ACADEMIA ROMÂNĂ
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ "SIMION STOILOW"

MARIUS MARCHITAN

Fibrate vectoriale pe varietăţi complexe - Fibrate vectoriale pe suprafeţe complexe

TEZĂ DE DOCTORAT

Conducător ştiinţific:
C.S.I Dr. VASILE BRÎNZĂNESCU

Bucureşti-2011

Familiei mele

Cuprins

Introducere

Fibratele vectoriale au format din totdeauna o parte importantă a geometriei, iar studiul lor, prin importanţa rezultatelor şi efectelor generate, a stârnit mereu un viu interes şi o asiduă cercetare. În linii mari, un fibrat vectorial poate fi privit ca un obiect ce oferă o descriere precisă a ideii de familie de spaţii vectoriale. În funcţie de contextul geometric în care ne situăm, putem vorbi despre fibrate vectoriale topologice, diferenţiale, olomorfe sau algebrice. Printre exemplele cele mai frecvent întâlnite, putem aminti fibratul tangent al unei varietăţi diferenţiabile, complexe sau proiective, respectiv fibratele vectoriale plate, aflate în strânsă legătură cu sistemele locale şi cu o amplă utilizare în topologia modernă. Nu putem să nu amintim aici de exemplele de fibrate vectoriale ce apar în mod natural în fizica modernă, în special când intră în discuţie varietatea spaţiu-timp ori o extindere a acesteia. Prin urmare, nici geometria algebrică nu a fost privată de aceste transformări. Spre exemplu, prin dezvoltarea unor tehnici de lucru cu fibrate vectoriale, au fost construite noi clase relevante de varietăţi. De asemenea, programul de clasificare pentru varietăţile proiective a fost revoluţionat de soluţia lui Mori dată unei conjecturi privind fibratele vectoriale [Mo79]. De multe ori, informaţiile privind geometria unei varietăţi sunt codificate prin intermediul fibratelor vectoriale care pot fi construite pe ea şi care pot fi recuperate prin analiza coomologiei, a subfasciculelor ori a spaţiilor de moduli definite de aceste fibrate.

Ţinând cont de faptul că fibratele vectoriale sunt obiecte de bază frecvent întâlnite în geometrie, este importantă o înţelegere cât mai profundă a influenţei pe care o au, precum şi a interdependenţei lor cu proprietăţile intrinseci ale varietăţilor pe care sunt definite. Din acest motiv, ne aşteptăm ca proprietăţile speciale ale unor varietăţi să imprime un comportament diferit fibratelor vectoriale definite pe acestea.

Structura tezei. Rezultate principale.

Primul capitol este conceput ca un capitol introductiv, în care am inserat noţiuni şi rezultate clasice, ce vor fi utilizate pe întreg parcursul acestei lucrări.

În prima secţiune sunt aduse în prim plan conceptele generale asupra şirurilor spectrale, urmate de cazuri particulare importante pentru dezvoltarea subiectelor ce vor fi abordate ulterior, cum ar fi şirul spectral Leray sau şirul spectral al Ext-urilor.

A doua secţiune debutează cu o prezentare a conceptelor generale privind fibratele vectoriale, având în vedere legătura dintre definiţia algebrică şi cea geometrică a noţiunii de fibrat vectorial complex.

De asemenea, tot aici vor fi descrise metodele principale de construcţie ale fibratelor vectoriale. Aici ne referim la metoda lui Serre, respectiv la cea a modificărilor elementare.

A treia secţiune este dedicată unor rezultate clasice referitoare la teoria fibratelor stabile (în sensul Mumford-Takemoto).

Al doilea capitol este concentrat pe descrierea fibratelor plate date ca extinderi şi este structurat pe trei secţiuni.

În prima secţiune sunt introduse principalele concepte privind fibratele plate. Este făcută legătura cu noţiunile introduse în capitolul 1, accentul punându-se, cu precădere, asupra relaţiei existente între fibratele plate şi conexiunile plate.

Tot aici vom deduce o condiţie necesară şi suficientă ca un fibrat să fie plat utilizând pentru aceasta extinderea unui fibrat E prin $E \otimes \Omega^1_X$ dată de construcţia lui Atiyah ([At57]).

A doua secţiune are ca obiectiv prezentarea principalelor rezultate privind suprafeţele Inoue folosind ca referinţe [In74] şi [Pl95].

Rezultatele din primele două secţiuni sunt concretizate în cea de a treia prin determinarea unei condiţii suficiente ca un fibrat de rang doi dat printr-o extindere de fibrate în drepte plate să fie plat ([BMS01]).

Al treilea capitol are ca scop studierea fibratelor de rang doi pe suprafeţe Hirzebruch şi este structurat pe patru secţiuni. Sunt utilizate tehnici precum cea a şirurilor spectrale sau a extinderilor de fibrate vectoriale, iar legătura dintre ele este făcută prin metode coomologice.

Prima secţiune este dedicată şirurilor spectrale Beilinson. Sunt incluse aici rezultate generale despre varietăţi cu proprietatea diagonalei. Este prezentată construcţia şirului spectral Beilinson pentru fibrate definite pe astfel de varietăţi, respectiv particularizarea lui pe $\mathbb{P}^n$ şi scroll-uri.

În a doua secţiune, ce face obiectul articolului [AM11], este surprinsă o corespondenţă între anumite tipuri de extinderi ale fibratelor de rang doi pe suprafeţe Hirzebruch şi şirul spectral Beilinson determinat de acestea. De asemenea, legătura dintre extinderi şi şirul spectral Beilinson poate fi observată şi în situaţia determinării unei descrieri a fibratului trivial.

În a treia secţiune, ale cărei rezultate fac, obiectul articolului [FM11], sunt obţinute diferite criterii de scindare pentru anumite tipuri de fibrate de rang doi pe suprafeţe Hirzebruch, prin utilizarea, cu precădere, a şirurilor spectrale Beilinson.

Ultima secţiune reprezintă un studiu asupra fibratelor de rang doi pe o suprafaţă Hirzebruch, având clasele Chern egale cu ale fibratului cotangent. Este determinată forma şirului spectral Beilinson al fibratelor de acest tip şi care satisfac o condiţie suplimentară (un twist potrivit al lor nu are secţiuni globale). Rezultatul final demonstrează că mulţimea acestor fibrate formează un spaţiu ireductibil (lucrare în pregătire).

În încheiere, aş dori să-mi exprim profunda recunoştinţă faţă de conducătorul meu ştiinţific, C.S.I dr. Vasile Brînzănescu, pentru îndrumarea către subiectul acestei teze, pentru sprijinul ştiinţific şi pentru suportul moral acordate în timpul elaborării ei.

Aş dori să adresez mulţumirile mele cele mai sincere celor care au contribuit la îmbogăţirea bagajului meu ştiinţific, în special C.S.I dr. Marian Aprodu şi prof.univ.dr. Paltin Ionescu, fără de care, în mod sigur, apariţia acestei lucrări nu ar fi fost posibilă.

Adresez mulţumiri domnului prof.univ.dr. Liviu Ornea şi domnului conf.univ.dr. Cristian Voica de la Universitatea din Bucureşti pentru faptul că au acceptat să fie referenţi ştiinţifici şi membri ai comisiei de susţinere publică a tezei mele de doctorat.

