C.F. conexă, $\mathbf{r} := (r_1, \ldots, r_n)$, cu $r_i > 0 \Longrightarrow$*

$$\Big(\exists\, \alpha > 0\Big)\Big(\exists\, \mathcal{A} \in \mathbb{D}\Big)\Big(\Lambda(\mathcal{A}) = \alpha\mathcal{A}\Big).$$

Aşadar, existenţa are loc. Dar, acest rezultat nu este satisfăcător, deoarece, se doreşte găsirea unor forme proprii din $\mathbb{D} \cap \mathbb{P}^\circ$ pentru funcţia de renormalizare. Acest lucru se poate realiza, cu ipoteze suplimentare.

Plecând de la Th.4.1-[**53**], V.Metz rafinează rezultatul 5.3.1 în felul următor ([**39**]-Prop.4.4):

Pentru $\theta \in \mathbb{P}^*\backslash\{0\}$ şi $S^\theta := \{\mathcal{A} \in \mathbb{P}^\circ \,|\, \theta(\mathcal{A}) = 1\}$, dacă se consideră $\Lambda_\theta : S^\theta \longrightarrow S^\theta$, $\Lambda_\theta(\mathcal{A}) := \Lambda(\mathcal{A})/\theta(\Lambda(\mathcal{A}))$, se poate deduce imediat că Λ_θ nonexpansivă pe (S^θ, h). Pentru $\mathcal{A} \in S^\theta$, fie $\mathrm{Lim}(\mathcal{A}) := \bigcap_{m\geq 0} \overline{\bigcup_{k\geq 0} \Lambda^{m+k}_\theta(\mathcal{A})}^{(S^\theta,h)}$ mulţimea punctelor de acumulare în (S^θ, h) ale şirului $\{\Lambda^m_\theta(\mathcal{A})\}_m$. Presupunând că există $\rho > 0$ şi $\mathcal{A} \in S^\theta$ cu $\mathrm{Lim}(\mathcal{A}) \subset B_\rho^{S^\theta,h}(\mathcal{A}) := \left\{\mathcal{B} \in S^\theta \,\middle|\, h(\mathcal{A},\mathcal{B}) < \rho\right\}$ şi notând $K := \bigcap_{\mathcal{B}\in\mathrm{Lim}(A)} B_{2\rho}^{S^\theta,h}(\mathcal{B}) \subset S^\theta$, se poate deduce că $\mathrm{Lim}(\mathcal{A}) \subset K$ şi $\Lambda_\theta(K) \subset K$. Cum K compcată, convexă (intersecţie de bile "închise", mărginite, convexe), cu teorema lui Brouwer există un punct fix al lui Λ_θ în $K \subset S^\theta$. Deci are loc

Propoziţia 5.3.2. *Fie $\mathcal{L}$, $\mathbf{r}$ ca la începutul secţiunii, θ şi S^θ ca mai sus. Dacă $\exists\, \mathcal{A} \in S^\theta$ şi $\rho > 0$ cu $\emptyset \neq \mathrm{Lim}(\mathcal{A}) \subset B_\rho^{S^\theta,h}(\mathcal{A})$, atunci Λ_θ are un punct fix în S^θ.*

Rezultatele anterioare privind existenţa se pot generaliza (tot pentru $\mathcal{L}$, $\mathbf{r}$ ca la începutul secţiunii) cu atenţie sporită pentru $\mathbb{D}$-părţi şi $\mathbb{P}$-părţi:

I. Cu acelaşi argument (teorema lui Brouwer), se poate generaliza 5.3.1 astfel

Propoziţia 5.3.3. *([**46**]-Lema7) Există o formă proprie în fiecare subcon ($\mathbb{D}$-parte) închis, convex al lui $\mathbb{D}$.*

Se deduce faptul că ori 0 este valoare proprie, ori prin normalizarea lui Λ se "stă" într-un hiperplan, apoi se aplică teorema lui Brouwer.

II. Utilizând I. şi argumente similare celor premergătoare lui 5.3.2 se poate deduce că

Propoziţia 5.3.4. *([**46**]-Lema14) Dacă există o $\mathbb{P}$-parte $\mathbb{P}_0$ care conţine un $\mathcal{A}$ cu $(\Lambda^n(\mathcal{A}))_n$ h-mărginit, atunci $\mathbb{P}_0$ conţine o formă proprie.*

III. Uzând de faptul că $h : \mathbb{P}\backslash\{0\} \longrightarrow [0,\infty]$ este inferior semicontinuă pe $\left((\mathbb{P}\backslash\{0\})^2, ||\cdot|| + ||\cdot||\right)$ ([**46**]-Lema5) şi de II. se poate deduce chiar

Propoziţia 5.3.5. *([**46**]-Prop.15) Dacă există o $\mathbb{P}$-parte Λ-invariantă $\mathbb{P}_0$ care conţine un $\mathcal{A} \in \mathbb{D}$ cu $(\Lambda^n(\mathcal{A}))_n$ h-mărginit, atunci $(\widetilde{\Lambda}^n(\mathcal{A}))_n$ are un punct limită $\mathcal{B} \in \mathbb{D}$ cu $\mathbb{P}_\mathcal{B} < \mathbb{P}_\mathcal{A}$ iar $\mathbb{P}_\mathcal{B} \cap \mathbb{D}$ conţine o formă proprie.*

I-II-III au permis deducerea de către V.Metz în [**46**] (a se vedea secţiunea 5.9.6), a unor rezultate mult mai specializate privind existenţa.

5.3.2. Existenţa formelor proprii pe F.C.A. şi S.A.T.S. Ideea, în cele două rezultate anterioare, este aplicarea teoremei lui Brouwer, ceea ce fusese făcut deja de T. Lindstrom în [**35**] pentru fractali "cuib" şi Fitzsimmons, Hambly şi Kumagai în [**20**] pentru fractali "cuib" afini (fără a uza direct de metrica hilbertiană însă):

Teorema 5.3.6. *([**35**]-Th.V.5, [**20**]-Prop.2.3) Dacă $\mathcal{L} := \left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ F.C.A. şi $\mathbf{r}$ invariant la grupul de simetrie "maximal" $\mathcal{G}_s$ al lui $\mathcal{L}$ (a se vedea în continuare definiţia riguroasă a acestui fapt), atunci*

$$\Big(\exists\, \alpha > 0\Big)\Big(\exists\, \mathcal{A} \in \mathbb{D}_s \cap \mathbb{P}_s^\circ\Big)\Big(\Lambda(\mathcal{A}) = \alpha\mathcal{A}\Big).$$

($\mathbb{P}_s$ şi $\mathbb{D}_s$ sunt conurile de forme invariante la $\mathcal{G}_s$, a se vedea definiţia următoare).

Din observaţia 5.1.3 se deduce că "punctul fix" $\mathcal{A}$ este chiar în $\mathbb{D}_s^\circ$, i.e. este chiar formă tare ireductibilă. Toate cele trei rezultate anterioare folosesc teorema lui Brouwer pentru $\Lambda \in \mathcal{C}(\mathbb{D}) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{P}^\circ)$ şi faptul că $\mathbb{B}$ finit dimensional.

J. Kigami generalizează teorema 5.3.6 la structuri S.A.T.S. (a se vedea subsecţiunea 2.6.4). Pentru a putea enunţa această generalizare, trebuie dată:

Definiţia 5.3.7. Pentru $\mathcal{L} := \left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ S.A.T.S. (subsecţiunea 2.6.4), $\mathbf{r} := (r_1, \ldots, r_N)$ cu $r_i > 0$ şi V_0 "frontiera iniţială" a structurii, se definesc:

(1)
$$\mathcal{L}_{sim}^{geom}(V_0) := \left\{D \in \mathcal{L}_{sim}(V_0) \,\middle|\, p, q, p', q' \in V_0,\, |p - q| = |p' - q'| \Longrightarrow D_{pq} = D_{p'q'}\right\}.$$
.

(2) $\mathbf{r} := (r_1, \ldots, r_N)$ se numeşte $\mathcal{G}_s$*-invariant* $\Longleftrightarrow$
$$\Big(\exists\, g \in \mathcal{G}_s\Big)\Big(g(\psi_i(V_0)) = \psi_j(V_0) \Longrightarrow r_i = r_j\Big).$$

(3) dacă g simetrie a lui $\mathcal{L}$, $D \in \mathcal{L}_{sim}(V_0)$ se numeşte g*-invariant* $\Longleftrightarrow D_{pq} = D_{g(p)g(q)}$, $\forall\, p,\, q \in V_0$. $D \in \mathcal{L}_{sim}(V_0)$ se numeşte $\mathcal{G}_s$*-invariant* $\Longleftrightarrow \forall\, g \in \mathcal{G}_s$, D g-invariant.

Aceste definiţii se vor relua, completa şi generaliza în secţiunea 5.5. Deocamdată au fost date pentru a înţelege faptul că pentru a avea existenţă trebuie făcut apel la un grup bogat de simetrie al fractalului.

J.Kigami demonstrează că

$$(\mathcal{L}_{sim}^{geom}(V_0) \cap \mathcal{LA}(V_0)) = \left\{D \in \mathcal{LA}(V_0) \,\middle|\, D - \mathcal{G}_s - \text{invariant}\right\}.$$

Se notează cu $\mathbb{P}_s$ conul formelor corespunzătoare operatorilor din $\left(\widetilde{\mathcal{LA}}(V_0)\right)' \cap \mathcal{L}_{sim}^{geom}(V_0)$, adică al formelor biliniare simetrice, pozitiv semidefinite, conservative $\mathcal{G}_s$-invariante. Analog $\mathbb{D}_s$ conul formelor corespunzătoare operatorilor din $(\mathcal{LA}(V_0))' \cap \mathcal{L}_{sim}^{geom}(V_0)$, adică al formelor Dirichlet $\mathcal{G}_s$-invariante. Pe scurt, ele sunt conuri de forme invariante la grupul de simetrie "maximal" al structurii S.A.T.S. *Ulterior (în secţiunea 5.5) se vor defini conuri de forme, operatori şi matrici de conductanţă invariante la un grup de simetrie arbitrar dat Θ ($\mathbb{D}_\Theta$, $\mathbb{P}_\Theta$) şi se va arăta cum considerarea unui grup de simetrie cât mai bogat poate asigura existenţa şi unicitatea problemei renormalizării.*

Mimând ideea de demonstraţie a lui Lindstrom din [**35**], degrevată însă de limbajul probabilist dar neutilizând metrica hilbertiană, Kigami demonstrează (în [**30**]-3.8) generalizarea la structuri S.A.T.S. a rezultatului de existenţă 5.3.6:

TEOREMA 5.3.8. *([**30**]-Th.3.8.10) Dacă $\mathcal{L} := \left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ S.A.T.S. şi $\mathbf{r}$ $\mathcal{G}_s$-invariant, atunci*

$$\Big(\exists\, \alpha > 0\Big)\Big(\exists\, D \in \mathcal{LA}(V_0) - \mathcal{G}_s - \textit{invariant}\Big)\Big((D, \alpha\mathbf{r}) \textit{ structură armonică pe } \mathcal{L}\Big),$$

sau, echivalent

$$\Big(\exists\, \alpha > 0\Big)\Big(\exists\, \mathcal{A} \in \mathbb{D}_s \cap \mathbb{P}_s^\circ(\textit{ chiar } \mathbb{D}_s^\circ)\Big)\Big(\Lambda(\mathcal{A}) = \alpha\mathcal{A}\Big).$$

Deci, *dacă structura $\mathcal{L}$ are proprietăţi foarte bune de simetrie (mai precis este $\mathcal{G}_s$-invariantă) iar sistemul de "ponderi" $(r_i)_i$ este şi el $\mathcal{G}_s$-invariant, atunci există o formă proprie ireductibilă, $\mathcal{G}_s$-invariantă. Grupul $\mathcal{G}_s$ joacă un rol deosebit în demonstraţia teoremelor 5.3.6 şi 5.3.8, permiţând reducerea dimensiunii conului* $\mathbb{D} \cap \mathbb{P}^\circ$ (a se vedea din nou secţiunea 5.5 dedicată acestui aspect).

5.3.3. Neexistenţă. În ceea ce priveşte *neexistenţa formelor proprii*, utilizând Th.4.4 şi Th.4.6 din [**53**], V. Metz deduce următoarele ([**39**]-Prop.4.6, Cor.4.7):

(1) Λ_θ nu are puncte fixe în $S^\theta \Longrightarrow$
$\Big(\forall\, \mathcal{A} \in S^\theta\Big)\Big(\forall\, M \subset S^\theta \text{ compactă }\Big)\Big(\#\left\{m \,|\, \Lambda_\theta^m(\mathcal{A}) \in M\right\} < \infty\Big)$;

(2) $\Big(\exists\, \mathcal{A} \in \mathbb{P}^\circ\Big)\Big(\left\{\Lambda_\theta^m(\mathcal{A})\right\}_m\ p - \text{nemărginit}\Big) \Rightarrow \Lambda$ nu are forme proprii în $\mathbb{P}^\circ$.

Ulterior (în ultimul capitol) se va da un exemplu de fractal ("abc"-gasket) care nu admite forme proprii ireductibile (exemplu detaliat în ultimul capitol).

5.4. Renormalizare pe P.C.F.S.S. conexe. Unicitate

Se vor prezenta rezultate generale privind unicitatea pentru P.C.F.S.S. conexe, urmând în continuare [**39**]. Rezultate speciale privind unicitatea (pentru F.C.A.-uri) vor fi descrise în secţiunea 5.8.

Ca şi în secţiunea precedentă se consideră $\mathcal{L} := \left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ S.A.P.C.F. conexă, $\mathbf{r} := (r_1, \ldots, r_n)$, cu $r_i > 0$, V_0 "frontiera" structurii, conurile $\mathbb{P}$, $\mathbb{D}$ asociate lui V_0 şi Λ funcţia de renormalizare.

Deoarece funcţia de renormalizare este diferenţiabilă pe $\mathbb{P}^\circ$ şi expresia diferenţialei se cunoaşte, se poate deduce uşor următorul rezultat ([**39**]-Lema 4.8):

LEMA 5.4.1. *Pentru $\mathcal{L}$ şi $\mathbf{r}$ ca mai sus, dacă*

$$\Big(\exists\, \mathcal{A} \in \mathbb{P}^\circ\Big)\Big(\exists\, \gamma > 0\Big)\Big(\Lambda(\mathcal{A}) = \gamma\mathcal{A}\Big),$$

şi se notează $T := d\Lambda(\mathcal{A})$, atunci

(1) *$T(\mathbb{P}) \subset \mathbb{P}$, $T(\mathbb{P}^\circ) \subset \mathbb{P}^\circ$;*
(2) *$T(\mathcal{A}) = \gamma\mathcal{A}$;*
(3) *$\gamma = ||T|| = \max \sigma(T)$ ($\sigma(T)$ spectrul lui T).*

(1) şi (2) rezultă din expresia diferenţialei, dată de 5.1.2-g) şi monotonia lui Λ. Pentru (3) se foloseşte 5.2.5 şi celebra teoremă Krein-Rutman:

Dacă K con total $K \subset B$, B spaţiu Banach, $L : B \longrightarrow B$ operator liniar compact cu $L(K) \subset K$, atunci $\exists\, u \in K$, $\exists\, u^* \in K^*$ cu $Lu = ru$, $L^*u^* = ru^*$, $r := r(L) := \sup\{|\lambda| \,|\, \lambda \in \sigma(L)\}$

pentru $L = T$, $K = \mathbb{P}^\circ$, $B = \mathbb{B}$ finit dimensional, iar $\mathbb{P}^\circ \cup \{0\}$ con total în $\mathbb{B}$ (evident T compact şi $T(\mathbb{P}^\circ) \subset \mathbb{P}^\circ$).

Propoziţia 5.4.1 afirmă un lucru foarte important: *valoarea proprie γ corespunzătoare unei forme proprii ireductibile $\mathcal{A}$ coincide cu norma diferenţialei lui Λ în $\mathcal{A}$.*

Uzând de acest fapt se poate deduce următorul rezultat privind unicitatea:

PROPOZIŢIA 5.4.2. *([**39**]-Th.4.9) Fie $\mathcal{L}$ şi $\mathbf{r}$ ca mai sus şi $\theta \in \mathbb{P}^*\backslash\{0\}$, $S^\theta := \{\mathcal{A} \in \mathbb{P}^\circ \,|\, \theta(\mathcal{A}) = 1\}$. Dacă*

(1) *$\emptyset \neq U \subset \mathbb{P}^\circ$, U deschisă în $\mathbb{B}$;*
(2) *$\exists\, \gamma > 0$, $\exists\, \mathcal{A} \in S^\theta \cap U$ punct fix pentru $\frac{1}{\gamma}\Lambda$ ($\gamma = ||T||$ din 5.4.1);*

(3) $T := d\Lambda(\mathcal{A})$ *cu* $\dim \operatorname{Ker}(\gamma I - T) = 1$,

atunci $\frac{1}{\gamma}\Lambda$ *are cel mult un punct fix în* $S^\theta \cap U$.

Pentru demonstraţie se utilizează teorema 2.5 ([**53**]), rezultat netrivial ce dă o condiţie ca o funcţie neliniară (nonexpansivă, pozitiv omogenă de exemplu) să aibă cel mult un vector propriu în interiorul unui con:

Dacă

- C *con în* X *spaţiu Banach;*
- $G \subset C^\circ$ *deschisă,* $C^\circ \neq \emptyset$*;*
- $\psi \in C^* \backslash \{0\}$, $\Sigma_\psi := \{x \in C \,|\, \psi(x) = 1\}$*;*
- $f : G \longrightarrow C^\circ$ *continuă cu*
  - $f_{|\Sigma \cap G}$ *h-nonexpansivă;*
  - $\forall\, x \in \Sigma \cap G$, $\exists\, \delta_x \in (0, 1)$, $\forall\, 1 - \delta_x < t \leq 1$, $f(tx) \geq t f(x)$*;*
- $\exists\, u \in \Sigma \cap G$ *vector propriu pentru* f *cu*
  - f *de clasă* C^1 *pe o vecinătate a lui* u*;*
  - $L := df(u) \Longrightarrow L(C) \subset C$*;*
  - L *satisface condiţia Krein-Rutman (condiţie foarte laborioasă dar care se verifică relativ simplu pentru spaţii finit dimensionale);*
  - $v \in C\backslash\{0\}$ *vector propriu pentru* L *cu valoare proprie* $r(L) > 0 \Longrightarrow \psi(v) > 0$*;*

atunci f *are cel mult un vector propriu în* $\Sigma \cap G$.

Pentru deducerea lui 5.4.2 se aplică acest rezultat pentru $C = \mathbb{P}$, $G = U$, $\psi = \theta$, $\Sigma = S^\theta$, $f = \Lambda$, Λ pozitiv omogenă, h-nonexpansivă, Λ de clasă C^1 pe $\mathbb{P}^\circ$ (5.1.2-g), $L = T = d\Lambda(\mathcal{A})$, $\gamma = ||L||$, $u = v = \mathcal{A}$, $L(\mathbb{P}) \subset \mathbb{P}$ (5.4.1), condiţia Krein-Rutman rezultând din $\dim \operatorname{Ker}(\gamma I - L) = 1$.

Conform cu 5.4.2, unicitatea este o problemă locală. Există numeroase exemple de fractali (care nu sunt F.C.A. evident), pentru care nu are loc unicitatea (a se vedea din nou ultimul capitol).

În principiu, funcţia de renormalizare $\Lambda : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$ poate fi calculată efectiv pe exemple concrete; deci este plauzibil faptul că şi L se poate calcula efectiv. Într-adevăr $\mathbb{P} \subset \mathbb{B} \backsimeq \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$ ($n = \#(V_0)$, a se vedea subsecţiunea 5.1.1), deci, pentru $\mathcal{A} \in \mathbb{P}^\circ$, $L = d\Lambda(\mathcal{A}) \in \mathcal{L}(\mathbb{B}, \mathbb{B}) \backsimeq \mathcal{M}_{\frac{n(n-1)}{2}}(\mathbb{R})$, deci L poate fi considerată matrice $n(n-1)/2$-dimensională.

5.5. "Reducerea" dimensiunii conurilor $\mathbb{P}$ şi $\mathbb{D}$

Se arată cum considerarea unui grup de simetrie netrivial pe "fractal" conduce la "reducerea dimensiunii" conurilor $\mathbb{P}$ şi $\mathbb{D}$, cu consecinţe în special în ce priveşte problema unicităţii.

Şi aici se vor considera $\mathcal{L} := \left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ S.A.P.C.F. conexă, $\mathbf{r} := (r_1, \ldots, r_n)$, cu $r_i > 0$, V_0 "frontiera" structurii, conurile $\mathbb{P}$, $\mathbb{D}$ asociate lui V_0 şi Λ funcţia de renormalizare.

5.5.1. Matrici, operatori şi forme invariante la un grup de simetrie Θ.

Pentru Θ grup de simetrie pentru $\mathcal{L}$ (ca în secţiunea 2.5) se consideră următoarele concepte:

Definiţia 5.5.1. Se spune că

1. $\mathcal{A} \in \mathcal{L}_2(V_0)$ Θ-*invariantă* $\Longleftrightarrow \forall\, \theta \in \Theta$, $\forall\, u, v \in l(V_0)$, $\mathcal{A}(u \circ \theta, v \circ \theta) = \mathcal{A}(u, v)$;
2. $H \in \mathcal{L}_{sim}(V_0)$ Θ-*invariant* $\Longleftrightarrow \forall\, \theta \in \Theta$, $\forall\, u, v \in l(V_0)$, $(H(u \circ \theta), u \circ \theta)_{V_0} = (Hu, v)_{V_0}$, sau echivalent $\forall\, \theta \in \Theta$, $\forall\, p, q \in V_0$, $H_{pq} = H_{\theta(p), \theta(q)}$;
3. $c \in \mathcal{M}_{cond}(V_0)$ Θ-*invariantă* $\forall\, \theta \in \Theta$, $\forall\, p, q \in V_0$, $c(p, q) = c(\theta(p), \theta(q))$;
4. $\mathbf{r} := (r_1, \ldots, r_N)$ se numeşte Θ-*invariant* $\Longleftrightarrow$

$$\Big(\exists\, \theta \in \Theta\Big)\Big(\theta(\psi_i(V_0)) = \psi_j(V_0) \Longrightarrow r_i = r_j\Big).$$

Se poate deduce simplu că orice $\mathcal{A}$ Θ-invariantă se află în corespondenţă cu un operator Θ-invariant şi o matrice de conductanţă Θ-invariantă. Deasemenea, pentru $\mathcal{A} \in \mathbb{P}$ Θ-invariantă şi $\mathbf{r}$ Θ-invariant $\Psi(\mathcal{A}) \in \mathbb{P}_1$ Θ-invariantă. Pentru $\mathcal{A}_1 \in \mathbb{P}_1$ Θ-invariantă $\Phi(\mathcal{A}_1) \in \mathbb{P}$ Θ-invariantă. Astfel, pentru $\mathcal{A} \in \mathbb{P}$ Θ-invariantă şi $\mathbf{r}$ Θ-invariant $\Lambda(\mathcal{A}) \in \mathbb{P}$ Θ-invariantă.

Pentru c matrice de conductanţă Θ-*invariantă*, se definesc $O_i := \Theta(\{p_i, q_i\}) = \{\{\theta(p_i), \theta(q_i)\} \,|\, \theta \in \Theta\}$, pentru anumiţi p_i, $q_i \in V_0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $k \leq n(n-1)/2$ şi se numesc *orbitele* mulţimii muchiilor $\left\{\{p, q\} \in V_0^2 \,\middle|\, p \neq q\right\}$ (O_i clasele de echivalenţă relativ la relaţia $p \sim q \Longleftrightarrow \exists\, \theta \in \Theta$, $\theta(p) = \theta(q)$). Pentru $i = \overline{1, k}$ se definesc matricile de conductanţă $c^{(i)} \in \mathcal{M}_{cond}(V_0)$ date de $\left(c^{(i)}\right)_{|E_j} := \delta_{ij}$. Evident fiecare $c^{(i)}$ este Θ-invariantă.

5.5.2. Conurile $\mathbb{P}_\Theta$ şi $\mathbb{D}_\Theta$. Dacă se notează cu $\mathcal{A}^{(i)} \in \mathbb{D}$ forma Dirichlet asociată lui $c^{(i)}$, $i = \overline{1,k}$, atunci se pot introduce conurile:

$$\begin{aligned}\mathbb{D}_\Theta &:= \left\{ \sum_{i=1}^{k} \xi_i \mathcal{A}^{(i)} \,\middle|\, \xi_i \geq 0,\, i = \overline{1,k} \right\};\\ \mathbb{P}_\Theta &:= \left\{ \mathcal{B} - \mathcal{A} \,\middle|\, \mathcal{A}(u,u) \leq \mathcal{B}(u,u),\, \forall\, u \in l(V_0) \right\},\end{aligned}$$

şi spaţiul vectorial $\mathbb{B}_\Theta := \mathbb{D}_\Theta - \mathbb{D}_\Theta$.

Evident $\mathbb{D}_\Theta \subset \mathbb{D}$, $\mathbb{P}_\Theta \subset \mathbb{P}$ *$\mathbb{R}$-subconuri formate cu toate formele Dirichlet Θ-invariante, respectiv cu toate formele biliniare simetrice Θ-invariante*, $\dim\mathbb{B}_\Theta = k$ şi $\Lambda(\mathbb{D}_\Theta) \subset \mathbb{D}_\Theta$, $\Lambda(\mathbb{P}_\Theta) \subset \mathbb{P}_\Theta$.

Pentru "fractali F.C.A." se consideră grupul de simetrie generat de reflecţiile în hiperplanele mediatoare ale tuturor segmentelor ce unesc puncte din V_0 ($\Theta = \mathcal{G}_s$), proprietăţile pe care le îndeplineşte funcţia de renormalizare relativ la aceste subconuri invariante fiind mai puternice, iar problema existenţei şi unuictăţii unei forme invariante la acest grup "maximal" de simetrie fiind rezolvată (a se vedea secţiunea 5.8).

Din punct de vedere al problemei renormalizării, diferenţa între un "fractal S.A.P.C.F. conex" fără proprietăţi de simetrie, sau cu anumite proprietăţi de simetrie (i.e. "compatibil" cu "geometria fractalului" şi conurile de forme sunt Θ-invariante, cu Θ grup de simetrie arbitrar dat) şi un "fractal F.C.A." (unde, implicit, se subînţelege că se consideră forme invariante la "grupul maximal" $\mathcal{G}_s$, deşi se poate renunţa la unele din simetrii) se transpune în faptul că se vor căuta "puncte fixe" (i.e. forme proprii) pentru funcţia de renormalizare restricţionată la subconuri de forme din ce în ce mai "sărace" ale conurilor "maximale" $\mathbb{D}$ şi $\mathbb{P}$ ("invariante" la grupul de simetrie trivial).

5.5.3. Aplicaţii la problema unicităţii. Cu cât grupul de simetrie Θ asociat fractalului este mai bogat, cu atât dimensiunea lui $\mathbb{B}_\Theta$ (şi deci şi a conurilor $\mathbb{P}_\Theta$ şi $\mathbb{D}_\Theta$) este mai mică. Din 5.4.2 şi expresia diferenţialei funcţiei de renormalizare (5.1.2-g) se poate atunci deduce următorul *criteriu de unicitate*:

PROPOZIŢIA 5.5.2. *([**39**]-Prop.4.10) Fie $\mathcal{L} := \left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ S.A.P.C.F. conexă, V_0 "frontiera" structurii, cu $\#(V_0) =: n$, Θ grup de simetrie, $\mathbf{r} := (r_1, \ldots, r_n)$ Θ-invariant, $\mathbb{P}_\Theta$, $\mathbb{D}_\Theta$ conurile definite mai sus şi $\{O_i\}_{i=\overline{1,k}}$ ($k \leq n$) Θ-orbitele asociate cu $\{\{p_i, q_i\}\}_{i=\overline{1,k}}$ reprezentanţi ai orbitelor.*

Dacă în plus $\mathcal{A} \in \mathbb{D}_\Theta \cap \mathbb{P}^\circ_\Theta$ punct fix pentru $\frac{1}{\gamma}\Lambda$ (cu $\gamma = ||L||$, $L := d\Lambda(\mathcal{A})$) şi $\dim \mathrm{Ker}(\gamma I_k - L_k) = 1$, *atunci $\mathcal{A}$ este unic. $\Big(L_k := d\Lambda(\mathcal{A}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ a cărei matrice în baza $\{\mathcal{A}^{(i)}\}_{i=\overline{1,k}}$ este $(l_{ij})_{i,j\in\overline{1,k}}$, dată de*

$$l_{ij} := \frac{\partial \Lambda_i}{\partial \beta_j}(\mathcal{A}) = \left\langle \left(\Psi(\mathcal{A}^{(i)})\right) \mathcal{H}^{\Psi(\mathcal{A})}_{V_1\setminus V_0} \chi_{p_i}, \mathcal{H}^{\Psi(\mathcal{A})}_{V_1\setminus V_0} \chi_{q_j} \right\rangle . \Big)$$

Nucleul armonic se poate calcula efectiv din 4.1.16:

$$\mathcal{H}^{\Psi(\mathcal{A})}_{V_1\setminus V_0} u = \left(u, \left(\Pi_1 \left(\Psi(E)\right) \Pi_1^t\right)^{-1} \left(\Pi_1 \left(\Psi(E)\right) \Pi_0^t\right) u\right).$$

Dacă $\mathcal{A}$ şi γ nu se cunosc efectiv, se poate încerca pentru ce forme $\mathcal{A}$ subspaţiul propriu al lui L_k corespunzător valorii proprii $||L_k||$ este de dimensiune 1.

5.6. Renormalizare pe P.C.F.S.S. conexe. Neunicitate

Din nou se vor considera $\mathcal{L} := \left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ S.A.P.C.F. conexă, *fără proprietăţi de simetrie*, $\mathbf{r} := (r_1, \ldots, r_n)$ sistem de ponderi ($r_i > 0$), V_0 "frontiera" structurii, conurile $\mathbb{P}$, $\mathbb{D}$ asociate lui V_0 şi Λ funcţia de renormalizare.

Rezultatul următor, privind neunicitatea formelor proprii, obţinut tot de V.Metz, în [**39**] (Prop.4.11), este o transpunere a unei teoreme a lui Bruck:

Dacă $K := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_i \geq 0,\, 1 \leq i \leq n\}$, $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ liniară, continuă, cu $\psi(x) > 0$, $\forall\, x \in K^\circ$, $\Sigma := \{x \in K^\circ \,|\, \psi(x) = 1\}$, $f : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ h_K-nonexpansivă şi $S := \{x \in \Sigma \,|\, f(x) = x\} \neq \emptyset$, atunci $\exists\, r : \Sigma \longrightarrow S$ retracţie, h-nonexpansivă (deci S conexă prin arce).

Rezultatul lui Bruck a fost întărit de către R. Nussbaum ([**53**], Th.4.7, Cor.4.1, sau Cor.4.2 pentru finit dimensional):

K con în X spaţiu Banach finit dimensional, $f : K^\circ \longrightarrow K^\circ$ monotonă (relativ la K), pozitiv omogenă, $\psi \in K^*\setminus\{0\}$, $Y := \{x \in X \,|\, \psi(x) = 1\}$, $\Sigma := K^\circ \cap Y$ şi $\exists\, \lambda > 0$ cu $S := \{x \in K^\circ \,|\, f(x) = \lambda x\} \neq \emptyset \Longrightarrow \exists\, r : K^\circ \longrightarrow S$ retracţie, $r \leq_K$-monotonă, pozitiv omogenă.

De fapt, utilizând acest rezultat (pentru $K = \mathbb{P}$, $\mathbb{B} = \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$, $n = \#(V_0)$, $f = \Lambda$, $\psi = \theta$, $Y = \{\mathcal{A} \in \mathbb{B} \,|\, \theta(\mathcal{A}) = 1\}$, $\lambda = \gamma$, $P_{fix} = S$), V.Metz deduce

PROPOZIŢIA 5.6.1. *([**39**]-Prop.4.11) Pentru $\mathcal{L}$ şi $\mathbf{r}$ ca la începutul secţiunii, $\gamma > 0$ şi mulţimea $P_{fix} := \left\{\mathcal{A} \in \mathbb{P}^\circ \,\middle|\, \gamma^{-1}\Lambda(\mathcal{A}) = \mathcal{A}\right\} \neq \emptyset$, există $\Upsilon : \mathbb{P}^\circ \longrightarrow P_{fix}$ retracţie h nonexpansivă, $||\cdot||$ continuă, monotonă, pozitiv omogenă, p-nonexpansivă. În particular, P_{fix} conexă prin arce.*

OBSERVAŢIA 5.6.2. ([**41**]-Cor.3.6) Dacă $P_{fix} \neq \emptyset$ se mai remarcă faptul că $P_{fix} \subset \mathbb{D}^\circ$. Într-adevăr, considerând $\mathcal{F} \in P_{fix}$ fixat şi presupunând că $\exists\, \mathcal{E} \in P_{fix} \backslash \mathbb{D}^\circ$, cum P_{fix} conexă prin arce, există un drum în P_{fix} de "capete" $\mathcal{F}$ şi $\mathcal{E}$. Atunci ar exista un punct fix în $\partial\mathbb{D} \cap \mathbb{P}^\circ$ (drumul "iese" din $\mathbb{D}^\circ$ (de la $\mathcal{F}$) prin "frontiera" $\partial\mathbb{D}$), în contradicţie cu 5.1.3.

5.7. Renormalizare pe P.C.F.S.S. conexe. Aproximare

5.7.1. Considerente generale privind aproximarea formelor proprii. Fie, ca şi în secţiunea precedentă, $\mathcal{L} := \left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ S.A.P.C.F. conexă, *fără proprietăţi de simetrie*, $\mathbf{r} := (r_1, \ldots, r_n)$ sistem de ponderi ($r_i > 0$), conurile $\mathbb{P}$, $\mathbb{D}$ asociate lui V_0 ("frontiera" structurii) şi Λ funcţia de renormalizare.

Pentru a deduce rezultate privind aproximarea formelor proprii, V. Metz utilizează un rezultat de tip "dihotomie" al lui Krause şi Nussbaum ([**31**]-Th.3.2):

Pentru K con poliedral generat de k funcţionale liniare, $K \subset E$, E spaţiu Banach finit dimensional şi $K^\circ \neq \emptyset$, $T : K^\circ \longrightarrow K^\circ$ continuă şi $\exists\, r \in \mathbb{N}^*$ astfel încât T^r nonexpansivă relativ la p, una din următoarele două posibilităţi are loc:

(1) *T^r are un punct fix în K° şi $\forall\, x \in K^\circ$, $\exists\, \nu(x) \in \overline{1, r2^k k!}$ (chair $\overline{1, r2^k}$) cu $\lim\limits_{k\to\infty} T^{k\nu(x)}x = \xi \in K^\circ$, $T^{\nu(x)}\xi = \xi$;*
(2) *T^r nu are puncte fixe în K° şi $\forall\, x \in K^\circ$, $\forall\, C \subset K^\circ$ compactă, $\exists\, n(x, C) \in \mathbb{N}^*$ cu $T^k x \notin C$, $\forall\, k > n(x, C)$.*

.

Aplicându-l pentru conul $K := \mathbb{P}$ din spaţiul Banach finit dimensional $X := \mathbb{B}$ şi operatorul $T := \frac{1}{\gamma}\Lambda$ (p-neexpansiv) şi punctul său fix $x := \mathcal{A}$, se obţine un rezultat foarte puternic privind *problema aproximării formelor proprii pentru* Λ:

TEOREMA 5.7.1. *([**39**]-Th.4.13) Fie $\mathcal{L}$ şi $\mathbf{r}$ ca mai sus şi $\mathcal{A} \in \mathbb{P}^\circ$ punct fix pentru $\frac{1}{\gamma}\Lambda =: \widetilde{\Lambda}$ ($\gamma > 0$). Dacă $\mathbb{P}$ con poliedral (generat de k funcţii liniare), atunci*

$$\left(\forall\, \mathcal{B} \in \mathbb{P}^\circ\right)\left(\exists\, l_{\mathcal{B}} \in \overline{1, 2^k \cdot k!}\right)\left(\exists\, \mathcal{B}_\infty \in \mathbb{P}^\circ\right)\left(\lim_{n\to\infty} \widetilde{\Lambda}^{nl_{\mathcal{B}}}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}_\infty, \widetilde{\Lambda}^{l_{\mathcal{B}}}(\mathcal{B}_\infty) = \mathcal{B}_\infty\right).$$

$\mathbb{P}$ nu e în general poliedral (a se vedea exemplul renormalizării abc-triunghiul lui Sierpinski); pentru "fractali F.C." se va deduce faptul că $\mathbb{P}$ poliedral (secţiunea 5.8). Propoziţia următoare va da un "criteriu de poliedralitate".

Şirul $(\mathcal{A}^{nl_{\mathcal{B}}})_{n\geq 1}$ este la fel de bun ca şi $(\mathcal{A}^n)_{n\geq 1}$; evident, dacă $\Lambda^{l_{\mathcal{B}}}$ are punct fix unic, atunci şi Λ are punct fix şi ele coincid.

Fie $\mathcal{A} \in \mathbb{D} \cap \mathbb{P}^\circ$ şi H operatorul asociat. Pentru $p_0 \in V_0$, se consideră $H^{(0)} := H^{V_0\backslash\{p_0\}} = \Pi_{V_0\backslash\{p_0\}} H \Pi^t_{V_0\backslash\{p_0\}}$. Din 4.1.14, există $\left(H^{(0)}\right)^{-1} =: G$ (funcţia Green a lui H pe $V_0\backslash\{p_0\}$).

Atunci se poate demonstra următorul *criteriu de poliedralitate*:

PROPOZIŢIA 5.7.2. *([**39**]-Prop.4.14) Fie $\mathcal{L} := \left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ S.A.P.C.F. conexă, V_0 "frontiera" structurii, cu $\#(V_0) =: n$, Θ grup de simetrie, $\mathbf{r} := (r_1, \ldots, r_n)$ Θ-invariant, $\mathbb{P}_\Theta$, $\mathbb{D}_\Theta$ conurile asociate şi $\{O_i\}_{i=\overline{1,k}}$ ($k \leq n$) Θ-orbitele cu $c^{(i)}$, $\mathcal{A}^{(i)}$, $H^{(i)}$ matricele de conductanţă, formele Dirichlet şi laplacienii asociaţi.*

Atunci $\mathbb{P}_\Theta$ este con poliedral dacă este îndeplinită una din condiţiile:

(1) *$\forall\, \mathcal{A} \in \mathbb{P}_\Theta$, operatorul asociat $H_{\mathcal{A}}$ este circulant;*
(2) *$H^{(i)}H^{(j)} = H^{(j)}H^{(i)}$, $\forall\, 1 \leq i, j \leq k$;*
(3) *$(H^{(i)})^{(0)}G(H^{(j)})^{(0)} = (H^{(j)})^{(0)}G(H^{(i)})^{(0)}$, $\forall\, 1 \leq i, j \leq k$, unde $G := (H^{(0)})^{-1}$, $H := H^{(1)} + H^{(2)} + \ldots + H^{(k)}$.*

Pentru demonstraţie, V. Metz face apel la rezultate privind teoria matricilor circulante ([**14**]-pag.68) şi inversa generalizată a unei matrici ([**49**]-Th.6.5.2).