De asemenea, adresez mulţumiri celor cu care, prin discuţiile purtate, am legat colaborări fructuoase. Mă refer aici la Radu Slobodeanu, Mihai Fulger precum şi la membrii colectivului de Geometrie Algebrică din cadrul Institutului de Matematică al Academiei Române.

Nu în ultimul rând, doresc să exprim cele mai călduroase mulţumiri familiei mele pentru extraordinarul sprijin moral de care am beneficiat pe întreg parcursul stagiului doctoral.

CAPITOLUL 1

Preliminarii

Acest capitol este dedicat introducerii principalelor noţiuni şi rezultate necesare în celelalte capitole. Contextul în care vom lucra va fi cel al geometriei complexe. Se consideră cunoscute noţiunile referitoare la fascicule, scheme, divizori, diferenţiale, coomologie, curbe şi suprafeţe, terminologia şi notaţiile fiind cele utilizate de Hartshorne în [Ha77].

În prima parte a capitolului sunt aduse în prim plan conceptele generale asupra şirurilor spectrale, urmate de cazuri particulare importante pentru dezvoltarea subiectelor pe care le vom aborda ulterior, cum ar fi şirul spectral Leray sau şirul spectral al Ext-urilor. A doua secţiune debutează cu o prezentare a conceptelor generale privind fibratele vectoriale, având în vedere legătura dintre definiţia algebrică şi cea geometrică a noţiunii de fibrat vectorial complex. Expunerea va continua cu descrierea metodelor principale de construcţie ale fibratelor vectoriale. Aici ne referim la metoda lui Serre, respectiv la cea a modificărilor elementare. Ele vor fi urmate, în ultima parte a capitolului, de o scurtă trecere în revistă a noţiunilor de bază legate de stabilitatea fibratelor.

1. Şiruri spectrale

Şirurile spectrale reprezintă instrumente algebrice puternice utilizate în studiul coomologiei. Prima parte a acestei secţiuni este dedicată introducerii noţiunilor generale urmând calea din [GH78]. În a doua parte vom da câteva exemple ce îşi vor dovedi utilitatea în capitolele următoare.

1.1. Teoria generală. Vom considera cunoscute conceptele de bază privind teoria grupurilor. Vom introduce noţiuni precum: complex graduat, coomologie graduată, complex dublu, şir spectral asociat unui complex dublu.

Definiţia 1.1. *Prin* complex *se înţelege o pereche (K^*, d^*) formată dintr-un şir de grupuri abeliene $(K^p)_{p\geq 0}$ şi diferenţialele $d^p : K^p \to K^{p+1}$ ce îndeplinesc condiţia $d^{p+1} \circ d^p = 0, \forall p \geq 0$. În această situaţie,* coomologia complexului *este*

$$H^*(K^*) = \bigoplus_{p\geq 0} H^p(K^*),$$

unde $H^p(K^*) = Z^p/B^p$ cu $Z^p = \mathrm{ker} d^p$ şi $B^p = \mathrm{Im} d^{p-1} \subset Z^p$.

Definiţia 1.2. *Fie* (K^*, d^*) *un complex.*

(a) Prin subcomplex *se înţelege o pereche* (J^*, d^*) *cu proprietatea că* J^p *este subgrup al lui* K^p *şi* $d^p J^p \subset J^{p+1}$ *pentru orice* $p \geq 0$.

(b) Prin complex factor *înţelegem un complex* (L^*, d^*) *cu proprietatea că există* (K^*, d^*) *complex şi* (J^*, d^*) *subcomplex al său astfel încât* $L^* = K^*/J^*$*, iar diferenţialele sunt cele induse de cele ale complexului* (K^*, d^*).

Observaţia 1. În condiţiile de mai sus se obţine un *şir scurt exact de complexe*

$$0 \to J^* \to K^* \to L^* \to 0,$$

care conduce la existenţa unui *şir lung exact de coomologie*

$$\cdots \to H^p(J^*) \to H^p(K^*) \to H^p(L^*) \to H^{p+1}(J^*) \to \cdots .$$

Definiţia 1.3. *Un şir descrescător de subcomplexe*

$$K^* = F^0K^* \supset F^1K^* \supset \ldots \supset F^nK^* \supset F^{n+1}K^* = 0,$$

împreună cu diferenţialele d^* *definesc* complexul filtrat (F^*K^*, d^*).

Spre exemplu, un subcomplex corespunde filtrării $K^* \supset J^* \supset 0$. Aşa cum subcomplexului i-am ataşat un şir lung exact de coomologie, unui complex filtrat îi vom asocia un şir spectral, care va generaliza noţiunea de şir lung exact de coomologie.

Definiţia 1.4. *Fie* (F^*K^*, d^*) *un complex filtrat şi* $\mathrm{Gr}^p K^* \overset{not}{=} \frac{F^pK^*}{F^{p+1}K^*}$. *Complexul*

$$\mathrm{Gr}^* K^* = \bigoplus_{p \geq 0} \mathrm{Gr}^p K^*,$$

împreună cu diferenţiala indusă, se numeşte complexul graduat asociat.

Să observăm că filtrarea F^*K^* induce filtrările F^*Z^*, F^*B^*, iar pentru orice $p = \overline{0, n}$ şi $q \geq 0$ avem $F^{p+1}Z^q \cap F^pB^q = F^{p+1}B^q$. Obţinem incluziunile naturale $\frac{F^{p+1}Z^q}{F^{p+1}B^q} \hookrightarrow \frac{F^pZ^q}{F^pB^q}$, care induc filtrarea $F^*H^*(K^*)$ pe coomologia lui K^* dată de

$$F^pH^q(K^*) = \frac{F^pZ^q}{F^pB^q}.$$

Definiţia 1.5. *Prin* coomologia graduată asociată *se înţelege complexul graduat asociat complexului filtrat* $(F^*H^*(K^*), d^*)$*, adică*

$$\mathrm{Gr}^* H^*(K^*) = \bigoplus_{p,\, q} \mathrm{Gr}^p H^q(K^*),$$

unde

$$\mathrm{Gr}^p H^q(K^*) = \frac{F^pH^q(K^*)}{F^{p+1}H^q(K^*)}.$$

După cum se va vedea în cele ce urmează, noţiunea de grup bigraduat stă la baza definirii conceptului de şir spectral.

Definiţia 1.6. *Prin* şir spectral *înţelegem un şir* $(E_r, d_r)_{r\geq 0}$ *format din grupurile bigraduate*

$$E_r = \bigoplus_{p,q} E_r^{p,q}$$

împreună cu diferenţialele

$$d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}, d_r^2 = 0,$$

astfel încât

$$H^*(E_r) = E_{r+1}.$$

Să observăm că la nivelul 0 diferenţialele sunt orientate vertical , la nivelul 1 au orientare orizontală, iar la un nivel $r \geq 2$ diferenţialele sunt orientate oblic (figura 1).