Aceste două rezultate permit degrevarea unui procedeu numeric de aproximare a formelor proprii: *dacă se poate demonstra că $\mathbb{P}$ este con poliedral (cu 5.7.2), atunci se poate aproxima orice formă proprie din $\mathbb{P}^\circ$ cu ajutorul lui 5.7.1.*

5.7.2. Aproximarea formelor şi operatorilor proprii ireductibili pe S.A.P.C.F. conexe. În această subsecţiune se updatează rezultatele generale din subsecţiunea precedentă cu privire la problema aproximării; *mai precis cu privire la aproximarea formelor şi operatorilor proprii ireductibile* (urmând articolul [**40**]). Se obţine practic acelaşi rezultat ca şi în 5.7.1, dar pentru operatori (ireductibili), nu pentru forme şi utilizând *tehnici spectrale*.

Se consideră $\mathcal{L} := \left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ S.A.P.C.F. conexă, fără proprietăţi de simetrie, dar, *se simplifică problema, considerând doar* $\mathbf{r} := (1, 1, \ldots, 1)$. Accentul, în aceste condiţii va cade pe determinarea lui γ. Din nou $\mathbb{P}$, $\mathbb{D}$ sunt conurile asociate lui V_0 şi Λ funcţia de renormalizare.

V. Metz a introdus ca nouă metodă de studiu în [**40**] compararea a două reţele electrice conexe "pe V_0" prin intermediul "raportului" formelor Dirichlet asociate. "Efectul" asupra funcţiei de renormalizare Λ este "contractarea" imaginii. Se va prezenta pe scurt această metodă. Ea se bazează pe considerarea "raportului" a două forme Dirichlet ireductibile (operatori) date pe o mulţime finită V (**I**), observaţia că funcţia de renormalizare, aplicată la două forme date "pe V_0" nu "creşte" acest raport (**II**) şi deducerea din acestea, a unei *tehnici de determinare a domeniului de atracţie a mulţimii operatorilor proprii pentru* Λ (**III**).

I. Pentru $(A, < \cdot, \cdot >)$ spaţiu Hilbert finit dimensional, $T_1, T_2 : A \longrightarrow A$ liniari, $B \subset A$ cu $B \cap \mathrm{Ker} T_2 = \emptyset$, se introduce

$$\left[\frac{T_1}{T_2}\right]_B := \left[\inf_{u\in B}\frac{< T_1u,u >}{< T_2u,u >}, \sup_{u\in B}\frac{< T_1u,u >}{< T_2u,u >}\right].$$

Pentru V finită, se consideră reţelele electrice conexe $N_1 := (V, c_1)$, $N_2 := (V, c_2)$ şi operatorii ireductibili asociaţi H_1, $H_2 \in \mathcal{LA}(V)$. Evident $\mathrm{Ker}\, H_1 = \mathrm{Ker}\, H_2 = \mathbb{R}\cdot \mathbb{I}_V =: \mathrm{Ker}$.

Pentru $p_0 \in V$ nod de referinţă, se consideră $\mathcal{D}_0 := \left\{u \in l(V) \,\middle|\, u(p_0) = 0\right\}$ şi G_1, G_2 funcţiile Green asociate lui $H_1^{(0)}$, $H_2^{(0)}$ (subsecţiunea 4.1.6-final).

Atunci, în condiţiile de mai sus, utilizând descompunerea $l(V) = \mathcal{D}_0 \oplus \mathrm{Ker}$ şi [**24**]-pag.314, are loc

Lema 5.7.3. *([**40**]-lema 7.1) a)* $\left[\frac{H_2}{H_1}\right]_{l(V)\setminus \mathrm{Ker}} = \left[\frac{H_2^{0)}}{H_1^{(0)}}\right]_{\mathcal{D}_0\setminus\{0\}} = \left[\sigma\left(-G_1H_2^{(0)}\right)\right]$, *unde, pentru* $M \subset A$, $[M] := \overline{\mathrm{co}(M)}$ *(închiderea acoperirii convexe a lui M în $(A, < \cdot, \cdot >)$), iar $\sigma(H)$ reprezintă spectrul operatorului H;*

b) $\left[\frac{H_2^{0)}}{H_1^{(0)}}\right]_{\mathcal{D}_0\setminus\{0\}} = \left[\frac{G_1}{G_2}\right]_{\mathcal{D}_0\setminus\{0\}}$.

Aşadar, "raportul" dintre operatorii H_2 şi H_1 se poate exprima în termeni de "raporul" şi de spectrul funcţiilor lor Green (relativ la un nod de referinţă ales).

Acest rezultat se utilizează în contextul operatorilor asociaţi unor forme ireductibile "pe $V = V_0$" (V_0 "frontiera fractalului").

II. Revenind la contextul iniţial, cu $\mathcal{L}$, r $= (1, 1, \ldots, 1)$, etc., se consideră H_1, $H_2 \in \mathcal{LA}(V_0)$. Atunci $\mathrm{Ker}\, H_1 = \mathrm{Ker}\, H_2 = \mathbb{R}\cdot\mathbb{I}_{V_0} =: \mathrm{Ker}(V_0)$. Deasemenea, ΨH_1, $\Psi H_2 \in \mathcal{LA}(F_1)$ şi fie $\mathrm{Ker}\, \Psi H_1 = \mathrm{Ker}\, \Psi H_2 = \mathbb{R}\cdot\mathbb{I}_{V_1} =: \mathrm{Ker}(V_1)$. Apoi $\Phi\Psi H_1$, $\Phi\Psi H_2 \in \mathcal{LA}(V_0)$.

Din 5.7.3 şi 4.1.15 se poate deduce

Lema 5.7.4. *([**40**]-lema 7.2, lema 7.3) Pentru H_1, H_2 ca mai sus*

1. $\left[\frac{H_1}{H_2}\right]_{l(V_0)\setminus \mathrm{Ker}(V_0)} = \left[\frac{H_1'}{H_2'}\right]_{\mathcal{D}'\setminus \mathrm{Ker}'} \supseteq \left[\frac{\Psi H_1}{\Psi H_2}\right]_{l(V_1)\setminus \mathrm{Ker}(V_1)}$, *unde* $\mathcal{D}' := l(V_0)^N$, $H_i' := (\mathrm{id}_N \otimes H_i)$, $\mathrm{id}_N : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ *funcţia identitate pe* $\mathbb{R}^N$, $i = 1, 2$, $\mathrm{Ker}\, H_1' = \mathrm{Ker}\, H_2' = (\mathrm{Ker}(V_0))^N =: \mathrm{Ker}'$.

2. $\left[\frac{\Psi H_1}{\Psi H_2}\right]_{l(V_1)\setminus \mathrm{Ker}(V_1)} \supseteq \left[\frac{\Phi\Psi H_1}{\Phi\Psi H_2}\right]_{l(V_0)\setminus \mathrm{Ker}(V_0)}$.

De aici rezultă

Corolarul 5.7.5. *([**40**]-lema 7.4) Pentru H_1, H_2 ca mai sus are loc*

$$\left[\frac{H_1}{H_2}\right]_{l(V_0)\setminus \mathrm{Ker}(V_0)} \supseteq \left[\frac{\Lambda H_1}{\Lambda H_2}\right]_{l(V_0)\setminus \mathrm{Ker}(V_0)}.$$

Deci Λ *"contractă" "raportul" a doi operatori ireductibili daţi pe V_0* (lucru în perfectă concordanţă cu h-nonexpansivitatea lui Λ).

Pentru a obţine egalitate este nevoie de

Propoziţia 5.7.6. *([**40**]-lema 7.5) $\exists\, \alpha$, $\beta > 0$ cu*

$$(0, \infty) \supseteq [\alpha, \beta] = \left[\frac{H_1}{H_2}\right]_{l(V_0)\setminus \mathrm{Ker}(V_0)} = \left[\frac{\Lambda H_1}{\Lambda H_2}\right]_{l(V_0)\setminus \mathrm{Ker}(V_0)}$$

$\Longleftrightarrow \forall\, \lambda \in \{\alpha, \beta\}$, $\exists\, h \in l(V_1)\setminus \mathrm{Ker}(V_1)$ *cu*

(1) $\Psi H_1 h = \lambda \Psi H_2 h$;

(2) $(\Psi H_1 h)_{|V_1\setminus V_0} = (\Psi H_2 h)_{|V_1\setminus V_0} \equiv 0$;

(3) $H_1(h \circ \Psi_i) = \lambda H_2(h \circ \Psi_i)$ *sau* $H_1(h \circ \Psi_i) = 0$, $i = \overline{1, N}$.

Acest rezultat constituie un *criteriu de "necontractare" de către Λ a "spectrului raportului" a doi operatori ireductibili de "pe V_0"*, util în aplicaţii.

III. Rezultatele de la **I**, **II** permit dezvoltarea unei *metode de aproximare*; se ajunge la teorema de aproximare în patru paşi:

1. Se obţine *o "legătură" între spectrul oricărui operator ireductibil şi cel al unui operator ireductibil propriu*:

PROPOZIŢIA 5.7.7. *([**40**]-Prop.8.3) Pentru* $\mathcal{L}$ *P.C.F.S.S. şi* Λ *asociat (cu* $\mathbf{r} = (1, 1, \ldots, 1)$*), se consideră* $H_0 \in \mathcal{LA}(V_0)$ *operator propriu ireductibil (*$\exists\, \gamma > 0$ *cu* $\Lambda(H_0) = \gamma H_0$*) şi* $H \in \mathcal{LA}(V_0)$ *un alt operator ireductibil. Atunci*

(1) $[\alpha_1, \alpha_2] := \bigcap_{m\geq 0} \left[\dfrac{\Lambda^{m+1}H}{\Lambda^m H}\right]_{l(V_0)\setminus \mathrm{Ker}(V_0)} \subset (0, \infty)$;

(2) $\exists\, \rho,\, \mu > 0$ *cu*

$$\rho < -H_0 u, u > \leq \gamma^{-m} < -\Lambda^m H u, u > \leq \mu < -H_0 u, u >,\ u \in l(V_0);$$

(3) $\gamma \in [\alpha_1, \alpha_2]$.

Demonstraţia utilizează succesiv 5.7.5 pentru ΛH şi H, apoi pentru H şi H_0. Din (3) se poate deduce şi *unicitatea valorii proprii* γ (deja demonstrată în 5.2.5).

2. Se obţine *un "renormalizat" al unui operator ireductibil arbitrar* (din compacitatea operatorilor H ($\#(V_0) < \infty$) şi 5.7.7-(2)):

PROPOZIŢIA 5.7.8. *([**40**]-Prop.8.4) Pentru* $\mathcal{L}$ *şi* Λ *ca mai sus (cu* $\mathbf{r} = (1, 1, \ldots, 1)$*), se consideră* $H \in \mathcal{LA}(V_0)$ *un operator ireductibil arbitrar (pentru care se poate aplica 5.7.7). Atunci* $\exists\, H' \in \mathcal{LA}(V_0)$, $\exists\, (n_k)_{k\geq 1} \subset \mathbb{N}$ *cu*

(1) $\lim_{k\to\infty} \dfrac{1}{\gamma^{n_k}} \Lambda^{n_k} H = H'$;

(2) $\left[\dfrac{\Lambda^{m+1}H}{\Lambda^m H}\right]_{l(V_0)\setminus \mathrm{Ker}(V_0)} = [\alpha_1, \alpha_2],\ \forall\, m \geq 0.$

H' este *renormalizatul* lui H.

3. Se poate deduce un *criteriu* prin care $\lim_{m\to\infty} \left[\dfrac{\Lambda^{m+1}H}{\Lambda^m H}\right]_{l(V_0)\setminus \mathrm{Ker}(V_0)}$ să se reducă la un singur punct (γ - unica valoare proprie pentru funcţia de renormalizare).

LEMA 5.7.9. *([**40**]-Lema 8.5) Fie* $\mathcal{L}$ *şi* $\mathbf{r} = (1, 1, \ldots, 1)$ *ca mai sus şi* $H \in \mathcal{LA}(V_0)$ *ireductibil arbitrar, iar* H' *"renormalizatul său" (din 5.7.8). Dacă* $\exists\, h \in l(V_0)\setminus \mathrm{Ker}\,(V_0)$ *cu* $\left[\dfrac{\Lambda^{m+1}H'}{\Lambda^m H'}\right](h) = \alpha_2$ *(sau* α_1*)* $\forall\, m \geq 0$*, atunci*

$$\lim_{m\to\infty} \left[\frac{\Lambda^{m+1}H}{\Lambda^m H}\right]_{l(V_0)\setminus \mathrm{Ker}(V_0)} = \{\gamma\}. \tag{5.3}$$

4. Acum *teorema de aproximare* 5.7.10 pare foarte naturală:

TEOREMA 5.7.10. *([**40**]-Th.8.6) Dacă* $\mathcal{L}$, $\mathbf{r} = (1, 1, \ldots, 1)$ *şi* $H \in \mathcal{LA}(V_0)$ *cu proprietatea*

$$\lim_{m\to\infty} \left[\frac{\Lambda^{m+1}H}{\Lambda^m H}\right]_{l(V_0)\setminus \mathrm{Ker}(V_0)} = \{\gamma\},$$

atunci

(1) $\lim_{m\to\infty} \frac{1}{\gamma^m} \Lambda^m H =: H_\infty$;

(2) $\Lambda H_\infty = \gamma H_\infty$.

(Operatorul H_∞ *este de fapt tot* H' *dat de 5.7.8, adică renormalizatul lui* H*).*

Se observă că 5.7.10 este o formă a teoremei de aproximare 5.7.1, însă doar pentru operatori (forme) ireductibile, constituind, la rândul ei, un rezultat cu caracter practic util în anumite cazuri, bazată pe considerente spectrale; este mai intuitivă, spre deosebire de 5.7.1, care rezulta dintr-un rezultat de tip trihotomie foarte greu de intuit, având avantajul că, împreună cu celelalte rezultate ale acestei secţiuni permit decantarea unei metode eficiente de aproximare a operatorilor proprii ireductibili:

Dacă, prin aplicarea unor alte metode, s-a obţinut existenţa (şi unicitatea sau neunicitatea) operatorilor proprii (pentru un "fractal" de tip P.C.F.S.S. conex dat, cu $\mathbf{r} := (1, 1, \ldots, 1)$*), şi, deasemenea, tot prin alte mijloace s-a obţinut* γ*, atunci se poate încerca determinarea efectivă a lor, astfel: se încearcă găsirea acelor operatori ireductibili* H' *pentru care* $\exists\, h \in l(V_0)$ *neconstantă cu* $\left[\dfrac{\Lambda^{m+1}H'}{\Lambda^m H'}\right](h) = \alpha_2$ *(sau* α_1*) (din 5.7.8),* $\forall\, m$ *(ca în 5.7.9), lucru care se poate realiza cu ajutorul lui 5.7.6. Acei* H' *pentru care se poate realiza aceasta constituie "domeniul de atracţie". Cu ajutorul unor programe se va putea ulterior determina măcar cu aproximaţie şi "atractorul" (mulţimea operatorilor proprii), considerând operatori aleatori din "domeniul de atracţie", ţinând cont eventual că "atractorul" este conex prin arce, etc.*

5.8. Rezultate speciale privind unicitatea şi aproximarea formelor proprii pentru fractali "cuib" afini (F.C.A.)

Se revine la problema unicităţii pentru clasa restrictivă a F.C.A.-urilor.

Se consideră $\mathcal{L} := \left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\right\}$ F.C.A., $\Theta = \mathcal{G}_s$ grupul "maximal" de simetrie (generat de reflecţiile în hiperplanele mediatoare ale segmentelor punctelor din V_0), $\mathbf{r} := (r_1, r_2, \ldots, r_N)$ cu $r_i > 0$, $\mathcal{G}_s$-invariant, $\mathbb{P}_s := \mathbb{P}_{\mathcal{G}_s}$, $\mathbb{D}_s := \mathbb{D}_{\mathcal{G}_s}$ conurile $\mathcal{G}_s$-invariante (a se vedea secţiunea 5.5) şi $\Lambda := \Lambda_{|\mathbb{P}_s}$ funcţia de renormalizare (este foarte important de remarcat faptul că, în ciuda proprietăţilor "geometrice" remarcabile ale unui F.C.A. (simetria), se pot considera şi aici conurile "maximale", $\mathbb{P}$ şi $\mathbb{D}$, neinvariante la nici o "simetrie" a "fractalului" - adică, chiar F.C.A. fiind, el poate fi gândit ca un simplu P.C.F.S.S. conex, neţinându-se cont de axioma de simetrie (F.C.A.2)).

Problema existenţei unei forme proprii ireductibile $\mathcal{G}_s$-simetrice fusese rezolvată deja de T. Lindstrom în [**35**] pentru fractali "cuib" şi Fitzsimmons, Hambly şi Kumagai în [**20**] pentru fractali "cuib" afini (a se vedea teorema 5.3.6). Pentru demonstrarea sa este esenţială considerarea conurilor $\mathcal{G}_s$ invariante $\mathbb{P}_s$ şi $\mathbb{D}_s$, precum şi faptul că $\mathbf{r}$ este $\mathcal{G}_s$-invariant. Unicitatea formelor proprii ireductibile $\mathcal{G}_s$-simetrice a rămas o problemă deschisă până în 1996, fiind rezolvată de C. Sabot pentru F.C.A. ([**59**]).

În [**41**] V. Metz demonstrează unicitatea mult mai elegant, folosind tot tehnica metricii hilbertiene. În continuare se prezintă pe scurt ideea sa, cu punctarea rezultatelor suplimentare pe care le are funcţia de renormalizare relativ la metrica h restricţionată la conuri de forme $\mathcal{G}_s$-simetrice pentru clasa foarte restrictivă a fractalilor "cuib". La final se poate obţine şi un rezultat mai puternic decât cele din ultimele două secţiuni, privind aproximarea acestei unice forme proprii.

Se notează $P_{fix} := \left\{\mathcal{A} \in \mathbb{P}_s^\circ \,\middle|\, \gamma^{-1}\Lambda(\mathcal{A}) = \mathcal{A}\right\}$, unde γ este unica valoare proprie (are loc un rezultat de tip 5.2.5 şi pentru Λ relativ la conul $\mathbb{P}_s$). Din 5.3.6 $\exists \mathcal{F} \in \mathbb{D}_s^\circ$ cu $\Lambda(\mathcal{F}) = \gamma\mathcal{F}$, deci $P_{fix} \neq \emptyset$. Deasemenea, conform secţiunii 5.6, P_{fix} conexă prin arce. *În cele ce urmează se va deduce unicitatea lui $\mathcal{F}$.*

Deci, *pe parcursul acestei secţiuni, $\mathcal{F}$ va desemna o formă proprie, ce se va dovedi, în cele din urmă, unică.*

5.8.1. Proprietăţi suplimentare ale lui $\mathbb{P}_s$, $\mathbb{D}_s$ şi Λ.

Pentru clasa particulară a F.C.A.-urilor, funcţia de renormalizare Λ îndeplineşte proprietăţile din 5.1.2, 5.2.5 şi 5.4.1 (relativ la conurile $\mathbb{P}_s$ şi $\mathbb{D}_s$ însă !, conform cu [**41**]*-Prop.2.1: a)-g), Prop.2.2: a),b),d)); suplimentar, mai este îndeplinită şi următoarea proprietate*:

PROPOZIŢIA 5.8.1. *(*[**41**]*-Prop.2.2-c)) $d\Lambda(\mathcal{A})(\mathbb{D}_s\backslash\{0\}) \subset \mathbb{P}_s^\circ$, $\forall\, \mathcal{A} \in \mathbb{D}_s^\circ$.*

Într-adevăr, pentru $\mathcal{A} \in \mathbb{D}_s^\circ$, $\mathcal{B} \in \mathbb{D}_s\backslash\{0\}$, $u \in l(V_0)$ neconstantă şi $p \in V_0$ cu $u(p) = \max_{V_0} u$, se va utiliza în mod fundamental faptul că V_0 coincide cu mulţimea punctelor fixe esenţiale (2.3.4-(1)), deci $\exists\, j \in \overline{1,k}$ cu $\psi_j(p) = p$. Dacă $\Xi^{-1}(\mathcal{B}) =: c$ matricea de conductanţă asociată lui $\mathcal{B}$ (susbsecţiunea 4.1.5), atunci se poate scrie

$$\begin{aligned} d\Lambda(\mathcal{A})(\mathcal{B})(u,u) = \quad & \Psi(\mathcal{B})(\mathcal{H}^{\mathcal{A}}_{V_1\backslash V_0}u, \mathcal{H}^{\mathcal{A}}_{V_1\backslash V_0}u) = \sum_{i=1}^{N} r_i \mathcal{B}(\mathcal{H}^{\mathcal{A}}_{V_1\backslash V_0}u \circ \psi_i, \mathcal{H}^{\mathcal{A}}_{V_1\backslash V_0}u \circ \psi_i) \\ = \quad & \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} r_i \sum_{p,q\in V_0} \left(\mathcal{H}^{\mathcal{A}}_{V_1\backslash V_0}u \circ \psi_i(p) - \mathcal{H}^{\mathcal{A}}_{V_1\backslash V_0}u \circ \psi_i(q)\right)^2 c(p,q). \end{aligned}$$

Din principiul de minim ($\mathcal{A} \in \mathbb{D}_s^\circ = \mathbb{D}_s^i$) şi $\psi_j(V_0) \cap V_0 = \{p\}$ (adevărată pentru F.C.A.) $u(p) = \mathcal{H}^{\mathcal{A}}_{V_1\backslash V_0}u\circ\psi_j(p) > \mathcal{H}^{\mathcal{A}}_{V_1\backslash V_0}u\circ\psi_j(q)$, $\forall\, q \in V_0\backslash\{p\}$. Cum $\mathcal{G}_s$ grup de simetrie, $c(p,q) = 0$, $\forall\, q \in V_0 \Longrightarrow \mathcal{B} = 0$. Dar $\mathcal{B} \neq 0$, deci $\exists\, q \in V_0$ cu $c(p,q) > 0$, de unde $d\Lambda(\mathcal{A})(\mathcal{B})(u,u) > 0$. Aşadar, $\operatorname{Ker} d\Lambda(\mathcal{A})(\mathcal{B}) = \mathbb{R}\cdot\mathbb{I}_{V_0}$, deci $d\Lambda(\mathcal{A})(\mathcal{B}) \in \mathbb{P}_s^\circ$.

A fost prezentată demonstraţia din [**41**] *pentru a puncta faptul că se foloseşte în mod fundamental informaţia $\mathcal{L}$ F.C.A.*

Deasemenea, aşa cum s-a anticipat în 5.7.1, pentru F.C.A.-uri şi conul $\mathbb{P}_s$ este poliedral:

PROPOZIŢIA 5.8.2. *Conurile $\mathbb{D}_s$ şi $\mathbb{P}_s$ sunt poliedrale.*

Faptul că $\mathbb{D}_s$ este poliedral a fost deja remarcat (chiar pentru structuri S.A.P.C.F. conexe, conul $\mathbb{D}$ este poliedral - a se vedea subsecţiunea 5.1.1). Pentru a deduce că $\mathbb{P}_s$ este poliedral, este suficient, cu criteriul de poledralitate 5.7.2, să se demonstreze că operatorii asociaţi *orbitelor determinate de $\mathcal{G}_s$* comută (pentru detalii a se vedea [**42**]-Prop.3.2).

Din 5.2.3 şi 5.8.1, se poate deduce, pentru clasa "fractalilor" F.C.A. h-contractivi-tatea locală a lui Λ în jurul unor "puncte" "de pe frontieră":

PROPOZIŢIA 5.8.3. *(*[**41**]*-Prop.3.3) Pentru $\mathcal{L}$ şi $\mathbf{r}$ ca mai sus, dacă $\mathcal{C} \in \mathbb{D}_s \cap \partial\mathbb{P}_s$, atunci există U h-vecinătate a lui $\mathcal{C}$ cu $h(\Lambda(\mathcal{A}), \mathcal{F}) < h(\mathcal{A}, \mathcal{F})$, $\forall\, \mathcal{A} \in U \cap \mathbb{P}_s^\circ$.*

Într-adevăr, din 5.8.1 rezultă $d\Lambda(\mathcal{F})(\mathcal{C}) \in \mathbb{P}_s^\circ$, iar $d\Lambda(\mathcal{F})$ este continuă pe $\mathbb{B}_s$ şi $d\Lambda(\mathcal{F})(\mathcal{C}) = \Lambda(\mathcal{C})$; deci $\exists\, U$ h-vecinătate a lui $\mathcal{C}$ astfel încât $d\Lambda(\mathcal{F})(U \cap \mathbb{P}_s) \subset \mathbb{P}_s^\circ$; se aplică apoi observaţia de după (5.1) şi (5.2) (diferenţiala lui Λ în $\mathcal{F}$ e strict pozitivă pe o vecinătate a lui $\mathcal{C}$).

5.8.2. Unicitatea lui $\mathcal{F}$. Dacă $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{P}_s^\circ$ cu $h(\mathcal{A},\mathcal{B}) = h(\Lambda(\mathcal{A}),\Lambda(\mathcal{B}))$, din observaţia 5.2.4 (care evident că funcţionează şi pentru forme din $\mathbb{P}_s^\circ$) se poate deduce că ([**41**]-Lema 3.4) $d\Lambda(\mathcal{A})(\mathcal{R})(u,u) = 0$, $\forall\, \mathcal{R} \in \mathbb{P}_s$ cu $\operatorname{Ker}\underline{\varepsilon}(\mathcal{A}|\mathcal{B}) \subset \operatorname{Ker}\mathcal{R}$, $\forall\, u \in \operatorname{Ker}\underline{\varepsilon}(\Lambda(\mathcal{A})|\Lambda(\mathcal{B}))$ şi $d\Lambda(\mathcal{A})(\mathcal{S})(v,v) = 0$, $\forall\, \mathcal{S} \in \mathbb{P}_s$ cu $\operatorname{Ker}\overline{\varepsilon}(\mathcal{A}|\mathcal{B}) \subset \operatorname{Ker}\mathcal{S}$, $\forall\, v \in \operatorname{Ker}\overline{\varepsilon}(\Lambda(\mathcal{A})|\Lambda(\mathcal{B}))$.

Se presupune în cele ce urmează că $\mathcal{B} \in P_{fix}$ cu $h(\mathcal{F},\mathcal{B}) > 0$. Din cele de mai sus V.Metz deduce ([**41**]-Lema4.1) că $\Lambda(\alpha\mathcal{F} + \beta\mathcal{R})(u,u) = \alpha\Lambda(\mathcal{F})(u,u)$, $\forall\, \mathcal{R} \in \pm\mathbb{P}_s$ cu $\operatorname{Ker}\underline{\varepsilon}(\mathcal{F}|\mathcal{B}) \subset \operatorname{Ker}\mathcal{R}$, $\forall\, u \in \operatorname{Ker}\underline{\varepsilon}(\mathcal{F}|\mathcal{B})$, $\forall\, \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$ cu $\alpha\mathcal{F} + \beta\mathcal{R} \in \mathbb{P}_s^\circ$ şi $\Lambda(\alpha\mathcal{F} + \beta\mathcal{S})(v,v) = \alpha\Lambda(\mathcal{F})(v,v)$, $\forall\, \mathcal{S} \in \pm\mathbb{P}_s$ cu $\operatorname{Ker}\overline{\varepsilon}(\mathcal{F}|\mathcal{B}) \subset \operatorname{Ker}\mathcal{S}$, $\forall\, v \in \operatorname{Ker}\overline{\varepsilon}(\mathcal{F}|\mathcal{B})$, $\forall\, \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$ cu $\alpha\mathcal{F} + \beta\mathcal{S} \in \mathbb{P}_s^\circ$.

Din cele de mai sus, V.Metz reuşeşte să demonstreze că presupunerea $h(\mathcal{F},\mathcal{B}) > 0$ este falsă (adică are loc unicitatea), pe o idee a lui C.Sabot ([**59**]-Lema V.5), mult mai simplu însă:

- se consideră, pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{Q}_n := \Big\{\mathcal{C} \in \mathbb{P}_s^\circ \,\Big|\, \mathcal{F} \le \mathcal{C} \le n\mathcal{F}, (\mathcal{F} - \mathcal{C})(u,u) = 0,\, \forall\, u \in \operatorname{Ker}\underline{\varepsilon}(\mathcal{F}|\mathcal{B}),$$
$$(n\mathcal{F} - \mathcal{C})(v,v) = 0,\, \forall\, v \in \operatorname{Ker}\overline{\varepsilon}(\mathcal{F}|\mathcal{B})\Big\}$$

- din observaţiile de la începutul subsecţiunii rezultă atunci

$$\Lambda(\mathcal{C})(u,u) = \Lambda(\mathcal{F} + (\mathcal{C} - \mathcal{F}))(u,u) = \Lambda(\mathcal{F})(u,u) = \gamma\mathcal{F}(u,u),$$
$$\Lambda(\mathcal{C})(v,v) = \Lambda(n\mathcal{F} - (n\mathcal{F} - \mathcal{C}))(v,v) = n\Lambda(\mathcal{F})(v,v) = n\gamma\mathcal{F}(v,v).$$

- se aplică teorema lui Brouwer: din Λ pozitiv omogenă rezultă că $\frac{1}{\gamma}\Lambda(\mathbf{Q}_n) \subset \mathbf{Q}_n$, $\forall\, n$, de unde, cu teorema lui Brouwer de punct fix (Λ continuă pe $\mathbb{P}_s^\circ$, $\mathbf{Q}_n$ compactă, convexă) există câte un punct fix $\mathcal{F}_n$ al lui $\frac{1}{\gamma}\Lambda$ în fiecare $\mathbf{Q}_n$.

- se deduce o contradicţie: şi "razele" generate de punctele $\mathcal{F}_n$ sunt formate cu puncte fixe, deci şi intersecţiile acestor raze cu sfera unitate $S_1(0)$ din $(\mathbb{B}_s, ||\cdot||)$ $(=: \mathcal{P}_n)$ sunt puncte fixe. Cum $h(\mathcal{F},\mathcal{P}_n) = h(\mathcal{F},\mathcal{F}_n) = \ln n$, $\forall\, n$, rezultă că $(\mathcal{P}_n)_n$ tinde la $\partial\mathbb{P}_s$ în metrica h. Dar $S_1(0)$ compactă, deci $\exists\, \mathcal{A} \in \partial\mathbb{P}_s$ punct de acumulare pentru $(\mathcal{P}_n)_n$, care, din 5.8.3 trebuie să aparţină lui $\partial\mathbb{P}_s \backslash \mathbb{D}_s$. Cum $\mathbb{P}_s \backslash \mathbb{D}_s$ relativ deschisă în $\mathbb{P}_s$, $\exists\, n_0$ cu $\mathcal{P}_{n_0} \in \mathbb{P}_s^\circ \backslash \mathbb{D}_s$, în contradicţie cu faptul că $P_{fix} \subset \mathbb{D}_s^\circ$. Deci *presupunerea că $\exists\, \mathcal{B} \in P_{fix}$ cu $h(\mathcal{F},\mathcal{B}) > 0$ este falsă.* Aşadar

$$P_{fix} = \big\{\alpha\mathcal{F} \,\big|\, \alpha > 0\big\}\,,$$

adică are loc unicitatea.

5.8.3. Aproximarea lui $\mathcal{F}$. ([**41**]-pag.171-172) Problema aproximării unicei forme proprii (modulo înmulţirea cu o constantă) $\mathcal{F}$ (cu valoarea proprie γ) este o consecinţă a teoremei 5.7.1 şi a faptului că $\mathbb{P}_s$ este poliedral. Se presupune că $\exists\, \mathcal{B} \in \mathbb{P}^\circ$ cu $h(\mathcal{F},\mathcal{B}) > 0$ şi $h(\mathcal{F},\mathcal{B}) = h(\mathcal{F},\Lambda^n(\mathcal{B}))$, $\forall\, n$; din teorema 5.7.1 există $k_\mathcal{B}$ şi $\mathcal{D} \in \mathbb{P}^\circ$ cu $\lim_k (\Lambda/\gamma)^{k \cdot k_\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \mathcal{D}$ şi $\Lambda^{k_\mathcal{B}}(\mathcal{D}) = \gamma^{k_\mathcal{B}}\mathcal{D}$; deci $\Lambda/\gamma)^{k_\mathcal{B}}$ are două puncte fixe liniar independente, ceea ce constituie o contradicţie. Deci are loc

Teorema 5.8.4. *([**41**]-Th.4.4)* $\Big(\forall\, \mathcal{A} \in \mathbb{P}^\circ,\, h(\mathcal{A},\mathcal{F}) > 0\Big)\Big(\exists\, n\Big)\Big(h(\mathcal{A},\mathcal{F}) > h(\Lambda^n(\mathcal{A}),\mathcal{F})\Big)$.

De aici se poate deduce apoi

Corolarul 5.8.5. *([**41**]-Cor.5.2)* $\Big(\forall\, \mathcal{A} \in \mathbb{P}^\circ\Big)\Big(\exists\, \alpha > 0\Big)\Big(\lim\limits_{k\to\infty} \left((1/\gamma)\Lambda\right)^k(\mathcal{A}) = \alpha\mathcal{F}\Big)$.

Adică, în limbajul secţiunii precedente, *domeniul de atracţie* $\big($*pentru sistemul dinamic* $\big(\mathbb{P}, \frac{1}{\gamma}\Lambda\big)\big)$ *al formei proprii "unice" a unui F.C.A. este* $\mathbb{P}^\circ$.

5.9. Tehnici suplimentare de deducere a existenţei şi unicităţii formelor proprii

Se vor prezenta tehnici superioare de deducere a existenţei şi unicităţii, urmând contribuţia lui V.Metz din [**44**] şi [**45**].

Se vor considera $\mathcal{L} := \Big\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,N}}\Big\}$ S.A.P.C.F. conexă, Θ grup de simetrie pentru $\mathcal{L}$ (eventual trivial), $\mathbf{r} := (r_1, \dots, r_n)$ Θ-invariant, V_0 "frontiera" structurii, conurile $\mathbb{P}_\Theta$, $\mathbb{D}_\Theta$ şi $\Lambda : \mathbb{P}_\Theta \longrightarrow \mathbb{P}_\Theta$ funcţia de renormalizare.

Pentru uşurinţă în scriere, şi, mai ales pentru situaţia în care Θ poate fi grupul trivial, se vor nota $\mathbb{D}_\Theta =: \mathbb{D}$, $\mathbb{P}_\Theta =: \mathbb{P}$.

Este nevoie de un *studiu mult mai detaliat al conurilor $\mathbb{D}$ şi $\mathbb{P}$, referitor în special la "părţile" lor şi în legătură cu funcţia de renormalizare.*

Rezultatul fundamental din [**44**] *este un rezultat de tip "dihotomie" Krause-Nussbaum, chiar dacă conul $\mathbb{P}$ nu mai e neapărat poliedral (a se vedea subsecţiunea 5.7.1):*

TEOREMA 5.9.1. *([**44**]-Th.1.1) Fie $\mathbb{D}_0$ $\mathbb{D}$-parte şi $\mathcal{B} \in \mathbb{D}_0$ cu $\Lambda(\mathcal{B}) \in \mathbb{D}_0$. Atunci una din următoarele variante "funcţionează":*

(1) $\left(\widetilde{\Lambda}^n(\mathcal{B})\right)_{n\geq 1}$ *are conductanţe pozitive uniform mărginite* $\Longrightarrow \exists\, m \in \mathbb{N}$ *cu* $\lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{\Lambda}^{nm}(\mathcal{B}) =: \mathcal{F}$ *şi* $\widetilde{\Lambda}^m(\mathcal{F}) = \mathcal{F} \in \mathbb{D}_0$*;*

(2) $\mathbb{D}_0$ *nu conţine puncte limită ale lui* $\left(\widetilde{\Lambda}^n(\mathcal{B})\right)_{n\geq 1}$.

Din el se deduce ulterior un aşa zis "test de scurtcircuitare", prin care se poate deduce existenţa formelor proprii pe un "fractal" P.C.F.S.S. conex. *Demonstraţia este deosebit de laborioasă, pe scurt rezultând din aplicarea unor rezultate avansate privind metrica hilbertiană pe "părţi" relativ la Λ (în special nonexpansivitatea) şi observaţia că ergodicitatea slabă a unui produs neomogen a unor matrici nenegative particulare ("matricile stocastice") este determinată de efectul de mixare a proprietăţilor valorii medii pentru funcţii armonice.*

În continuare, se schiţează traseul de demonstraţie a acestui rezultat de tip "dihotomie". Pentru aceasta este nevoie de concepte şi rezultate auxiliare.

5.9.1. Conul $\mathbb{D}_\Theta = \mathbb{D}$: părţi şi grafuri. Conform cu subsecţiunea 5.2.1, pentru $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{B} := \mathbb{D}-\mathbb{D}$, $\mathcal{A} \leq_{\mathbb{D}} \mathcal{B} \Longleftrightarrow \mathcal{B} - \mathcal{A} \in \mathbb{D}$; dar, din scrierea $\mathcal{A}(u,u) = \frac{1}{2} \sum\limits_{p,q\in V_0} (u(q) - u(p))^2 c_{\mathcal{A}}(p,q)$ ($c_{\mathcal{A}}$ matricea de conductanţă asoc iată lui $\mathcal{A}$) şi analog pentru $\mathcal{B}$, rezultă

$$\mathcal{A} \leq_{\mathbb{D}} \mathcal{B} \Longleftrightarrow c_{\mathcal{A}} \leq c_{\mathcal{B}}.$$

Analog, pentru $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$

$$\mathcal{A} \sim_{\mathbb{D}} \mathcal{B} \Longleftrightarrow \exists\, \alpha,\, \beta > 0,\, \alpha c_{\mathcal{A}} \leq c_{\mathcal{B}} \leq \beta c_{\mathcal{A}},$$

adică matricile lor de conductanţă $c_{\mathcal{A}}$ şi $c_{\mathcal{B}}$ au aceleaşi zerouri, sau încă, grafurile determinate de $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ coincid ($\Gamma(\mathcal{A}) = \Gamma(\mathcal{B})$)(dacă $\mathcal{A} \in \mathbb{D}$, se notează cu $\Gamma(\mathcal{A}) := (V_0, E(\mathcal{A}))$, cu $E(\mathcal{A}) := \left\{\{p,q\} \subset V_0 \,\middle|\, c_{\mathcal{A}} > 0\right\}$). Se justifică atunci, pentru $\mathbb{D}_0$ parte a lui $\mathbb{D}$, notaţia

$$\Gamma(\mathbb{D}_0) := \Gamma(\mathcal{A}),\, \mathcal{A} \in \mathbb{D}_0$$

(definiţie coerentă din cele de mai sus). Se observă că pentru $\mathbb{D}_0 = \mathbb{D}^\circ = \mathbb{D}^{ti}$, $\Gamma(\mathbb{D}^\circ)$ este graful maximal asociat lui V_0.

Desemnea, se mai remarcă faptul că $\mathcal{A} \sim_{\mathbb{D}} \mathcal{B} \Longrightarrow \operatorname{Ker}\mathcal{A} = \operatorname{Ker}\mathcal{B}$, reciproca nefiind adevărată.

Apoi, dacă $\Gamma = (V_0, E_\Gamma) \subset \Gamma(\mathbb{D}^\circ)$ subgraf, se defineşte $c_\Gamma : V_0 \times V_0 \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $c_\Gamma(p,q) := 1 \Longleftrightarrow \{p,q\} \in E_\Gamma$ şi $c_\Gamma(p,q) = c_\Gamma(q,p)$, $q \neq p$, $c_\Gamma(p,p) = 0$, p, $q \in V_0$. Se consideră apoi $\mathcal{A}_{c_\Gamma} =: \mathcal{A}_\Gamma \in \mathbb{D}$.