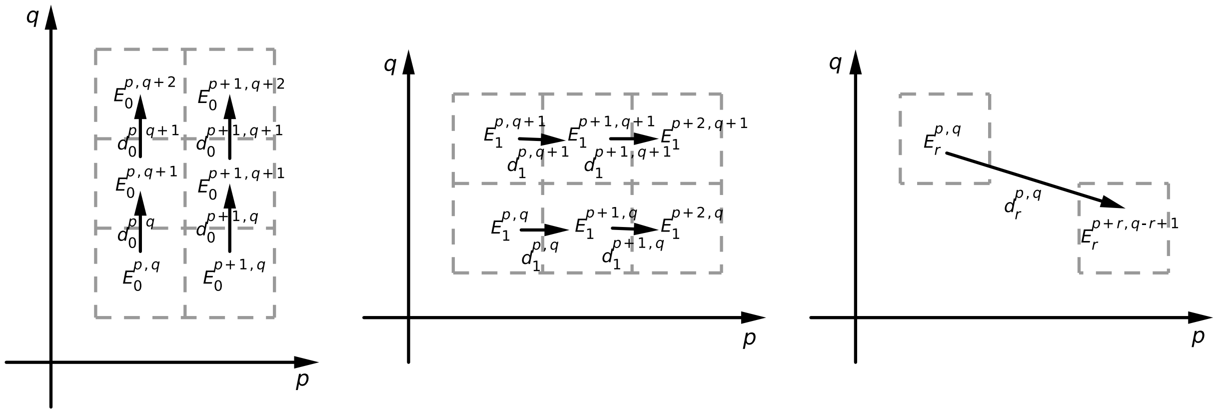

FIGURA 1. Şirul spectral la nivel de E_r

În general se urmăreşte construirea unui şir spectral cu proprietatea că $E_r = E_{r+1} = \ldots$ pentru $r \geq r_0$; vom nota acest grup limită cu E_∞ şi vom spune în această situaţie că *şirul spectral* (E_r) *converge la* E_∞.

Teorema 1.7. *Fie* (F^*K^*, d^*) *un complex filtrat. Atunci există un şir spectral* $(E_r)_{r\geq 0}$ *astfel încât*

$$\begin{aligned} E_0^{p,q} &= \mathrm{Gr}^p K^{p+q}, \\ E_1^{p,q} &= H^{p+q}(\mathrm{Gr}^p K^*), \\ E_\infty^{p,q} &= \mathrm{Gr}^p(H^{p+q}(K^*)). \end{aligned}$$

Ultima afirmaţie este notată, de regulă, cu $E_\infty \Rightarrow H^*(K^*)$.

Pe acelaşi principiu vom construi în continuare şirul spectral asociat unui complex dublu.

Definiţia 1.8. *Prin* complex dublu *înţelegem un triplet* $(K^{*,*}, d^{*,*}, \delta^{*,*})$ *format din grupul bigraduat*

$$K^{*,*} = \bigoplus_{p,q\geq 0} K^{p,q}$$

împreună cu diferenţialele

$$d^{p,q} : K^{p,q} \to K^{p+1,q},$$
$$\delta^{p,q} : K^{p,q} \to K^{p,q+1},$$

ce îndeplinesc condiţiile

$$d^2 = 0, \quad \delta^2 = 0, \quad d\delta + \delta d = 0.$$

Complexul total asociat (K^*, D^*) *este definit prin*

$$K^n = \bigoplus_{p+q=n} K^{p,q}$$

împreună cu diferenţiala

$$D = d + \delta,$$

care, evident, satisface condiţia $D^2 = 0$.

Pe (K^*, D^*) se pot defini două filtrări naturale date prin

$${}'F^pK^n = \bigoplus_{\substack{p'+q=n\\ p'\geq p}} K^{p',q}, \qquad {}''F^qK^n = \bigoplus_{\substack{p+q''=n\\ q''\geq q}} K^{p,q''}.$$

Din teorema 1.7 deducem existenţa a două şiruri spectrale, $({}'E_r)$ şi $({}''E_r)$, ambele aproximând coomologia lui K^*. Spre exemplu, pentru primul dintre ele avem

$${}'E_0^{p,q} = \frac{{}'F^pK^{p+q}}{{}'F^{p+1}K^{p+q}} = \frac{K^{p,q} + K^{p+1,q-1} + \cdots}{K^{p+1,q-1} + \cdots} \cong K^{p,q}.$$

Diferenţiala $d_0^{p,q} : {}'E_0^{p,q} \to {}'E_0^{p,q+1}$ se obţine din $D = d + \delta$ prin trecere la cât. Ţinând cont de izomorfismul de mai sus deducem că $d_0 = \delta$ şi

$${}'E_1^{p,q} \cong H_\delta^q(K^{p,*}),$$

unde membrul drept reprezintă coomologia în (p, q) a complexului

$$\cdots \to K^{p,q-1} \xrightarrow{\delta} K^{p,q} \xrightarrow{\delta} K^{p,q+1} \to \cdots .$$

Diferenţiala d_1 se obţine din $D = d + \delta$ pe ${}'E_1$. Cum $\delta = 0$ pe ${}'E_1$ deducem că $d_1 = d$ şi

$${}'E_2^{p,q} = H^*({}'E_1^{p,q}, d_1) \cong H_d^p(H_\delta^q(K^{*,*})).$$

Ultima expresie reprezintă coomologia complexului

$$\cdots \to H_\delta^q(K^{p-1,*}) \xrightarrow{d} H_\delta^q(K^{p,*}) \xrightarrow{d} H_\delta^q(K^{p+1,*}) \to \cdots .$$

În concluzie putem formula următoarea teoremă

Teorema 1.9. *Dat un complex dublu* $(K^{*,*}, d, \delta)$*, există două şiruri spectrale, ambele aproximând coomologia complexului total şi*

$$\begin{cases} {}'E_2^{p,q} & \cong & H_d^p(H_\delta^q(K^{*,*})) \\ {}''E_2^{p,q} & \cong & H_\delta^q(H_d^p(K^{*,*})). \end{cases}$$

1.2. Exemple. Vom evidenţia în continuare, prin exemple, câteva modalităţi de aplicare a noţiunilor introduse în prima parte a acestei secţiuni.

1.2.1. *Şirul spectral Leray.* Datorită numărului mare de aplicaţii, poate fi considerat cel mai important caz particular de şir spectral. Deşi poate fi definit într-un context general, al spaţiilor topologice şi aplicaţiilor continue dintre ele, vom restrânge discuţia doar la categoria spaţiilor inelate. Pentru aceasta, fie $(X, \mathcal{O}_X)$ şi $(Y, \mathcal{O}_Y)$ două spaţii inelate, $f : X \to Y$ un morfism de spaţii inelate, iar $\mathcal{F}$ un fascicul de $\mathcal{O}_X$-module pe X. Pentru fiecare $q \geq 0$ definim *imaginea directă superioară* ca fiind fasciculul pe Y asociat prefasciculului

$$U \to H^q(f^{-1}(U), \mathcal{F}_{|f^{-1}(U)}),$$

notat cu $R^q f_* \mathcal{F}$. În aceste condiţii, se arată că există un şir spectral

$$E_2^{p,q} = H^p(Y, R^q f_* \mathcal{F}) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathcal{F}),$$

numit *şir spectral Leray*.