Există bijecţie între subgrafurile lui $\Gamma(\mathbb{D}^\circ)$ şi părţile lui $\mathbb{D}$:

$$\left\{\Gamma \,\middle|\, \Gamma \subset \Gamma(\mathbb{D}^\circ) \text{ subgraf}\right\} \xrightarrow{\xi} \left\{\mathbb{D}_0 \,\middle|\, \mathbb{D}_0 \subset \mathbb{D} \text{ parte a lui } \mathbb{D}\right\},$$

$\xi(\Gamma) =: \widehat{\mathcal{A}_\Gamma}$, $\widehat{\mathcal{A}}$ fiind $\mathbb{D}$-partea (clasa de echivalenţă relativ la $\sim_{\mathbb{D}}$) din care face parte $\mathcal{A}$. Inversa lui ξ este dată de $\xi^{-1}(\mathbb{D}_0) = \Gamma(\mathbb{D}_0)$.

Se observă şi că $\mathcal{A} \in \mathbb{D}$ ireductibilă (adică $\mathcal{A} \in \mathbb{D} \cap \mathbb{P}^\circ$) $\Longleftrightarrow \Gamma(\mathcal{A})$ graf conex (sau $(V_0, c_{\mathcal{A}})$ reţea electrică ireductibilă, etc.).

Pentru $\mathbb{D}_0$ parte a lui $\mathbb{D}$ şi $\mathcal{A} \in \overline{\mathbb{D}_0}\backslash\mathbb{D}_0$, evident $\Gamma(\mathcal{A}) \subset \Gamma(\mathbb{D}_0)$ subgraf strict.

Deasemenea, pentru $\mathbb{D}_0$, $\mathbb{D}_1$ părţi ale lui $\mathbb{D}$, se va spune că $\mathbb{D}_0 \leq \mathbb{D}_1$ (sau $\mathbb{D}_0 < \mathbb{D}_1$) $\Longleftrightarrow \Gamma(\mathbb{D}_0) \subset \Gamma(\mathbb{D}_1)$ subgraf (respectiv subgraf strict).

5.9.2. Conul $\mathbb{P}_\Theta = \mathbb{P}$: părţi şi nuclee. Conform cu subsecţiunea 5.2.1, pentru $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{B}$, $\mathcal{A} \leq_{\mathbb{P}} \mathcal{B} \Longleftrightarrow \mathcal{B} - \mathcal{A} \in \mathbb{P} \Longleftrightarrow \mathcal{A}(u,u) \leq \mathcal{B}(u,u)$, $\forall\, u \in l(V_0)$.

Pentru $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{P}\backslash\{0\}$

$$\mathcal{A} \sim_{\mathbb{P}} \mathcal{B} \Longleftrightarrow \exists\, \alpha,\, \beta > 0,\, \alpha\mathcal{A}(u,u) \leq \mathcal{B}(u,u) \leq \beta\mathcal{A}(u,u),\, \forall\, u \in l(V_0),$$

sau $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \operatorname{Ker}\mathcal{B}$ (prin $\operatorname{Ker}\mathcal{E}$ se înţelege nucleul operatorului asociat lui $\mathcal{E}$). Se justifică atunci, pentru $\mathbb{P}_0$ parte a lui $\mathbb{P}$, notaţia

$$\operatorname{Ker}(\mathbb{P}_0) := \operatorname{Ker}(\mathcal{A}),\, \mathcal{A} \in \mathbb{P}_0$$

(definiţie coerentă din cele de mai sus). Se observă că pentru $\mathbb{P}_0 = \mathbb{P}^\circ$, $\operatorname{Ker}(\mathbb{P}^\circ) = \mathbb{R} \cdot \mathbb{I}_{V_0}$.

Pentru $\mathbb{P}_0$ parte a lui $\mathbb{P}$ şi $\mathcal{A} \in \overline{\mathbb{P}_0}\backslash\mathbb{P}_0$, evident $\operatorname{Ker}(\mathbb{P}_0) \subsetneqq \operatorname{Ker}(\mathcal{A})$.

Desemenea, se remarcă şi faptul că pentru $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{D}$ $\mathcal{A} \sim_{\mathbb{D}} \mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{A} \sim_{\mathbb{P}} \mathcal{B}$, de unde, orice $\mathbb{D}$-parte $\mathbb{D}_0$ e conţinută într-o $\mathbb{P}$-parte.

În plus, $\underline{\varepsilon}(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ şi $\underline{\varepsilon}(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ (definite în 5.2.4) se pot defini şi pentru orice $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{P}$ cu $\mathcal{A} \sim_{\mathbb{P}} \mathcal{B}$; în acest caz are loc

$$\operatorname{Ker}\,(\underline{\varepsilon}(\mathcal{A}|\mathcal{B})) \supsetneqq \operatorname{Ker}\mathcal{A} = \operatorname{Ker}\mathcal{B} \subsetneqq \operatorname{Ker}\,(\overline{\varepsilon}(\mathcal{A}|\mathcal{B})),$$

funcţiile din $\operatorname{Ker}\,(\underline{\varepsilon}(\mathcal{A}|\mathcal{B}))$ şi $\operatorname{Ker}\,(\overline{\varepsilon}(\mathcal{A}|\mathcal{B}))$ numindu-se *extremale.*

5.9.3. "Părţi" şi conexiune. Ca o nouă observaţie, în completarea celor de mai sus, pentru $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{D}$ cu $\mathcal{A} \sim_{\mathbb{P}} \mathcal{B}$ (deci $\operatorname{Ker}(\mathcal{B}) = \operatorname{Ker}(\mathcal{A})$), se pot spune următoarele:

- dacă $u \in \operatorname{Ker}(\mathcal{A})$, adică $\mathcal{A}$-armonică pe V_0, din principiul de minim 4.1.11 u va fi constantă pe componentele conexe ale lui $\Gamma(\mathcal{A})$;
- reciproc, dacă u constantă pe componentele conexe ale lui $\Gamma(\mathcal{A})$, atunci, din (4.3) $\mathcal{A}(u, u) = 0$, adică u $\mathcal{A}$-armonică pe V_0.

De aici rezultă că *$\mathbb{P}$-părţile care intersectează $\mathbb{D}$ sunt perfect caracterizate de familia specifică a componentelor lor conexe.*

Dacă $\mathcal{A} \in \mathbb{D}$, $u \in l(V_0)$, din definiţia lui Λ rezultă $\Lambda(\mathcal{A})(u, u) = \Psi(\mathcal{A}) \left(\mathcal{H}^{\Psi(\mathcal{A})}_{V_1 \setminus V_0} u, \mathcal{H}^{\Psi(\mathcal{A})}_{V_1 \setminus V_0} u\right)$. Se poate deduce apoi, prin inducţie după n

Propoziţia 5.9.2. *([**44**]-Lema 2.1) Fie $\mathcal{A} \in \mathbb{D}$, $u \in l(V_0)$, $n \geq 1$. Atunci*

$$\Lambda^n(\mathcal{A})(u, u) = \Psi^n(\mathcal{A}) \left(\mathcal{H}^{\Psi^n(\mathcal{A})}_{V_n \setminus V_0} u, \mathcal{H}^{\Psi^n(\mathcal{A})}_{V_n \setminus V_0} u\right).$$

De aici $\mathcal{H}^{\Psi\Lambda^n(\mathcal{A})}_{V_1 \setminus V_0} u = \left(\mathcal{H}^{\Psi^{n+1}(\mathcal{A})}_{V_{n+1} \setminus V_0} u\right)_{|V_1}$.

Observaţia 5.9.3. Pentru $\mathcal{A} \in \mathbb{D}$, $U \subset V_0$, $W \subset V_n \setminus V_0$, se spune că *$U$ şi W sunt $\Psi^n(\mathcal{A})$-conectate* $\iff \exists\, u \in U$, $\exists\, w \in W$, $\exists\, \gamma \subset \Gamma(\Psi^n(\mathcal{A}))$, γ cu capete u şi w. Dacă, în plus, drumul intersectează V_0 cel mult în $U \cup W$, atunci se spune că *U şi W sunt $\Psi^n(\mathcal{A})$-conectate via interior.*

Atunci, din 5.9.2, se pot deduce atunci următoarele remarci interesante privitoare la "conexiune" ([**44**]-pag.9):

(1) dacă $\mathcal{A} \in \mathbb{D}$, $U \subset V_0$, $W \subset V_n \setminus V_0$, atunci $\mathcal{H}^{\Psi^n(\mathcal{A})}_{V_n \setminus V_0} \chi_U > 0$ pe $W \iff U$ şi W sunt $\Psi^n(\mathcal{A})$-conectate via interior;

(2) pentru $p \neq q \in V_0$ $-c_{\Lambda^n(\mathcal{A})}(p, q) = \Psi^n(\mathcal{A}) \left(\mathcal{H}^{\Psi^n(\mathcal{A})}_{V_n \setminus V_0} \chi_p, \chi_q\right)$, de unde $c_{\Lambda^n(\mathcal{A})}(p, q) > 0 \iff p$ şi q $\Psi^n(\mathcal{A})$-conectate via interior ($c_{\Lambda^n(\mathcal{A})}$ matricea de conductanţă asociată lui $\Lambda^n(\mathcal{A})$);

(3) dacă în plus $\mathcal{A} \in \mathbb{D}$ formă proprie pentru Λ ($\exists\, \gamma > 0$ cu $\Lambda(\mathcal{A}) = \gamma\mathcal{A}$), atunci $\gamma < 1$. Într-adevăr, cum $\mathcal{A} \neq 0$, $\exists\, p \in V_0$ cu $\Lambda(\mathcal{A})(\chi_p) = \gamma\mathcal{A}(\chi_p) > 0$, de unde, cu (2) există o conexiune via interior între p şi un $q \in V_0 \setminus \{p\}$, iar din principiul de minim şi conexiunea "fractalului" va rezulta că există un vecin apropiat $q \in \psi_p(V_0) \setminus \{p\}$ al lui p în $\Gamma(\mathcal{A}_1)$; de aici $\Lambda(\mathcal{A})(\chi_p) < \mathcal{A}(\chi_p) > 0$, deci $\gamma < 1$.

5.9.4. Proprietăţi suplimentare ale lui Λ "pe părţi".

1. Suplimentar proprietăţilor deja enunţate ale lui Λ (din 5.1.2), se mai poate remarca faptul că dacă $\mathbb{D}_0$, $\mathbb{D}_1$ părţi ale lui $\mathbb{D}$, atunci

$$\Lambda(\mathbb{D}_0) \subset \mathbb{D}_1 \iff \exists\, \mathcal{A} \in \mathbb{D}_0,\ \Lambda(\mathcal{A}) \in \mathbb{D}_1,$$

sau Λ *"acţionează" pe $\mathbb{D}$-"părţi".*

2. Se pot defini $m(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ şi $M(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ şi mai general decât în 5.2.2:
- $m(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ pentru $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{P} \setminus \{0\}$ cu $\operatorname{Ker}\mathcal{A} \subset \operatorname{Ker}\mathcal{B}$;
- $M(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ pentru $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{P} \setminus \{0\}$ cu $\operatorname{Ker}\mathcal{B} \subset \operatorname{Ker}\mathcal{A}$;
- în plus, pentru $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{P} \setminus \{0\}$ cu $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \operatorname{Ker}\mathcal{B}$ se poate defini şi

$$\left[\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}\right] := \left\{ \frac{\mathcal{A}(u, u)}{\mathcal{B}(u, u)} \,\Big|\, u \in l(V_0) \setminus \operatorname{Ker}\mathcal{A} \right\} = [m(\mathcal{A}|\mathcal{B}), M(\mathcal{A}|\mathcal{B})].$$

Se poate deduce (considerând elementele $\underline{\varepsilon}(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ şi $\overline{\varepsilon}(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ ca în 5.2.4):
- $m(\mathcal{B}|\mathcal{A}) \leq m(\Lambda(\mathcal{B})|\Lambda(\mathcal{A}))$, pentru $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{P} \setminus \{0\}$ cu $\operatorname{Ker}\mathcal{A} \subset \operatorname{Ker}\mathcal{B}$;
- $M(\Lambda(\mathcal{B})|\Lambda(\mathcal{A})) \leq M(\mathcal{B}|\mathcal{A})$, pentru $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{P} \setminus \{0\}$ cu $\operatorname{Ker}\mathcal{B} \subset \operatorname{Ker}\mathcal{A}$;
- $\left[\frac{\Lambda(\mathcal{A})}{\Lambda(\mathcal{B})}\right] \subset \left[\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}\right]$, pentru $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{P} \setminus \{0\}$ cu $\operatorname{Ker}\mathcal{B} = \operatorname{Ker}\mathcal{A}$, rezultat ce constituie o generalizare a lui 5.7.5.

3. cu **2**, 5.2.3 poate fi "updatată" astfel

Propoziţia 5.9.4. *1.([**44**]-Prop.3.1) Dacă $\mathbb{P}_0$ $\mathbb{P}$-parte Λ-invariantă ($\Lambda(\mathbb{P}_0) \subset \mathbb{P}_0$) şi $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{P}_0$, atunci $m(\mathcal{B}|\mathcal{A}) \leq m(\Lambda(\mathcal{B})|\Lambda(\mathcal{A})) \leq M(\Lambda(\mathcal{B})|\Lambda(\mathcal{A})) \leq M(\mathcal{B}|\mathcal{A})$, de unde rezultă $h(\Lambda(\mathcal{A}), \Lambda(\mathcal{B})) \leq h(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.*

*2. ([**46**]-Cor.4) Mai general chiar, pentru pentru $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{P} \setminus \{0\}$ cu $\operatorname{Ker}\mathcal{B} = \operatorname{Ker}\mathcal{A}$ şi $\Lambda(\mathcal{A})$, $\Lambda(\mathcal{A}) \neq 0$, are loc $h(\Lambda(\mathcal{A}), \Lambda(\mathcal{B})) \leq h(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.*

Deci Λ *h nonexpansivă pe $\mathbb{P}$-părţile Λ-invariante.*

Deasemenea, tot de aici rezultă că pentru $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{P}$,

$$h(\mathcal{A}, \mathcal{B}) < \infty \iff \mathcal{A} \sim_{\mathbb{P}} \mathcal{B} \implies h(\Lambda(\mathcal{A}), \Lambda(\mathcal{B})) < \infty \iff \Lambda(\mathcal{A}) \sim_{\mathbb{P}} \Lambda(\mathcal{B}),$$

deci Λ *"acţionează"* şi pe *$\mathbb{P}$-părţi.*

4. Foarte elegant se pot obţine şi informaţii privind valorile proprii corespunzătoare unor forme proprii aflate într-o $\mathbb{P}$-parte Λ-invariantă:

PROPOZIŢIA 5.9.5. *([**44**]-Cor.3.1)* $\mathbb{P}_0$ *$\mathbb{P}$-parte cu* $\Lambda(\mathbb{P}_0) \subset \mathbb{P}_0$, $\mathcal{A} \in \mathbb{P}_0$, $\mathcal{B} \in \mathbb{P}_0$ *astfel încât* $\exists\, \beta > 0$ *cu* $\Lambda(\mathcal{B}) = \beta\mathcal{B} \Longrightarrow m(\Lambda(\mathcal{A})|\mathcal{A}) \le \beta \le M(\Lambda(\mathcal{A})|\mathcal{A})$.

5.9.5. Rezultate auxiliare necesare pentru demonstrarea teoremei 5.9.1. Demonstrarea teoremei fundamentale 5.9.1 se face în mai multe etape, fiecare foarte laborioasă (ce se vor descrie succint):

I. Se remarcă întâi următorul fapt:

LEMA 5.9.6. *([**44**]-Cor.3.2) Dacă*

(1) $\exists\, \mathbb{P}_0$ *$\mathbb{P}$-parte Λ-invariantă şi* $\mathcal{A} \in \mathbb{P}_0$;

(2) $\mathcal{L} \in \mathbb{P}_0$ *punct limită pentru* $\left(\widetilde{\Lambda}^n(\mathcal{A})\right)_{n\ge 1}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} h\left(\Lambda^n(\mathcal{A}), \Lambda^{n+1}(\mathcal{A})\right) = 0$.

Atunci $\widetilde{\Lambda}(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{\Lambda}^n(\mathcal{A}) = \mathcal{L}$.

Pentru verificarea faptului că, pentru S.A.P.C.F. conexe sunt îndeplinite condiţiile (1), (2), (3) din ipoteza 5.9.6 se procedează astfel:

i)- se deduce că $\exists\, n$ şi $\mathbb{D}_0$ $\mathbb{D}$-parte cu $\Lambda^n(\mathbb{D}_0) \subset \mathbb{D}_0$ ([**44**]-Lema 3.1), de unde, cu lema 5.9.2, se poate presupune că $\Lambda(\mathbb{D}_0) \subset \mathbb{D}_0$. Cum orice $\mathbb{D}$-parte e conţinută într-o $\mathbb{P}$-parte, ce va fi şi ea Λ-invariantă (deoarece Λ "acţionează" şi pe $\mathbb{P}$-părţi), se poate presupune că există $\mathbb{P}_0$ $\mathbb{P}$-parte Λ-invariantă, adică ipoteza (1) din 5.9.6 este verificată;

ii)- pentru $\mathcal{B} \in \mathbb{D} \cap \mathbb{P}_0$, din 5.9.4 rezultă

$$0 < m(\mathcal{B}|\Lambda(\mathcal{B})) \le m(\Lambda^n(\mathcal{B})|\Lambda^{n+1}(\mathcal{B})) \le M(\Lambda^n(\mathcal{B})|\Lambda^{n+1}(\mathcal{B})) \le M(\mathcal{B}|\Lambda(\mathcal{B})),$$

de unde

$$\exists \inf \mathcal{B} := \sup_n m(\Lambda^n(\mathcal{B})|\Lambda^{n+1}(\mathcal{B})),\ \exists \sup \mathcal{B} := \inf_n M(\Lambda^n(\mathcal{B})|\Lambda^{n+1}(\mathcal{B})),$$

deci $\Lambda(\mathrm{Lim}(\mathcal{B})) \subset \mathrm{Lim}(\mathcal{B})$ (Λ continuă, $\mathrm{Lim}(\mathcal{B})$ închisă, etc.) (pentru $\mathrm{Lim}(\mathcal{B})$ a se vedea subsecţiunea 5.3.1); se poate deduce apoi ([**44**]-Lema 3.2) că pentru $\mathbb{P}_0$ $\mathbb{P}$-parte Λ-invariantă (asigurată de (1)) şi $\mathcal{B} \in \mathbb{P}_0$ are loc $0 \notin \mathrm{Lim}(\mathcal{B}) \subset \overline{\mathbb{P}_0}$ şi $\forall\, \mathcal{L} \in \mathrm{Lim}(\mathcal{B})$, $\inf \mathcal{B} \le \inf \mathcal{L} \le \sup \mathcal{L} \le \sup \mathcal{B}$ (iar pentru $\mathcal{L} \in \mathbb{P}_0$ are loc chiar egalitate). Ţinând cont apoi că există un nr. finit de $\mathbb{D}$-părţi, se poate deduce simplu (([**44**]-Prop 3.2)) că pentru orice $\mathbb{D}$-parte $\mathbb{D}_1$ Λ invariantă conţine o $\mathbb{D}$-subparte $\mathbb{D}_0$ Λ^k invariantă (pentru un k) dar cu proprietatea suplimentară că $\exists\, \mathcal{L} \in (\mathrm{Lim}(\mathcal{A}) \cup \mathcal{A}) \cap \mathbb{D}_0$ cu $\mathrm{Lim}(\mathcal{L}) \cap \mathbb{D}_0 \ne \emptyset$. Atunci, cum $\mathbb{D}_0$ este conţinută într-o $\mathbb{P}$-parte $\mathbb{P}_0$ Λ-invariantă, cele de mai sus sunt valabile şi pentru $\mathbb{P}$-părţi, adică $\exists\, \mathcal{L} \in \mathbb{P}_0 \cap \mathrm{Lim}(\mathcal{A})$ pentru $\mathcal{A} \in \mathbb{P}_0$ fixat; deci ipoteza (2) din 5.9.6 este verificată; deasemenea, în acest caz $\inf \mathcal{L} = \inf \mathcal{A} \le \sup \mathcal{A} = \sup \mathcal{L}$;

iii)- pentru verificarea condiţiei (3) din 5.9.6 e suficient să se deducă $\inf \mathcal{L} = \sup \mathcal{L}$; acest lucru se realizează prin ([**44**]-Lema 3.3):

Dacă există $\mathbb{P}_0$ *$\mathbb{P}$-parte Λ-invariantă (lucru probat),* $\mathcal{A} \in \mathbb{P}_0$, $\exists\, \mathcal{L} \in \mathbb{P}_0 \cap \mathrm{Lim}(\mathcal{A})$ *(lucru probat) şi există* $v,\ w \in l(V_0)\backslash \mathrm{Ker}\,\mathbb{P}_0$, $v \in \mathrm{Ker}\left(\underline{\varepsilon}\left(\Lambda^n(\mathcal{L})|\Lambda^{n+1}(\mathcal{L})\right)\right)$, $w \in \mathrm{Ker}\left(\overline{\varepsilon}\left(\Lambda^n(\mathcal{L})|\Lambda^{n+1}(\mathcal{L})\right)\right)$, $\forall\, n \ge 1$ *(funcţii "uniform" extremale), atunci* $\inf \mathcal{L} = \sup \mathcal{L}$, $\widetilde{\Lambda}(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$.

Într-adevăr, din cele de mai sus rezultă $\inf \mathcal{A} = \sup \mathcal{A}$, de aici rezultând

$$\lim_{n\to\infty} h\left(\Lambda^n(\mathcal{A}, \Lambda^{n+1}(\mathcal{A}))\right) = 0,$$

deci ipoteza (3) din 5.9.6 este şi ea verificată.

Aşadar, *5.9.6 "funcţionează" doar în ipoteza existenţei funcţiilor "uniform" extremale v şi w.*

II. Pe scurt, se deduce (secţiunile 4 şi 5 din [**44**]) existenţa funcţiilor "uniform extremale" astfel:

- cum **I** asigură existenţa unei $\mathbb{P}$-părţi $\mathbb{P}_0$ Λ-invariante, a unei $\mathcal{A} \in \mathbb{P}_0$ dar şi existenţa unei $\mathcal{L} \in \mathbb{P}_0 \cap \mathrm{Lim}(\mathcal{A})$, se ajunge în mod firesc la studiul şirurilor de forma $\left(\Psi^n(\mathcal{L})\left(\mathcal{H}^{\Psi^n(\mathcal{L})}_{V_n\backslash V_0} f\right)\right)_n$ pentru $f \in l(V_0)$, sau , cum $\mathcal{H}^{\Psi^n(\mathcal{L})}_{V_n\backslash V_0} f$ $\Psi^n(\mathcal{L})$-armonică, la studiul aplicaţiilor $\mathcal{H}^{\Psi^n(\mathcal{L})}_{V_n\backslash V_0} f \circ \psi^n_p(V_0)$, pentru $p \in V_0$; dacă, pentru $f \in l(V_0)$, se notează $H_n f := \mathcal{H}^{\Psi^n(\mathcal{L})}_{V_n\backslash V_0} f \circ \psi_p$, pentru un $p \in V_0$ "bine ales", se ajunge la noţiunile deja cunoscute de "matrici stocastice" ($\{H_n\}_n$); deasemenea, din **I** se pot presupune următoarele

(L1) $\left(\exists\, \mathbb{D}_0\, \mathbb{D}-\mathrm{parte}\right)\left(\left(\widetilde{\Lambda}^n(\mathcal{L})\right)_n \subset \mathbb{D}_0\right)$;

(L2) $\exists\, \mathcal{L}_0 \in \mathrm{Lim}(\mathcal{L}) \cap \mathbb{D}_0$;

- se demonstrează ergodicitatea slabă a şirului $\{H_n\}_n$ utilizând teorema 3.2 din [**60**] probând întâi mărginirea uniformă a elementelor pozitive ale matricelor ([**44**]-Lema 4.2, Prop.4.1), apoi pozitivitatea structurilor $H_n \circ H_{n+1} \circ \ldots \circ H_{n+m}$, $n,\ m \in \mathbb{N}$, $n \ge 1$ ([**44**]-Lema 4.3, Lema 4.4, Th. 4.1);

- paşii de mai sus (extrem de tehnici, utilizând metode de teoria matricelor nenegative) permit în final deducerea existenţei funcţiilor "uniform extremale" dorite ([**44**]-Prop.5.1):

PROPOZIŢIA 5.9.7. *$\mathbb{D}_0$ $\mathbb{D}$-parte Λ-invariantă şi $\mathcal{A} \in \mathbb{D} \Longrightarrow$*

$$\exists\, v \in \mathrm{Ker}\,\left(\underline{\varepsilon}\left(\Lambda^n(\mathcal{L})|\Lambda^{n+1}(\mathcal{L})\right)\right) \backslash \mathrm{Ker}\,\mathbb{D}_0,\ \forall\, n$$

(şi analog pentru w ...).

III. **I** şi **II** permit demonstrarea următorului rezultat (dedus de R. Peirone în [**55**]), din care va rezulta în final teorema 5.9.1:

TEOREMA 5.9.8. *([**44**]-Th. 5.1) Dacă $\mathbb{D}_0$ $\mathbb{D}$-parte Λ-invariantă şi $\mathcal{A} \in \mathbb{D}$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
(1) $\Big(\exists\, m \in \mathbb{N}^*\Big)\Big(\exists \lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{\Lambda}^{nm}(\mathcal{A}) =: \mathcal{F} \in \mathbb{D}_0\Big)$;
(2) $\mathbb{D}_0 \cap \mathrm{Lim}(\mathcal{A}) \neq \emptyset$.

Într-adevăr, (1)$\Rightarrow$(2) este trivială. Pentru (2)$\Rightarrow$(1), din $\mathbb{D}_0 \cap \mathrm{Lim}(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ rezultă că $m\left(\Lambda^n(\mathcal{A})|\Lambda^{n+1}(\mathcal{A})\right) = \inf \mathcal{L}$. Se poate aplica atunci 5.9.7 pentru a deduce existenţa funcţiilor "uniform extremale" v şi w, deci, cu **I**-iii) $\inf \mathcal{A} = \sup \mathcal{A}$, de unde $\mathcal{A}$ punct fix pentru $\widetilde{\Lambda}$, apoi, cu 5.9.6 rezultă aserţiunea (1).

IV. Se poate demonstra uşor teorema 5.9.1:

- dacă $\mathbb{D}_0$ satisface (L1) şi (L2), din 5.9.8 rezultă concluzia (1), deci $\left(\widetilde{\Lambda}^{nm}(\mathcal{B})\right)_n$ şir $h_{\mathbb{D}}$-mărginit, de unde, deoarece Λ continuă, proprietatea se va extinde la întreaga orbită, adică are loc situaţia (1);
- dacă $\mathbb{D}_0$ nu satisface (L1) sau (L2), din **I**-ii) rezultă că $\exists\, \mathbb{D}_1$ $\mathbb{D}$-subparte a lui $\mathbb{D}_0$, $\mathbb{D}_1$ satisfăcând (L1) şi (L2); atunci, din 5.9.8 are loc situaţia (2).

În rezumat, teorema 5.9.1 dar şi efortul găsirii funcţiilor "uniform extremale" v şi w (din [44]) sunt o rafinare şi în acelaşi timp o generalizare a rezultatului principal şi a metodei din subsecţiunea 5.7.2 ([40]).

5.9.6. Testul de "scurtcircuitare". Din teorema 5.9.1 V.Metz deduce (cu o demonstraţie foarte tehnică, a se vedea secţiunea 6 din [**44**]) următorul "test de scurtcircuitare", valabil pentru structuri $\mathcal{L}$ S.A.P.C.F. conexe arbitrare şi $\mathbf{r} := (r_1, \ldots, r_N)$ Θ-invariant (Θ grup de simetrie, $\mathbb{D} := \mathbb{D}_\Theta$, $\mathbb{P} := \mathbb{P}_\Theta$ conurile aferente):

TEOREMA 5.9.9. *(Testul de scurtcircuitare)([**44**]-pag.26) Se presupune că*

- *$\mathbb{D}_0 \subset \mathbb{P}^\circ$ $\mathbb{D}$-parte Λ-invariantă;*
- *$\mathbb{D}_1, \ldots, \mathbb{D}_r$ $\mathbb{D}$-părţile Λ-invariante din $\partial\mathbb{P} \cap \overline{\mathbb{D}_0}$;*
- *forma Dirichlet $\mathcal{M}^{(i)}$ asociată cu matricea de conductanţă "cu valori 1 pe muchille lui $\Gamma(\mathbb{D}_i)$", $1 \le i \le r$;*
- *$\exists\, \beta > 0$ şi $\forall\, 1 \le i \le r$, $\exists\, Z_i$ componentă conexă a lui $\Gamma(\mathbb{D}_i)$ astfel încât $\forall\, \mathcal{R} \in \mathbb{D}_0$, $\forall\, 1 \le i \le r$ are loc*

$$M\left(\Lambda\left(\mathcal{M}^{(i)}\right)|\mathcal{M}^{(i)}\right) < \beta \le \frac{R_{\mathcal{R}+\infty\mathcal{M}^{(i)}}(Z_i, V_0\backslash Z_i)}{R_{\mathcal{R}_1+\infty\mathcal{M}_1^{(i)}}(Z_i, V_0\backslash Z_i)},$$

unde $R_{\mathcal{A}}(H, L)$ este rezistenţa efectivă dintre H şi L relativ la $\mathcal{A}$.

Atunci există un punct fix al lui $\widetilde{\Lambda}$ în $\mathbb{D}_0$.

În cazul găsirii unui $\beta \ge 1$, condiţia din stânga este trivial verificată deorece $\gamma < 1$ (observaţia 5.9.3-(3)).

Pe exemple concrete, acţiunea lui Λ pe $\mathbb{D}$-părţi se va calcula cu observaţia 5.9.3-(2).

Acest test detectează tot formele proprii ireductibile. În [**46**] V.Metz propune o serie de rafinări, bazate în esenţă tot pe ideea de demonstraţie din testul de scurtcircuitare (testul "cu funcţii", testul "lui Sabot", testul "lui Nussbaum", etc.) În continuare se prezintă pe scurt aceste idei. Pentru aceasta este nevoie de o prezentare riguroasă a "scurtcircuitării":

LEMA 5.9.10. *([**46**]-Lema 17) Se consideră $P := \{C_1, \ldots, C_l\}$ partiţie a lui V_1 şi $g : V_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ cu $g_{|C_i} =ct$, $i = \overline{1,l}$. Se defineşte $\overline{g} : P \longrightarrow \mathbb{R}$, $\overline{g}(C_i) := g(x)$, $x \in C_i$, $i = \overline{1,l}$. Se consideră $\mathcal{A} \in \mathbb{P}$, deci $\mathcal{A}_1 = \Psi(\mathcal{A}) \in \mathbb{P}_1$ şi $c_{\mathcal{A}_1} : V_1 \times V_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ matricea de conductanţă asociată lui $\mathcal{A}_1$.*

Se poate defini atunci $\overline{c_{\mathcal{A}_1}} : P \times P \longrightarrow \mathbb{R}$, $\overline{c_{\mathcal{A}_1}}(C_i, C_j) := \sum\limits_{p \in C_i, q \in C_j} c_{\mathcal{A}_1}(p, q)$ pentru $i \neq j$ şi $\overline{c_{\mathcal{A}_1}} := 0$ pentru $i = j$. Are loc atunci

$$\mathcal{A}_1(g, g) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{l} (\overline{g}(C_i) - \overline{g}(C_j))^2 \overline{c_{\mathcal{A}_1}}(C_i, C_j) =: \overline{\mathcal{A}_1}(\overline{g}),$$

$\overline{\mathcal{A}_1}$ formă biliniară, simetrică pozitiv semidefinită conservativă pe P (adică în $\mathbb{P}(P)$) cu domeniul $\mathbb{R}^P$.

OBSERVAŢIA 5.9.11. ([**46**]-pag.18) 1. Pentru $\mathcal{B} \in \mathbb{D} \backslash \{0\}$, $\mathcal{D} \in \mathbb{B}$ cu $\mathcal{B} + \mathcal{D} \in \mathbb{D}$ şi $f : V_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, evident $(\mathcal{D}_1 + n\mathcal{B}_1)(f) \nearrow \infty$ pentru $\mathcal{B}_1(f) > 0$, iar $(\mathcal{D}_1 + n\mathcal{B}_1)(f) = \mathcal{D}_1(f)$ pentru $\mathcal{B}_1(f) = 0$, i.e. f =ct. pe $\mathcal{B}_1$ componentele conexe. Deci, se poate defini $(\mathcal{D}_1 + \infty\mathcal{B}_1)(f) := \mathcal{D}_1(f)$, pentru $f \in \mathrm{Ker}\mathcal{B}_1$, $(\mathcal{D}_1 + \infty\mathcal{B}_1)(f) := \infty$, pentru $f \notin \mathrm{Ker}\mathcal{B}_1$.

2. Considerând în lema 5.9.10 $\mathcal{A}_1 = \mathcal{D}_1 + n\mathcal{B}_1$ şi $g \in \mathrm{Ker}\mathcal{B}_1$, se obţine

$$\mathcal{A}_1(g) = \mathcal{D}_1(g) = (\mathcal{D}_1 + \infty\mathcal{B}_1)(g) = \overline{\mathcal{A}_1}(\overline{g}),$$

adică, prin "scurtcircuitarea muchiilor lui $\mathcal{B}_1$" "energia nu se modifică".

DEFINIŢIA 5.9.12. Dacă $\mathbb{P}^\circ$ este Λ-invariantă iar $\mathbb{P}_i$ este o altă $\mathbb{P}$-parte Λ-invariantă, care intersectează $\mathbb{D}$, atunci se spune că $\mathbb{P}_i$ *satisface condiţia (*)* $\Longleftrightarrow$

$$\Big(\exists\, W \; ||\cdot|| - \text{vecinătate a lui } \mathbb{P}_i\Big)\Big(\forall\, n\Big)\Big(\forall\, \Big\{\mathcal{C}, \widetilde{\Lambda}(\mathcal{C}), \ldots, \widetilde{\Lambda}^n(\mathcal{C})\Big\} \subset W \cap \mathbb{P}^\circ \cap \mathbb{D}\}\Big)$$
$$\Big(\exists\, f \in \mathrm{Im}\mathbb{P}_i \backslash \{0\}\Big)\Big(\exists\, g \in \mathrm{Ker}\mathbb{P}_i \backslash \mathrm{Ker}\mathbb{P}^\circ\Big)\Big(\frac{\Lambda^n(\mathcal{C})(g)}{\Lambda^n(\mathcal{C})(f)} \geq \frac{\mathcal{C}(g)}{\mathcal{C}(f)}\Big).$$

Uzând de 5.3.4, 5.3.5 dar şi de argumente foarte tehnice utilizate şi în subsecţiunile anterioare, Volker Metz deduce următorul rezultat foarte puternic privind existenţa:

TEOREMA 5.9.13. *(*[**46**]*-Th.25) Se presupune că $\mathbb{D}^\circ$ este Λ-invariantă. Pentru fiecare $\mathbb{D}$-parte Λ-invariantă $\mathbb{D}_i \subset \partial\mathbb{P}$ (ce conţine o formă proprie ε_i (din 5.3.3) corespunzătoare unei valori proprii λ_i) se consideră $\mathbb{P}$-părţile $\mathbb{P}_i$ corespunzătoare care le conţin. Dacă fiecare din aceste $\mathbb{P}$-părţi $\mathbb{P}_i$ satisfac condiţia (*), atunci există o formă proprie în $\mathbb{P}^\circ \cap \mathbb{D}$.*

Pentru a testa că fiecare din părţile $\mathbb{P}_i$ din teorema de mai sus satisfac condiţia (*) se utilizează, alternativ, unul din "testele" următoare:

COROLARUL 5.9.14. *(Testul "cu funcţii",* [**46**]*-Cor.27) Se presupune că $\mathbb{D}$-părţile $\mathbb{D}^\circ$ şi $\mathbb{D}_i \subset \partial\mathbb{P}$ sunt Λ-invariante, $\mathbb{D}_i$ conţine o formă proprie ε_i corespunzătoare unei valori proprii λ_i iar $\mathbb{P}_i$ este $\mathbb{P}$-partea corespunzătoare ce o conţine. Dacă $\Big(\exists\, W \; ||\cdot|| - \text{vecinătate a lui } \mathbb{P}_1\Big)\Big(\forall\, \mathcal{C} \in W \cap \mathbb{P}^\circ \cap \mathbb{D}\}\Big)\Big(\exists\, f \in \mathrm{Im}\mathbb{P}_1 \backslash \{0\}\Big)$ $\Big(\exists\, g \in \mathrm{Ker}\mathbb{P}_1 \backslash \mathrm{Ker}\mathbb{P}^\circ\Big)\Big(\frac{\Lambda(\mathcal{C})}{\mathcal{C}}(f) \leq \frac{\Lambda(\mathcal{C})}{\mathcal{C}}(g)\Big)$, atunci $\mathbb{P}_i$ satisface condiţia (*).*

COROLARUL 5.9.15. *(Testul lui Sabot,* [**46**]*-Cor.28) Se presupune că $\mathbb{D}$-părţile $\mathbb{D}^\circ$ şi $\mathbb{D}_i \subset \partial\mathbb{P}$ sunt Λ-invariante, $\mathbb{D}_i$ conţine o formă proprie ε_i corespunzătoare unei valori proprii λ_i iar $\mathbb{P}_i$ este $\mathbb{P}$-partea corespunzătoare ce o conţine. Dacă $\Lambda(\infty\varepsilon + \cdot\,)$ are o valoare proprie $\lambda_\infty > \lambda_i$, atunci $\mathbb{P}_i$ satisface condiţia (*) cu inegaliate strictă.*

Aceste două teste plus teorema de existenţă de mai sus vor fi utilizate pentru a deduce existenţa formelor proprii pe exemple concrete de fractali "nonested" (proveniţi din fractali cuib dar cu grupuri de simetrie mai sărace decât grupul de simetrie maximal).

CAPITOLUL 6

Renormalizare pe clase particulare de fractali. H-conuri şi forme rezistive

În acest capitol se prezintă exemple concrete de renormalizare a unor structuri S.A.P.C.F. conexe: renormalizarea fulgului lui Vicsek (exemplul 2.3.8), fulgului lui Lindstrom (exemplul 2.3.7), a "abc-triunghiului lui Sierpinski", a "triunghiului lui Sierpinski afin" (exemplul 2.3.6), etc.; se va încerca întâi deducerea existenţei formelor (operatorilor) proprii ireductibile (ireductibili), apoi detreminarea efectivă, în special pe cazuri de F.C.A., a acestora, dar şi a celor reductibile. Pentru deducerea existenţei *am dezvoltat o metodă propie, descrisă mai jos.* Problema aproximării formelor proprii este abordată, exemplificându-se rezultatul fundamental 5.8.5 pe cazuri concrete de F.C.A., uzând de un program Java. Cu ajutorul acestui program se vor putea determina, cu o eroare dată şi operatorii proprii pe cazuri de fractali cu frontiera mai complicată.

Metoda algoritmică de decizie a existenţei formelor proprii ireductibile pentru funcţia de renormalizare Λ *a unei S.A.P.C.F. conexe (nu neapărat F.C.A., deci cu grup de simetrie mai sărac decât cel "maximal") se bazează pe următoarele consideraţii (prezentate în capitolul precedent)*:

– valorile proprii ale lui Λ sunt unice pe $\mathbb{P}$-părţi (propoziţia 5.2.5);

– există o formă proprie în fiecare subcon ($\mathbb{D}$-parte) închis, convex al lui $\mathbb{D}$ (propoziţia 5.3.3);

– orice $\mathbb{D}$-parte e conţinută într-o $\mathbb{P}$-parte (subsecţiunea 5.9.2);

– Λ "acţionează" pe $\mathbb{D}$-părţi şi pe $\mathbb{P}$-părţi (subsecţiunea 5.9.4);

– doar $\mathbb{D}$-părţile Λ-invariante conţin forme proprii. $\mathbb{D}$-părţile Λ-invariante se pot obţine "grafic" via observaţia 5.9.3-(2);

– dacă $\mathbb{D}^\circ$ este Λ-invariantă, iar $\mathbb{D}_i$ sunt $\mathbb{D}$-părţile Λ-invariante din $\partial\mathbb{P}$, atunci se va încerca obţinerea existenţei formelor proprii ireductibile cu teorema 5.9.13, via 5.9.14 şi 5.9.15.

În secţiunea 6.1, teoremele 6.1.1, 6.1.3 şi demonstraţiile lor constituie o sinteză a rezultatelor obţinute de V. Metz în [**38**]-[**41**], [**44**], [**46**] *privind renormalizarea fulgului lui Vicsek ("non nested" şi "nested"); contribuţia personală este prezentarea lor într-o formă compactă, algoritmizată, conform metodei amintite şi uzând de numeroase figuri edificatoare; în observaţia 6.1.2 am determinat "o inversă" a transformării* $X - \boxtimes$ *(lema 4.1.21), ceea ce a permis determinarea efectivă a funcţiei de renormalizare pe acest exemplu de fractal cu frontiera formată din* 4 *puncte.*

În secţiunea 6.2, teorema 6.2.1 afirmă existenţa formelor proprii ireductibile $\mathcal{G}_s$ *invariante pentru fulgul lui Lindstrom; rezultatul este cunoscut (demonstrat de Lindstrom în* [**35**], *pe clasa F.C.), dar demonstraţia, bazată pe metoda algoritmică descrisă, este originală, fiind diferită de cea a lui Linstrom, probabilistă.*

În secţiunea 6.3 se aminteşte exemplul numit "abc-triunghiul lui Sierpinski" ("abc-TS") (considerat pentru prima dată în [**26**]*). Teorema 6.3.1 dă o condiţie necesară pentru existenţa formelor proprii ireductibile pentru "abc-TS" şi constituie o generalizare a rezultatului 8.2 din* [**46**] *iar demonstraţia este originală. În observaţia 6.3.2 am determinat efectiv funcţia de renormalizare pe un caz particular de "abc-TS", lucru posibil deoarece avem de-a face cu un fractal cu frontiera formată cu* 3 *puncte, transformările* $\Delta - Y$ *şi* $Y - \Delta$ *putându-se utiliza cu succes.*

În secţiunea 6.4, propoziţiile 6.4.1 şi 6.4.2 sunt originale. 6.4.1 dă o condiţie necesară şi suficientă pentru existenţa operatorilor proprii $\mathcal{G}_s$*-invarianţi în cazul triunghiul lui Sierpinski afin (TSA) - I, iar 6.4.2 determină operatorul propriu* $\mathcal{G}_s$*-invariant şi valoarea proprie asociată în cazul triunghiul lui Sierpinski afin (TSA) - II.*

În secţiunea 6.5, cu ajutorul unui program Java am verificat validitatea rezultatului 5.8.5 privind aproximarea formelor proprii pentru cazul fractalilor F.C.A., anume pentru TSA-I şi TSA-II (subsecţiunea 6.5.1). Formula (4.12) şi teorema 4.1.16 sunt utilizate pentru a implementa în program funcţia de renormalizare. Cu ajutorul programului Java amintit am determinat efectiv valoarea proprie γ *pentru conul formelor* $\mathcal{G}_s$*-invariante ireductibile şi operatorul propriu ireductibil (unic modulo multiplicarea cu o constantă pozitivă) în cazul fulgul lui Lindstrom şi a fractalului numit Pentakun (subsecţiunile 6.5.2, 6.5.3). Acestea erau imposibil de calculat fără asistenţă computerizată. Rezultatele originale din secţiunile 6.4 şi 6.5 sunt trimise spre publicare (*[**52**] *şi* [**64**]*).*

În secţiunea 6.6 se reaminteşte definiţia mai generală a unei forme rezistive, aşa cum a fost propusă de către domnii Profesori N. Boboc şi Gh. Bucur (în [**7**]*). Pornind de la un astfel de obiect se poate* *"dezvolta" o teorie a potenţialului ataşată (a se vedea* [**7**] *şi* [**6**]*). În spiritul celor de mai sus se prezintă un "Criteriu de semisaturare" relativ la conul funcţiilor excesive în raport cu forma rezistivă dată. Propoziţia 6.6.6 şi teorema 6.6.8 sunt rezultate originale şi au apărut în* [**6**].

6.1. Renormalizarea fulgului lui Vicsek (FV)

.

Se reaminteşte exemplul 2.3.8 (fulgul lui Vicsek): fie a_1, a_2, a_3, a_4 vârfurile unui pătrat şi similitudinile $\psi_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\psi_i(x) = a_i + \frac{1}{3}(x - a_i)$, $1 \leq i \leq 5$ ($a_5 = \frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$ - centrul pătratului). Atractorul F al SIF-ului $\left\{(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|); \{\psi_i, r_i\}_{i=\overline{1,5}}\right\}$, cu $r_i = 1/3$ este ilustrat în figura 2.12. Dacă se notează $\mathcal{L}_{FV} := \left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,5}}\right\}$ (s-au notat resticţiile ψ_i-urilor la F tot cu ψ_i) şi se consideră grupul de simetrie "maximal" $\mathcal{G}_s$, atunci s-a demonstrat în 2.3.8 că $\mathcal{L}_{FV}$ este un fractal "cuib" relativ la $\mathcal{G}_s$.

6.1.1. Renormalizarea fulgului lui Vicsek (FV) "non nested". Se consideră grupul de simetrie generat doar de reflecţiile relativ la dreptele mediatoare ale diagonalelor pătratului. Relativ la acest grup $\mathcal{L}_{FV} := \left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,5}}\right\}$ este o S.A.P.C.F. dar nu mai este un F.C.A. şi el va fi denumit *fulgul lui Vicsek (FV) "non nested"*.

Următoarea teoremă constituie o sinteză a rezultatelor obţinute de V. Metz în [**38**]-[**41**], [**46**] *privind renormalizarea fulgului lui Vicsek "non nested". În demonstraţie, am pus aceste rezultate sub o formă compactă, algoritmizată, conform metodei amintite şi am realizat numeroase figuri edificatoare; în observaţia 6.1.2 am determinat "o inversă" a transformării $X - \boxtimes$ şi am arătat că este posibilă dezvoltarea unor calcule simbolice în MATLAB 2011 ce permit determinarea efectivă a funcţiei de renormalizare; acest lucru este dificil de realizat fără asistenţă computerizată chiar şi pe acest exemplu de fractal cu frontiera formată din* 4 *puncte.*

Teorema 6.1.1. *Fie fulgul lui Vicsek "non nested" $\mathcal{L}_{FV}$ (cu grupul de simetrie $\Theta =< g_{a_1 a_3}, g_{a_2 a_4} >$) şi sistemul de ponderi $\mathbf{r} := (r_1, r_2, r_3, r_4, r_5)$ cu $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5 =: r > 0$. Atunci $\mathbf{r}$ este Θ invariant şi există forme proprii ireductibile Θ invariante (adică din $\mathbb{D}_\Theta \cap \mathbb{P}^\circ_\Theta$) pentru funcţia de renormalizare $\Lambda_{\mathbf{r}}$ asociată lui $\mathcal{L}_{FV}$.*

Demonstraţie. Evident Θ-orbitele sunt date de $O_1 := \{\{a_1, a_2\}, \{a_2, a_3\}, \{a_3, a_4\}, \{a_4, a_1\}\}$, $O_2 := \{\{a_1, a_3\}\}$, $O_3 := \{\{a_2, a_4\}\}$. Matricele de conductanţă corespunzătoare orbitelor O_1, O_2, O_3 sunt

$$c_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, c_0^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, c_0^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

iar o matrice de conductanţă arbitrară este dată de $c = \begin{pmatrix} 0 & a & c & a \\ a & 0 & a & b \\ c & a & 0 & a \\ a & b & a & 0 \end{pmatrix}$, a, b, $c \geq 0$. Matricele operatorilor asociaţi lui $c_0^{(1)}$, $c_0^{(2)}$, $c_0^{(3)}$ sunt următoarele

$$E_1 = E(1,0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, E_2 = E(0,1,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$E_3 = E(0,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Un operator arbitrar (cu (L.1), (L.2)$'$ şi (L.3)) Θ-invariant are matricea dată de

$$E = E(a,b,c) = \begin{pmatrix} -2a-c & a & c & a \\ a & -2a-b & a & b \\ c & a & -2a-c & a \\ a & b & a & -2a-b \end{pmatrix}, a,\ b,\ c \geq 0.$$

Conul $\mathbb{P} := \mathbb{P}_\Theta$ al formelor cu (D.F.1) şi (D.F.2)$'$ se poate determina dacă se cunosc valorile proprii pentru $E(a,b,c)$. Rezolvând ecuaţia $\det(E(a,b,c) - \lambda I_4) = 0$ se obţine

$$\lambda(4a + \lambda)[2(a+b) + \lambda][2(a+c) + \lambda] = 0.$$

Deci valorile proprii sunt 0, $-4a$, $-2(a+b)$, $-2(a+c)$. $\varepsilon = \varepsilon_{E(a,b,c)}$ este pozitiv semidefinită $\Longleftrightarrow$ $E(a,b,c)$ negativ semidefinită $\Longleftrightarrow$ valorile proprii sunt negative, deci:

$$\mathbb{P} := \mathbb{P}_\Theta \simeq \left\{(a,b,c) \,\middle|\, a \geq 0,\ a+b \geq 0,\ a+c \geq 0\right\}.$$

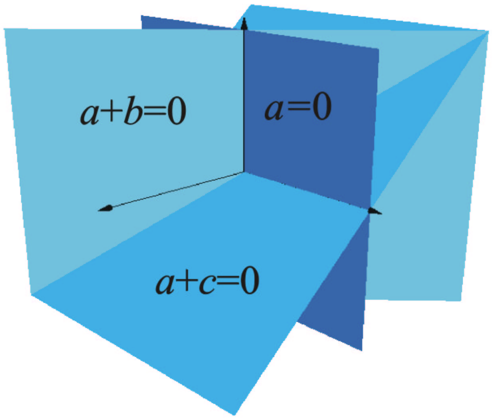

FIGURA 6.1. Conul $\mathbb{P}$ pentru FV ”nonnested”

(figura 6.1). $\mathbb{P}$-părţile sunt următoarele:

- $\mathbb{P}_1 := \mathbb{P}^\circ \simeq \{(a,b,c) \,|\, a>0,\ a+b>0,\ a+c>0\}$.
- $\mathbb{P}_2 \simeq \{(a,b,c) \,|\, a=0,\ a+b>0,\ a+c>0\} = \{0\}\times(0,\infty)^2$.
- $\mathbb{P}_3 \simeq \{(a,b,c) \,|\, a>0,\ a+b=0,\ a+c>0\}$.
- $\mathbb{P}_4 \simeq \{(a,b,c) \,|\, a>0,\ a+b>0,\ a+c=0\}$.
- $\mathbb{P}_5 \simeq \{(a,b,c) \,|\, a>0,\ a+b=0,\ a+c=0\}$.
- $\mathbb{P}_6 \simeq \{(a,b,c) \,|\, a=0,\ a+b>0,\ a+c=0\} = \{0\}\times(0,\infty)\times\{0\}$.
- $\mathbb{P}_7 \simeq \{(a,b,c) \,|\, a=0,\ a+b=0,\ a+c>0\} = \{0\}\times\{0\}\times(0,\infty)$.

$\mathbb{P}_1$ este chiar interiorul conului $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}_2$, $\mathbb{P}_3$, $\mathbb{P}_4$ sunt ”feţele” (deschise) ale lui $\mathbb{P}$, iar $\mathbb{P}_5$, $\mathbb{P}_6$, $\mathbb{P}_7$ sunt razele extremale ale lui $\mathbb{P}$ (con poliedral pe acest exemplu).

Conul formelor Dirichlet corespunzătoare operatorilor $E(a,b,c)$ este dat de

$$\mathbb{D} := \mathbb{D}_\Theta = \left\{\varepsilon \,\middle|\, \varepsilon = a\varepsilon_0^{(1)} + b\varepsilon_0^{(2)} + c\varepsilon_0^{(3)}, a,b,c \geq 0\right\},$$

unde $\varepsilon_0^{(1)}$, $\varepsilon_0^{(2)}$, $\varepsilon_0^{(3)}$ sunt formele corespunzătoare matricelor de conductanţă $c_0^{(1)}$, $c_0^{(2)}$, $c_0^{(3)}$, respectiv operatorilor E_1, E_2, E_3. Se observă că $\mathbb{D} \simeq \mathbb{R}_+^3$.

$\mathbb{D}$-părţile şi grafurile asociate (conform subsecţiunii 5.9.1) sunt date de:

- $\mathbb{D}_{(1,1,1)} := \mathbb{D}^\circ \simeq \{E(a,b,c) \,|\, a,b,c>0\} \simeq (0,\infty)^3$. Graful corespunzător $\Gamma(\mathbb{D}_{(1,1,1)})$ este redat de figura 6.2-(1).
- $\mathbb{D}_{(0,1,1)} \simeq \{E(0,b,c) \,|\, b,c>0\} \simeq \{0\}\times(0,\infty)^2 \simeq \mathbb{P}_2$. Graful corespunzător $\Gamma(\mathbb{D}_{(0,1,1)})$ este redat de figura 6.2-(2).
- $\mathbb{D}_{(1,0,1)} \simeq \{E(a,0,c) \,|\, a,c>0\} \simeq (0,\infty)\times\{0\}\times(0,\infty)$. Graful corespunzător $\Gamma(\mathbb{D}_{(1,0,1)})$ este redat de figura 6.2-(3).
- $\mathbb{D}_{(1,1,0)} \simeq \{E(a,b,0) \,|\, a,b>0\} \simeq (0,\infty)^2\times\{0\}$. Graful corespunzător $\Gamma(\mathbb{D}_{(1,1,0)})$ este redat de figura 6.2-(4).
- $\mathbb{D}_{(1,0,0)} \simeq \{E(a,0,0) \,|\, a>0\} \simeq (0,\infty)\times\{0\}\times\{0\}$. Graful corespunzător $\Gamma(\mathbb{D}_{(1,0,0)})$ este redat de figura 6.2-(5).
- $\mathbb{D}_{(0,1,0)} \simeq \{E(0,b,0) \,|\, b>0\} \simeq \{0\}\times(0,\infty)\times\{0\} \simeq \mathbb{P}_6$. Graful corespunzător $\Gamma(\mathbb{D}_{(0,1,0)})$ este redat de figura 6.2-(6).
- $\mathbb{D}_{(0,0,1)} \simeq \{E(0,0,c) \,|\, c>0\} \simeq \{0\}\times\{0\}\times(0,\infty) \simeq \mathbb{P}_7$. Graful corespunzător $\Gamma(\mathbb{D}_{(0,0,1)})$ este redat de figura 6.2-(7).

$\mathbb{D}_{(1,1,1)}$ este chiar interiorul conului $\mathbb{D}$, $\mathbb{D}_{(0,1,1)}$, $\mathbb{D}_{(1,0,1)}$, $\mathbb{D}_{(1,1,0)}$ sunt ”feţele” (deschise) ale lui $\mathbb{D}$, iar $\mathbb{D}_{(1,0,0)}$, $\mathbb{D}_{(0,1,0)}$, $\mathbb{D}_{(0,0,1)}$ sunt ”semiaxele pozitive”, i.e. razele extremale ale lui $\mathbb{D}$ (întotdeauna con poliedral). Grafurile $\Gamma(\mathbb{D}_{(1,0,1)})$ şi $\Gamma(\mathbb{D}_{(1,1,0)})$ sunt practic similare, ca şi $\Gamma(\mathbb{D}_{(0,1,0)})$ şi $\Gamma(\mathbb{D}_{(0,0,1)})$. (1) este graful complet, iar (5), (6), (7) sunt grafurile corespunzătoare orbitelor O_1, O_2, O_3.

Evident relaţiile între $\mathbb{D}$-părţi şi $\mathbb{P}$-părţi sunt: $\mathbb{D}^\circ$, $\mathbb{D}_{(1,1,0)}$, $\mathbb{D}_{(1,0,1)}$, $\mathbb{D}_{(1,0,0)} \subset \mathbb{P}^\circ$; $\mathbb{D}_{(0,1,1)} = \mathbb{P}_2$, $\mathbb{D}_{(0,1,0)} = \mathbb{P}_6$, $\mathbb{D}_{(0,0,1)} = \mathbb{P}_7$.

Un sistem de ponderi $\mathbf{r} := (r_1,r_2,r_3,r_4,r_5)$ este Θ-invariant $\iff r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5$. Pt. simplitate se va considera $\mathbf{r} := (1,1,1,1,1)$.

Acţiunea lui Λ pe $\mathbb{D}$-părţi (din observaţia 5.9.3-(2)) este următoarea:

- $\Lambda(\mathbb{D}_{(1,1,1)}) \subset \mathbb{D}_{(1,1,1)}$ (figura 6.3-(1); evident orice două puncte din V_0 se pot uni printr-un drum din $\Gamma(\Psi(\mathbb{D}_{(1,1,1)}))$ cu puncte din $V_1 \backslash V_0$);

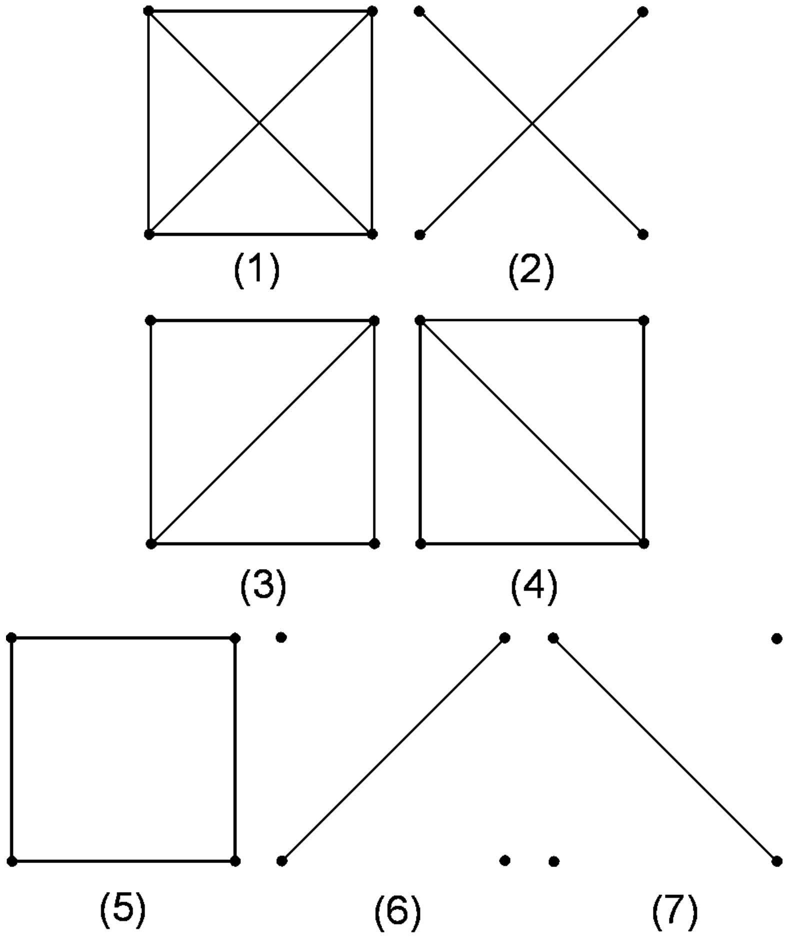

FIGURA 6.2. Grafurile $\Gamma(\mathbb{D}.)$ pentru FV "nonnested"

- $\Lambda(\mathbb{D}_{(0,1,1)}) \subset \mathbb{D}_{(0,1,1)}$ (figura 6.3-(2); a_1 şi a_3 se pot uni printr-un drum din $\Gamma(\Psi(\mathbb{D}_{(0,1,1)}))$ cu puncte din $V_1 \backslash V_0$; la fel a_2 şi a_4; a_1 şi a_4 - punctele încercuite - nu se pot uni printr-un drum din $\Gamma(\Psi(\mathbb{D}_{(0,1,1)}))$ cu puncte din $V_1 \backslash V_0$; la fel a_1 şi a_2, a_2 şi a_3, a_3 şi a_4);
- $\Lambda(\mathbb{D}_{(1,1,0)}) \subset \mathbb{D}_{(1,1,1)}$ (figura 6.3-(3); orice două puncte din V_0 se pot uni printr-un drum din $\Gamma(\Psi(\mathbb{D}_{(1,1,0)}))$ cu puncte din $V_1 \backslash V_0$); analog $\Lambda(\mathbb{D}_{(1,0,1)}) \subset \mathbb{D}_{(1,1,1)}$;
- $\Lambda(\mathbb{D}_{(1,0,0)}) \subset \mathbb{D}_{(1,1,1)}$ (figura 6.3-(4); orice două puncte din V_0 se pot uni printr-un drum din $\Gamma(\Psi(\mathbb{D}_{(1,0,0)}))$ cu puncte din $V_1 \backslash V_0$);
- $\Lambda(\mathbb{D}_{(0,1,0)}) \subset \mathbb{D}_{(0,1,0)}$ (figura 6.3-(5); doar a_1 şi a_3 se pot uni printr-un drum din $\Gamma(\Psi(\mathbb{D}_{(0,1,0)}))$ cu puncte din $V_1 \backslash V_0$; nici o altă pereche de puncte din V_0 nu mai satisface această condiţie); analog $\Lambda(\mathbb{D}_{(0,0,1)}) \subset \mathbb{D}_{(0,0,1)}$.

Aşadar $\mathbb{D}_{(1,1,1)}, \mathbb{D}_{(0,1,1)}, \mathbb{D}_{(0,1,0)}, \mathbb{D}_{(0,0,1)}$ sunt $\mathbb{D}$-părţile Λ-invariante. Singura $\mathbb{D}$-parte Λ-invariantă inclusă în $\mathbb{P}^\circ$ este $\mathbb{D}_{(1,1,1)} = \mathbb{D}^\circ$.

Este fundamentală determinarea valorilor proprii corespunzătoare $\mathbb{D}$-părţilor Λ-invariante. Astfel:

- valoarea proprie pentru $\mathbb{D}_{(0,1,0)}$ este evident $\lambda = 1/3$; analog valoarea proprie pentru $\mathbb{D}_{(0,0,1)}$ şi $\mathbb{D}_{(0,1,1)}$ este $\lambda = 1/3$ (a se vedea figura 6.4, unde se aplică legea lui Ohm, conductanţele finale pe diagonalele "mari" fiind 1/3 din valorile iniţiale);
- valoarea proprie pentru $\mathbb{D}_{(1,1,1)}$ este tot $\lambda = 1/3$ (a se vedea observaţia 6.1.2-**II** şi figura 6.6).

Pentru a demonstra existenţa formelor proprii pentru FV "nonnested", se aplică testul lui Sabot 5.9.15 şi testul cu funcţii 5.9.14 pentru $\mathbb{D}$-părţile Λ-invariante $\mathbb{D}_{(0,1,1)}, \mathbb{D}_{(0,1,0)}, \mathbb{D}_{(0,0,1)}$:

a) Pentru $\mathbb{D}_{(0,1,1)}$ se poate aplica testul lui Sabot: se consideră $\mathcal{E}$ formă proprie pentru valoarea proprie $\lambda = 1/3$ şi se calculează "grafic" λ_∞ (valoarea proprie a lui $\Lambda(\infty\mathcal{E} + \cdot)$) ca în figura 6.5: $\Gamma(\Psi(\infty\mathbb{D}_{(0,1,1)} + \mathbb{D}^\circ))$ este figurat în (1) cu diagonalele punctate, cu semnificaţia unor conductanţe infinite, iar laturile "pline" semnificând conductanţe finite. Punctele "mari" sunt punctele lui V_0. Prin aplicarea lemei 5.9.10 se identifică vârfurile noii reţele "scurtcircuitate" (prin "colapsarea" muchiilor punctate), anume punctele "mari" din (2). Energia noii reţele este aceeaşi ("=" între două reţele înseamnă energii identice). Cum însă buclele nu contribuie la energia totală, pot fi omise, deci în final se obţine reţeaua $\Gamma(\infty\mathbb{D}_{(0,1,1)} + \mathbb{D}^\circ)$ (în (3)), cu aceeaşi energie ca cea iniţială. Aşadar $\lambda_\infty = 1$. Cum $r_i < 1$ (din 4.5.4), orice valoare proprie este subunitară. Deci *testul lui Sabot este pozitiv pentru* $\mathbb{D}_{(1,1,1)}$.

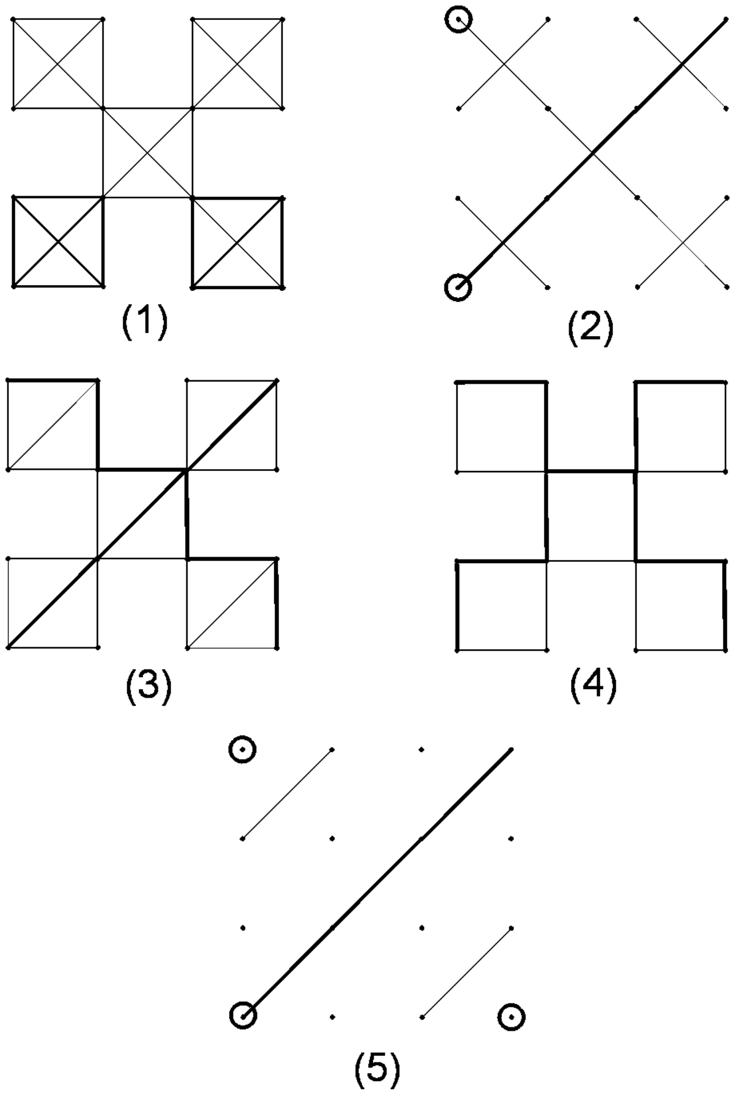

FIGURA 6.3. $\mathbb{D}$-părţile Λ-invariante pentru FV "nonnested" determinate prin metodă grafică

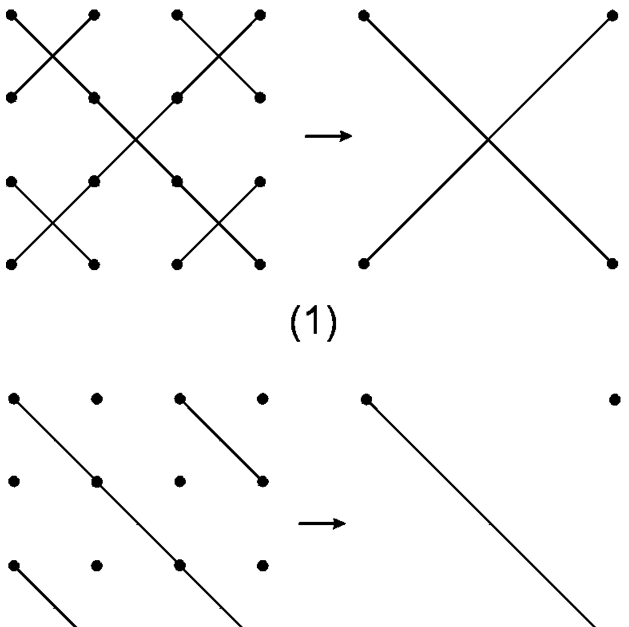

FIGURA 6.4. (1): Valoarea proprie pentru $\mathbb{D}_{(0,1,1)}$ este $\lambda = 1/3$; (2): analog pentru $\mathbb{D}_{(0,0,1)}$

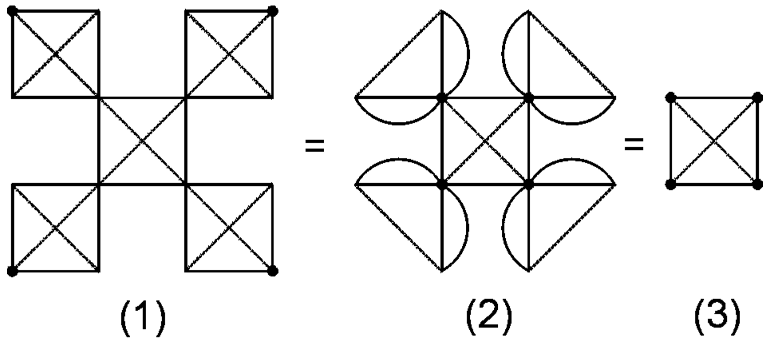

FIGURA 6.5. (1): $\Gamma(\Psi(\infty\mathbb{D}_{(0,1,1)}+\mathbb{D}^\circ))$; (2): "scurtcircuitate"; (3): $\Gamma(\infty\mathbb{D}_{(0,1,1)}+\mathbb{D}^\circ)$

b) Pentru $\mathbb{D}_{(0,1,0)}$ se poate aplica testul "cu funcţii":

$\mathrm{Im}\mathbb{D}_{(0,1,0)}=\mathrm{sp}\{g\}$, cu $g:=\chi_{a_2}-\chi_{a_4}$ iar $\dfrac{\Lambda(\mathcal{A})}{\mathcal{A}}(g)=\dfrac{1}{3}$, $\forall\,\mathcal{A}$ cu $\Gamma(\mathbb{D}_{(0,1,0)})\subset\Gamma(\mathcal{A})$. $f:=\chi_{a_1}-\chi_{a_3}\in\mathrm{Ker}\mathbb{D}_{(0,1,0)}$ şi $\dfrac{\Lambda(\mathcal{A})}{\mathcal{A}}(f)=\dfrac{1}{3}$, $\forall\,\mathcal{A}$ cu $\Gamma(\mathbb{D}_{(0,1,0)})\subset\Gamma(\mathcal{A})$. Deci *testul "cu funcţii" este pozitiv pentru* $\mathbb{D}_{(0,1,0)}$. Analog se poate proceda şi pentru $\mathbb{D}_{(0,0,1)}$.

Cum toate testele sunt pozitive, din teorema 5.9.13 va rezulta existenţa formelor proprii ireductibile pentru FV "nonnested". Cum FV "nonnested" nu este un F.C.A., ci doar S.A.P.C.F., nu putem beneficia de unicitatea dată în subsecţiunea 5.8.2. Se poate spera în găsirea efectivă a formelor proprii, dacă se determină efectiv funcţia de renormalizare şi vectorii săi proprii (a se vedea observaţia 6.1.2). □

OBSERVAŢIA 6.1.2. Transformarea $X-\boxtimes$ (Lema 4.1.21) nu este o bijecţie $((d_{15},d_{25},d_{35},d_{45})\in(0,\infty)^4\longrightarrow(c_{12},c_{13},c_{14},c_{23},c_{24},c_{34})\in(0,\infty)^6$, nici măcar impunând $c_{12}=c_{23}=c_{34}=c_{41}$, ceea ce va reduce dimensiunea: $(d_{15},d_{25})\in(0,\infty)^2\longrightarrow(c_{12},c_{13},c_{24})\in(0,\infty)^3$, a se vedea consideraţiile următoare). Nu se poate spera să se obţină forma efectivă a funcţiei de renormalizare decât prin aplicarea 4.1.16 şi utilizând un mediu de programare ce oferă posibilitatea calculelor simbolice performante (de exemplu MATLAB 2011, rulat pe un calculator cu suficiente resurse hardware - memorie şi procesor).

I. "O inversă" a transformării $X-\boxtimes$. În continuare se va încerca determinarea "unei inverse" pentru transformarea $X-\boxtimes$ (lema 4.1.21): dacă în $c_{ij}=d_{i5}d_{j5}\Big/\left(\sum\limits_{k=1}^{4}d_{k5}\right)$, $1\le i<j\le 4$, se consideră $c_{12}=c_{23}=c_{34}=c_{41}=a$, $c_{13}=b$, $c_{24}=c$, atunci $d_{15}d_{25}=d_{15}d_{45}$, deci $d_{25}=d_{45}$ şi analog $d_{15}d_{45}=d_{35}d_{45}$, deci $d_{15}=d_{35}$. Dacă se notează $d_{15}+d_{25}=d_{35}+d_{45}=s$, iar $d_{15}d_{25}=d_{35}d_{45}=p$, atunci, adunând relaţiile $c_{ij}=d_{i5}d_{j5}\Big/\left(\sum\limits_{k=1}^{4}d_{k5}\right)$, $1\le i<j\le 4$, se obţine $\sum\limits_{1\le i<j\le 4}d_{i5}d_{j5}=\left(\sum\limits_{1\le i\le 4}d_{i5}\right)\left(\sum\limits_{1\le i<j\le 4}c_{ij}\right)$, deci $s^2+2p=2s(4a+b+c)$. Dar $p=2as$, deci, în final, $s=4a+2b+2c$, $p=4a(2a+b+c)$. Atunci $d_{15}^2=d_{35}^2=d_{15}d_{35}=c_{13}\left(\sum\limits_{k=1}^{4}d_{k5}\right)=2bs=2b(4a+2b+2c)$. Analog $d_{25}^2=d_{45}^2=d_{25}d_{45}=c_{24}\left(\sum\limits_{k=1}^{4}d_{k5}\right)=2cs=2c(4a+2b+2c)$. Se va nota $a':=d_{15}=d_{35}$, $b':=d_{25}=d_{45}$, deci $(a')^2=2b(4a+2b+2c)$, $(b')^2=2c(4a+2b+2c)$. Evident $a'b'=p=4a(2a+b+c)$.

II. Determinarea valorii proprii pentru $\mathbb{D}_{(1,1,1)}$. În figura 6.6, pentru (1)$\sim$(2) se folosesc cele de mai sus. Pentru (2)$\sim$(3) se utilizează transformarea $X-|$ (lema 4.1.22), iar pentru (3)$\sim$(4) legea lui Ohm (rezistenţe în serie). Pentru (4)$\sim$(5) se aplică transformarea $X-\boxtimes$ (lema 4.1.21), obţinându-se pe laturile pătratului $a'b'/6(a'+b')=a'b'/6s=a/3$, iar pe diagonale $(a')^2/6(a'+b')=b/3$, respectiv $(b')^2/6(a'+b')=c/3$.

III. Calculul efectiv al funcţiei de renormalizare. Utilizând calcule simbolice în MATLAB 2011 se poate determina efectiv funcţia de renormalizare (evident, conform 4.1.16):

$$\Lambda(a,b,c)=(\widetilde{a},\widetilde{b},\widetilde{c}),\ \widetilde{a}:=\frac{a(a+b)(a+c)}{5a^2+3ab+3ac+bc},\widetilde{b}:=\frac{1}{3}(a+b)-\widetilde{a},\widetilde{c}:=\frac{1}{3}(a+c)-\widetilde{a}.$$

$(1,b,c)$ vector propriu pentru $\Lambda\iff\Big(\exists\,\lambda>0\Big)\Big(\Lambda(1,b,c)=\lambda(1,b,c)\Big)$. De aici $\widetilde{a}=\lambda$, $\widetilde{b}=\lambda b$, $\widetilde{c}=\lambda c$, de unde $\frac{1}{3}(1+b)-\widetilde{a}=\widetilde{b}=\widetilde{a}b$, $\widetilde{c}=\widetilde{a}b=\frac{1}{3}(1+c)-\widetilde{a}$. Cum a, b, $c>0$, rezultă $\widetilde{a}=1/3$, deci $\lambda=1/3=\frac{(b+1)(c+1)}{bc+3(b+c)+5}$. De aici $bc=1$. Aşadar, vectorii proprii pentru Λ corespunzători valorii proprii $\lambda=1/3$ sunt $\big\{(1,\mu,1/\mu)\,\big|\,\mu>0\big\}$.

Remarcă: În cazul FV "nonnested" toate pătratele prezente în reprezentările grafice anterioare ar fi trebuit figurate ca romburi, pentru a respecta alegerea făcută iniţial în ce preiveşte conductanţele (laturi egale, dar diagonale diferite). Acest lucru nu a fost făcut pentru a uşura desenele.

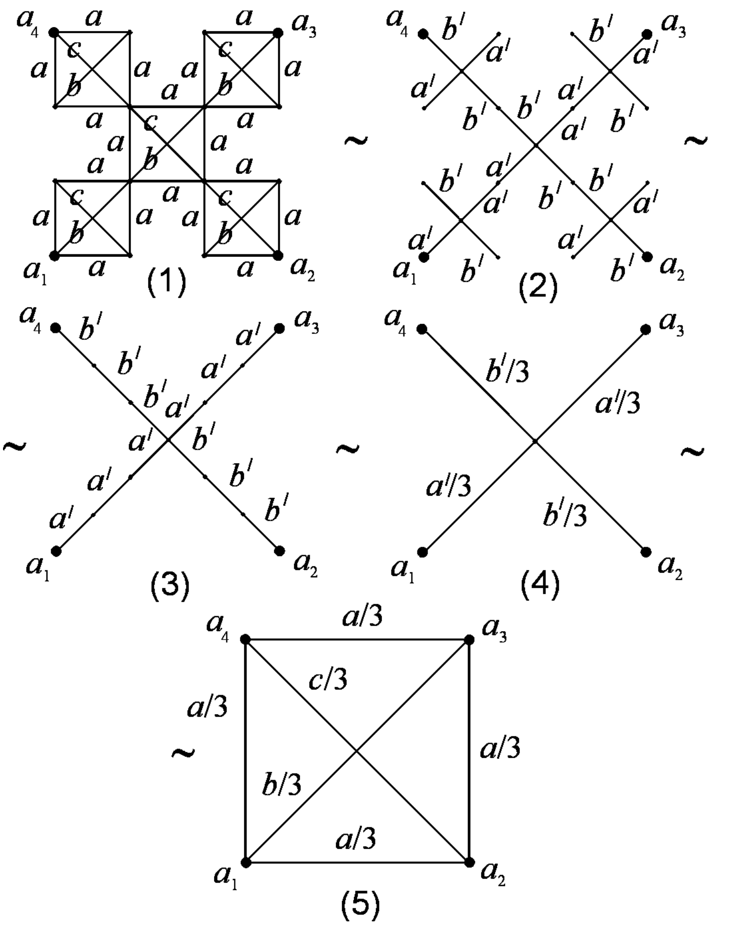

FIGURA 6.6. Determinarea valorii proprii $\lambda = 1/3$ pentru $\mathbb{D}_{(1,1,1)}$ în cazul FV

6.1.2. Renormalizarea fulgului lui Vicsek (FV) "nested". Se consideră tot exemplul 2.3.8 cu grupul de simetrie generat de reflecţiile relativ la dreptele mediatoare ale tuturor punctelor din V_0 ($\Theta = \mathcal{G}_s$). Atunci, relativ la $\mathcal{G}_s$, $\mathcal{L}_{FV}$ este un F.C.A. (numit *fulgul lui Vicsek (FV) "nested"*).