Observaţia 2. Dacă $R^q f_* \mathcal{F} = 0$ pentru orice $q > 0$, atunci $E_2^{p,q} = 0$ pentru orice $p \geq 0$ şi $q > 0$, iar $E_2^{p,0} = H^p(Y, f_* \mathcal{F})$. În aceste condiţii, la nivel de E_2, şirul spectral Leray are forma din figura 2.

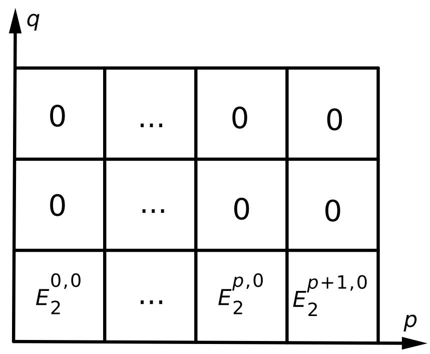

FIGURA 2. Şirul spectral Leray la nivel de E_2

Deducem că $d_2 = 0$, deci $E_2^{p,q} = E_\infty^{p,q}$. În concluzie, pentru orice $p \geq 0$, filtrarea are un singur termen, adică $H^p(Y, f_* \mathcal{F}) \cong H^p(X, \mathcal{F})$.

Observaţia 3. În cazul în care Y este curbă, avem că $E_2^{p,q} = H^p(Y, R^q f_* \mathcal{F}) = 0$ pentru orice $p \geq 2$. Ţinând cont de forma şirului spectral Leray la nivel de E_2 (figura 3), deducem că $d_2 = 0$ şi $E_2^{p,q} = E_\infty^{p,q}$. Pentru $p + q = 1$, obţinem că

$$E_2^{p,q} = H^p(Y, R^q f_* \mathcal{F}) \Rightarrow H^1(X, \mathcal{F}),$$

deci filtrarea are doi termeni ce conduc la şirul exact

$$0 \to E_2^{1,0} \to H^1(X, \mathcal{F}) \to E_2^{0,1} \to 0,$$

unde $E_2^{1,0} = H^1(Y, f_* \mathcal{F})$, $E_2^{0,1} = H^0(Y, R^1 f_* \mathcal{F})$.

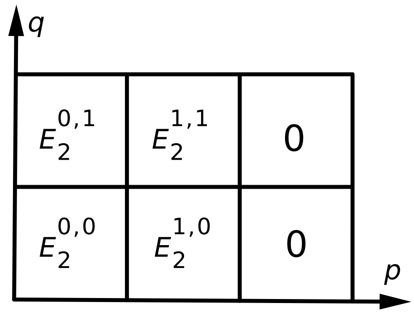

FIGURA 3. Şirul spectral Leray la nivel de E_2

1.2.2. *Şirul spectral al Ext-urilor.* Pentru acest exemplu vom considera un spaţiu inelat $(X, \mathcal{O}_X)$ şi $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ două fascicule de $\mathcal{O}_X$-module pe X. În aceste condiţii, există un şir spectral

$$E_2^{p,q} = H^p(X, \mathcal{E}xt^q(\mathcal{F}, \mathcal{G})) \Rightarrow \operatorname{Ext}^{p+q}(\mathcal{F}, \mathcal{G}),$$

numit *şirul spectral al* Ext*-urilor*. În plus, se deduce existenţa unui şir exact

$$0 \to E_2^{1,0} \to \operatorname{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2} E_2^{2,0} \to \operatorname{Ext}^2(\mathcal{F}, \mathcal{G}), \tag{1}$$

unde

$$E_2^{1,0} = H^1(X, \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})), E_2^{0,1} = H^0(X, \mathcal{E}xt^1(\mathcal{F}, \mathcal{G}))$$

şi

$$E_2^{2,0} = H^2(X, \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})).$$

Observaţia 4. Pentru $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ avem că $\mathcal{E}xt^q(\mathcal{O}_X, \mathcal{G}) = 0$ pentru orice $q > 0$ şi $\mathcal{E}xt^0(\mathcal{O}_X, \mathcal{G}) \cong \mathcal{G}$. Atunci $E_2^{p,q} = 0$ pentru orice $q > 0$ şi $E_2^{p,0} = H^p(X, \mathcal{G})$. Ca în observaţia 2 deducem că $E_\infty^{p,q} = E_2^{p,q}$, de unde $\operatorname{Ext}^p(\mathcal{O}_X, \mathcal{G}) \cong H^p(X, \mathcal{G})$. Acest lucru este cunoscut din faptul că functorii $\operatorname{Hom}(\mathcal{O}_X, \cdot)$ şi $\Gamma(X, \cdot)$ sunt egali, deci şi functorii lor derivaţi coincid.

1.2.3. *Imagine hiperdirectă.* Un exemplu tipic de construcţie a unui şir spectral ce va fi folosit în cele ce urmează este imaginea hiperdirectă. Considerăm $f : M \to N$ o aplicaţie continuă de spaţii topologice, C^* un complex de fascicule pe M şi $L^{*,*}$ o rezoluţie injectivă a lui C^*. Aplicând f_* acestui complex obţinem un complex de fascicule $f_*L^{*,*}$ pe N. Coomologia complexului total asociat acestui complex dublu se numeşte *imaginea hiperdirectă* a lui f pe C^* şi se notează cu $\mathbb{R}^* f_*(C^*)$.

Observaţia 5. O precizare pe care o putem face în acest moment şi pe care o considerăm utilă se referă la relaţia existentă între exemplele prezentate anterior. Legătura dintre acestea este asigurată prin faptul că ele nu reprezintă altceva decât cazuri particulare ale şirului spectral Grothendieck relativ la compunerea a doi functori.

2. Fibrate vectoriale olomorfe şi metode de construcţie

După cum este specificat şi în titlu, această secţiune este dedicată fibratelor vectoriale olomorfe şi principalelor metode de construcţie ale acestora.

În prima parte vom reaminti noţiunea geometrică de fibrat vectorial olomorf, ca apoi, prin intermediul proprietăţilor sale, să ajungem la descrierea sa ca obiect algebric, anume cea de fascicul local liber. Această abordare este motivată de utilizarea, deopotrivă, a celor două ipostaze - geometrică sau algebrică - urmând calea prezentărilor făcute în [Br96], [GH78] sau [Ko87]. Cadrul în care vom lucra va fi cel al varietăţilor complexe conexe şi al fibratelor vectoriale olomorfe, însă noţiunile pe care le vom introduce pot fi uşor extrapolate în cazul spaţiilor topologice conexe şi al fibratelor vectoriale complexe, respectiv al varietăţilor diferenţiabile şi fibratelor vectoriale diferenţiabile.