Ca şi la FV "non nested", în următoarea teoremă am sintetizat rezultatele obţinute de V. Metz în [**38**]-[**41**], [**44**], *privind renormalizarea fulgului lui Vicsek "nested", cu aceleaşi observaţii privind contribuţia personală. Acest rezultat (existenţa formelor proprii ireductibile $\mathcal{G}_s$ invariante) a fost obţinut de Lindstrom în* [**35**] *pentru clasa fractalilor "cuib", având o demonstraţie probabilistă. Aici se dă o altă demonstraţie, diferită de cea a lui Lindstrom, cu metoda algoritmică descrisă la început, bazată pe tehnica metricii proiective Hilbert a lui V. Metz.*

TEOREMA 6.1.3. *Fie fulgul lui Vicsek "nested" $\mathcal{L}_{FV}$ (cu grupul de simetrie $\Theta = \mathcal{G}_s$) şi sistemul de ponderi $\mathbf{r} := (r_1, r_2, r_3, r_4, r_5)$ cu $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5 =: r > 0$. Atunci $\mathbf{r}$ este Θ invariant şi există forme proprii ireductibile $\mathcal{G}_s$ invariante (adică din $\mathbb{D}_s \cap \mathbb{P}_s^{\circ}$) pentru funcţia de renormalizare $\Lambda_{\mathbf{r}}$ asociată lui $\mathcal{L}_{FV}$.*

DEMONSTRAŢIE. $\mathcal{G}_s$-orbitele sunt: $O_1 := \{\{a_1, a_2\}, \{a_2, a_3\}, \{a_3, a_4\}, \{a_4, a_1\}\}$, $O_2 := \{\{a_1, a_3\}, \{a_2, a_4\}\}$.

Matricele de conductanţă corespunzătoare sunt $c_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $c_0^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

O matrice de conductanţă arbitrară va fi de forma $c = \begin{pmatrix} 0 & a & b & a \\ a & 0 & a & b \\ b & a & 0 & a \\ a & b & a & 0 \end{pmatrix}$, $a, b \geq 0$. Matricele operatorilor asociaţi sunt $E_1 = E(1,0) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $E_2 = E(0,1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

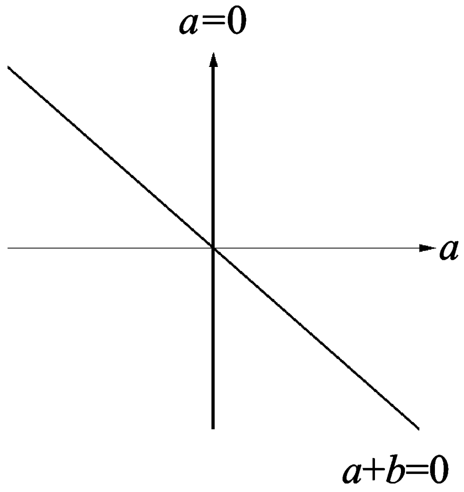

FIGURA 6.7. Conul $\mathbb{P}$ pentru FV "nested"

Un operator arbitrar (cu (L.1), (L.2)$'$ şi (L.3)) Θ-invariant are matricea dată de

$$E = E(a,b) = \begin{pmatrix} -2a-b & a & b & a \\ a & -2a-b & a & b \\ b & a & -2a-b & a \\ a & b & a & -2a-b \end{pmatrix}, \; a,\, b \geq 0.$$

Conul $\mathbb{P} := \mathbb{P}_\Theta$ al formelor cu (D.F.1) şi (D.F.2)$'$ se poate determina dacă se cunosc valorile proprii pentru $E(a,b)$. Rezolvând ecuaţia $\det(E(a,b) - \lambda I_4) = 0$ se obţine

$$\lambda(4a+\lambda)[2(a+b)+\lambda] = 0.$$

Deci valorile proprii sunt 0, $-4a$, $-2(a+b)$. $\varepsilon = \varepsilon_{E(a,b)}$ este pozitiv semidefinită $\Longleftrightarrow$ $E(a,b)$ negativ semidefinită $\Longleftrightarrow$ valorile proprii sunt negative, deci:

$$\mathbb{P} := \mathbb{P}_\Theta \simeq \left\{(a,b) \,\middle|\, a \geq 0,\, a+b \geq 0\right\}.$$

(figura 6.7). $\mathbb{P}$-părţile sunt următoarele:

- $\mathbb{P}_1 := \mathbb{P}^\circ \simeq \left\{(a,b) \,\middle|\, a > 0,\, a+b > 0\right\}$.
- $\mathbb{P}_2 \simeq \left\{(a,b) \,\middle|\, a = 0,\, a+b > 0\right\} = \{0\} \times (0,\infty)$.
- $\mathbb{P}_3 \simeq \left\{(a,b) \,\middle|\, a > 0,\, a+b = 0\right\}$.

$\mathbb{P}_1$ este chiar interiorul conului $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}_2$, $\mathbb{P}_3$ sunt razele extremale ale lui $\mathbb{P}$ (con poliedral şi aici).

Conul formelor Dirichlet corespunzătoare operatorilor $E(a,b)$ este dat de

$$\mathbb{D} := \mathbb{D}_\Theta = \left\{\varepsilon \,\middle|\, \varepsilon = a\varepsilon_0^{(1)} + b\varepsilon_0^{(2)}, a, b \geq 0\right\},$$

unde $\varepsilon_0^{(1)}$, $\varepsilon_0^{(2)}$ sunt formele corespunzătoare matricelor de conductanţă $c_0^{(1)}$, $c_0^{(2)}$, respectiv operatorilor E_1, E_2. Evident $\mathbb{D} \simeq \mathbb{R}_+^2$. $\mathbb{D}$-părţile şi grafurile asociate (conform subsecţiunii 5.9.1) sunt date de:

- $\mathbb{D}_{(1,1)} := \mathbb{D}^\circ \simeq \left\{E(a,b) \,\middle|\, a,b > 0\right\} \simeq (0,\infty)^2$. Graful corespunzător $\Gamma(\mathbb{D}_{(1,1)})$ este redat de figura 6.8-(1).
- $\mathbb{D}_{(0,1)} \simeq \left\{E(0,b) \,\middle|\, b > 0\right\} \simeq \{0\} \times (0,\infty) \simeq \mathbb{P}_2$. Graful corespunzător $\Gamma(\mathbb{D}_{(0,1)})$ este redat de figura 6.8-(3).
- $\mathbb{D}_{(1,0)} \simeq \left\{E(a,0) \,\middle|\, a > 0\right\} \simeq (0,\infty) \times \{0\}$. Graful corespunzător $\Gamma(\mathbb{D}_{(1,0)})$ este redat de figura 6.8-(2).

$\mathbb{D}_{(1,1)}$ este chiar interiorul conului $\mathbb{D}$, $\mathbb{D}_{(0,1)}$, $\mathbb{D}_{(1,0)}$ sunt "semiaxele pozitive", i.e. razele extremale ale lui $\mathbb{D}$ (întotdeauna con poliedral). (1) este graful complet, iar (2), (3) sunt grafurile corespunzătoare orbitelor O_1, O_2. Evident $\mathbb{D}^\circ$, $\mathbb{D}_{(1,0)} \subset \mathbb{P}^\circ$; $\mathbb{D}_{(0,1)} = \mathbb{P}_2$.

Un sistem de ponderi $\mathbf{r} := (r_1, r_2, r_3, r_4, r_5)$ Θ-invariant $\Longleftrightarrow$ $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5$. Pt. simplitate se va considera $\mathbf{r} := (1,1,1,1,1)$.

Din nou $\mathbb{D}$-părţile Λ-invariante se determină utilizând observaţia 5.9.3-(2); acţiunea lui Λ pe $\mathbb{D}$-părţi este următoarea:

- $\Lambda(\mathbb{D}_{(1,1)}) \subset \mathbb{D}_{(1,1)}$ (analog cu cazul "nonnested" orice două puncte din V_0 se pot uni printr-un drum din $\Gamma(\Psi(\mathbb{D}_{(1,1)}))$ cu puncte din $V_1 \backslash V_0$ - grafic analog cu 6.3-(1));
- $\Lambda(\mathbb{D}_{(0,1)}) \subset \mathbb{D}_{(0,1)}$ (analog cu cazul "nonnested" a_1 şi a_3 se pot uni printr-un drum din $\Gamma(\Psi(\mathbb{D}_{(0,1)}))$ cu puncte din $V_1 \backslash V_0$; la fel a_2 şi a_4; a_1 şi a_4 nu se pot uni printr-un drum din $\Gamma(\Psi(\mathbb{D}_{(0,1)}))$ cu puncte din $V_1 \backslash V_0$; la fel a_1 şi a_2, a_2 şi a_3, a_3 şi a_4 - grafic analog cu figura 6.3-(2));

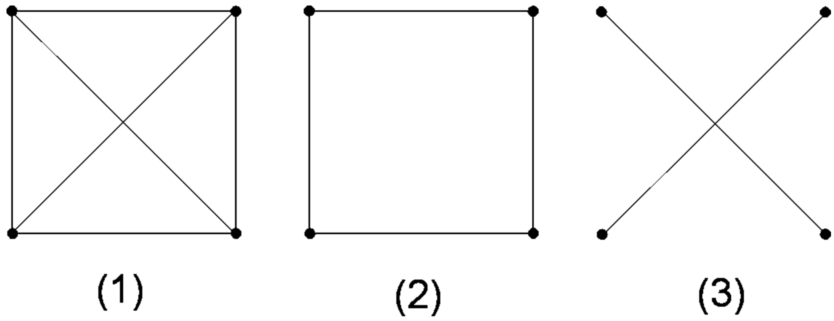

FIGURA 6.8. Grafurile $\Gamma(\mathbb{D}.)$ pentru FV "nested"

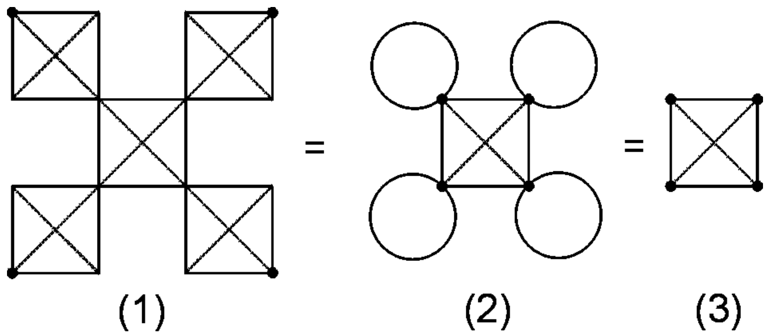

FIGURA 6.9. (1): $\Gamma(\mathcal{R}_1 + \infty\mathcal{M}_1)$; (2): "scurtcircuitare"; (3): $\Gamma(\mathcal{R} + \infty\mathcal{M})$ pentru FV "nested"

- $\Lambda(\mathbb{D}_{(1,0)}) \subset \mathbb{D}_{(1,1)}$ (analog cu cazul "nonnested" orice două puncte din V_0 se pot uni printr-un drum din $\Gamma(\Psi(\mathbb{D}_{(1,0)}))$ cu puncte din $V_1 \backslash V_0$; grafic analog cu figura 6.3-(4)).

Aşadar $\mathbb{D}_{(1,1)}$, $\mathbb{D}_{(0,1)}$ $\mathbb{D}$-părţile Λ-invariante. Evident ele sunt şi singurele $\mathbb{D}$-părţi incluse în $\mathbb{P}^\circ$.

- Valorile proprii corespunzătoare $\mathbb{D}$-părţilor Λ-invariante se obţin la fel ca în cazul "nonnested":

- valoarea proprie pentru $\mathbb{D}_{(0,1)}$ este tot $\lambda = 1/3$ (din nou figura 6.4-(1) e suficientă, cu aplicarea legii lui Ohm);
- valoarea proprie pentru $\mathbb{D}_{(1,1)}$ este tot $\lambda = 1/3$ (din nou figura 6.6 dar cu $b = c$).

Pentru a demonstra existenţa formelor proprii pentru FV "nested" se va aplica varianta primă a testului de "scurtcircuitare" (5.9.9). Se alege evident $\mathbb{D}_0 := \mathbb{D}_{(1,1)} = \mathbb{D}^\circ$ ca singură parte Λ-invariantă din $\mathbb{P}^\circ$. Se observă că $\partial\mathbb{P} \cap \overline{\mathbb{D}_0} = \mathbb{D}_{(0,1)} = \mathbb{D}_1$ care este şi ea Λ-invariantă. Se consideră $\mathcal{R} \in \mathbb{D}_{(1,1)}$, $\mathcal{M} \in \mathbb{D}_{(0,1)}$, $Z := \{a_1, a_3\}$. Se va încerca să se deducă faptul că raportul din 5.9.9 este chiar egal cu 1. Graful lui $\Psi(\mathcal{R} + \infty\mathcal{M})$ este figurat în 6.9-(1). Liniile punctate (diagonalele) se vor scurtcicrcuita (figura 6.9-(2)). Rezistenţa efectivă este dată de

$$R_{\mathcal{R}_1+\infty\mathcal{M}_1}(\{a_1,a_3\},\{a_2,a_4\}) = \inf\left\{ (\mathcal{R}_1 + \infty\mathcal{M}_1)(u) \,\middle|\, u_{|\{a_1,a_3\}} \equiv 1, u_{|\{a_2,a_4\}} \equiv 0 \right\}$$
$$= \mathcal{H}^{\mathcal{R}_1+\infty\mathcal{M}_1}_{V_1\backslash V_0}\chi_{\{a_1,a_3\}}.$$

iar funcţia armonică $\mathcal{H}^{\mathcal{R}_1+\infty\mathcal{M}_1}_{V_1\backslash V_0}\chi_{\{a_1,a_3\}}$ rămâne constantă pe $\{a_1, a_3\}$, deci diagonalele respective din $\Gamma(\mathcal{R}_1 + \infty\mathcal{M}_1)$ pot "colapsa" într-un singur punct. Ca şi în cazul "nonnested", prin aplicarea lemei 5.9.10 se identifică vârfurile noii reţele "scurtcircuitate", anume punctele "mari" din figura 6.9-(2). Dar, din nou, buclele obţinute nu modifică energia totală, deci, în final se obţine figura 6.9-(3), iar raportul dorit este egal cu 1. Aşadar, are loc existenţa formelor proprii ireductibile, conform 5.9.9. Fiind vorba de un F.C.A., are loc şi unicitatea (modulo produsul cu o constantă). ☐

OBSERVAŢIA 6.1.4. (**Calculul efectiv al funcţiei de renormalizare**). Pentru $b = c$, funcţia de renormalizare de la cazul "nonnested" devine

$$\Lambda(a,b) = (\widetilde{a}, \widetilde{b}),\ \widetilde{a} := \frac{a(a+b)}{5a+b}, \widetilde{b} := \frac{1}{3}(a+b) - \widetilde{a} = \frac{(2a+b)(a+b)}{3(5a+b)}.$$

În acest caz se pot studia forme proprii corespunzătoare unor perechi $(a,b) \in [0,\infty) \times [0,\infty)$. Atunci $(a,b) \in [0,\infty) \times [0,\infty)$ vector propriu pentru $\Lambda \iff \Big(\exists\, \lambda > 0\Big)\Big(\Lambda(a,b) = \lambda(a,b)\Big)$. De aici $\widetilde{a} = \lambda a$, $\widetilde{b} = \lambda b$, de unde $a = 0$, $b > 0$ pentru $\lambda = 1/3$, sau $a > 0$ şi $a^2 + ab = a(5a+b)\lambda$, $(a+b)(\lambda - 1/3) = 0$ i.e. $a = b > 0$ tot pentru $\lambda = 1/3$.

Aşadar, vectorii proprii pentru Λ corespunzători valorii proprii $\lambda = 1/3$ sunt, pentru cazul FV "nested" $(0, b)$, cu $b > 0$, sau (a, a), cu $a > 0$. Prima corespunde unei forme proprii reductibile, din $\mathbb{D}_{(0,1)}$ (lucru aşteptat, aceasta fiind Λ-invariantă). Cealaltă este "unica" formă proprie ireductibilă (i.e. din $\mathbb{D}_{(1,1)}$).

Remarcă. *Particularitatea lui FV "nested", dimensiunea 2 a conurilor, plus uşurarea calculelor simbolice peentru determinarea funcţiei de renormalizare, a permis determinarea efectivă a tuturor formelor proprii (atât reductibile, cât şi ireductibile). Acest lucru va fi practic imposibil pe fractali cu frontiera iniţială formată cu mai mult de 4 puncte. De exemplu, se vor putea intui formele proprii la Fulgul lui Lindstrom şi Pentakun cu ajutorul unui program în Java, evident uzând şi de teoria aferentă şi elementele particulare ale fiecărui fractal.*

6.2. Renormalizarea fulgului lui Lindstrom (FL)

Se reaminteşte exemplul 2.3.7: fie punctele z_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, vârfurile unui hexagon regulat de latură 1, z_7 centrul său şi $\psi_i(x) = z_i + \frac{1}{3}(x - z_i)$, $i = \overline{1,7}$. Atractorul SIF-ului $\left\{(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|); \{\psi_i, r_i\}_{i=\overline{1,7}}\right\}$ este ilustrat în figura 2.11. Fie grupul de simetrie "maximal" $\mathcal{G}_s$, generat de reflecţiile relativ la dreptele mediatoare ale tuturor segmentelor cu capete în puncte din V_0. Dacă se consideră F atractorul SIF-ului şi se notează tot cu ψ_i şi restricţiile ψ_i-urilor la F, atunci $\mathcal{L}_{FL} := \left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,7}}\right\}$ este un F.C. relativ la $\mathcal{G}_s$ şi va fi denumit *fulgul lui Lindstrom (FL) "nested", sau, simplu, fulgul lui Lindstrom.*

Existenţa formelor proprii ireductibile $\mathcal{G}_s$ invariante a fost obţinută de Lindstrom în [**35**] *pentru clasa fractalilor "cuib", deci se aplică şi pe acest exemplu. În continuare, prezentăm o demonstraţie originală (diferită de cea probabilistă a lui Lindstrom) a existenţei pentru FL, bazată pe metoda algoritmică de la începutul capitolului.*

TEOREMA 6.2.1. *Fie fulgul lui Lindstrom $\mathcal{L}_{FL}$ (cu grupul de simetrie $\Theta = \mathcal{G}_s$) şi sistemul de ponderi $\mathbf{r} := (r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7)$ cu $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5 = r_6$. Atunci $\mathbf{r}$ este Θ invariant şi există forme proprii ireductibile $\mathcal{G}_s$ invariante $\mathcal{E}$ (i.e. $\mathcal{E} \in \mathbb{D}_s \cap \mathbb{P}_s^\circ$) pentru funcţia de renormalizare $\Lambda_{\mathbf{r}}$ asociată lui $\mathcal{L}_{FL}$.*

DEMONSTRAŢIE. Θ-orbitele sunt: $O_1 := \{\{z_1, z_2\}, \{z_2, z_3\}, \{z_3, z_4\}, \{z_4, z_5\}, \{z_5, z_6\}, \{z_6, z_1\}\}$, $O_2 := \{\{z_1, z_3\}, \{z_3, z_5\}, \{z_5, z_1\}, \{z_2, z_4\}, \{z_4, z_6\}, \{z_6, z_2\}\}$, $O_3 := \{\{z_1, z_4\}, \{z_2, z_5\}, \{z_3, z_6\}\}$.

Matricele de conductanţă corespunzătoare orbitelor O_1, O_2, O_3 sunt date de

$$c_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, c_0^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, c_0^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

O matrice de conductanţă arbitrară este dată de $c = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c & b & a \\ a & 0 & a & b & c & b \\ b & a & 0 & a & b & c \\ c & b & a & 0 & a & b \\ b & c & b & a & 0 & a \\ a & b & c & b & a & 0 \end{pmatrix}$, $a, b, c \geq 0$.

Matricele operatorilor asociaţi sunt $E_1 = E(1, 0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $E_2 =$

$$E(0, 1, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, E_3 = E(0, 0, 1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Un operator arbitrar (cu (L.1), (L.2)$'$ şi (L.3)) Θ-invariant are matricea dată de

$$E = E(a, b, c) = \begin{pmatrix} -s & a & b & c & b & a \\ a & -s & a & b & c & b \\ b & a & -s & a & b & c \\ c & b & a & -s & a & b \\ b & c & b & a & -s & a \\ a & b & c & b & a & -s \end{pmatrix}, s := 2a + 2b + c,\ a,\ b,\ c \geq 0.$$

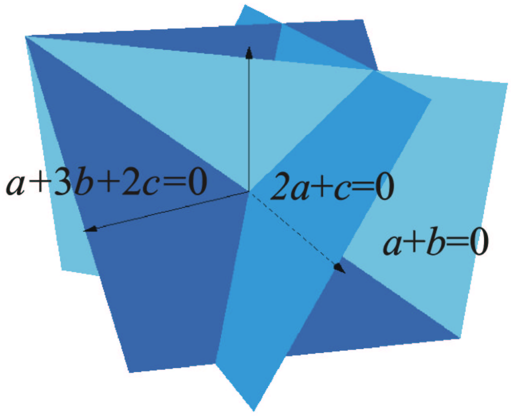

FIGURA 6.10. Conul $\mathbb{P}$ pentru FL ”nested”

Conul $\mathbb{P} := \mathbb{P}_\Theta$ al formelor cu (D.F.1) şi (D.F.2)$'$ se poate determina dacă se cunosc valorile proprii pentru $E(a,b,c)$. Matricea $E(a,b,c)$ fiind circulantă, valorile sale proprii sunt cunoscute ([**14**]):

$$\lambda_m = \sum_{k=0}^{5} c_k e^{-\frac{2mk\pi i}{6}} = \sum_{k=0}^{5} c_k e^{-\frac{mk\pi i}{3}},\ m = \overline{0,5},$$

cu $c_1 = c_5 = a$, $c_2 = c_4 = b$, $c_3 = c$, $c_0 = -s = -(2a+2b+c)$.

Scriind efectiv valorile proprii, se obţine

$$\lambda_0 = -s + a + b + c + b + a = 0$$

$$\lambda_1 = -s + a\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + b\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - c + b\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + a\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -a - 3b - 2c,$$

$$\lambda_2 = -s + a\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + b\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + c + b\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + a\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3a - 3b,$$

$$\lambda_3 = -s - a + b - c + b - a = -4a - 2c,$$

$$\lambda_4 = -s + a\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + b\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + c + b\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + a\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3a - 3b,$$

$$\lambda_5 = -s + a\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + b\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - c + b\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + a\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -a - 3b - 2c.$$

ε este pozitiv semidefinită $\Longleftrightarrow$ $E(a,b,c)$ negativ semidefinită $\Longleftrightarrow$ valorile proprii sunt negative, deci:

$$\mathbb{P} := \mathbb{P}_\Theta \simeq \left\{(a,b,c) \,\middle|\, a + 3b + 2c \geq 0,\ a + b \geq 0,\ 2a + c \geq 0\right\}.$$

(figura 6.10). $\mathbb{P}$-părţile sunt următoarele:

- $\mathbb{P}_1 := \mathbb{P}^\circ \simeq \left\{(a,b,c) \,\middle|\, a + 3b + 2c > 0,\ a + b > 0,\ 2a + c > 0\right\}$.
- $\mathbb{P}_2 \simeq \left\{(a,b,c) \,\middle|\, a + 3b + 2c = 0,\ a + b > 0,\ 2a + c > 0\right\}$.
- $\mathbb{P}_3 \simeq \left\{(a,b,c) \,\middle|\, a + 3b + 2c > 0,\ a + b = 0,\ 2a + c > 0\right\}$.
- $\mathbb{P}_4 \simeq \left\{(a,b,c) \,\middle|\, a + 3b + 2c > 0,\ a + b > 0,\ 2a + c = 0\right\}$.
- $\mathbb{P}_5 \simeq \left\{(a,b,c) \,\middle|\, a + 3b + 2c = 0,\ a + b = 0,\ 2a + c > 0\right\}$.
- $\mathbb{P}_6 \simeq \left\{(a,b,c) \,\middle|\, a + 3b + 2c = 0,\ a + b > 0,\ 2a + c = 0\right\}$.
- $\mathbb{P}_7 \simeq \left\{(a,b,c) \,\middle|\, a + 3b + 2c > 0,\ a + b = 0,\ 2a + c = 0\right\}$.

$\mathbb{P}_1$ este chiar interiorul conului $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}_2$, $\mathbb{P}_3$, $\mathbb{P}_4$ sunt ”feţele” (deschise) ale lui $\mathbb{P}$, iar $\mathbb{P}_5$, $\mathbb{P}_6$, $\mathbb{P}_7$ sunt razele extremale ale lui $\mathbb{P}$ (con poliedral).

Conul formelor Dirichlet este

$$\mathbb{D} := \mathbb{D}_\Theta = \left\{\varepsilon \,\middle|\, \varepsilon = a\varepsilon_0^{(1)} + b\varepsilon_0^{(2)} + c\varepsilon_0^{(3)}, a, b, c \geq 0\right\},$$

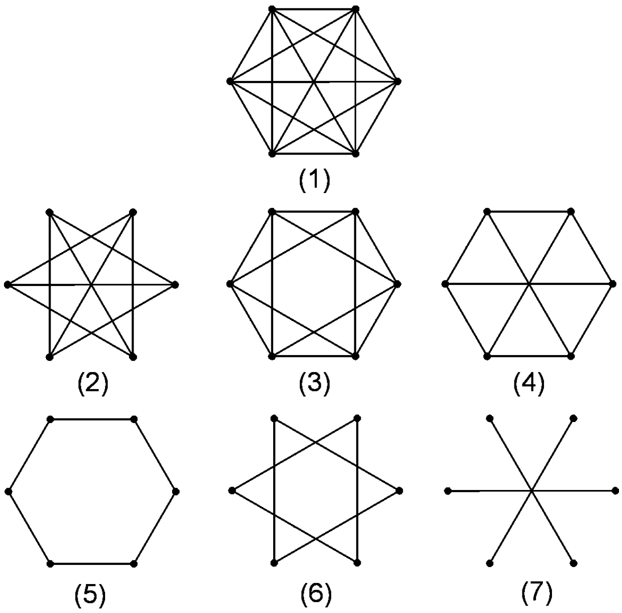

FIGURA 6.11. Grafurile $\Gamma(\mathbb{D}.)$ pentru FL "nested"

$\varepsilon_0^{(1)}$, $\varepsilon_0^{(2)}$, $\varepsilon_0^{(3)}$ fiind formele corespunzătoare matricelor de conductanţă $c_0^{(1)}$, $c_0^{(2)}$, $c_0^{(3)}$, (sau operatorilor E_1, E_2, E_3). Evident $\mathbb{D} \simeq \mathbb{R}_+^3$.

$\mathbb{D}$-părţile şi grafurile asociate sunt date de:

- $\mathbb{D}_{(1,1,1)} := \mathbb{D}^\circ \simeq \{E(a,b,c) \,|\, a,b,c > 0\} \simeq (0,\infty)^3$. Graful corespunzător $\Gamma(\mathbb{D}_{(1,1,1)})$ este redat de figura 6.11-(1).
- $\mathbb{D}_{(0,1,1)} \simeq \{E(0,b,c) \,|\, b,c > 0\} \simeq \{0\} \times (0,\infty)^2$. Graful corespunzător $\Gamma(\mathbb{D}_{(0,1,1)})$ este redat de figura 6.11-(2).
- $\mathbb{D}_{(1,0,1)} \simeq \{E(a,0,c) \,|\, a,c > 0\} \simeq (0,\infty) \times \{0\} \times (0,\infty)$. Graful corespunzător $\Gamma(\mathbb{D}_{(1,0,1)})$ este redat de figura 6.11-(4).
- $\mathbb{D}_{(1,1,0)} \simeq \{E(a,b,0) \,|\, a,b > 0\} \simeq (0,\infty)^2 \times \{0\}$. Graful corespunzător $\Gamma(\mathbb{D}_{(1,1,0)})$ este redat de figura 6.11-(3).
- $\mathbb{D}_{(1,0,0)} \simeq \{E(a,0,0) \,|\, a > 0\} \simeq (0,\infty) \times \{0\} \times \{0\}$. Graful corespunzător $\Gamma(\mathbb{D}_{(1,0,0)})$ este redat de figura 6.11-(5).
- $\mathbb{D}_{(0,1,0)} \simeq \{E(0,b,0) \,|\, b > 0\} \simeq \{0\} \times (0,\infty) \times \{0\}$. Graful corespunzător $\Gamma(\mathbb{D}_{(0,1,0)})$ este redat de figura 6.11-(6).
- $\mathbb{D}_{(0,0,1)} \simeq \{E(0,0,c) \,|\, c > 0\} \simeq \{0\} \times \{0\} \times (0,\infty)$. Graful corespunzător $\Gamma(\mathbb{D}_{(0,0,1)})$ este redat de figura 6.11-(7).

$\mathbb{D}_{(1,1,1)}$ este interiorul conului $\mathbb{D}$, $\mathbb{D}_{(0,1,1)}$, $\mathbb{D}_{(1,0,1)}$, $\mathbb{D}_{(1,1,0)}$ "feţele" lui $\mathbb{D}$, iar $\mathbb{D}_{(1,0,0)}$, $\mathbb{D}_{(0,1,0)}$, $\mathbb{D}_{(0,0,1)}$ sunt razele extremale ale lui $\mathbb{D}$ (con poliedral). Grafurile asociate sunt fundamental diferite, spre deosebire de FV "nonnested". (1) este graful complet, iar (5), (6), (7) sunt grafurile corespunzătoare orbitelor O_1, O_2, O_3.

Evident $\mathbb{D}^\circ$, $\mathbb{D}_{(1,1,0)}$, $\mathbb{D}_{(1,0,1)}$, $\mathbb{D}_{(0,1,1)} \subset \mathbb{P}^\circ$; $\mathbb{D}_{(1,0,0)} \subset \mathbb{P}_2$, $\mathbb{D}_{(0,0,1)} \subset \mathbb{P}_3$, $\mathbb{D}_{(0,1,0)} \subset \mathbb{P}_4$.

Sistemul de ponderi $\mathbf{r} := (r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7)$ este $\mathcal{G}_s$-invariant $\iff r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5 = r_6$. Pt. simplitate se va considera $\mathbf{r} := (1,1,1,1,1,1,t)$ cu $t > 0$.

$\mathbb{D}$-părţile Λ-invariante se determină utilizând 5.9.3-(2):

- $\Lambda(\mathbb{D}_{(1,1,1)}) \subset \mathbb{D}_{(1,1,1)}$ (figura 6.12-(1); orice două puncte din V_0 se pot uni printr-un drum din $\Gamma(\Psi(\mathbb{D}_{(1,1,1)}))$ cu puncte din $V_1 \backslash V_0$);
- $\Lambda(\mathbb{D}_{(1,1,0)})$, $\Lambda(\mathbb{D}_{(1,0,1)})$, $\Lambda(\mathbb{D}_{(0,1,1)})$, $\Lambda(\mathbb{D}_{(1,0,0)})$, $\Lambda(\mathbb{D}_{(0,1,0)}) \subset \mathbb{D}_{(1,1,1)}$ (figura 6.12-(2)(3)(4)(5)(6); orice două puncte din V_0 se pot uni printr-un drum din $\Gamma(\Psi(\mathbb{D}_{(1,1,0)}))$ sau $\Gamma(\Psi(\mathbb{D}_{(1,0,1)}))$ sau $\Gamma(\Psi(\mathbb{D}_{(0,1,1)}))$ sau $\Gamma(\Psi(\mathbb{D}_{(1,0,0)}))$ sau $\Gamma(\Psi(\mathbb{D}_{(0,1,0)}))$ cu puncte din $V_1 \backslash V_0$);
- $\Lambda(\mathbb{D}_{(0,0,1)}) \subset \mathbb{D}_{(0,0,1)}$ (figura 6.12-(7); z_1 şi z_4 se pot uni printr-un drum din $\Gamma(\Psi(\mathbb{D}_{(0,0,1)}))$ cu puncte din $V_1 \backslash V_0$; analog z_2 şi z_5, apoi z_3 şi z_6; nici o altă pereche de puncte din V_0 nu mai satisface această condiţie).

Aşadar $\mathbb{D}_{(1,1,1)}$, $\mathbb{D}_{(0,0,1)}$ sunt $\mathbb{D}$-părţile Λ-invariante. Singura $\mathbb{D}$-parte Λ-invariantă inclusă în $\mathbb{P}^\circ$ este $\mathbb{D}_{(1,1,1)} = \mathbb{D}^\circ$.

Despre valorile proprii corespunzătoare $\mathbb{D}$-părţilor Λ-invariante se pot spune următoarele:

- valoarea proprie pentru $\mathbb{D}_{(0,0,1)}$ este $\lambda = 1/3$ (figura 6.13, unde se aplică legea lui Ohm, conductanţele finale pe diagonalele "mari" fiind 1/3 din valorile iniţiale);

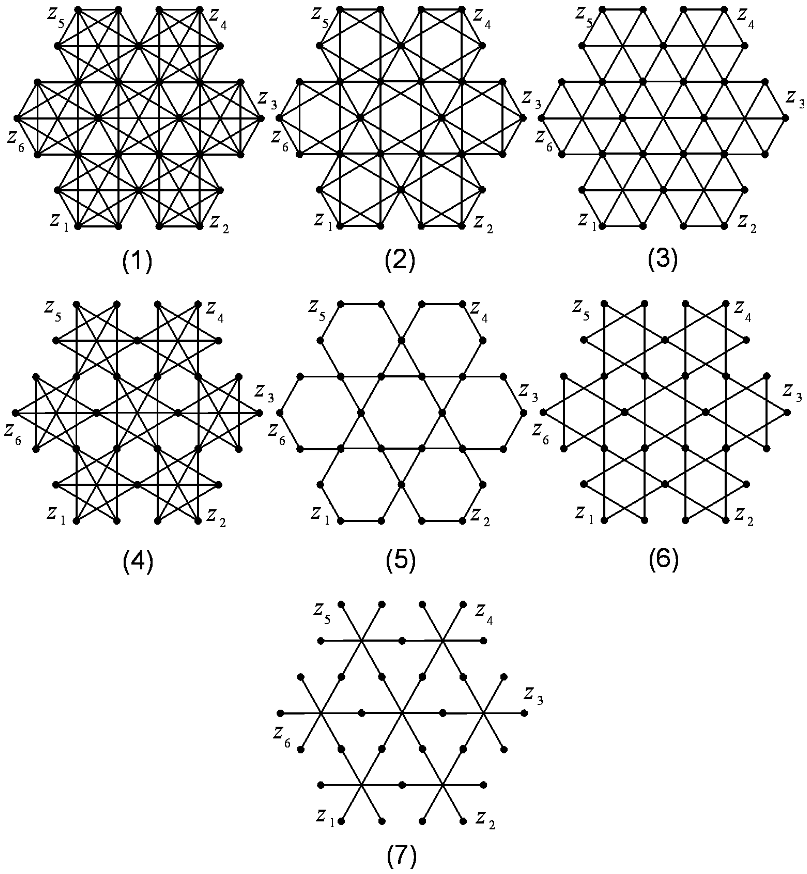

FIGURA 6.12. Grafurile $\Gamma\left(\Psi\left(\mathbb{D}.\right)\right)$ pentru FL

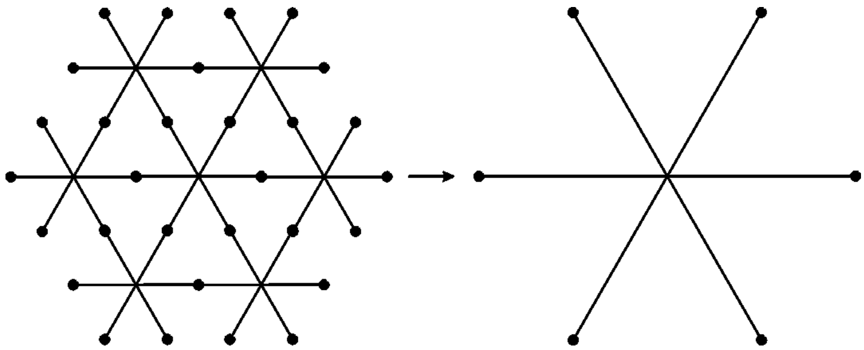

FIGURA 6.13. Valoarea proprie pt. $\mathbb{D}_{(0,0,1)}$ este $\lambda = 1/3$ (pentru FL)

- valoarea proprie pentru $\mathbb{D}_{(1,1,1)}$ se va determina prin metode computaţionale la subsecţiunea 6.5.2.

Pentru a demonstra existenţa formelor proprii pentru FL "nested" se va aplica varianta primă a testului de "scurtcircuitare" (5.9.9). Se alege $\mathbb{D}_0 := \mathbb{D}_{(1,1,1)} = \mathbb{D}^\circ$ ca singură parte Λ-invariantă din $\mathbb{P}^\circ$. Se observă că $\partial\mathbb{P}\cap\overline{\mathbb{D}_0} = \mathbb{D}_{(1,0,0)}\cup\mathbb{D}_{(0,1,0)}\cup\mathbb{D}_{(0,0,1)}$. Singura $\mathbb{D}$-parte Λ-invariantă din $\partial\mathbb{P}\cap\overline{\mathbb{D}_0}$ este $\mathbb{D}_{(0,0,1)}$. Se consideră $\mathcal{R} \in \mathbb{D}_{(1,1,1)}$, $\mathcal{M} \in \mathbb{D}_{(0,0,1)}$, $Z := \{z_1, z_4\}$. Se va încerca să se deducă faptul că raportul din 5.9.9 este ≥ 1.

$$R_{\mathcal{R}_1+\infty\mathcal{M}_1}(Z, V_0\backslash Z) = \inf\left\{ \left(\mathcal{R}_1 + \infty\mathcal{M}_1\right)(u) \,\middle|\, u_{|\{z_1,z_4\}} \equiv 1, u_{|\{z_2,z_3,z_5,z_6\}} \equiv 0\right\}$$
$$= \mathcal{H}_{V_1\backslash V_0}^{\mathcal{R}_1+\infty\mathcal{M}_1}\chi_{\{z_1,z_4\}},$$

iar funcţia armonică $\mathcal{H}_{V_1\backslash V_0}^{\mathcal{R}_1+\infty\mathcal{M}_1}\chi_{\{z_1,z_4\}}$ rămâne constantă pe $\{z_1, z_3\}$, deci diagonalele corespunzătoare din $\Gamma(\mathcal{R}_1 + \infty\mathcal{M}_1)$ se pot reduce la un singur punct. Cu lema 5.9.10, se determină vârfurile noii reţele "scurtcircuitate"; buclele obţinute nu modifică energia totală, dar mai există şi alte "reminescenţe", care cresc energia comparativ cu cea de pe V_0. În final raportul dorit este ≥ 1.