A doua parte este dedicată descrierii unor modalităţi prin care pot fi construite fibrate de rang doi pe varietăţi proiective netede. Evident, cea mai simplă metodă este de a considera suma directă a două fibrate în drepte: $V = L_1 \oplus L_2$. Nu ne putem aştepta însă, ca pe această cale, să obţinem fibrate vectoriale interesante. Pasul următor constă în a considera extinderi de fibrate în drepte, adică fibrate de rang doi V pentru care există un şir exact

$$0 \to L_1 \to V \to L_2 \to 0.$$

Deşi în cazul în care X este curbă se arată că orice fibrat de rang doi poate fi obţinut pe această cale, în cazul suprafeţelor se dovedeşte faptul că cele mai interesante fibrate nu au o astfel de descriere. Din acest motiv a apărut ideea modificării acestor extinderi, conducând astfel la diferite metode de construcţie. Vor fi prezentate două dintre acestea: metoda Serre şi metoda modificărilor elementare.

2.1. Fibrate vectoriale olomorfe. Vom introduce în continuare noţiunea de fibrat vectorial olomorf privit ca obiect geometric. Pentru aceasta, să considerăm X o varietate complexă conexă.

Definiţia 1.10. *Un* fibrat vectorial olomorf *de rang r pe X este format dintr-o familie $\{E_x\}_{x\in X}$ de spaţii vectoriale complexe parametrizate de X, împreună cu o structură de varietate complexă pe $E := \bigcup_{x\in X} E_x$ astfel încât:*

(1) proiecţia $\pi : E \to X$, cu fibra $\pi^{-1}(x) = E_x$, este olomorfă;

(2) există o acoperire deschisă $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ a lui X şi aplicaţiile biolomorfe

$$h_i : \pi^{-1}(U_i) \xrightarrow{\sim} U_i \times \mathbb{C}^r$$

de varietăţi complexe care stabilesc un izomorfism de spaţii vectoriale între E_x şi $\{x\} \times \mathbb{C}^r$ pentru orice $x \in U_i$.

Funcţiile (h_i) se numesc trivializări locale *ale fibratului E relativ la acoperirea $\mathcal{U}$. În cazul $r = 1$, E se numeşte* fibrat în drepte.

Să observăm că pentru orice pereche de trivializări locale h_i, h_j aplicaţia

$$h_{ij} := h_i \circ h_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^r \to (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^r$$

este liniară pe fiecare fibră şi există aplicaţiile olomorfe

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \to GL(r, \mathbb{C})$$

astfel încât

$$h_{ij}(x, v) = (x, g_{ij}(x)v).$$

În plus, pe $U_i \cap U_j \cap U_k$ este îndeplinită condiţia de 1-cociclu

(2) $$g_{ij}g_{jk}g_{ki} = I_r,$$

după cum se poate observa şi din diagrama următoare:

$$\begin{tikzcd}
 & \pi^{-1}(U_i \cap U_j \cap U_k) \arrow[dddl, "h_i"'] \arrow[ddddd, "h_j"] \arrow[dddr, "h_k"] & \\
(x,v) & & (x, g_{ki}(x)v) \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
(U_i \cap U_j \cap U_k) \times \mathbb{C}^r \arrow[rr, "h_{ki}"] & & (U_i \cap U_j \cap U_k) \times \mathbb{C}^r \arrow[ddl, "h_{jk}"] . \\
\rotatebox{-90}{$\in$} & & \\
(x, g_{ij}(x)g_{jk}(x)g_{ki}(x)v) & (U_i \cap U_j \cap U_k) \times \mathbb{C}^r \arrow[uul, "h_{ij}"] & \\
 & \rotatebox{-90}{$\in$} & \\
 & (x, g_{jk}(x)g_{ki}(x)v) &
\end{tikzcd}$$

Definiţia 1.11. *Funcţiile (g_{ij}) definite mai sus se numesc* funcţiile de tranziţie *ale fibratului vectorial $\pi : E \to X$ relative la trivializările locale (U_i, h_i).*

Reciproc, dacă $\mathcal{U} = (U_i)$ este acoperire deschisă a lui X şi

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \to GL(r, \mathbb{C})$$

sunt aplicaţii olomorfe care verifică relaţia (2), atunci există un unic fibrat vectorial olomorf $E \to X$ având funcţiile de tranziţie (g_{ij}). Se verifică imediat faptul că fibratul E se obţine din reuniunea disjunctă $\amalg(U_i \times \mathbb{C}^r)$, prin identificarea punctelor (x, v) şi $(x, g_{ij}(x)v)$, adică

$$E := (\amalg(U_i \times \mathbb{C}^r))_{/\sim},$$

unde

$$(x, v) \sim (x, g_{ij}(x)v),$$

pentru orice $x \in U_i \cap U_j$ şi $v \in \mathbb{C}$.

Exemplul 1. Dată o varietate complexă X de dimensiune n, există o acoperire (U_i) şi aplicaţiile olomorfe $\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}^n$ care sunt izomorfisme biolomorfe pe deschişi din $\mathbb{C}^n$. Definim g_{ij} pe $U_i \cap U_j$ ca fiind matricea Jacobiană a aplicaţiei

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j).$$

Evident, aplicaţiile (g_{ij}) satisfac condiţia (2) şi atunci ele definesc un fibrat vectorial olomorf pe X, notat cu $\mathcal{T}_X$ şi numit *fibratul tangent*.

Definiţia 1.12. *Date două fibrate vectoriale olomorfe E şi F pe varietatea complexă conexă X, o aplicaţie olomorfă $f : E \to F$ se numeşte* morfism de fibrate *dacă pentru orice $x \in X$ avem $f(E_x) \subset F_x$ şi aplicaţia $f_x = f_{/E_x} : E_x \to F_x$ este liniară. În plus, dacă f_x este izomorfism pentru orice $x \in X$, atunci spunem că f este* izomorfism de fibrate.

Notăm cu $Vect^r_{hol}(X)$ mulţimea claselor de izomorfism de fibrate vectoriale de rang r pe varietatea X. Vom arăta în continuare faptul că există o corespondenţă bijectivă între această mulţime şi mulţimea claselor de izomorfism de fascicule local libere de rang r pe X. Pentru aceasta, vom defini mai întâi noţiunea de secţiune a unui fibrat vectorial.

Fie $\pi : E \to X$ un fibrat vectorial olomorf pe varietatea complexă conexă X şi $U \subset X$ un deschis arbitrar.

Definiţia 1.13. *O aplicaţie olomorfă $s : U \to E$ cu proprietatea $\pi \circ s = id_U$ se numeşte* secţiune *peste deschisul U a fibratului vectorial olomorf E. O colecţie $s_1, \ldots, s_r$ de secţiuni ale lui E peste U cu proprietatea că $\{s_1(x), \ldots, s_r(x)\}$ este bază pentru E_x se numeşte* reper local *al lui E peste deschisul $U \subset X$.*

Observăm că, de fapt, un reper peste U este acelaşi lucru cu o trivializare a lui E peste U: dată

$$E_U := \pi^{-1}(U) \xrightarrow{h_U} U \times \mathbb{C}^r$$

o trivializare, secţiunile

$$s_i(x) = h_U^{-1}(x, e_i)$$

formează un reper şi, reciproc, dat $s_U = (s_1, \ldots, s_r)$ un reper local pe deschisul U, putem defini o trivializare locală h_U prin

$$h_U(\lambda) = (x, (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)),$$

unde $\lambda = \sum \lambda_i s_i(x)$ în E_x. În particular, dacă $\mathcal{U} = (U_i)$ este acoperire deschisă a lui X şi pentru fiecare i notăm cu s_{U_i} un reper local pe deschisul U_i, atunci legătura dintre reperele s_{U_i}, s_{U_j} pe intersecţia $U_i \cap U_j$ este dată de relaţia

$$s_{U_j} = s_{U_i} g_{ij}, \tag{3}$$

unde g_{ij} sunt funcţiile de tranziţie corespunzătoare trivializărilor $(h_i) = (h_{U_i})$ definite de reperele locale (s_{U_i}).

Notăm cu $\Gamma(U, E) = \{s/s : U \to E \text{ secţiune}\}$. Se obţine astfel un fascicul coerent $\mathcal{E}$ pe X considerând $\mathcal{E}(U) := \Gamma(U, E)$.

Definiţia 1.14. *$\mathcal{E}$ se numeşte* fasciculul de secţiuni *al fibratului vectorial E.*

Se observă că $\mathcal{E}$ este local liber, adică

$$\mathcal{E}_{/U_i} \cong \mathcal{O}_{U_i}^{\oplus r}.$$

Reciproc, fie $\mathcal{E}$ un fascicul local liber de $\mathcal{O}_X$-module pe X şi

$$\varphi_i : \mathcal{E}_{/U_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{U_i}^{\oplus r}$$

trivializări locale relative la acoperirea $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ a lui X. Se obţin izomorfismele

$$\varphi_{ij} : \mathcal{O}_{U_i \cap U_j}^{\oplus r} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{U_i \cap U_j}^{\oplus r},$$

unde $\varphi_{ij} := \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$, precum şi aplicaţiile olomorfe

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \to GL(r, \mathbb{C})$$

cu proprietatea

$$\varphi_{ij,x}(u) = g_{ij}(x) u, \forall x \in U_i \cap U_j.$$

Se arată imediat că este îndeplinită condiţia (2), adică (g_{ij}) este un 1-cociclu al acoperirii $\mathcal{U}$ cu coeficienţi în $GL(r, \mathcal{O}_X)$. Deducem existenţa unui fibrat vectorial olomorf E pe X ale cărui funcţii de tranziţie sunt (g_{ij}). Am arătat

Propoziţia 1.15. *Există o bijecţie între $Vect_{hol}^r(X)$ şi mulţimea claselor de izomorfism de fascicule local libere de rang r pe X.*

Acest rezultat ne permite să nu mai facem distincţia între fibratul vectorial E şi fasciculul local liber asociat $\mathcal{E}$. În acelaşi timp, prin intermediul trivializărilor locale, funcţiilor de tranziţie şi a operaţiilor cu spaţii vectoriale, putem defini operaţii cu fibrate vectoriale. Spre exemplu, dacă $E \to X$

este fibrat vectorial olomorf, construim fibratul dual $E^* \to X$ ca fiind fibratul vectorial olomorf care are fibrele $E_x^* = (E_x)^*$; trivializările locale

$$\varphi_U : E_U \to U \times \mathbb{C}^r$$

induc aplicaţiile

$$\varphi_U^* : E_U^* \to U \times (\mathbb{C}^r)^* \cong U \times \mathbb{C}^r,$$

care îi conferă lui $E^* = \cup E_x^*$ o structură de varietate complexă. Raportat la funcţiile de tranziţie, dacă g_{ij} şi g_{ij}^* reprezintă funcţiile de tranziţie pentru E, respectiv E^*, atunci are loc relaţia

$$g_{ij}^*(x) = {}^t g_{ij}(x)^{-1}.$$

În mod asemănător se pot defini $E \oplus F$, $E \otimes F$, $\mathcal{H}om(E, F)$, puterea exterioară $\Lambda^p E$, fibratul determinant $\det E = \Lambda^r E$, puterea simetrică $\mathcal{S}^p E$.

Exemplul 2. Fibratul dual fibratului tangent se numeşte *fibratul cotangent* şi se notează cu Ω_X^1. El reprezintă fibratul vectorial olomorf al diferenţialelor.

Exemplul 3. Cu ajutorul fibratului cotangent şi al puterii exterioare putem defini *fibratul p-formelor* pe varietatea complexă n-dimensională X ca fiind fibratul olomorf $\Omega_X^p = \Lambda^p \Omega_X^1$. Pentru $p = n$ obţinem fibratul

$$\Omega_X^n = \Lambda^n \Omega_X^1 = \det(\Omega_X^1) = \omega_X (= \mathcal{K}_X),$$

numit *fibratul canonic* pe varietatea X.

Definiţia 1.16. *Un* subfibrat $F \subset E$ *al unui fibrat* E *reprezintă o colecţie de subspaţii vectoriale* $\{F_x \subset E_x\}_{x \in X}$ *ale fibrelor* E_x *ale lui* E *astfel încât* $F = \cup F_x \subset E$ *este subvarietate complexă a lui* E. *Dacă* F *este subfibrat al lui* E *definim* fibratul factor E/F *astfel ca* $(E/F)_x = E_x/F_x$.

În continuare vom determina condiţia necesară şi suficientă ca doi 1-cocicli cu coeficienţi în $GL(r, \mathcal{O}_X)$ să definească fibrate vectoriale izomorfe. Pentru aceasta, fie

$$E_1 \xrightarrow{\pi_1} X, \qquad E_2 \xrightarrow{\pi_2} X$$

fibrate vectoriale olomorfe pe X, de rang r_1, respectiv r_2 şi $\varphi : E_1 \to E_2$ un morfism de fibrate. Rafinând eventual acoperirea, putem presupune că există $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ o acoperire deschisă a lui X în raport cu care E_1 şi E_2 au trivializări locale (U_i, h_i^1), respectiv (U_i, h_i^2), astfel încât aplicaţia

$$U_i \times \mathbb{C}^{r_1} \xrightarrow{\alpha_i} U_i \times \mathbb{C}^{r_2}$$

indusă de h_i^1, h_i^2 şi morfismul φ este de forma

$$(x, v) \mapsto (x, \varphi_i(x) v)$$

unde

$$\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}^{r_1 r_2} = \mathcal{M}_{r_2,r_1}(\mathbb{C}),$$

după cum se poate observa în diagrama de mai jos:

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1^{-1}(U_i) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "h_i^1"', "\wr"] & \pi_2^{-1}(U_i) \arrow[d, "\wr"', "h_i^2"] & \\
(x,v) \in & U_i \times \mathbb{C}^{r_1} \arrow[r, "\alpha_i"] & U_i \times \mathbb{C}^{r_2} & \ni (x, \varphi_i(x)v)\,.
\end{tikzcd}$$

În plus, aplicaţiile φ_i satisfac relaţia

$$\varphi_j g_{ij}^1 = g_{ij}^2 \varphi_i \tag{4}$$

pe orice $U_i \cap U_j$, unde $(g_{ij}^1), (g_{ij}^2)$ sunt funcţiile de tranziţie corespunzătoare trivializărilor locale considerate, aşa cum putem vedea şi din diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(x,v) \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[dddd, rightsquigarrow, bend right=60] & (x,\varphi_i(x)v) \arrow[ddr, rightsquigarrow, bend left] & \\
\rotatebox[origin=c]{90}{$\in$} & \rotatebox[origin=c]{90}{$\in$} & \\
(U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^{r_1} \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[d, "h_{ij}^1"', "\wr"] & (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^{r_2} \arrow[d, "\wr"', "h_{ij}^2"] & \\
(U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^{r_1} \arrow[r, "\alpha_j"] & (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^{r_2} & \ni (x, g_{ij}^2(x)\varphi_i(x)v)\,. \\
\rotatebox[origin=c]{-90}{$\in$} & \rotatebox[origin=c]{-90}{$\in$} & \\
(x, g_{ij}^1(x)v) \arrow[r, rightsquigarrow] & (x, \varphi_j(x) g_{ij}^1(x) v) \arrow[uur, equal] &
\end{tikzcd}$$

Reciproc, pentru o colecţie de aplicaţii (φ_i) care satisfac relaţia (4), se poate construi un morfism de fibrate vectoriale.