Mai elegant se poate utiliza testul lui Sabot 5.9.15: pentru $\mathcal{B} \in \mathbb{D}_{(0,0,1)}$, $\mathcal{D} \in \mathbb{D}_{(1,1,1)}$ şi p, $q \in V_0$ aflate în componente conexe diferite Γ_p, Γ_q ale lui $\Gamma(\mathbb{D}_{(0,0,1)})$, există o 1-celulă (hexagonul "central" $\psi_7(V_0)$ din

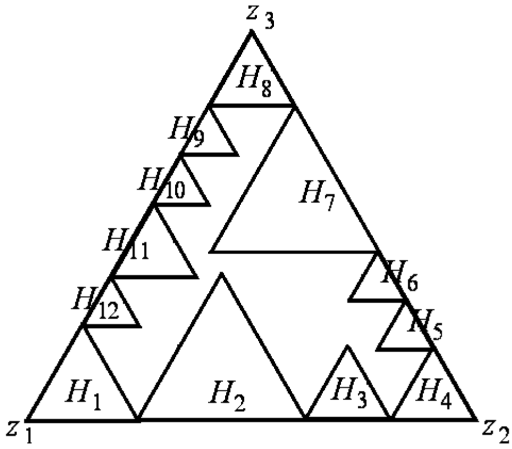

FIGURA 6.14. abc-triunghiul lui Sierpinski

reţeaua V_1) astfel încât $\Gamma_p \cap \psi_7(V_0) \neq \emptyset$, $\Gamma_q \cap \psi_7(V_0) \neq \emptyset$. Astfel, o "scurtcircuitare" ca în cazul FV "nested" este posibilă şi $c_{\Lambda(\mathcal{D}+\infty\mathcal{B})}(p,q) \geq c_{\mathcal{D}+\infty\mathcal{B}}(p,q)$. Deoarece aceasta funcţionează pentru orice p, q din $\Gamma(\mathbb{D}_{(0,0,1)})$ componente diferite, în final $\lambda_\infty > 1$, iar orice valoare proprie λ trebuie să fie < 1 (FL "nested" este un F.C. şi se ţine cont de 4.5.4). Aşadar, din testul lui Sabot, are loc existenţa formelor proprii ireductibile, conform 5.9.9. Fiind vorba de un F.C.A., are loc şi unicitatea (modulo produsul cu o constantă). □

6.3. Renormalizarea "abc-triunghiului lui Sierpinski" (abc-TS)

Se consideră $\Delta z_1 z_2 z_3 \subset \mathbb{R}^2$ un triunghi echilateral şi $H := \overline{\text{co}}\{z_1, z_2, z_3\}$. Se consideră similitudinile $\{\psi_i\}_{i=1,M}$ astfel încât fiecare $H_i := \psi_i(H)$ se intersectează doar cu H_{i-1} şi H_{i+1}; se consideră $M = k_1 + k_2 + k_3$, $k_1 \geq 1$, $k_2 \geq 1$, $k_3 \geq 1$, iar alegerea similitudinilor se va face astfel încât să fie $k_3 + 1$ triunghiuri H_i pe latura $z_1 z_2$, $k_1 + 1$ triunghiuri H_i pe latura $z_2 z_3$, $k_2 + 1$ pe $z_3 z_1$ (a se vedea figura 6.14, cu $k_1 = 4$, $k_2 = 5$, $k_3 = 3$). H_2 şi H_M se "ating" $\Longleftrightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 1$ (cazul triunghiului lui Sierpinski "clasic"). Se notează $i = 1$, $j := k_3 + 1$, $k := k_3 + k_1 + 1$. Notând F atractorul SIF-ului $\left\{\mathbb{R}^2, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,M}}\right\}$ şi notând restricţiile ψ_i-urilor la F tot cu ψ_i, rezultă $\mathcal{L}_{abcTS} := \left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,M}}\right\}$ S.A. $B = \bigcup\limits_{1 \leq i < j \leq M} (H_i \cap H_j)$ (formată cu M puncte) iar fiecare punct de ramificare are câte două adrese (de exemplu $H_1 \cap H_2 = \{\pi(1\dot{i}) = \pi(2\dot{j})\}$, unde π este aplicaţia naturală). Deci Γ este formată cu $2M$ puncte aproape periodice, iar în final $P = \{(\dot{i}), (\dot{j}), (\dot{k})\}$, iar $V_0 = \{z_1, z_2, z_3\}$. $\mathcal{L}_{abcTS} = \left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,M}}\right\}$ este o S.A.P.C.F. şi va fi denumit *abc-triunghiul lui Sierpinski (abc-TS)*. Pentru anumite valori date lui k_i şi factori de similitudine bine aleşi se poate întâmpla să avem şi structuri F.C.A. relativ la $\mathcal{G}_s$ (în următoarea secţiune se va considera $k_1 = k_2 = k_3 = 2$, $s_1 = s_3 = s_5 = 2/5$, $s_2 = s_4 = s_6 = 1/5$, obţinându-se TSA-I).

Se consideră grupul de simetrie trivial $\Theta = \{\text{Id}\}$ (adică, practic, se va considera funcţia de renormalizare definită pe conul cel mai general, neinvariant la nici un grup de simetrie). Acest lucru este normal deoarece exemplul este foarte general. Dacă se consideră cazuri particulare de abc-TS, în funcţie de proprietăţile lor de simetrie, se pot considera grupuri Θ mai bogate, cu speranţa determinării efective a formelor (operatorilor) proprii Θ-invarianţi (ca în cazul aceluiaşi exemplu, TSA-I, a se vedea secţiunea următoare). Deocamdată se preferă să se trateze cazul mai general şi să se obţină informaţii cât mai multe cu putinţă.

Următorul rezultat, având o demonstraţie originală, este o generalizare a rezultatului 8.2 din [**46**]*; el dă o condiţie necesară pentru existenţa formelor proprii ireductibile pentru "abc-TS". În observaţia 6.3.2 se determină efectiv funcţia de renormalizare pe un caz particular de "abc-TS", lucru posibil deoarece avem de-a face cu un fractal cu frontiera formată cu* 3 *puncte.*

TEOREMA 6.3.1. *Fie abc-triunghiul lui Sierpinski $\mathcal{L}_{abcTS}$ (cu Θ grupul de simetrie trivial) şi $\mathbf{r} := (r_1, \ldots, r_M)$ cu $r_i > 0$ arbitrari. Atunci*

a) $\mathbb{D}$-părţile $\Lambda_\mathbf{r}$-invariante sunt $\mathbb{D}_{(1,1,1)} \simeq (0,\infty)^3$, $\mathbb{D}_1 := \mathbb{D}_{(1,0,0)} \simeq (0,\infty) \times \{0\} \times \{0\}$, $\mathbb{D}_2 := \mathbb{D}_{(0,1,0)} \simeq \{0\} \times (0,\infty) \times \{0\}$, $\mathbb{D}_3 := \mathbb{D}_{(0,0,1)} \simeq \{0\} \times \{0\} \times (0,\infty)$.

b) dacă $\{\lambda_i\}_{i=\overline{1,3}}$ sunt valorile proprii pentru $\{\mathbb{D}_i\}_{i=\overline{1,3}}$, iar $\{\lambda'_i\}_{i=\overline{1,3}}$ sunt valorile proprii pentru $\left\{\Lambda_\mathbf{r}\left(\mathbb{D}_{(1,1,1)} + \infty\mathbb{D}_i\right)\right\}_{i=\overline{1,3}}$ şi are loc $\lambda_i < \lambda'_i$, $i = \overline{1,3}$, atunci există forme proprii ireductibile pentru funcţia de renormalizare $\Lambda_\mathbf{r}$ asociată lui $\mathcal{L}_{abcTS}$.

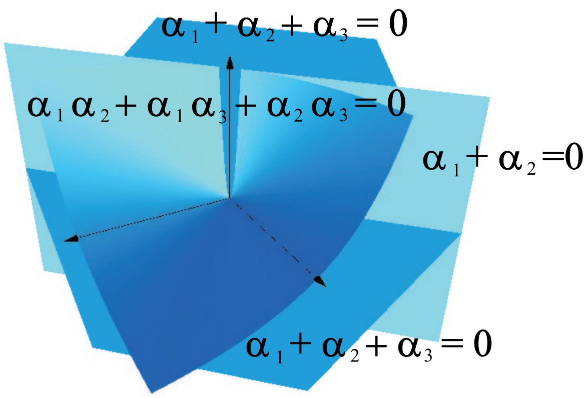

FIGURA 6.15. Conul $\mathbb{P}$ pentru abc-triunghiul lui Sierpinski

DEMONSTRAŢIE. a) Θ-orbitele sunt: $O_1 := \{\{z_1, z_2\}\}$, $O_2 := \{\{z_2, z_3\}\}$, $O_3 := \{\{z_3, z_1\}\}$. Matricele de conductanţă corespunzătoare orbitelor O_1, O_2, O_3 sunt date de

$$c_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ c_0^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ c_0^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

O matrice de conductanţă arbitrară este dată de $c = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$, α_1, α_2, $\alpha_3 \geq 0$. Matricele operatorilor asociaţi (cu (L.1), (L.2)$'$ şi (L.3)) sunt $E_1 = E(1,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $E_2 = E(0,1,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $E_3 = E(0,0,1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Un operator arbitrar are matricea dată de

$$E = E(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} -\alpha_2 - \alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & -\alpha_1 - \alpha_3 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & -\alpha_1 - \alpha_2 \end{pmatrix}, \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 \geq 0.$$

Conul $\mathbb{P} := \mathbb{P}_\Theta$ al formelor cu (D.F.1) şi (D.F.2)$'$ se poate determina dacă se cunosc valorile proprii pentru $E(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Rezolvând ecuaţia $\det(E(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) - \lambda I_3) = 0$ se obţine

$$\lambda \left[\lambda^2 + 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\lambda + 3(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)\right] = 0.$$

Determinantul trinomului din paranteză este $\Delta = 4(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_1\alpha_2 - \alpha_1\alpha_3 - \alpha_2\alpha_3) \geq 0$, deci soluţiile λ_1, λ_2 sunt reale. Acestea sunt negative $\Longleftrightarrow$ produsul lor este pozitiv iar suma negativă.

Atunci $\varepsilon = \varepsilon_{E(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}$ este pozitiv semidefinită $\Longleftrightarrow$ $E(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ negativ semidefinită $\Longleftrightarrow$ valorile proprii sunt negative. Deci:

$$\mathbb{P} := \mathbb{P}_\Theta \simeq \left\{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 0,\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 \geq 0\right\}.$$

(figura 6.15).

$\mathbb{P}$-părţile sunt următoarele:

- $\mathbb{P}_1 := \mathbb{P}^\circ \simeq \left\{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \,\middle|\, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 > 0,\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 > 0\right\}$.
- $\mathbb{P}_2 \simeq \left\{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \,\middle|\, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 0,\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 = 0\right\} \simeq \partial\mathbb{P}$.

$\mathbb{P}_1$ este chiar interiorul conului $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}_2$ este frontiera sa (con nepoliedral).

Conul formelor Dirichlet corespunzătoare operatorilor $E(a, b, c)$ este dat de

$$\mathbb{D} := \mathbb{D}_\Theta = \left\{\varepsilon \,\middle|\, \varepsilon = a\varepsilon_0^{(1)} + b\varepsilon_0^{(2)} + c\varepsilon_0^{(3)}, a, b, c \geq 0\right\},$$

unde $\varepsilon_0^{(1)}$, $\varepsilon_0^{(2)}$, $\varepsilon_0^{(3)}$ sunt formele corespunzătoare matricelor de conductanţă $c_0^{(1)}$, $c_0^{(2)}$, $c_0^{(3)}$, respectiv operatorilor E_1, E_2, E_3. Se observă că $\mathbb{D} \simeq \mathbb{R}_+^3$.

$\mathbb{D}$-părţile sunt absolut identice cu cele de la FL "nested". Grafurile asociate sunt prezentate în figura 6.16. (1) este graful complet, iar (5), (6), (7) sunt grafurile corespunzătoare orbitelor O_1, O_2, O_3.

Evident $\mathbb{D}^\circ$, $\mathbb{D}_{(1,1,0)}$, $\mathbb{D}_{(1,0,1)}$, $\mathbb{D}_{(0,1,1)} \subset \mathbb{P}^\circ$; $\partial\mathbb{P} = \mathbb{D}_{(1,0,0)} \cup \mathbb{D}_{(0,1,0)} \cup \mathbb{D}_{(0,0,1)}$.

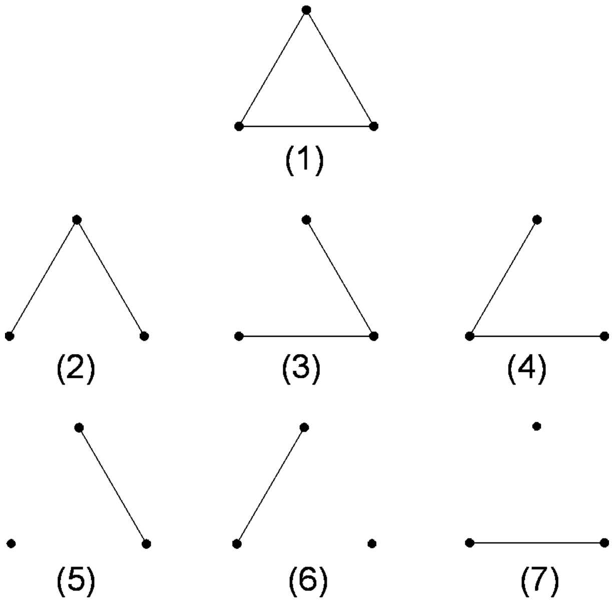

FIGURA 6.16. Grafurile $\Gamma(\mathbb{D}.)$ pentru abcTS: (1)-$\Gamma(\mathbb{D}_{(1,1,1)})$; (2)-$\Gamma(\mathbb{D}_{(1,1,0)})$; (3)-$\Gamma(\mathbb{D}_{(1,0,1)})$; (4)-$\Gamma(\mathbb{D}_{(0,1,1)})$; (5)-$\Gamma(\mathbb{D}_{(1,0,0)})$; (6)-$\Gamma(\mathbb{D}_{(0,1,0)})$; (7)-$\Gamma(\mathbb{D}_{(0,0,1)})$

Deoarece Θ este grupul trivial, $\mathbf{r} := (r_1, \ldots, r_M)$ poate fi considerat cu $r_i > 0$ absolut arbitrari. Pt. simplitate se vor considera ponderi egale pentru similitudinile care au $\psi_i(H)$ pe aceeaşi latură, anume, pentru exemplul considerat ($k_1 = 4$, $k_2 = 5$, $k_3 = 3$) $r_1 = r_2 = r_3 =: 1/\eta_3$, $r_4 = r_5 = r_6 = r_7 =: 1/\eta_1$, $r_8 = r_9 = r_{10} = r_{11} = r_{12} =: 1/\eta_2$, η_1, η_2, $\eta_3 > 0$.

Cu observaţia 5.9.3-(2) se determină acţiunea lui Λ pe $\mathbb{D}$-părţi. Aceasta nu depinde de valorile ponderilor, atâta timp cât ele sunt strict pozitive.

- $\Lambda(\mathbb{D}_{(1,1,1)}) \subset \mathbb{D}_{(1,1,1)}$ (evident orice două puncte din V_0 se pot uni printr-un drum din $\Gamma(\Psi(\mathbb{D}_{(1,1,1)}))$ cu puncte din $V_1 \backslash V_0$);
- $\Lambda(\mathbb{D}_{(1,1,0)}) \subset \mathbb{D}_{(1,1,1)}$ (orice două puncte din V_0 se pot uni printr-un drum din $\Gamma(\Psi(\mathbb{D}_{(1,1,0)}))$ cu puncte din $V_1 \backslash V_0$; a se vedea şi figura 6.17, unde, pentru simplificare, s-au considerat, în graful $\Gamma(\mathbb{D}_{(1,1,0)})$, conductanţe $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 = 0$ în loc de $\alpha_1\eta_i > 0$, $\alpha_2\eta_i > 0$, $\alpha_3\eta_i = 0$); analog $\Lambda(\mathbb{D}_{(1,0,1)}) \subset \mathbb{D}_{(1,1,1)}$ şi $\Lambda(\mathbb{D}_{(0,1,1)}) \subset \mathbb{D}_{(1,1,1)}$;
- $\Lambda(\mathbb{D}_{(1,0,0)}) \subset \mathbb{D}_{(1,0,0)}$ (figura 6.18; doar z_2 şi z_3 se pot uni printr-un drum din $\Gamma(\Psi(\mathbb{D}_{(1,0,0)}))$ cu puncte din $V_1 \backslash V_0$); analog $\Lambda(\mathbb{D}_{(0,1,0)}) \subset \mathbb{D}_{(0,1,0)}$ şi $\Lambda(\mathbb{D}_{(0,0,1)}) \subset \mathbb{D}_{(0,0,1)}$.

Aşadar $\mathbb{D}_{(1,1,1)}, \mathbb{D}_{(1,0,0)}, \mathbb{D}_{(0,1,0)}, \mathbb{D}_{(0,0,1)}$ sunt $\mathbb{D}$-părţile Λ-invariante. Singura $\mathbb{D}$-parte Λ-invariantă inclusă în $\mathbb{P}^\circ$ este $\mathbb{D}_{(1,1,1)} = \mathbb{D}^\circ$.

b) Valorile proprii corespunzătoare $\mathbb{D}$-părţilor Λ-invariante se obţin astfel:

- valoarea proprie pentru $\mathbb{D}_1 := \mathbb{D}_{(1,0,0)}$ este $\lambda_1 = \left(\frac{1}{\alpha_1\eta_2} + \frac{k_3}{\alpha_1\eta_3}\right)^{-1} \Big/ \alpha_1 = \left(\frac{1}{\eta_2} + \frac{k_3}{\eta_3}\right)^{-1}$ (în figura 6.18 rezistenţele în serie de pe latura "mare" se pot înlocui, cu legea lui Ohm, cu una singură cu valoarea $\left(\frac{1}{\alpha_1\eta_2} + \frac{k_3}{\alpha_1\eta_3}\right)^{-1}$); analog valoarea proprie pentru $\mathbb{D}_2 := \mathbb{D}_{(0,1,0)}$ este $\lambda_2 = \left(\frac{k_1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_3}\right)^{-1}$ iar valoarea proprie pentru $\mathbb{D}_3 := \mathbb{D}_{(0,0,1)}$ este $\lambda_3 = \left(\frac{1}{\eta_1} + \frac{k_2}{\eta_2}\right)^{-1}$.
- valoarea proprie pentru $\mathbb{D}_{(1,1,1)}$ este greu de intuit. În observaţia 6.3.2 se va calcula efectiv funcţia de renormalizare.

În continuare se determină valorile proprii λ'_i pentru $\Lambda(\mathbb{D}^\circ + \infty\mathbb{D}_i)$, $i = \overline{1,3}$ cu scopul de a aplica "testul lui Sabot". Valoarea proprie a lui $\Lambda(\mathbb{D}^\circ + \infty\mathbb{D}_1)$ se obţine prin "scurtcircuitare", aplicând legile privind rezistenţe "legate în serie", sau "în paralel":

$$\lambda'_1 = \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\alpha_3} \left\{ \frac{1}{\eta_3} + \left[\frac{\eta_2}{k_2} + \left(\frac{k_3 - 1}{\eta_3} + \frac{1}{\eta_1} \right)^{-1} \right]^{-1} \right\}^{-1},$$

$$\lambda'_2 = \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{\alpha_1} \left\{ \frac{1}{\eta_1} + \left[\frac{\eta_3}{k_3} + \left(\frac{k_1 - 1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} \right)^{-1} \right]^{-1} \right\}^{-1},$$

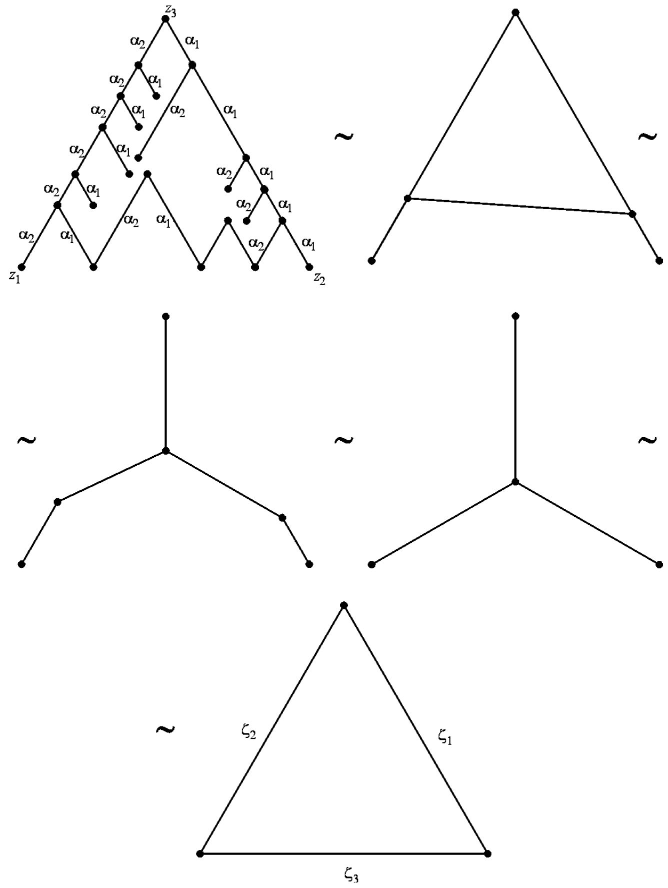

FIGURA 6.17. $\Lambda(\mathbb{D}_{(1,1,0)}) \subset \mathbb{D}_{(1,1,1)}$ pentru "abc-TS": α_1, $\alpha_2 > 0$ iar ζ_1, ζ_2, $\zeta_3 > 0$

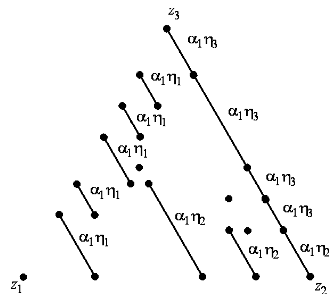

FIGURA 6.18. $\Lambda(\mathbb{D}_{(1,0,0)}) \subset \mathbb{D}_{(1,0,0)}$ pentru "abc-TS"

$$\lambda_3' = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_2} \left\{ \frac{1}{\eta_2} + \left[\frac{\eta_1}{k_1} + \left(\frac{k_2 - 1}{\eta_2} + \frac{1}{\eta_3} \right)^{-1} \right]^{-1} \right\}^{-1}.$$

Dacă $\lambda_i < \lambda_i'$, $i = 1, 2, 3$, aplicând "testul lui Sabot" 5.9.15 se obţine concluzia teoremei.

Dacă se vor pune inecuaţiile de mai sus sub o formă mai simplă, pentru valori particulare ale lui α_1, α_1, α_3 *şi* k_1, k_2, k_3 *se va găsi o "regiune" a valorilor* (η_1, η_2, η_3) *pentru care are loc existenţa formelor proprii ireductibile.* □

OBSERVAŢIA 6.3.2. Calculul efectiv al funcţiei de renormalizare se poate face în acest caz, pentru că avem de-a face cu un fractal cu frontiera iniţială formată cu 3 puncte iar transformarea $\Delta - Y$ este o bijecţie. *Deoarece calculele se îngreunează datorită prezenţei celor trei ponderi* η_1, η_2, η_3, *dar nu prezintă diferenţe de strategie, se va simplifica, presupunând că toate ponderile sunt* 1. Se va considera aplicaţia (bijecţie) care codifică transformarea $\Delta - Y$: $\varphi : (0, \infty)^3 \longrightarrow (0, \infty)^3$, $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) := (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, cu $\beta_1 = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3}{\alpha_1}$, $\beta_2 = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3}{\alpha_2}$, $\beta_3 = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3}{\alpha_3}$. Deasemenea, compunând corespunzător aplicaţia de renormalizare Λ cu aplicaţiile Π şi izomorfismele de conuri aferente, se poate practic considera

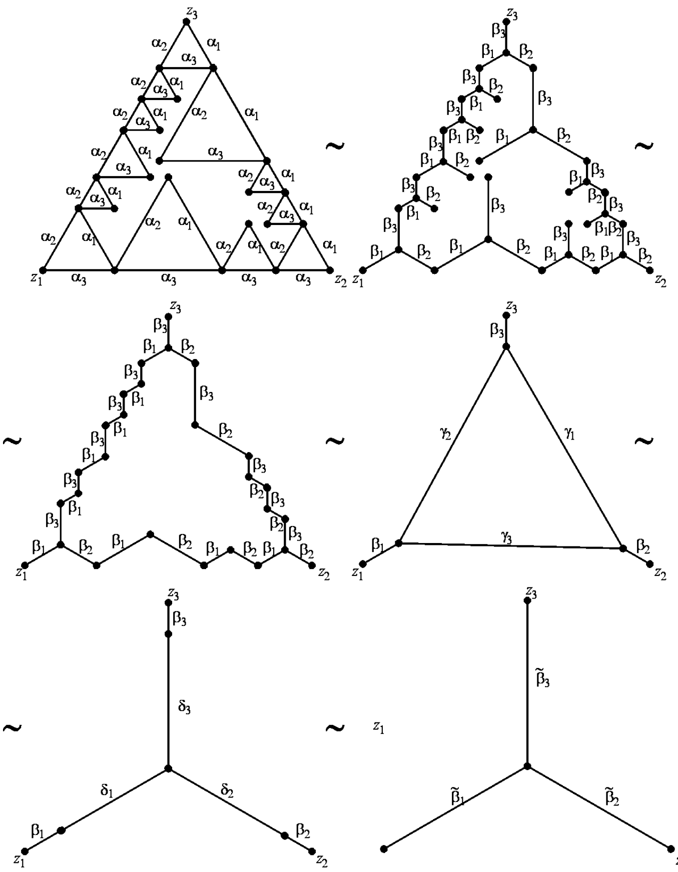

FIGURA 6.19. Renormalizarea "abc-TS"

$\Lambda \equiv f_\Lambda \equiv f : (0,\infty)^3 \longrightarrow (0,\infty)^3$, $f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = (\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3')$, unde $\Lambda(\varepsilon_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}) = \varepsilon_{(\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3')}$, iar

$$\varepsilon_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} \simeq D_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} = \begin{pmatrix} -\alpha_2-\alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & -\alpha_1-\alpha_3 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & -\alpha_1-\alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Aplicând succesiv transformări $\Delta - Y$ şi legea lui Ohm se obţin (figura 6.19)

- $\beta_i = \frac{\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3}{\alpha_i}$, $i=\overline{1,3}$, prin aplicarea succesivă a transformărilor $\Delta - Y$;
- $\gamma_1 = \left(k_1\left(\frac{1}{\beta_2}+\frac{1}{\beta_3}\right)\right)^{-1} = \frac{\beta_2\beta_3}{k_1(\beta_2+\beta_3)}$, $\gamma_2 = \left(k_2\left(\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_3}\right)\right)^{-1} = \frac{\beta_1\beta_3}{k_2(\beta_1+\beta_3)}$,
  $\gamma_3 = \left(k_3\left(\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_2}\right)\right)^{-1} = \frac{\beta_1\beta_2}{k_3(\beta_1+\beta_2)}$, prin aplicarea succesivă a legii lui Ohm;
- $\delta_i = \frac{S}{\gamma_i}$, $i=\overline{1,3}$, cu $S := \gamma_1\gamma_2+\gamma_1\gamma_3+\gamma_2\gamma_3$ prin aplicarea încă o dată a transformării $\Delta - Y$;
- $\widetilde{\beta}_i = \left(\frac{1}{\beta_i}+\frac{1}{\delta_i}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{\beta_i}+\frac{\beta_j\beta_k}{(\beta_j+\beta_k)k_1 S}\right)^{-1}$, $i,\ j,\ k \in \{1,2,3\}$ distincte, prin aplicarea de trei ori a legii lui Ohm.

Dar $(\widetilde{\beta}_1,\widetilde{\beta}_2,\widetilde{\beta}_3) = \varphi(f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3))$. Presupunând că $\exists\lambda > 0$ şi $(\alpha_1^0,\alpha_2^0,\alpha_3^0)$ cu $f(\alpha_1^0,\alpha_2^0,\alpha_3^0) = \lambda(\alpha_1^0,\alpha_2^0,\alpha_3^0)$, notând β_1^0, β_2^0, β_3^0, γ_1^0, γ_2^0, γ_3^0, δ_1^0, δ_2^0, δ_3^0, $\widetilde{\beta}_1^0$, $\widetilde{\beta}_2^0$, $\widetilde{\beta}_3^0$, S_0 numerele corespunzătoare obţinute în cursul transformărilor şi ţinând cont că φ pozitiv omogenă, se obţine $\widetilde{\beta}_i^0 = \lambda\beta_i^0$, $i=\overline{1,3}$, adică

$$\frac{1}{\lambda\beta_i^0} = \frac{1}{\beta_i^0} + \frac{\beta_j^0\beta_j^0}{(\beta_j^0+\beta_k^0)k_1 S_0},\ i \neq j \neq k \in \{1,2,3\}.$$

De aici $\lambda < 1$ şi $k_1(\beta_2^0+\beta_3^0) = k_2(\beta_1^0+\beta_3^0) = k_3(\beta_1^0+\beta_2^0) = \xi_0$, unde $\xi_0 := \frac{\lambda\beta_1^0\beta_2^0\beta_3^0}{(1-\lambda)S_0} > 0$, deci

$$\beta_1^0 = \frac{\xi_0}{2}(k_2^{-1}+k_3^{-1}-k_1^{-1}),\ \beta_2^0 = \frac{\xi_0}{2}(k_1^{-1}+k_3^{-1}-k_2^{-1}),\ \beta_3^0 = \frac{\xi_0}{2}(k_1^{-1}+k_2^{-1}-k_3^{-1}). \tag{6.1}$$

Condiţia obligatorie pentru existenţa soluţiilor este aşadar $k_2^{-1}+k_3^{-1}-k_1^{-1} > 0$, $k_1^{-1}+k_3^{-1}-k_2^{-1} > 0$, $k_1^{-1}+k_2^{-1}-k_3^{-1} > 0$. Dacă aceasta este îndeplinită, (6.1) poate avea soluţii $(\beta_1,\beta_2,\beta_3) \in (0,\infty)^3$, iar $\varphi^{-1}(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \in (0,\infty)^3$ va fi soluţie a problemei de renormalizare, deci $\varepsilon = \varepsilon_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} \in \mathbb{D}_{(1,1,1)}$ este formă proprie ireductibilă.

Alte forme proprii (reductibile) sunt conţinute în $\mathbb{D}_{(1,0,0)}$, $\mathbb{D}_{(0,1,0)}$ şi $\mathbb{D}_{(0,0,1)}$. Într-adevăr, $(1,0,0)$ satisface $f(1,0,0) = \lambda(1,0,0)$ pentru un anumit λ (calculat mai devreme), deci forma proprie reductibilă

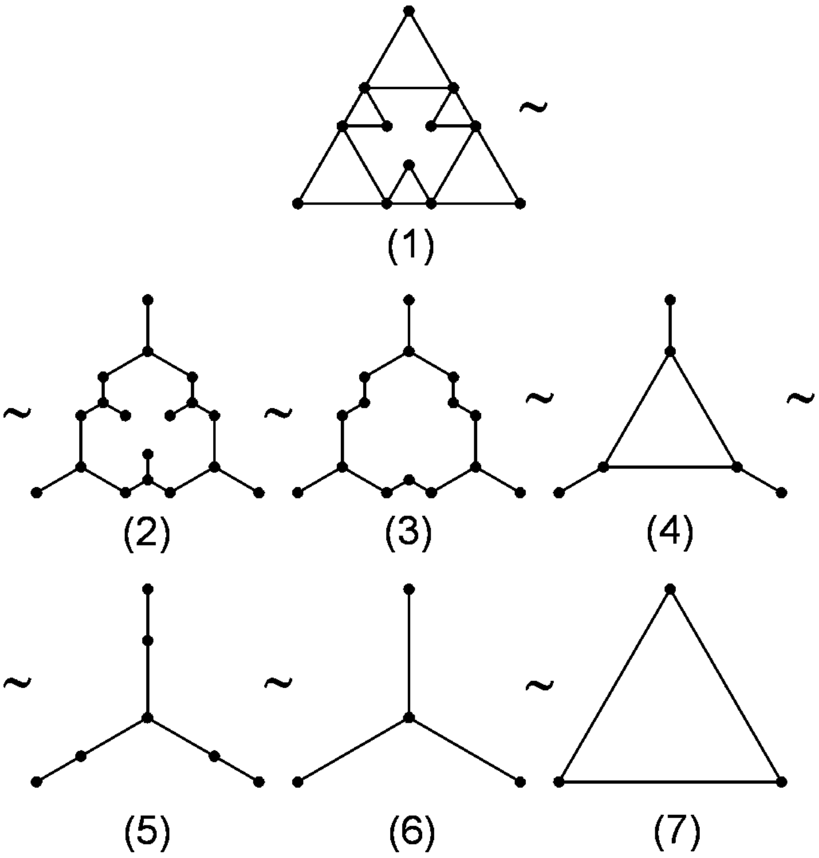

FIGURA 6.20. Renormalizarea triunghiului Sierpinski afin (TSA) I

în acest caz este chiar $\varepsilon_0^{(1)} = \varepsilon_{D_{(1,0,0)}} = \varepsilon_{E(1,0,0)} \in \mathbb{D}_{(1,0,0)}$. Analog $\varepsilon_0^{(2)} \in \mathbb{D}_{(0,1,0)}$ şi $\varepsilon_0^{(3)} \in \mathbb{D}_{(0,0,1)}$ sunt forme proprii reductibile.

6.4. Renormalizarea TSA-I şi TSA-II

(T.S.A.I) Se reaminteşte exemplul 2.3.6 (TSA I): se consideră punctele a_1, a_2, a_3, vârfurile unui triunghi echilateral de latură 1 şi $a_4 = \frac{3}{5}a_1 + \frac{2}{5}a_2$, $a_5 = \frac{3}{5}a_2 + \frac{2}{5}a_3$, $a_6 = \frac{3}{5}a_3 + \frac{2}{5}a_1$, $a'_4 = \frac{2}{5}a_1 + \frac{3}{5}a_2$, $a'_5 = \frac{2}{5}a_2 + \frac{3}{5}a_3$, $a'_6 = \frac{2}{5}a_3 + \frac{3}{5}a_1$ (a se revedea figura 2.5). Fie similitudinile $\psi_i(x) = a_i + \frac{2}{5}(x - a_i)$, $i = 1,2,3$ şi $\psi_{i+3}(x) = a_{i+3} + \frac{1}{5}(x - a_i)$, $i = 1,2,3$. S-a dedus faptul că $V_0 = \{a_1, a_2, a_3\}$ şi atractorul SIF-ului $\left\{(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|); \{\psi_i, r_i\}_{i=\overline{1,6}}\right\}$ generează un F.C.A. Mai precis, se consideră grupul de simetrie $\Theta = \mathcal{G}_s$, generat de reflecţiile relativ la dreptele mediatoare ale tuturor segmentelor cu capete în puncte din V_0. Dacă se notează cu F atractorul SIF-ului (ilustrat în figura 2.9) şi tot cu ψ_i şi restricţiile ψ_i-urilor la F, atunci $\mathcal{L}_{TSA-I} := \left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,6}}\right\}$ este un F.C.A. relativ la $\mathcal{G}_s$ şi va fi numit *triunghiul lui Sierpinski afin (TSA) - I*. El este un caz particular de abc-TS cu $M = 6$, $k_1 = k_2 = k_3 = 2$, iar factorii de scalare ai similitudinilor sunt $s_1 = s_3 = s_5 = 2/5$, $s_2 = s_4 = s_6 = 1/5$. Se vor căuta operatori proprii $\mathcal{G}_s$-invarianţi. Astfel, calculul funcţiei de renormalizare restricţionată la conurile $\mathcal{G}_s$-invariante se uşurează considerabil.

Următorul rezultat este original şi dă o condiţie necesară şi suficientă pentru existenţa operatorilor proprii $\mathcal{G}_s$-invarianţi în cazul triunghiul lui Sierpinski afin (TSA) - I:

PROPOZIŢIA 6.4.1. *Fie triunghiul lui Sierpinski afin (TSA) - I $\mathcal{L}_{TSA-I}$ (cu grupul de simetrie $\Theta = \mathcal{G}_s$) şi sistemul de ponderi $\mathbf{r} = (r, r, r, rs, rs, rs)$ $(r,\ s > 0)$. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1) există operatori proprii ireductibili $\mathcal{G}_s$ invarianţi pentru funcţia de renormalizare $\Lambda_{\mathbf{r}}$ asociată lui $\mathcal{L}_{TSA-I}$.

2) $r(2s + 5) = 3$.

În aceste condiţii $D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ *este unicul (modulo multiplicarea cu o constantă pozitivă) operator propriu pentru $\Lambda_{\mathbf{r}}$ cu valoarea proprie $\lambda = \frac{3}{r(2s+5)} = 1$.*

DEMONSTRAŢIE. Evident D este $\mathcal{G}_s$-invariant. Un sistem de ponderi $(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6)$ este $\mathcal{G}_s$-invariant $\Longleftrightarrow r_1 = r_2 = r_3$ şi $r_4 = r_5 = r_6$, aşadar $\mathbf{r} = (r, r, r, rs, rs, rs)$ cu $r,\ s > 0$ este $\mathcal{G}_s$-invariant.

Utilizând transformări $\Delta - Y$ şi $Y - \Delta$ şi legea lui Ohm, se obţin (figura 6.20) următoarele reţele electrice echivalente:

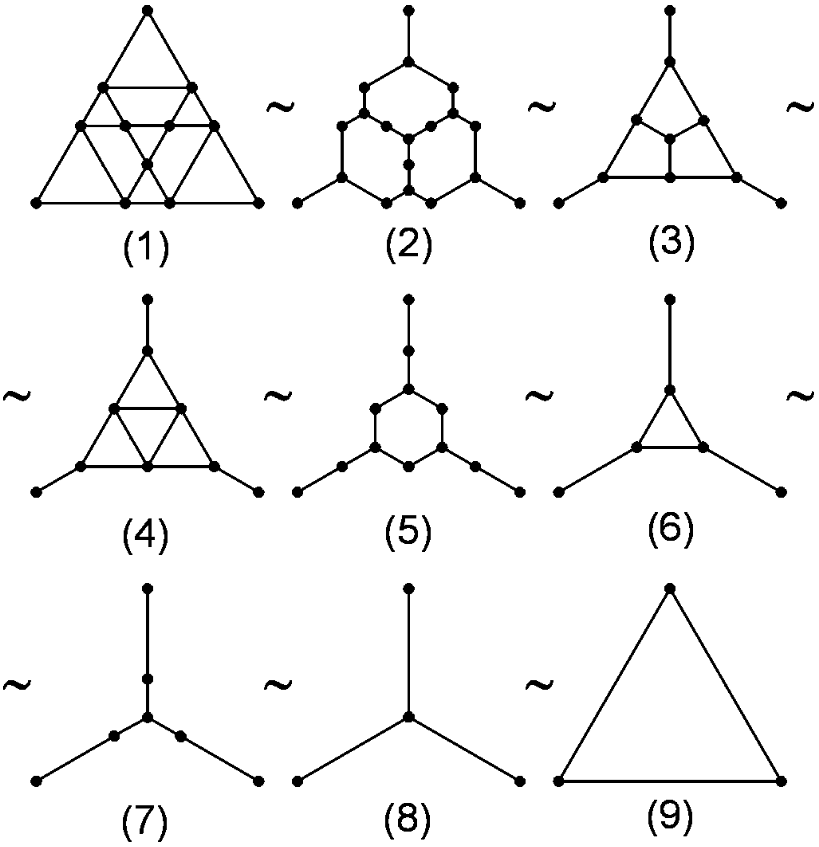

FIGURA 6.21. Renormalizarea triunghiului Sierpinski afin (TSA) II

(1)→(2): Triunghiurile mari din (1) au conductanţe pe muchii $1/r$ şi se transformă în Y cu conductanţe pe muchii $3/r$; triunghiurile mici din (1) au conductanţe pe muchii $1/rs$ şi se transformă în Y cu conductanţe pe muchii $3/rs$;

(2)→(3): Cele trei muchii "interioare" pot fi înlăturate, deoarece nu contribuie la "energia totală";

(3)→(4): Cele 3 grupe de câte 4 rezistenţe în serie din (3) sunt echivalente cu 3 rezistenţe, cu legea lui Ohm: muchiile triunghiului "mare" din (4) au conductanţe $\frac{1}{r/3+rs/3+rs/3+r/3} = \frac{3}{2r(s+1)}$;

(4)→(5): Triunghiul "mare" din (4) are conductanţe pe laturi egale cu $\frac{3}{2r(s+1)}$ şi se transformă într-un Y cu conductanţe $\frac{9}{2r(s+1)}$ prin aplicarea unei transformări $\Delta - Y$;

(5)→(6): Orice două rezistenţe în serie din (5) sunt echivalente cu o alta, cu valoare dată de legea lui Ohm: $\frac{9}{2rs+5r}$;

(6)→(7): În final, o transformare $Y - \Delta$ conduce la conductanţe cu valoarea $\frac{3}{2rs+5r}$ pentru muchiile triunghiului "mare" din (7).

Aşadar condiţia necesară şi suficientă pentru existenţa operatorilor proprii ireductibili $\mathcal{G}_s$ invarianţi pentru funcţia de renormalizare $\Lambda_{\mathbf{r}}$ asociată lui $\mathcal{L}_{TSA-I}$ este $r(2s+5) = 3$ iar $D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ este unicul (modulo multiplicarea cu o constantă pozitivă) operator propriu pentru valoarea proprie $\lambda = \frac{3}{r(2s+5)} = 1$. □

(T.S.A.II) Se mai poate considera în plus faţă de **(T.S.A.I)** punctul $a_7 = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3)$ (centrul de greutate al triunghiului $a_1a_2a_3$) şi similitudinea $\psi_7(x) = a_7 + \frac{1}{5}(x - a_7)$. Atunci $V_0 = \{a_1, a_2, a_3\}$ şi atractorul SIF-ului $\left\{(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|); \{\psi_i, r_i\}_{i=\overline{1,7}}\right\}$ generează un F.C.A. relativ la grupul de simetrie $\Theta = \mathcal{G}_s$. Dacă se notează cu F atractorul SIF-ului (ilustrat în figura 2.10) şi tot cu ψ_i şi restricţiile ψ_i-urilor la F, atunci $\mathcal{L}_{TSA-II} := \left\{F, \{\psi_i\}_{i=\overline{1,7}}\right\}$ este un F.C.A. relativ la $\mathcal{G}_s$ şi va fi numit *triunghiul lui Sierpinski afin (TSA) - II*. Se vor căuta operatori proprii $\mathcal{G}_s$-invarianţi.

Următorul rezultat este original şi determină operatorul propriu $\mathcal{G}_s$-invariant şi valoarea proprie asociată în cazul triunghiul lui Sierpinski afin (TSA) - II:

PROPOZIŢIA 6.4.2. *Fie triunghiul lui Sierpinski afin (TSA) - II $\mathcal{L}_{TSA-II}$ (cu grupul de simetrie $\Theta = \mathcal{G}_s$) şi sistemul de ponderi $\mathbf{r} = (1,1,1,1,1,1,t)$ $(t > 0)$. Atunci* $D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ *este*

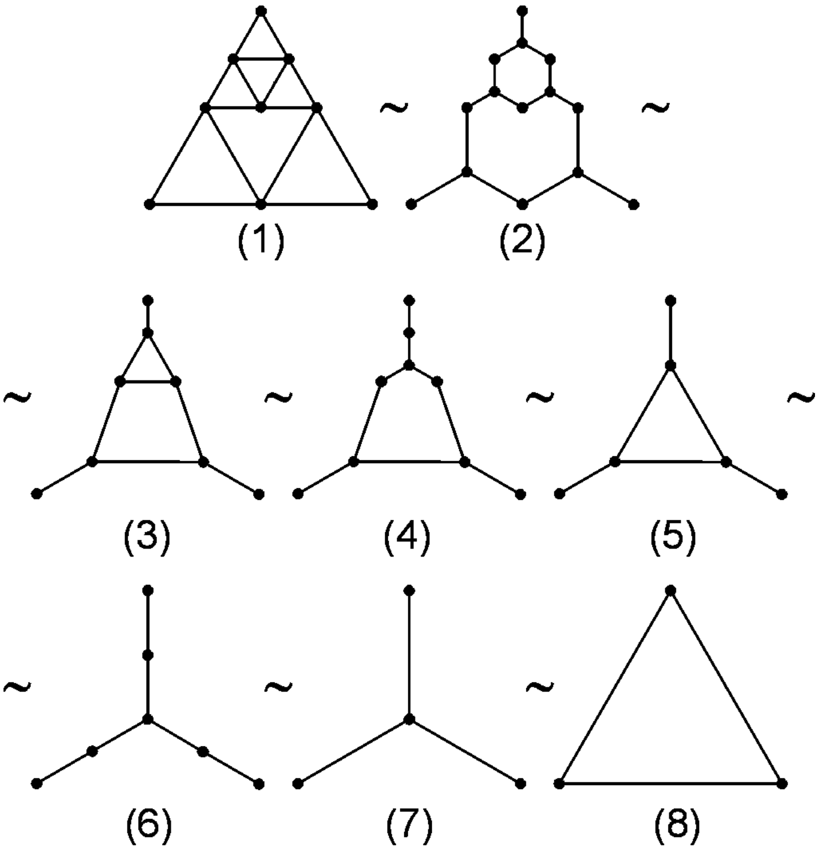

FIGURA 6.22. Renormalizarea triunghiului Sierpinski multiscalat

unicul (modulo multiplicarea cu o constantă pozitivă) operator propriu $\mathcal{G}_s$-simetric pentru funcţia de renormalizare $\Lambda_{\mathbf{r}}$ asociată lui $\mathcal{L}_{TSA-II}$, cu valoare proprie $\lambda = \frac{3t+7}{7t+15}$.

DEMONSTRAŢIE. Evident D este $\mathcal{G}_s$-invariant. Un sistem de ponderi $(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7)$ este $\mathcal{G}_s$-invariant $\Longleftrightarrow r_1 = r_2 = r_3$ şi $r_4 = r_5 = r_6$, aşadar $\mathbf{r} = (r, r, r, rs, rs, rs, rst)$ cu r, $s > 0$, $t > 0$ este $\mathcal{G}_s$-invariant. Cum calculele în acest caz sunt mai dificile, se consideră cazul mai simplu $\mathbf{r} = (1, 1, 1, 1, 1, 1, t)$ (parametrul t a fost lăsat pentru a puncta dependenţa soluţiilor de el).

Calcule cu reţele echivalente dau (figura 6.21):

(1)→(2): Toate triunghiurile din (1) au conductanţe pe laturi egale cu 1, cu excepţia celui din mijloc, cu conductanţe pe laturi $1/t$; transformări $\Delta - Y$ le aduc în Y cu conductanţe pe muchii egale cu 3, respectiv $3/t$;

(2)→(3): Legea lui Ohm aplicată rezistenţelor în serie din (2) conduce la rezistenţe echivalente în (3) cu valori $3/2$ şi $3/(t+1)$ (pentru muchiile lui Y din mijloc);

(3)→(4): O transformare $Y - \Delta$ conduce la un triunghi "mijlociu" în (4) cu laturi $1/(t+1)$;

(4)→(5): Cele 4 triunghiuri din (4) se transformă în 4 de Y; hexagonul "mijlociu" din (5) are muchii $\frac{3t+7}{2(t+1)}$; celelalte muchii ale celor trei Y au valori $\frac{3}{4}(3t+7)$;

(5)→(6): Legea lui Ohm "produce" un triunghi în (6) cu laturi $\frac{3t+7}{4(t+1)}$;

(6)→(7): O transformare $\Delta - Y$ "produce" un Y în (7) cu laturi $\frac{3(3t+7)}{4(t+1)}$;

(7)→(8): Legea lui Ohm produce un Y în (8) cu laturi $\frac{3(3t+7)}{7t+15}$;

(8)→(9): O transformare $Y - \Delta$ "produce" un triunghi în (9) cu laturi $\frac{3t+7}{7t+15}$.

Concluzia propoziţiei este acum evidentă. □

Remarcă. Se mai pot determina, în acelaşi fel, condiţii necesare şi suficiente de existenţă a formelor proprii şi pe alte cazuri de fractali cu frontiera formată cu 3 puncte (de exemplu triunghiul lui Sierpinski multiscalat, figura 6.22).

6.5. Aproximarea formelor (operatorilor proprii). Determinarea efectivă a operatorilor proprii pentru fractali F.C. cu frontieră cu mai mult de trei puncte

Determinarea efectivă a "unicului" operator propriu pentru TSA a fost posibilă pentru că acesta era un fractal cu frontiera formată cu trei puncte. Pentru astfel de fractali, transformările $\Delta - Y$ şi $Y - \Delta$ s-au putut utiliza cu succes ($\Delta - Y$ este o transformare bijectivă şi permite determinarea tuturor soluţiilor).

Dar pentru fractali cu frontiera cu mai mult de trei puncte, calculele sunt mai complicate: a se vedea articolele lui V. Metz [**39**]-[**42**] cu exemplificări pe fulgul lui Vicsek (cu frontiera formată cu 4 puncte); se impun alte tipuri de reţele electrice echivalente şi transformările asociate lor ([**37**]-pag.317).

Pentru cazul F.C.A.-urilor, dacă γ este valoarea proprie a lui $\mathbb{P}_s^\circ$, iar $\mathcal{F}$ "unica" formă proprie, domeniul de atracţie al "atractorului" $\{\alpha\mathcal{F} \mid \alpha > 0\}$ al sistemului dinamic $(\mathbb{P}_s, (1/\gamma)\Lambda)$ este $\mathbb{P}_s^\circ$ (corolarul 5.8.5).

Am dezvoltat un program Java pentru a verifica aceasta. Formula (4.12) şi teorema 4.1.16 sunt utilizate pentru a implementa în program funcţia de renormalizare. Programul citeşte dintr-un fişier numărul de similitudini ale unui SIF şi cele 6 *numere reale care determină perfect fiecare similitudine (a se vedea (1.6)). Datele de intrare sunt coordonatele punctelor din* V_0*, ponderile* $\mathbf{r}$ *şi* H_0*. Se pot vizualiza primele trei iteraţii ale funcţiei de renormalizare şi numărul de iteraţii necesar pentru a "atinge" "punctul fix" (cu o eroare dată). Deoarece pentru un F.C.A. frontiera iniţială coincide cu mulţimea punctelor sale esenţiale (teorema 2.3.4), coordonatele punctelor din* V_0 *pot fi calculate cu ajutorul datelor despre similitudini, doar* H_0 *şi* $\mathbf{r}$ *rămânând ca date de intrare. Dar dacă fractalul este o S.A.P.C.F. "nonnested" nu există nici o posibilitate de a determina punctele din* V_0 *computaţional, deci este nevoie să se considere coordonatele punctelor din* V_0 *ca date de intrare. Am utilizat acest program în exemplele următoare, la aproximarea operatorilor proprii sau la determinarea efectivă a lor.*

6.5.1. Triunghiul lui Sierpinski afin I şi II. (a se vedea exemplul 2.3.6 şi subsecţiunea 6.4)

TSA I. Deoarece pentru F.C.A.-uri domeniul de atracţie al "atractorului" $\{\alpha\mathcal{F} \mid \alpha > 0\}$ al sistemului dinamic $(\mathbb{P}_s, (1/\gamma)\Lambda)$ este $\mathbb{P}_s^\circ$, se consideră în program $s = 2$ (deci $r = 1/3$ şi $\gamma = 1$). Considerând $H_0 = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, după 19 iteraţii se obţine $\Lambda^{19}(H_0) =: H_{19} \simeq \alpha D$ (cu o eroare mai mică de 0.0001) şi $\mathcal{F} = \alpha\mathcal{E}_D$, cu $\alpha \simeq 1.778$. Dar $\mathbb{P}_s^\circ$ (domeniul de atracţie) conţine forme cu operatori asociaţi cu intrări nu neapărat numere pozitive. Pentru $H_0 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ (cu $\mathcal{E}_{H_0} \in \mathbb{P}_s^\circ$), după 24 iteraţii se obţine deasemenea $\Lambda^{24}(H_0) =: H_{24} \simeq \alpha D$ (cu aceeaşi eroare) pentru $\alpha \simeq 0.337$.

TSA II. Analog cu **TSA I**, se consideră $t = 2$, deci $s = 13/29$ şi $\gamma = 13/29$. Considerând $H_0 = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, atunci $\mathcal{E}_{H_0} \in \mathbb{P}_s^\circ$; după 25 iteraţii se obţine $\Lambda^{25}(H_0) =: H_{25} \simeq D$ (cu o eroare mai mică de 0.0001) şi $\mathcal{F} = \mathcal{E}_D$ cu $\alpha \simeq 1.768$.

Se pot considera din nou forme cu operatori asociaţi cu intrări nu neapărat numere pozitive; de exemplu, $H_0 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ (pentru care $\mathcal{E}_{H_0} \in \mathbb{P}_s^\circ$); după 33 iteraţii se obţine $\Lambda^{33}(H_0) =: H_{33} \simeq D$ (cu aceeaşi eroare) cu $\alpha \simeq 0.608$.

6.5.2. Fulgul lui Lindstrom. (a se vedea exemplul 2.3.7 şi secţiunea 6.2)

Cu ajutorul programului Java amintit se va determina efectiv valoarea proprie γ *pentru conul formelor* $\mathcal{G}_s$*-invariante ireductibile în cazul fulgul lui Lindstrom. Se încearcă determinarea cu mijloace computaţionale a operatorului propriu ireductibil* $H = H(a, b, c)$.

Odată ce a fost ghicită valoarea proprie γ pentru conul formelor $\mathcal{G}_s$-invariante ireductibile $\mathbb{D}_s^i$, se poate spera că, "plecând" cu un operator cu (L.1) and (L.2), după suficiente iteraţii (corolarul 5.8.5), se va "atinge" unicul (modulo înmulţirea cu o constantă pozitivă) "punct fix" (dat de teorema 5.3.6) pentru $(1/\gamma)\Lambda$. Se va proceda astfel:

I. Se va începe cu cel mai simplu operator ireductibil $D = H(1, 1, 1)$. La început, se va considera şi $\mathbf{r} := (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$. Se consideră eroarea $\varepsilon = 0.00001$. Primele trei iteraţii ale lui Λ dau operatorii din figura 6.23: $\Lambda(D) = H(0.880952, 0.452381, 0.380952)$, $\Lambda^2(D) = H(0.496924, 0.241773, 0.197933)$, $\Lambda^3(D) = H(0.270785, 0.131098, 0.107044)$. Şirul $\Lambda^n(D)$ "tinde" la matricea nulă ($|(\Lambda^m(D))_{pq} - (\Lambda^{m+1}(D))_{pq}| <$ 0,00001 pentru $m \geq 21$; a se vedea figura 6.23 din nou). Deci alegerea lui $\mathbf{r} = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ nu a fost foarte bună. Făcând raportul intrărilor $(\Lambda^2(D))_{12}/(\Lambda(D))_{12}$, $(\Lambda^3(D))_{12}/(\Lambda^2(D))_{12}$, şi $(\Lambda^2(D))_{13}/(\Lambda(D))_{13}$, $(\Lambda^3(D))_{13}/(\Lambda^2(D))_{13}$ şi, în final, $(\Lambda^2(D))_{14}/(\Lambda(D))_{14}$, $(\Lambda^3(D))_{14}/(\Lambda^2(D))_{14}$, pentru matricele din primele trei iteraţii şi considerând o "medie" a acestor valori se obţine $\simeq 0.545$. Deci s-a obţinut o valoare aproximativă pentru valoarea proprie γ a conului formelor ireductibile.

II. Se consideră din nou $H(1, 1, 1)$, dar $\mathbf{r} = (r, r, r, r, r, r, r)$, cu $r = 0.545$. Luând din nou o medie a intrărilor operatorilor de la primele trei iteraţii (a se vedea figura 6.23) se obţine operatorul $H(1.0, 0.5, 0.4)$. După 2121 iteraţii se obţine $H(0.000826, 0.000400, 0.000326)$, operator ce pare ok, deoarece am impus calcule cu eroare mai mică de 0.00001. Deci acesta este operatorul susceptibil de a fi unicul (modulo multiplicarea cu o constantă pozitivă) operator propriu ireductibil $\mathcal{G}_s$ invariant ireductibil pentru funcţia de renormalizare a fulgului lui Lindstrom.

```
Matrix H0:
 -5.000000  1.000000  1.000000  1.000000  1.000000  1.000000
  1.000000 -5.000000  1.000000  1.000000  1.000000  1.000000
  1.000000  1.000000 -5.000000  1.000000  1.000000  1.000000
  1.000000  1.000000  1.000000 -5.000000  1.000000  1.000000
  1.000000  1.000000  1.000000  1.000000 -5.000000  1.000000
  1.000000  1.000000  1.000000  1.000000  1.000000 -5.000000
CONCLUSION: T1-J1*IX1*J1t<>H0

The result after iteration: 0
================================

Matrix H0:
 -3.047619  0.880952  0.452381  0.380952  0.452381  0.880952
  0.880952 -3.047619  0.880952  0.452381  0.380952  0.452381
  0.452381  0.880952 -3.047619  0.880952  0.452381  0.380952
  0.380952  0.452381  0.880952 -3.047619  0.880952  0.452381
  0.452381  0.380952  0.452381  0.880952 -3.047619  0.880952
  0.880952  0.452381  0.380952  0.452381  0.880952 -3.047619

The result after iteration: 1
================================

Matrix H0:
 -1.675328  0.496924  0.241773  0.197933  0.241773  0.496924
  0.496924 -1.675328  0.496924  0.241773  0.197933  0.241773
  0.241773  0.496924 -1.675328  0.496924  0.241773  0.197933
  0.197933  0.241773  0.496924 -1.675328  0.496924  0.241773
  0.241773  0.197933  0.241773  0.496924 -1.675328  0.496924
  0.496924  0.241773  0.197933  0.241773  0.496924 -1.675328

The result after iteration: 2
================================

Matrix H0:
 -0.910809  0.270785  0.131098  0.107044  0.131098  0.270785
  0.270785 -0.910809  0.270785  0.131098  0.107044  0.131098
  0.131098  0.270785 -0.910809  0.270785  0.131098  0.107044
  0.107044  0.131098  0.270785 -0.910809  0.270785  0.131098
  0.131098  0.107044  0.131098  0.270785 -0.910809  0.270785
  0.270785  0.131098  0.107044  0.131098  0.270785 -0.910809

The final results after iteration: 21
=======================================

Matrix T1-J1*IX1*J1t:
 -0.000008  0.000002  0.000001  0.000001  0.000001  0.000002
  0.000002 -0.000008  0.000002  0.000001  0.000001  0.000001
  0.000001  0.000002 -0.000008  0.000002  0.000001  0.000001
  0.000001  0.000001  0.000002 -0.000008  0.000002  0.000001
  0.000001  0.000001  0.000001  0.000002 -0.000008  0.000002
  0.000002  0.000001  0.000001  0.000001  0.000002 -0.000008

Matrix H0:
 -0.000015  0.000005  0.000002  0.000002  0.000002  0.000005
  0.000005 -0.000015  0.000005  0.000002  0.000002  0.000002
```

```
Matrix H0:
 -5.000000  1.000000  1.000000  1.000000  1.000000  1.000000
  1.000000 -5.000000  1.000000  1.000000  1.000000  1.000000
  1.000000  1.000000 -5.000000  1.000000  1.000000  1.000000
  1.000000  1.000000  1.000000 -5.000000  1.000000  1.000000
  1.000000  1.000000  1.000000  1.000000 -5.000000  1.000000
  1.000000  1.000000  1.000000  1.000000  1.000000 -5.000000
CONCLUSION: T1-J1*IX1*J1t<>H0

The result after iteration: 0
================================

Matrix H0:
 -5.591962  1.616426  0.830057  0.698995  0.830057  1.616426
  1.616426 -5.591962  1.616426  0.830057  0.698995  0.830057
  0.830057  1.616426 -5.591962  1.616426  0.830057  0.698995
  0.698995  0.830057  1.616426 -5.591962  1.616426  0.830057
  0.830057  0.698995  0.830057  1.616426 -5.591962  1.616426
  1.616426  0.830057  0.698995  0.830057  1.616426 -5.591962

The result after iteration: 1
================================

Matrix H0:
 -5.640359  1.673004  0.813983  0.666385  0.813983  1.673004
  1.673004 -5.640359  1.673004  0.813983  0.666385  0.813983
  0.813983  1.673004 -5.640359  1.673004  0.813983  0.666385
  0.666385  0.813983  1.673004 -5.640359  1.673004  0.813983
  0.813983  0.666385  0.813983  1.673004 -5.640359  1.673004
  1.673004  0.813983  0.666385  0.813983  1.673004 -5.640359

The result after iteration: 2
================================

Matrix H0:
 -5.626494  1.672763  0.809854  0.661260  0.809854  1.672763
  1.672763 -5.626494  1.672763  0.809854  0.661260  0.809854
  0.809854  1.672763 -5.626494  1.672763  0.809854  0.661260
  0.661260  0.809854  1.672763 -5.626494  1.672763  0.809854
  0.809854  0.661260  0.809854  1.672763 -5.626494  1.672763
  1.672763  0.809854  0.661260  0.809854  1.672763 -5.626494

The final results after iteration: 2121
=======================================

Matrix T1-J1*IX1*J1t:
 -0.002777  0.000826  0.000400  0.000326  0.000400  0.000826
  0.000826 -0.002777  0.000826  0.000400  0.000326  0.000400
  0.000400  0.000826 -0.002777  0.000826  0.000400  0.000326
  0.000326  0.000400  0.000826 -0.002777  0.000826  0.000400
  0.000400  0.000326  0.000400  0.000826 -0.002777  0.000826
  0.000826  0.000400  0.000326  0.000400  0.000826 -0.002777

Matrix H0:
 -0.002787  0.000829  0.000401  0.000327  0.000401  0.000829
  0.000829 -0.002787  0.000829  0.000401  0.000327  0.000401
```

FIGURA 6.23. Primele trei iteraţii pentru $\mathbf{r} := (1,1,1,1,1,1,1)$ şi $D = H(1,1,1)$; apoi pentru $\mathbf{r} = (r,r,r,r,r,r,r)$, cu $r = 0.545$ şi $D = H(1,1,1)$

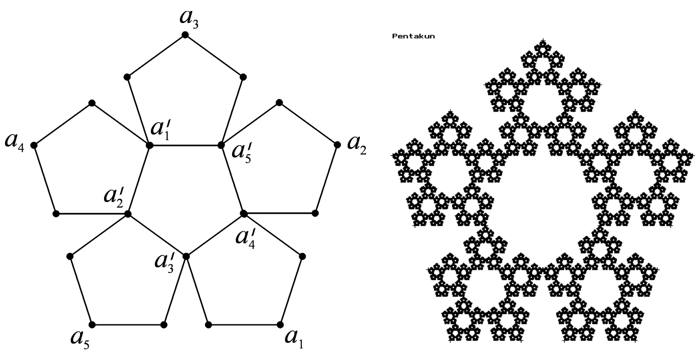

FIGURA 6.24. Pentakun-ul

III. Considerând noul operator $H(1.0, 0.5, 0.4)$ ca "punct de plecare" în iteraţii şi $r = 0.545$, se obţine după "doar" 1979 acelaşi operator de la II, care, multiplicat cu 10000 devine $H(8.26, 4, 3.26)$; acesta pare a fi o aproximare mai bună a operatorului propriu decât $8 \cdot H(1.0, 0.5, 0.4) = H(8.0, 4.0, 3.2)$ sau $8 \cdot H(1,1,1) = H(8,8,8)$.

IV. Deci, considerând $H(1,1,1)$ sau $H(1.0, 0.5, 0.4)$ ca "punct" iniţial, iar $r = 0.545$, cu o eroare mai mică de 0.00001, dupu a suficiente iteraţii se obţine operatorul $(H(8.26, 4, 3.26))$, operatorul căutat.

V. Pentru a exemplifica rezultatul de aproximare 5.8.5, se poate "pleca" cu orice operator cu (L.1) şi (L.2), pentru a obţine acelaşi rezultat $(H(8.26, 4, 3.26))$ după suficiente iteraţii: de exemplu, operatorul $H(0,-1,1)$ ($\mathcal{E}_{H(0,-1,1)} \in \mathbb{P}_s^\circ$) approximează (cu o eroare mai mică de 0.00001) operatorul propriu (multiplicat cu o constantă pozitivă) după 1706 iteraţii. $H(1,-1,2)$ ($\mathcal{E}_{H(1,-1,2)} \notin \mathbb{P}_s^\circ$) "părăseşte" $\mathbb{P}_s$ deja după prime iteraţie, iar $\Lambda^n(H(1,-1,2))$ "tinde la 0" "foarte rapid".

6.5.3. Pentakun. Se consideră a_i, $i = 1,2,3,4,5$ vârfurile unui pentagon regulat înscris într-un cerc de rază 1 şi centru $(0,0)$, iar $\psi_i(x) = a_i + \eta(x - a_i)$, $i = \overline{1,5}$, cu $\eta = \frac{2}{3+\sqrt{5}} \simeq 0.381966$. Atunci $B = \{a'_1, a'_2, a'_3, a'_4, a'_5\}$ (a se vedea figura 6.24), şi

$$\Gamma = \big\{(3\dot{5}), (4\dot{2}), (4\dot{1}), (5\dot{3}), (5\dot{2}), (1\dot{4}), (1\dot{3}), (2\dot{5}), (2\dot{4}), (3\dot{1})\big\}.$$

De aici $P = \{(\dot{1}), (\dot{2}), (\dot{3}), (\dot{4}), (\dot{5})\}$, $V_0 = \overline{V}^{(0)} = \{a_i\}_{i=\overline{1,5}}$.

Atractorul SIF-ului $\big\{(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|); \{\psi_i, c_i\}_{i=\overline{1,5}}\big\}$ cu $c_i = \eta$ este redat în figura 6.24, se numeşte *Pentakun*, şi, împreună cu restricţiile similitudinilor la el, este un F.C. Dimensiunea Hausdorff a atractorului este dată de unica soluţie a ecuaţiei $5\eta^s = 1$, adică $s = \log(1/5)/\log\eta$.

Un operator $\mathcal{G}_s$-invariant are forma $H(a,b) = \begin{pmatrix} -s & a & b & b & a \\ a & -s & a & b & b \\ b & a & -s & a & b \\ b & a & -s & a & b \\ b & b & a & -s & a \\ a & b & b & a & -s \end{pmatrix}$, unde $s := 2a + 2b$, a, $b \geq 0$. Deasemenea $\mathbf{r} := (r_1, r_2, r_3, r_4, r_5)$ $\mathcal{G}_s$-invariant $\Leftrightarrow r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5$.

Cu ajutorul aceluiaşi program Java se va determina efectiv valoarea proprie γ pentru conul formelor $\mathcal{G}_s$-invariante ireductibile în cazul Pentakun. Ca şi la fulgul lui Lindstrom, se încearcă determinarea cu mijloace computaţionale a operatorului propriu ireductibil.

Odată "ghicită" valoarea proprie γ pentru conul $\mathbb{D}_s^i$, se poate spera că, "plecând" cu orice operator cu (L.1) şi (L.2), după un număr de iteraţii (conform corolarului 5.8.5), se va "atinge" "punctul fix" (dat de teorema 5.3.6) pentru $(1/\gamma)\Lambda$. Se va proceda astfel:

I. Se începe cu operatorul $D = H(1,1)$ şi $\mathbf{r} := (1,1,1,1,1)$. După trei iteraţii ale lui Λ se obţin operatorii din figura 6.25: $\Lambda(D) = H(0.78947368, 0.26315789)$, $\Lambda^2(D) = H(0.33133818, 0.13894827)$, $\Lambda^3(D) = H(0.15520898, 0.6272457)$. Şirul $\Lambda^n(D)$ tinde la matricea nulă (deoarece $|(\Lambda^m(D))_{pq} - (\Lambda^{m+1}(D))_{pq}| < 0,00001$ pentru $m \geq 16$; a se vedea figura 6.25 din nou). Deci alegerea lui $\mathbf{r} = (1,1,1,1,1)$ nu a fost prea bună. Efectuând raporturile $(\Lambda^2(D))_{12}/(\Lambda(D))_{12}$, $(\Lambda^3(D))_{12}/(\Lambda^2(D))_{12}$, $(\Lambda^2(D))_{13}/(\Lambda(D))_{13}$, $(\Lambda^3(D))_{13}/(\Lambda^2(D))_{13}$ (figura 6.25) se obţin valori între 0.41 şi 0.52. Se consideră $r = 0.5$. Suntem interesaţi deasemenea de valoarea raportului a/b a diverşilor operatori $H(a,b)$. Bazată pe o medie a acestor raporturi obţinute pentru matricele de la primele trei iteraţii, se va considera $H(12.5, 5)$.

II. Considerând din nou $H_0 = H(1,1)$ şi diverse valori ale lui r între valorile 0.41 şi 0.52, se obţine, după câteva iteraţii, operatori $H(a,b)$ cu $a/b \simeq 2.46$.

III. Se ia $D = H(12.5, 5)$ dar cu $\mathbf{r} = (r,r,r,r,r)$, $r = 0.5$, şi considerând o medie a raporturilor intrărilor corespunzătoare matricelor de la primele trei iteraţii (ca la pasul I) se obţine valoarea 0.92; multiplicând 0.5 cu 0.92 se obţine $r = 0.46$, ceea ce constituie o mai bună aproximare a valorii proprii γ.

IV. Considerăm noul operator $H(2.46, 1)$ ca "punct de plecare" în iteraţii şi $r \simeq 0.46$ ($r = 0.463$, or 0.462 etc.), cea mai bună alegere pare a fi $r = 0.4618$; pentru această valoare şi $H(2.46, 1)$ se obţine (cu o eroare mai mică de 0.00001) că la iteraţia 4435 se obţine o aproximare a "punctului fix" $H(0.00225, 0.00091)$ (a se vedea figura 6.25).

IV. Luând $H(1,1)$ pentru $r = 0.4618$, cu o eroare mai mică de 0.00001 se obţine, după suficinte iteraţii (4154) acelaşi operator ($H(0.00225, 0.00091)$). Înmulţindu-l cu o constantă bine aleasă, se obţine $H(2.47, 1)$. Deci $H(a,b)$ cu $a \in (2.46, 2.47)$ şi $b = 1$ este operatorul propriu căutat.

V. Pentru a exemplifica corolarul 5.8.5, se poate "pleca" cu operator arbitrar cu (L.1) şi (L.2), pentru a obţine acelaşi rezultat ($H(0.00225, 0.00091)$) după suficiente iteraţii: de exemplu, operatorul $H(1,0)$ ($\mathcal{E}_{H(1,0)} \in \mathbb{P}_s^\circ$) aproximează (cu o eroare mai mică de 0.00001) operatorul propriu după 3474 iteraţii. $H(0,1)$ ($\mathcal{E}_{H(0,1)} \in \mathbb{P}_s^\circ$) aproximează (cu aceeaşi eroare) operatorul propriu după 3691 iteraţii.

6.6. Aplicaţii ale teoriei H-conurilor la forme Dirichlet pe fractali

Pornind de la definiţia formelor rezistive în sensul lui Kigami ([**30**]), prin abstractizare, a fost propusă o nouă definiţie a formelor rezistive, de data aceasta nu neapărat simetrice, de către N. Boboc şi Gh. Bucur (în [**7**]). Pornind de la un astfel de obiect se poate "dezvolta" o teorie a potenţialului ataşată (a se vedea rezultatele din [**7**] şi [**6**]). O serie de expuneri în acest sens au fost prezentate de Dl. Profesor Gheorghe Bucur în cadrul *Seminarului de Teoria Potentialului* organizat de I.M.A.R. şi Facultatea de Matematică a Universităţii Bucureşti în 2009.

În această secţiune se prezintă, în spiritul expunerilor amintite mai sus, un *Criteriu de semisaturare* relativ la conul funcţiilor excesive în raport cu forma rezistivă dată. *Propoziţia 6.6.6 şi teorema 6.6.8 sunt rezultate originale şi au apărut în* [**6**].

6.6.1. Preliminarii. Se reaminteşte (a se vedea [**7**]-Def.1,3, Rem.2) faptul că o *formă rezistivă (simetrică)* este un sistem $(\varepsilon, \mathcal{F}, X)$ unde X mulţime cu $\#(X) \geq 2$, $\mathcal{F}$ este o latice vectorială (în raport cu ordinea punctuală) de funcţii reale pe X ce conţine constantele şi separă punctele lui X, $\varepsilon : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ formă biliniară simetrică cu proprietăţile

(1) $\big(\varepsilon(f,f) \geq 0, \forall f \in \mathcal{F}\big)$ şi $\big(\varepsilon(f,f) = 0 \Leftrightarrow f = \text{ct. }\big)$;
(2) $f, g \in \mathcal{F}$ cu $f \wedge g := \inf(f,g) = 0 \Longrightarrow \varepsilon(f,g) \leq 0$;
(3) $\exists\, x_0 \in X$ astfel încât $\mathcal{F}_{x_0} = \{f \in \mathcal{F} \mid f(x_0) = 0\}$ înzestrat cu produsul scalar $\langle f, g\rangle = \varepsilon(f,g)$, $\forall\, f, g \in \mathcal{F}_{x_0}$ spaţiu Hilbert;
(4) Conul convex $\mathcal{F}_{x_0}^+$ este închis în $(\mathcal{F}_{x_0}, <\cdot,\cdot>)$.

Se ştie ([**7**]-Prop.4) că orice funcţională liniară $\varphi : \mathcal{F}_{x_0} \to \mathbb{R}$ crescătoare relativ la ordinea punctuală e continuă pe $\mathcal{F}_{x_0}$ i.e. există "potenţialul g^φ" al funcţionalei φ, $g^\varphi \in \mathcal{F}_{x_0}$ astfel încât $\varphi(f) = \varepsilon(g^\varphi, f) =$

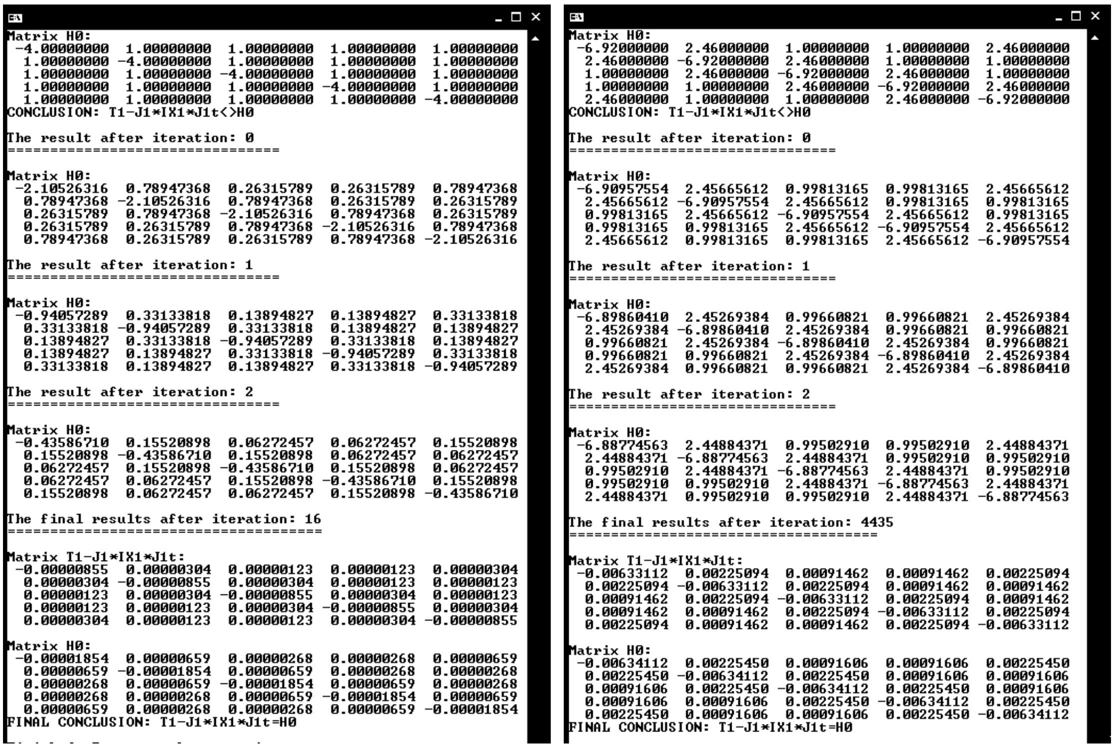

FIGURA 6.25. Primele trei iteraţii pentru $\mathbf{r} := (1,1,1,1,1)$ şi $D = H(1,1)$; apoi pentru $\mathbf{r} = (r,r,r,r,r)$, cu $r = 0.4618$ şi $D = H(2.46, 1)$

$\varepsilon(f, g^\varphi)$, $\forall f \in \mathcal{F}_{x_0}$. În particular, $\forall\, x \in X$, $\exists\, g^x \in \mathcal{F}_{x_0}$ cu $f(x) = \varepsilon(g^x, f) = \varepsilon(f, g^x)$, $\forall\, f \in \mathcal{F}_{x_0}$. Uneori g^x se numeşte *potenţialul pe X de pol x*.

Cum $\mathcal{F}_{x_0}$ latice vectorială (în raport cu ordinea punctuală) de funcţii reale pe X rezultă relaţiile

$$\begin{aligned} \inf(\varepsilon(f, g^x), \varepsilon(h, g^x)) = &\quad \varepsilon(f \wedge h, g^x),\ \forall\, f, h \in \mathcal{F}_{x_0}, \\ \sup(\varepsilon(f, g^x), \varepsilon(h, g^x)) = &\quad \varepsilon(f \vee h, g^x),\ \forall\, f, h \in \mathcal{F}_{x_0}. \end{aligned}$$

În continuare se va presupune că pe X se dă metrica d dată de $d(x,y) := ||g^x - g^y||$, $x,\ y \in X$ şi că (X, d) complet.