În cazul în care fibratele au acelaşi rang ($r_1 = r_2$), deducem că o condiţie necesară şi suficientă ca doi 1-cocicli $(g_{ij}^1), (g_{ij}^2)$ cu coeficienţi în $GL(r, \mathcal{O}_X)$ să definească fibrate vectoriale izomorfe este să existe aplicaţiile

$$\varphi_i : U_i \to GL(r, \mathbb{C})$$

astfel încât

$$g_{ij}^2 = \varphi_j g_{ij}^1 \varphi_i^{-1},$$

unde $\varphi_i^{-1}(x)$ semnifică inversa matricei $\varphi_i(x) \in GL(r, \mathbb{C})$. Am obţinut

Propoziţia 1.17. *Există o bijecţie între mulţimile $Vect_{hol}^r(X)$ şi $H^1(X, GL(r, \mathcal{O}_X))$.*

Aşa cum am afirmat şi la începutul secţiunii, noţiunile introduse pot fi utilizate şi în cazul varietăţilor diferenţiabile cerând ca structura pe E să fie cea de varietate diferenţiabilă, iar aplicaţiile care apar să fie de clasa $\mathcal{C}^\infty$. Se obţine în acest mod noţiunea de fibrat vectorial diferenţiabil sau $\mathcal{C}^\infty$-fibrat vectorial complex.

2.2. Metoda Serre. Metoda Serre reprezintă principala modalitate prin care se pot construi fibrate vectoriale pe varietăţi proiective. Astfel, se obţine un răspuns parţial la problema existenţei fibratelor vectoriale pe diferite varietăţi. Vom prezenta în continuare principalele rezultate referitoare la acest subiect. O tratare amănunţită a tematicii poate fi consultată în [OSS80] pentru $\mathbb{P}^n$, în [Br96] pentru varietăţi compacte complexe sau [Fr98] pentru varietăţi proiective netede. Ideea de bază constă în determinarea condiţiilor în care, date L_1 şi L_2 fibrate în drepte pe varietatea X, precum şi o subvarietate Y a lui X, local intersecţie completă de codimensiune doi, există o extindere local liberă a lui $L_2 \otimes \mathcal{I}_Y$ prin L_1.

Pentru început vom considera X o varietate proiectivă netedă şi V un fibrat vectorial de rang doi pe X, iar $s \in H^0(X, V)$ o secţiune nenulă. Notăm cu D divizorul asociat lui s şi cu $\tilde{V} = V \otimes \mathcal{O}_X(-D)$. Se construieşte o secţiune $\tilde{s} \in H^0(X, \tilde{V})$ astfel încât mulţimea zerourilor Y a lui $\tilde{s}$ este de codimensiune doi în X (sau vidă). Notăm cu $\mathcal{I}_Y \subset \mathcal{O}_X$ fasciculul de ideale asociat lui Y. Atunci $\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y) = Y$ şi $(Y, \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y)$ este local intersecţie completă în X, de codimensiune doi, numită *locul zerourilor* secţiunii $\tilde{s} \in H^0(X, \tilde{V})$ şi care se mai notează cu $zero(\tilde{s})$. Notăm cu $L_1 = \mathcal{O}_X(D), L_2 = \det(\tilde{V}) \otimes \mathcal{O}_X(D)$. Se obţine următorul rezultat:

Teorema 1.18. *Cu notaţiile de mai sus, V stă în extinderea*

$$0 \to L_1 \to V \to L_2 \otimes \mathcal{I}_Y \to 0. \tag{5}$$

Metoda Serre constă în inversarea acestei construcţii: date două fibrate în drepte L_1, L_2 pe varietatea X şi o subvarietate Y de codimensiune doi, local intersecţie completă în X, se pune problema existenţei unei extinderi a lui $L_2 \otimes \mathcal{I}_Y$ prin L_1

$$0 \to L_1 \to V \to L_2 \otimes \mathcal{I}_Y \to 0$$

astfel încât V să fie local liber. Ţinând cont de faptul că aceste extinderi sunt clasificate de $\mathrm{Ext}^1(L_2 \otimes \mathcal{I}_Y, L_1)$, iar V corespunde unei clase de extindere

$$\xi \in \mathrm{Ext}^1(L_2 \otimes \mathcal{I}_Y, L_1)$$

a cărei imagine prin morfismul

$$\mathrm{Ext}^1(L_2 \otimes \mathcal{I}_Y, L_1) \to H^0(X, \mathcal{E}xt^1(L_2 \otimes \mathcal{I}_Y, L_1))$$

dat de şirul exact (1) din secţiunea 1.2.2 este $\tilde{\xi}$, obţinem următoarea teoremă a lui Serre:

Teorema 1.19. *Extinderea corespunzătoare lui ξ este local liberă dacă şi numai dacă secţiunea $\tilde{\xi}$ generează fasciculul $\mathcal{E}xt^1(L_2 \otimes \mathcal{I}_Y, L_1)$, adică aplicaţia naturală*

$$\mathcal{O}_X \to \mathcal{E}xt^1(L_2 \otimes \mathcal{I}_Y, L_1)$$

definită de $\tilde{\xi}$ este surjectivă.

În cazul în care X este suprafaţă şi $Y = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ este formată din puncte distincte (reduse) se obţine următorul rezultat:

Teorema 1.20. *Există o extindere local liberă a lui $L_2 \otimes \mathcal{I}_Y$ prin L_1 dacă şi numai dacă orice secţiune a lui $L_2 \otimes L_1^* \otimes \mathcal{K}_X$ care se anulează în toate punctele p_i cu excepţia unuia se anulează şi în acesta din urmă.*

Despre o mulţime $Y = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ care îndeplineşte condiţia că orice secţiune a sistemului liniar $L = L_2 \otimes L_1^* \otimes \mathcal{K}_X$ care se anulează în toate punctele p_i cu excepţia unuia se anulează şi în acesta din urmă vom spune că are *proprietatea Cayley-Bacharach* relativ la L.