Remarcă importantă. Se observă faptul că dacă există un filtru $\mathcal{F}$ pe X şi un punct $y \in X$ cu $y \notin A$ pentru un element $A \in \mathcal{F}$ iar $\forall\, f \in \mathcal{F}$ $\lim_{\mathcal{F}} f(x) = f(y)$, atunci sistemul $(\varepsilon', \mathcal{F}', X')$ dat de

$$X' = X \setminus \{y\},\ \mathcal{F}' = \{f|_{X'}; f \in \mathcal{F}\}, \varepsilon' : \mathcal{F}' \times \mathcal{F}' \longrightarrow \mathbb{R}, \varepsilon'(f|_{X'}, g|_{X'}) := \varepsilon(f, g)$$

este tot o formă rezistivă pe X', deoarece orice element din $\mathcal{F}$ este determinat de restricţia sa la X'. Deci este natural să se presupună că are loc următorul tip de completitudine pe X: *dacă există un filtru $\mathcal{F}$ pe X astfel încât $\forall\, f \in \mathcal{F}$ filtrul $f(\mathcal{F})$ pe $\mathbb{R}$ converge la un număr real $\varphi(f)$, atunci se adjuncţionează la spaţiul X punctul φ şi se extind funcţiile $f \in \mathcal{F}$ la spaţiul $X \cup \{\varphi\}$ prin $f(\varphi) := \lim_{\mathcal{F}} f(x)$.*

Dacă se notează cu $\overline{f}$ funcţia pe $X \cup \{\varphi\}$ dată de

$$\overline{f}(y) = \begin{cases} f(x), & \text{if} \quad x \in X \\ \lim_{\mathcal{F}} f(x), & \text{if} \quad y = \varphi \end{cases}$$

şi se defineşte forma biliniară $\widetilde{\varepsilon}$ pe spaţiul liniar $\overline{\mathcal{F}} = \{\overline{f} \,|\, f \in \mathcal{F}\}$ prin $\widetilde{\varepsilon}(\overline{f}, \overline{g}) = \varepsilon(f, g)$, $\forall\, f, g \in \mathcal{F}$, atunci sistemul $(\widetilde{\varepsilon}, \overline{\mathcal{F}}, X \cup \{\varphi\})$ este din nou o formă rezistivă ce nu diferă de cea iniţială $(\varepsilon, \mathcal{F}, X)$. În continuare se va nota

$$S := \{s \in \mathcal{F}_{x_0} \,|\, \varepsilon(s, h) \geq 0, \forall\, h \in \mathcal{F}^+_{x_0}\}.$$

Evident S subcon convex, închis al lui $\mathcal{F}_{x_0}$ astfel încât spaţiul liniar $S - S$ este dens în spaţiul Hilbert $\mathcal{F}_{x_0}$. Se reaminteşte (a se vedea [**7**]-Prop.6) că $s \geq 0$ pe X, $\forall\, s \in S$. Într-adevăr, utilizând proprietăţile formei rezistive se obţine

$$\varepsilon(s_-, s_-) = \varepsilon(s_-, -s + s_+) = -\varepsilon(s_-, s) + \varepsilon(s_-, s_+) \leq -\varepsilon(s_-, s) \leq 0;\ s \geq 0.$$

Se remarcă că pentru $x \in X$, potenţialul Green g^x este din S şi mai mult g^x "stă" într-o rază extremală a lui S i.e. dacă $s_1, s_2 \in S$ cu $s_1 + s_2 = g^x$ atunci $\exists\, \alpha$, $0 \leq \alpha \leq 1$ cu $s_1 = \alpha g^x$, $s_2 = (1 - \alpha) g^x$ (pentru mai multe detalii a se vedea [**7**]).

Se cunoaşte (a se vedea [**7**]-Prop.6, [**8**]-2.1) că S satisface proprietăţile:

a) $s_1, s_2 \in S \Rightarrow s_1 \wedge s_2 \in S$;
b) $\forall (s_i)_{i\in I} \subset S$ familie descrescătoare, funcţia $\wedge_{i\in I} s_i$ (dată de $(\wedge_{i\in I} s_i)(x) := \inf_{i\in I} s_i(x)$, $x \in X$), aparţine lui S şi $\lim_{i,I} ||s_i - \wedge_{i\in I} s_i|| = 0$ (după filtrul secţiunii familiei $(s_i)_{i\in I}$);
c) $\forall (s_i)_{i\in I} \subset S$, dominată punctual de un element $f \in \mathcal{F}_{x_0}$, funcţia $\wedge_{i\in I} s_i$ (dată $(\vee_{i\in I} s_i)(x) := \sup_{i\in I} s_i(x)$, $x \in X$), este în S şi $\lim_{i,I} ||s_i - \vee_{i\in I} s_i|| = 0$ (după filtrul secţiunii familiei $(s_i)_{i\in I}$);
d) $\forall s, s_1, s_2 \in S$ cu $s \le s_1 + s_2$, $\exists s_1', s_2' \in S$ cu $s = s_1' + s_2'$, $s_1' \le s_1$, $s_2' \le s_2$;
e) $\inf(\alpha, s) \in S$, $\forall s \in S$, $\forall \alpha$ funcţie constantă pozitivă pe X_0.

Deci S H-con în sensul [**8**]. Mai mult, restricţia la $S \times S$ a "energiei ε" are proprietăţile:

(1) $\forall s \in S$ aplicaţia $t \to \varepsilon(s,t)$ definită pe S este aditivă, crescătoare, pozitiv omogenă, continuă la stânga "în ordine", i.e. $\forall (s_i)_{i\in I}$ crescătoare, dominată în S, familia $(\varepsilon(s, s_i))_i$ creşte la $\varepsilon(s, \vee_{i\in I} s_i)$;
(2) $\forall (s_i)_{i\in I} \subset S$, familia $(\varepsilon(s, s_i))_i$ descreşte la $(\varepsilon(s, \wedge_{i\in I} s_i))$;
(3) Dacă $\varphi : S \to \mathbb{R}_+$ aditivă, crescătoare, pozitiv omogenă, atunci $\exists!\, s_\varphi \in S$ cu $\varphi(s) = \varepsilon(s_\varphi, s)$, $\forall s \in S$.

6.6.2. Extensia formei energie. Se va nota mai departe $\overline{S}$ mulţimea tuturor funcţiilor $t : X_0 := X \setminus \{x_0\} \to [0, \infty]$ cu proprietatea că $\forall s \in S$, $t \wedge s \in S$, $t(x_0) = 0$ şi mulţimea $[s < \infty]$ este densă în X relativ la "topologia slabă" pe X (i.e. cea mai slabă topologie pe X care face funcţiile $f \in \mathcal{F}_{x_0}$ contiune). Cum $S - S$ dens în spaţiul Hilbert $\mathcal{F}_{x_0}$, pentru orice $f \in \mathcal{F}_{x_0}$, se poate considera $(d_n)_n \subset S - S$ cu $\lim_{n\to\infty} ||f - d_n|| = 0$. Utilizând continuitatea operatorilor "reduite" (a se vedea [**8**]-pag.40, prop. 7.2.2) are loc

$$\lim_{n\to\infty} ||R(f - d_n)|| = 0,\ d_n - R(f - d_n) \le f,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Deci funcţia f este limita în spaţiul Hilbert $\mathcal{F}_{x_0}$ a şirului $(s_n' - s_n'')_n$ pentru care $s_n' - s_n'' \le f$, $\forall \forall n \in \mathbb{N}$. Va rezulta atunci

$$\lim_n \varepsilon(s_n' - s_n'', s) = \varepsilon(f, s) = \sup_n \varepsilon(s_n' - s_n'', s),\ \varepsilon(s_n' - s_n'', s) \le \varepsilon(f, s),\ \forall s \in S.$$

Dacă se consideră pe S "topologia fină", i.e. cea mai fină topologie pe S pentru care $\forall u \in S$ funcţia pe S dată de $s \xrightarrow{\widehat{u}} \varepsilon(u, s)$ devine continuă. Din consideraţiile precedente se deduce că $\forall f \in \mathcal{F}_{x_0}$ funcţia pe S $s \xrightarrow{\widehat{f}} \varepsilon(f, s)$ este inferior semicontinuă relativ la topologia fină.

Propoziţia 6.6.1. *Topologia fină pe S coincide cu urma pe S a topologiei slabe a spaţiului Hilbert $\mathcal{F}_{x_0}$.*

Demonstraţie. Aserţiunea rezultă din consideraţiile anterioare, deoarece $\forall f \in \mathcal{F}_{x_0}$, $\widehat{f}$, $-\widehat{f}$ sunt inferior semicontinue în raport cu topologia fină. □

Se reaminteşte faptul că *topologia fină* pe X este cea mai "mică" topologie pe X ce face funcţile $s \in S$ continue pe X.

Corolarul 6.6.2. *Topologiile fină şi slabă pe X coincid.*

Demonstraţie. Rezultă din definiţii utilizând propoziţia 6.6.1. □

Se ştie (a se vedea [**7**]-3.2.2) că $\forall A \subset X$ fin deschisă, aplicaţia pe S dată de

$$s \longrightarrow B^A s := \wedge\{s' \in S \,|\, s' \ge s \text{ on } A\}$$

este un *baleiaj* pe S i.e. aditivă, pozitiv omogenă, crescătoare, idempotentă, contractivă (i.e. $B^A s \le s$, $\forall s \in S$), continuă la stânga "în ordine". Mai mult, are loc

$$B^A s = s, \text{ on } A,\ \forall s \in S,\ \varepsilon(B^A s, s') = \varepsilon(s, B^A s'),\ \forall s, s' \in S,$$

şi de aceea, $\forall x \in X$, $\forall A \subset X$ cu $x \in A$ are loc

$$\varepsilon(B^A g^x, s) = \varepsilon(g^x, B^A s) = B^A s(x) = s(x) = \varepsilon(g^x, s), \forall s \in S,$$

i.e. $B^A g^x = g^x$. În particular se deduce

$$B^{\{x\}} g^x = g^x,\ \forall x \in X$$

iar $g^x(y) \le g^x(x)$, $\forall y \in X$. Ultima aserţiune rezultă din faptul că $\forall s \in S$ funcţia $s \wedge 1_X$ aparţine lui S.

Propoziţia 6.6.3. *Orice element $t \in \overline{S}$ este finit pe X.*

Demonstraţie. Dacă se presupune că $y \in X$ este cu proprietatea $t(y) = +\infty$ atunci, utilizând consideraţiile anterioare,

$$\left(\frac{1}{n}\,t\right) \wedge g^y \in S,\ \left(\left(\frac{1}{n}\,t\right) \wedge g^y\right)(y) = g^y(y),\ \left(\frac{1}{n}\,t\right) \wedge g^y \geq B^{\{y\}}g^y = g^y,$$

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Cum t este finită pe o mulţime fin densă a lui X, se deduce că $g^y = 0$ pe o mulţime fin densă a lui X i.e. $g^y \equiv 0$. Dar în acest caz $\forall\, f \in \mathcal{F}_{x_0}$ are loc $f(y) = 0$ i.e. $y = x_0$, ceea ce contrazice faptul că $t(y) > 0$. □

Remarcă. Luând în considerare propoziţia precedentă, se poate considera pe $\overline{S}$ o topologie numită "topologia naturală", anume cea mai slabă topologie pe $\overline{S}$ pentru care funcţiile definite pe $\overline{S}$ prin $\overline{S} \ni t \to t(y)$, $\forall y \in X$ devin continue. Dacă se identifică orice x din X cu elementul g^x din $S(S \subset \overline{S})$ se obţine o nouă topologie pe X numită din nou "topologia naturală". Evident este mai slabă decât topologia fină pe X. Are loc şi:

Propoziţia 6.6.4. *Dacă $t : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ are proprietatea $t \wedge s \in S$, $\forall\, s \in S$, $t(x_0) = 0$ şi mulţimea $[t < \infty]$ e densă în X relativ la topologia naturală, atunci $t \in \overline{S}$.*

Demonstraţie. Presupunând contrariul, se deduce ca în propoziţia 6.6.3 exis-tenţa unui element $y \in X$, $y \neq x_0$ astfel încât elementul g^y este zero pe o mulţime natural densă în X. Dar $g^y(y) > 0$ şi mulţimea $[g^y > 0]$ este o submulţime nevidă, natural deschisă a lui X. □

Definiţia 6.6.5. Pentru orice $u, v \in \overline{S}$ se notează cu $\overline{\varepsilon}(u, v)$ elementul din $\overline{\mathbb{R}}_+$ dat de $\overline{\varepsilon}(u, v) = \sup\{\varepsilon(s, t) | s, t \in S, s \leq u, t \leq v\}$.

Este uşor de verificat că

a) $\overline{\varepsilon}(u, v) = \varepsilon(u, v)$ pentru $u, v \in S$; $\overline{\varepsilon}(u, v) = \overline{\varepsilon}(v, u)$, $\forall u, v \in \overline{S}$;
b) $\overline{\varepsilon}$ crescătoare în fiecare variabilă u şi v şi are loc:

$$u' \leq u'' \Leftrightarrow \varepsilon(u', v) \leq \varepsilon(u'', v),\ \forall v \in \overline{S};$$

c) $\overline{\varepsilon}(u, g^x) = u(x)$, $\forall x \in X$, $\forall u \in \overline{S}$;
d) ε aditivă şi pozitiv omogenă în fiecare variabilă.

Următoarele afirmaţii pot fi simplu verificate (a se vedea [**7**]):

a) $\overline{S}$ con convex de funcţii reale pozitive pe X astfel încât $\forall\, (s_i)_{i\in I}$ pe $\overline{S}$ există marginea inferioară pe $\overline{S}$, notată $\wedge_{i\in I} s_i$ cu $(\wedge_{i\in I} s_i)(x) := \inf_{i\in I} s_i(x)$, $\forall\, x \in X$.
b) Pentru orice familie crescătoare $(s_i)_i$ din $\overline{S}$ cu $\sup_{i\in I} s_i(x) < \infty$, $\forall\, x \in X$ (sau doar $\forall\, x \in X'$, X' densă în X în raport cu topologia naturală) există marginea superioară pe $\overline{S}$, notată $\vee_{i\in I} s_i$ cu $(\vee_{i\in I} s_i)(x) := \sup_{i\in I} s_i(x)$, $\forall\, x \in X$.
c) $\forall\, s,\ t_1,\ t_2 \in \overline{S}$, $s \leq t_1 + t_2$, $\exists\, s_1, s_2 \in \overline{S}$ cu $s = s_1 + s_2$, $s_1 \leq t_1$, $s_2 \leq t_2$. Deci $\overline{S}$ este un H-con (de funcţii pe $X \setminus \{x_0\}$).
d) ε este continuă la stânga "în ordine" i.e. $\forall\, (u_i)_{i\in I}$ crescătoare din $\overline{S}$ cu $\sup_{i\in I} u_i(x) < \infty$, $\forall\, x \in X$ are loc $\overline{\varepsilon}(u, v) = \sup_i \overline{\varepsilon}(u_i, v)$, $\forall\, v \in \overline{S}$, unde $u = \vee_{i\in I} u_i$.
e) Pentru orice funcţie $\theta : \overline{S} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ aditivă, crescătoare, continuă la stânga "în ordine" cu proprietatea $\theta(g^x) < \infty$, $\forall\, x \in X$, $\exists!\, v \in \overline{S}$ cu $\theta(u) = \overline{\varepsilon}(u, v)$, $\forall\, u \in \overline{S}$.

În cele ce urmează se va presupune că există o submulţime numărabilă C în X astfel încât C este densă în X relativ la topologia naturală.

Se remarcă faptul că submulţimea numărabilă din $\overline{S}$ notată $Q_+(C)$, definită prin

$$Q_+(C) = \left\{ \sum_{v\in F} r_v g^v \,|\, F \subset C,\ F \text{ finite },r_v \in \mathbb{Q}_+ \right\}$$

este densă în ordine la stânga în $\overline{S}$ (a se vedea [**7**]-Prop.10).

Într-adevăr, pentru orice $s \in S$ şi orice $F \subset X$ finită, are loc

$$B^F s \preceq_S \sum_{v\in S} B^{\{v\}} s = \sum_{v\in F} \frac{s(v)}{g^v(v)} g^v = \sum_{v\in F} \alpha_v g^v,\ \alpha_v \in \mathbb{R}_+,$$

unde $u \preceq_S v \iff \exists\, t \in S$ cu $v = u + t$. Cum S este un H-con şi $\forall\, v \in X$ funcţia g^v "stă" într-o rază extremală a lui S, se deduce

$$B^F s = \sum_{v\in S} \beta_v g^v,$$

şi de aici

$$B^F s = \sup\left\{\sum_{v\in F} r_v g^v \,|\, F\subset C,\, r_v\in\mathbb{Q}_+, 0\le r_v\le \beta_v,\,\forall\, v\in F\right\}.$$

Mai mult, are loc evident

$$s=\sup\{B^F s\,|\,F \text{ finite }, F\subset X\}$$

şi de aici

$$s=\sup\{u\,|\,u\in\mathbb{Q}_+(C), u\le s\}.$$

De aici S este un H-con standard deoarece orice element din $Q_+(C)$ este universal continuu (a se vedea [**7**]-Prop.10, [**8**]-pag.97-98). Considerându-se unitatea u_1 pe S dată de

$$u_1(x)=\begin{cases}1, & \text{if} \quad x\neq x_0\\ 0, & \text{if} \quad x=x_0\end{cases}$$

se notează cu K_{u_1}, mulţimea elementelor v din $\overline{S}$ pentru care $\overline{\varepsilon}(u_1,v)\le 1$. Se cunoaşte faptul că K_{u_1} este o submulţime compactă, convexă a lui $\overline{S}$ relativ la topologia naturală ([**8**]-4.1.4) şi mulţimea tuturor elementelor extremale ale acestui compact convex, notată X_1 este o mulţime G_δ a lui K_{u_1} relativ la topologia naturală.

Are loc $e\in X_1 \Longrightarrow \overline{\varepsilon}(u_1,e)=1$ pentru $e\neq g^{x_0}$ şi $\overline{\varepsilon}(u_1,g^{x_0})=0$.

În particular $\forall\, x\in X,\ g^x\in X_1$ i.e. dacă orice element x din X se identifică cu elementul g^x din $\overline{S}$ atunci $X\subset X_1$. Mai mult, cum K_{u_1} este cap al conului convex $\overline{S}$ iar spaţiul liniar de funcţii pe X generat de $\overline{S}$ este o latice vectorială în raport cu ordinea specifică dată de $\overline{S}$:

$$f\preceq_S g \Longleftrightarrow g=f+\overline{s},\ \text{pentru un } \overline{s}\in\overline{S},$$

se deduce că K_{u_1} este un simplex.

Utilizând faptul că orice element u din $\overline{S}$ este supremumul minoranţilor săi din $Q_+(C)$ se deduce că funcţia $\widehat{u}:\overline{S}\to\overline{\mathbb{R}}_+$ dată de $\widehat{u}(v):=\varepsilon(u,v) \quad v\in\overline{S}$ este inferior semicontinuă relativ la topologia naturală $\overline{S}$. Deci orice astfel de funcţie $\widehat{u}$ este inferior semicontinuă, pozitivă, afină pe K_{u_1}.

Utilizând [**8**] rezultă

$$\overline{\varepsilon}(u'\wedge u'',v)=\inf\{\overline{\varepsilon}(u',v')+\overline{\varepsilon}(u'',v'')\,|\,v',v''\in\overline{S}, v'+v''=v\}$$

iar de aici, dacă $e\in X_1$ se deduce

$$\overline{\varepsilon}(u'\wedge u'',e)=\inf\{\overline{\varepsilon}(u',e),\overline{\varepsilon}(u'',e)\}=\inf\{\widehat{u'}(e),\widehat{u''}(e)\}.$$

De aici, orice element $u\in\overline{S}$ poate fi unic extins la o funcţie pe X_1 prin

$$u(e)=\widehat{u}(e)=\overline{\varepsilon}(u,e), \widehat{u}(g^x)=\overline{\varepsilon}(u,g^x)=u(x),\quad \forall x\in X,$$

şi de aceea $\overline{S}$ devine un H-con standard de funcţii pe X_1. Mai mult, cum relaţia de ordine între aceste funcţii este dată de relaţia de ordine între restricţiile lor la X se deduce că X densă în X_1 în raport cu topologia fină pe X_1 asociată conului $\overline{S}$ de funcţii pe X_1. Mulţimea X_1 este aşa numita *saturare* a lui X în raport cu H-conul S sau $\overline{S}$. Deci orice baleiaj B pe S sau echivalent pe $\overline{S}$ poate fi reprezentat ca o operaţie de baleiaj pe o mulţime de bază A din X_1 i.e.:

$$Bu=\wedge_{\overline{S}}\{v\in\overline{S}\,|\,v\ge_A u\}=:B^A u,\ \forall\, u\in\overline{S},$$

$$A=\{x\in X_1\,|\,Bu=u,\ \forall\, u\in\overline{S}\}.$$

Mai multe detalii se pot găsi în [**8**]-3.3.

Propoziţia 6.6.6. *Fie u un element din $\overline{S}$. Atunci $u\in S\Longleftrightarrow \overline{\varepsilon}(u,u)<\infty$.*

Demonstraţie. Pentru $u\in S$ evident $\overline{\varepsilon}(u,u)=\varepsilon(u,u)<\infty$. Se presupune $\overline{\varepsilon}(u,u)<\infty$. Se consideră familia dirijată superior $(s_i)_{i\in I}$ a tuturor minoranţilor din S a funcţiei u. Utilizând proprietăţile extensiei energiei $\overline{\varepsilon}$ se deduce că familia $(\overline{\varepsilon}(s_i,s_i))_{i\in I}$ de numere reale pozitive este mărginită, dirijată superior şi $\sup_{i\in I}\varepsilon(s_i,s_i)=\overline{\varepsilon}(u,u)<\infty$. Fie $i,j\in I$ astfel încât $s_i\le s_j$. Atunci

$$\begin{aligned}\varepsilon(s_j-s_i,s_j-s_i)&=\varepsilon(s_j,s_j)+\varepsilon(s_i,s_i)-2\varepsilon(s_j,s_i)\le\\ &\le \varepsilon(s_j,s_j)+\varepsilon(s_i,s_i)-2\varepsilon(s_i,s_i)=\varepsilon(s_j,s_j)-\varepsilon(s_i,s_i).\end{aligned}$$

Din această inegalitate se deduce că $\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\, i_\varepsilon\in I$ cu $\|s_j-s_i\|\le\varepsilon,\ \forall i,j\in I,\ i,j\ge i_\varepsilon$ şi de aici familia $(s_i)_{i\in I}$ din S este convergentă la un element $s\in S$ după secţiunea filtrului pe I. Cum familia $(s_i)_{i\in I}$ este dirijată superior, are loc

$$s(x)=\sup_{i\in I} s_i(x)=u(x),\ \forall\, x\in X$$

i.e. $u=s,\ u\in S$. □

TEOREMA 6.6.7. *Fie $\mathcal{U}$ filtru pe $\overline{S}$ convergent la un element $u \in \overline{S}$ în raport cu topologia naturală pe $\overline{S}$. Atunci*

$$\overline{\varepsilon}(u,u) \leq \liminf_{v,\mathcal{U}} \overline{\varepsilon}(v,v).$$

DEMONSTRAŢIE. Pentru orice $F \in \mathcal{U}$ se notează $v_F = \wedge_{v \in F} v$.

Evident familia $(v_F)_{F \in \mathcal{U}}$ de elemente din $\overline{S}$ este dirijată superior. Utilizând [**8**], Theorem 4.5.2. se deduce că u este supremumul (în $\overline{S}$) al acestei familii dirijate superior.

Din proprietăţile energiei extinse $\overline{\varepsilon}$ rezultă

$$\overline{\varepsilon}(u,u) = \sup_{F \in \mathcal{U}} \overline{\varepsilon}(v_F, v_F) \leq \sup_{F \in \mathcal{U}} (\inf_{v \in F} \overline{\varepsilon}(v,v)) = \liminf_{v,\mathcal{U}} \overline{\varepsilon}(v,v).$$

□

TEOREMA 6.6.8. *Dacă există $s_0 \in \overline{S}$ cu $g^x(x) \leq s_0(x)$, $\forall\, x \in X$, atunci X este semisaturată în raport cu H-conul de funcţii S (sau echivalent $\overline{S}$).*

DEMONSTRAŢIE. Se presupune că există $s_0 \in \overline{S}$ cu $g^x(x) \leq s_0(x)$, $\forall\, x \in X$. Se va demonstra că mulţimea $X_1 \backslash X$ este polară în raport cu H-conul $\overline{S}$ al funcţiilor pe X_1 (conform cu [**8**]-pag.175).

Fie e un element arbitrar al acestei mulţimi. Dacă $\overline{\varepsilon}(e,e) < \infty$, din propoziţia 6.6.6 se deduce că $e \in S$, e "stă" într-o rază extremală a conului S, $\varepsilon(u_1, e) = 1$ şi de aceea din presupunerile iniţiale făcute asupra lui X se deduce că $e = g^y$, pentru un anumit $y \in X$. Aceasta contrazice faptul că $e \in X_1 \backslash X$ şi de aici rezultă $\overline{\varepsilon}(e,e) = +\infty$. Cum mulţimea X este fin densă în X_1, există o familie $(g^{x_i})_i \in I$ cu $x_i \in X$ convergentă la e în raport cu topologia fină pe X_1. De aici rezultă că pentru orice $s \in \overline{S}$ are loc

$$s(e) := \overline{\varepsilon}(s,e) = \lim_{i,I} \overline{\varepsilon}(s, g^{x_i}) = \lim_{i,I} s(x_i)$$

după filtrul secţiunii prin I. În particular are loc

$$s_0(e) = \lim_{i,I} s_0(x_i) \geq \lim_{i,I} g^{x_i}(x_i).$$

Cum familia $(g^{x_i})_i \in I$ este deasemenea convergentă la e în raport cu topologia naturală pe X_1, din teorema 6.6.7 se obţine:

$$+\infty = \overline{\varepsilon}(e,e) \leq \liminf_{i,I} \overline{\varepsilon}(g^{x_i}, g^{x_i}) \leq s_0(e);\ s_0(e) = \infty.$$

De aici $s_0 = +\infty$ pe mulţimea $X_1 \backslash X$ i.e. această mulţime este polară în raport cu H-conul $\overline{S}$ de funcţii pe X_1. □

OBSERVAŢIA 6.6.9. Semisaturarea are o deosebită importanţă pentru posibilitatea construcţiei ulterioare a unui proces pe mulţimea X. Mai precis, dacă X este semisaturată, atunci se poate demonstra că $\exists (X_t)_t$ proces stocastic cu spaţiul stărilor X, astfel încât $S \subset \mathcal{E}((X_t)_t)$, unde $\mathcal{E}((X_t)_t)$ sunt funcţiile excesive ale procesului. Mai mult, se poate deduce că S este solid natural în $\mathcal{E}((X_t)_t)$ (pentru orice $h \in \mathcal{E}((X_t)_t)$, $\exists \{s_n\}_n \subset S$ cu $s_n \nearrow h$).

EXEMPLUL 6.6.10. Se consideră intervalul $[0,1] \subset \mathbb{R}$ şi mulţimea $\mathcal{F}$ a funcţiilor absolut continue pe $[0,1]$, având derivatele în $L^2(\lambda)$ (λ măsura Lebesgue pe $[0,1]$). Se consideră următoarea formă biliniară ε pe $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$: $\varepsilon(f,g) := \int\limits_0^1 f'g'd\lambda$.

Este uşor de verificat că sistemul $(\varepsilon, \mathcal{F}, [0,1])$ este o formă rezisitivă pe $X = [0,1]$.

Dacă se fixează $x_0 = 0$, atunci pentru orice $x \in [0,1]$ se poate verifica faptul că distanţa rezisitivă între două puncte x, y din $[0,1]$ este chiar $\mid x - y \mid$ iar $g^x(x) = x$, $\forall\, x \in [0,1]$. Dar funcţia $s_0 : [0,1] \to \mathbb{R}_+$, $s_0(x) = x$ aparţine lui $\overline{S}$ şi $g^x(x) \leq s_0(x)$. De fapt $g^x(x) = s_0(x)$, $\forall\, x \in [0,1]$. Hence $X = [0,1]$ este semisaturat (chiar saturat) (pentru detalii a se vedea [**8**]-pag.115,175).

Dacă se schimbă spaţiul de bază X din exemplul de mai sus, considerându-se $X = [0, \infty)$, funcţia $s_0 : X \to \mathbb{R}_+$ dată de $s_0(x) = x$, $\forall\, x \in [0,\infty)$ aparţine lui $\overline{S}$, $s_0(x) = g^x(x)$, $\forall\, x \in [0,\infty)$. Spaţiul X_1 în acest exemplu este $[0,\infty]$, fiind, la rândul său, semisaturat.

OBSERVAŢIA 6.6.11. Se vor considera rezultatele date de teoremele 4.2.6 şi 4.9.3. Din ideile lor de demonstraţia se poate dezvolta o generalizare privind formele rezistive în sensul definiţiei din această secţiune.

Se dă o formă rezistivă (simetrică) $(\varepsilon, \mathcal{F}, X)$ şi $x_0 \in X$. Dacă se consideră

$$\mathcal{F}_0 := \left\{ f \in \mathcal{F} \,\middle|\, f(x_0) = 0 \right\},$$

atunci, similar demonstraţiei de la 4.2.6 se deduce că $(\mathcal{F}_0, \varepsilon)$ este un spaţiu Hilbert. Deasemenea,

$$P_\varepsilon := \left\{ s \in \mathcal{F}_0 \,\middle|\, \varepsilon(s,f) \geq 0,\ \forall\, f \in \mathcal{F}_0^+ \right\}$$

este un H-con. Deci, orice $\mu : P_\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}_+$ aditivă, se prelungeşte la o funcţională continuă pe $\mathcal{F}_0$.

Dacă se va considera $x \in X_0$ arbitrar şi funcţionala

$$\Phi : \mathcal{F}_0 \longrightarrow \mathbb{R},\ \Phi(f) = f(x),\ f \in \mathcal{F}_0,$$

atunci există g^x cu proprietatea

$$f(x) = \varepsilon(g^x, f),\ \forall\, f \in \mathcal{F}_0.$$

Mai mult, are loc

$$s \in P_\varepsilon,\ s(x) \geq g^x(x) \Rightarrow s \geq g^x \text{ pe } X.$$

Se poate deduce uşor faptul că orice $p \in P_\varepsilon$ este limita punctuală a unui şir de forma $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k g^{x_k}\right)_n$. Deasemenea, orice element $f \in \mathcal{F}_0^+$ este aproximat punctual crescător şi în norma $|| \cdot ||_\varepsilon$ de un şir $(p_n - q_n)_n \subset P_\varepsilon - P_\varepsilon$, $p_n - q_n \geq 0$.

Dacă R este metrica rezistivă asociată lui ε, atunci se poate demonstra că între topologia generată de metrica $R^{1/2}$, cea generată de $\mathcal{F}_0$ şi cea generată de elemente de forma $\{g^x\}_{x \in X_0}$ (numită *topologia naturală* şi notată τ_{nat}) au loc incluziunile

PROPOZIŢIA 6.6.12. $\tau\left(\{g^x \mid x \in X_0\}\right) \subseteq \tau\left(\mathcal{F}_0\right) \subseteq \tau\left(R^{1/2}\right)$.

Deasemenea, de aici se poate deduce

TEOREMA 6.6.13. *a) $\mathcal{F}_0$ separă punctele lui X_0, deci $P_\varepsilon - P_\varepsilon$ separă punctele lui X_0 şi $\{g^x\}_{x \in X_0}$ separă punctele lui X_0.*

b) Dacă topologia naturală τ_{nat} este Hausdorff şi $\tau\left(R^{1/2}\right)$ este compactă, atunci $\tau\left(R^{1/2}\right) = \tau_{nat}$.

Bibliografie

[1] A. Ancona, *Contraction module et principe de réduite dans les espaces ordonnée a form coercitive*, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, **275** (1972), 701-704.

[2] W. N. Anderson, Jr., and G. E. Trapp, Shorted operators, II, SIAM J. Appl. Math. **28**: 60-71 (1975).

[3] M. Barlow, *Diffusions on Fractals*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, 1998.

[4] M. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Academic Press, 1988.

[5] H. Bauer, *Probability theory*, Walter de Gruyter, 1996.

[6] H. Benfrika, I. Bucur, A. Nuică, S. Vladoiu, *A note on the excessive functions of a resistance form*, Revue Roumaine de Mathematiques Pures et Appliques, vol. **54**(5), 2010, 607-617.

[7] N. Boboc, Gh. Bucur, *Non symmetric Resistance Forms*, Potential Theory and Stochastics in Albac, Aurel Cornea Memorial Volume, Theta 2009, 65-84.

[8] N. Boboc, Gh. Bucur, A. Cornea, *Order and Convexity in Potential Theory: H-cones*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, 1981.

[9] R.M. Blumenthal and R.K. Getoor, *Markov processes and potential theory*, Academic Press, New York, 1968.

[10] P.J. Bushell, *Hilbert's metric and pozitive contraction mappings in a Banach space*, Arch. Rational Mech. Anal. **52** (1973), 330-338.

[11] T.C. Coulhon, *Ultracontractivity and Nash type inequalities*, J. Funct. Anal. **141**, 510-539 (1996).

[12] E.A. Carlen, S. Kusuoka. and D.W. Stroock, *Upper bounds for symmetric Markov transition functions*, Ann. Inst. H. Poincare Sup. no. **2**, 245-287 (1987).

[13] E. B. Davies, *Spectral Theory and Differential Operators*, Cambridge Studies in Advanced Math. vol. 42, Cambridge University Press, 1995.

[14] P. J. Davies, *Circulant Matrices*, Pure Appl. Math., New York, Wiley, 1979.

[15] C. Dellacherie, P.A. Meyer, *Probabilities and potential*, North Holland Mathematics Studies, **29**, 1978.

[16] R. L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, Second edition, Addison-Wesley, Redwood City, 1989.

[17] P. G. Doyle, J. L. Snell, *Random Walks and Electrical Networks*, arXiv:math/0001057v1 [math.PR], 11 Jan 2000.

[18] K. J. Falconer, *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications*, John Wiley & Sons, 2003.

[19] K. J. Falconer, *Techiques of Fractal Geometry*, Springer, 1997.

[20] P. J. Fitzsimmons, B. M. Hambly, T. Kumagai, *Transition density estimates for Brownian motion on affine nested fractals*, Comm. Math. Phys. **165** 1994, 595-620.

[21] M. Fukushima, *Dirichlet forms, diffusion processes and spectral dimensions for nested fractals*, Ideas and methods in mathematical analysis, stochastics and applications, Proc. Conf. in Memory of Hoegh-Krohn (S. Albeverio et al., eds.), vol. 1, Cambridge University Press, 1992, pp. 151-161.

[22] M. Fukushima, Y. Oshima, M. Takeda, *Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes*, de Gruyter Studies in Math. vol. **19**, de Gruyter, Berlin, 1994.

[23] M. Fukushima, T. Shima, *On a spectral analysis for the Sierpinski gasket*, Potential Analysis **1** (1992), 1-35.

[24] F. R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, Vol.I (New York, Chelsea, 1960).

[25] R.K. Getoor, H. Kesten: *Continuity of local times of Markov processes*, Compo Math. **24**, 277-303 (1972).

[26] K. Hattori, T. Hattori, T. Watanabe, *Gaussian field theories on general networks and the spectral dimensions*, Progr. Theoret. Phys. Suppl. **92** (1987), 108-143.

[27] B. M. Hambly, V. Metz and A. Teplyaev, *Self-similar energies on p.c.f.s.s. fractals*, J. London Math. Soc. (2) **74** (2006), 93-112.

[28] J. Hutchinson, *Fractals and Self-similarity*, Indiana University Journal of Mathematics **30**: 713-747, 1981.

[29] J. Kigami, *A harmonic calculus for p.c.f. self-similar sets*, Trans. A.M.S. **335**, 721-755 (1993).

[30] J. Kigami, *Analysis on Fractals*, Cambridge University Press, 2001.

[31] U. Krause, R.D. Nussbaum, *A limit set trichotomy for self-mappings of normal cones in Banach spaces*, Nonlinear Analysis, **20** (1993), 855-870.

[32] T. Kumagai, *Regularity, closedness and spectral dimensions of the Dirichlet forms on p.c.f. self-similar sets*, J. Math. Kyoto Univ. **33** (1993), 765-786.

[33] S. Kusuoka, *Dirichlet forms on fractals and products of random matrices*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **25** (1989), 659-680.

[34] S. Kusuoka, X. Y. Zhou, *Dirichlet forms on fractals: Poincare constant and resistance*, Probab. Theory Related Fields **93** (1992), 169-196.

[35] T. Lindström, *Brownian motion on nested fractals*, Mem. Amer. Math. Soc. **420**, 1990.

[36] J. M. Ma, M. Rockner, *Dirichlet Forms*, Springer, 1991.

[37] R. G. Meadows, *Electric Network Analysis*, (Harmondsworth: Penguin Books, 1972).

[38] V. Metz, *How many diffusions exist on the Vicsek snowflake*, Acta Appl. Math., **32** (1993), 227-241.

[39] V. Metz, *Hilbert projective metric on cones of Dirichlet forms*, J. Functional Analysis **127** (1995), 438-455.

[40] V. Metz, *Renormalisation of finitely ramified fractals*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **125** (1996), 1085-1104.

[41] V. Metz, *Renormalization contracts on nested fractals*, J. Reine Angew. Math. **480** (1996), 161-175.

[42] V. Metz, *Renormalization contracts on nested fractals*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. **322** (1996), 1037-1042.

[43] V. Metz, *Shorted operators: an application in potential theory*, Linear Algebra Appl. **264** (1997) 439-455.

[44] V. Metz, *Laplacians on finitely ramified, graph directed fractals*, FG-preprint 2001 (http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/fgweb).

[45] V. Metz, *The cone of diffusions on finitely ramified fractals*, Nonlinear Anal. **55** (2003) 723-738.
[46] V. Metz, *The short-cut test*, J. Funct. Anal. **220** (2005) 118-156.
[47] P.A. Meyer, *Probability and potentials*, Blaisdell, 1966.
[48] P.A. Meyer, *Processus de Markov*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, **26**, 1967.
[49] S. K. Mitra, S. R. Rao, *Generalized Inverse of Matrices and its Applications*, Wiley, New York, 1971.
[50] M.B. Marcus, J. Rosen, *Sample path functions of the local times of strongly symmetric Markov processes via Gaussian processes*, Ann. Prob. **20**, 1603-1684 (1992).
[51] M.B. Marcus, J. Rosen, *Markov Processes, Gaussian Processes and Local Times*, Cambridge University Press, 2006.
[52] A. Nuică, *Renormalization of affine Sierpinski gasket and Lindstrom's snowflake*, Chaos, Solitons and Fractals, în curs de apariţie.
[53] R.D. Nussbaum, *Hilbert's Projective Metric and Iterared Nonlinear Maps*, Number 75 in Mem. Amer. Math. Soc. **391**, Amer. Math. Soc., Providence, 1988.
[54] R. Peirone, *Existence of eigenforms on fractals with three vertices*, Preprint, Universita di Roma "Tor Vergata", 2005, http://www.mat.uniroma2.it/ricerca/pre-print/.
[55] R. Peirone, *Convergence and uniqueness problems for Dirichlet forms on fractals*, Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B, Artic. Ric. Mat. (8) **3-B** (2000), 431-460.
[56] C. A. Rogers, *Hausdorff Measures*, Cambridge Math. Library, Cambridge University Press, 1998, First published in 1970. Reissued with a foreword by K. Falconer in 1998.
[57] D. Revuz, M. Yor, *Continuous martingales and brownian motion*, 3rd edition, GTM, Springer, 1999.
[58] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill: New York, 1973.
[59] C. Sabot, *Existence and uniqueness of diffusions on finitely ramified self-similar fractals*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **30** (1997), 605-673.
[60] E. Seneta, *Non-negative matrices and Markov chains*, Springer, New York, 1981.
[61] M. Sharpe, *General theory of Markov processes*, Academic Press, 1988.
[62] G. Stampacchia, *Formes bilineaires coercitives sur les ensembles convexes*, C.R. Acad. Sci. Paris **258** (1964).
[63] N. Th. Varopoulos, *Isoperimetric inequalities and Markov chains*, J. Funct. Anal. **63**, 215-239 (1985).
[64] A. Nuică, *Renormalization of a generalized Sierpinski gasket and Pentakun*, Fractals, în curs de apariţie.