2.3. Modificări elementare. O altă modalitate de construcţie a fibratelor vectoriale, pe care o vom prezenta în continuare, este cea a modificărilor elementare, urmând calea din [Fr98]. Să presupunem că X este o varietate proiectivă netedă regulată, iar D este un divizor efectiv pe X. Notăm cu $j : D \to X$ incluziunea. Fie V un fibrat de rang doi pe X, L un fibrat în drepte pe D, $V \to j_*L$ o surjecţie şi W nucleul acesteia. Atunci avem un şir exact

$$0 \to W \to V \to j_*L \to 0.$$

Vom spune în această situaţie că W este o *modificare elementară* a lui V.

Propoziţia 1.21. *Orice modificare elementară este local liberă. Clasele ei Chern sunt date de*

$$\begin{aligned} c_1(W) &= c_1(V) - [D], \\ c_2(W) &= c_2(V) - c_1(V) \cdot [D] + j_*c_1(L). \end{aligned}$$

Dată o modificare elementară

$$0 \to W \to V \to j_*L \to 0,$$

surjecţia $V \to j_*L$ conduce la existenţa un şir exact

$$0 \to L' \to V_{|D} \to L \to 0,$$

unde L' este fibrat în drepte pe D, definit ca nucleu al aplicaţiei $V_{|D} \to L$. Atunci există o surjecţie indusă $W \to j_*L'$. Cum $\det(W) = \det(V) \otimes \mathcal{O}_X(-D)$, deducem că

$$\det(W_{|D}) = \det(V_{|D}) \otimes \mathcal{O}_X(-D) = L \otimes L' \otimes \mathcal{O}_X(-D).$$

Atunci nucleul aplicaţiei $W_{|D} \to L'$ este fibratul în drepte $L \otimes \mathcal{O}_X(-D)$. Se arată că dacă U este dat de modificarea elementară

$$0 \to U \to W \to j_* L' \to 0,$$

atunci $U \cong V \otimes \mathcal{O}_X(-D)$. Concluzia este că, repetând o modificare elementară, vom ajunge în punctul din care am plecat.

Şi această metodă de construcţie poate fi inversată după cum urmează: dat W fibrat de rang doi pe X şi fibratul în drepte L pe divizorul $D \subset X$, ne putem pune problema construirii extinderii V a lui $j_* L$ prin W. Însă aceste extinderi sunt clasificate de

$$\mathrm{Ext}^1(j_* L, W) \cong H^0(D, (W \otimes \mathcal{O}_X(D))_{|D} \otimes L^{-1}).$$

Pe de altă parte, dacă W este o modificare elementară a lui V, atunci V, sau echivalent V^*, se poate obţine ca o modificare elementară

$$0 \to V^* \to W^* \to j_*(L^{-1}) \otimes \mathcal{O}_X(D) \to 0,$$

iar aceste extinderi sunt clasificate de

$$\mathrm{Hom}(W^*, j_*(L^{-1}) \otimes \mathcal{O}_X(D)) \cong H^0(D, (W \otimes \mathcal{O}_X(D))_{|D} \otimes L^{-1}).$$

3. Stabilitate

În această secţiune vom defini noţiunea de stabilitate şi vom da câteva proprietăţi elementare legate de aceasta, urmând calea descrisă în [Fr98]. Pentru o tratare mai detaliată a subiectului în cazul spaţiului proiectiv, se poate consulta [OSS80].

Considerăm X o varietate proiectivă netedă de dimensiune n şi H un fibrat în drepte pe X, amplu.

Definiţia 1.22. *Fie V un fascicul coerent fără torsiune pe X. Definim* panta *(sau* gradul normalizat*) $\mu_H(V)$ al lui V în raport cu H numărul*

$$\mu_H(V) = \frac{1}{\mathrm{rang}(V)} \cdot (c_1(V) \cdot H^{n-1}). \tag{6}$$

Observaţia 6. Dacă D este divizor efectiv pe X, atunci

$$\mu_H(\mathcal{O}_X(D)) = \deg(D).$$

Observaţia 7. Dacă V este un fascicul coerent, fără torsiune, de rang r pe $\mathbb{P}^n$, atunci mulţimea singularităţilor $S(V)$ are codimensiune cel puţin doi. Putem alege o dreaptă $L \subset \mathbb{P}^n$ care nu intersectează $S(V)$. Atunci

$$V_{/L} \cong \mathcal{O}(a_1) \oplus \mathcal{O}(a_2) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(a_r),$$
$$c_1(V) = a_1 + a_2 + \cdots + a_r,$$
$$\mu_L(V) = \frac{1}{r}(a_1 + a_2 + \cdots + a_r).$$

Dintre proprietăţile pantei amintim cea de convexitate în raport cu şirurile exacte şi cea referitoare la subfascicule de acelaşi rang, enunţate în propoziţia următoare şi ale căror demonstraţii pot fi găsite în [Fr98].

Propoziţia 1.23. *Fie X o varietate proiectivă netedă de dimensiune n, V un fascicul fără torsiune pe X şi H un fibrat în drepte amplu pe X. Notăm cu $\mu = \mu_H$ gradul normalizat în raport cu H.*

(i) Dacă V', V'' sunt fascicule nenule pe X, fără torsiune, astfel încât

$$0 \to V' \to V \to V'' \to 0$$

este şir exact, atunci

$$\min(\mu(V'), \mu(V'')) \leq \mu(V) \leq \max(\mu(V'), \mu(V'')).$$

Egalităţile au loc dacă şi numai dacă $\mu(V') = \mu(V'') = \mu(V)$.

(ii) Dacă W este un subfascicul al lui V cu $\operatorname{rang}(W) = \operatorname{rang}(V)$, atunci

$$\mu(W) \leq \mu(V).$$

În plus, dacă V şi W sunt fibrate vectoriale, atunci ori $\mu(W) < \mu(V)$ ori $W = V$.

Vom da în continuare definiţia stabilităţii Mumford-Takemoto şi pe care o vom numi în cele ce urmează, simplu, stabilitate.

Definiţia 1.24. *Fie V, X, H, μ ca în propoziţia 1.23.*

*(a) V se numeşte H-*stabil *dacă $\mu(W) < \mu(V)$, pentru orice subfascicul W al lui V cu $0 < \operatorname{rang}(W) < \operatorname{rang}(V)$.*

*(b) Spunem că V este H-*semistabil *dacă $\mu(W) \leq \mu(V)$, pentru orice subfascicul W al lui V cu $0 < \operatorname{rang}(W) < \operatorname{rang}(V)$.*

(c) V se numeşte instabil *dacă nu este semistabil şi* strict semistabil *dacă este semistabil, dar nu este stabil.*

(d) Un subfascicul W al lui V cu $0 < \operatorname{rang}(W) < \operatorname{rang}(V)$ se numeşte destabilizant *dacă $\mu(W) \geq \mu(V)$.*

Observaţia 8. Fibratele în drepte sunt stabile, neexistând subfibrate de rang strict mai mic.

Observaţia 9. Stabilitatea şi semistabilitatea depind numai de clasa de echivalenţă numerică a lui H.

Observaţia 10. Dacă X este curbă atunci panta lui V este independentă de alegerea lui H şi $\mu_H(V) = c_1(V)$.

Vom enunţa, în continuare, condiţii echivalente ca un fascicul fără torsiune să fie stabil (respectiv semistabil) şi ale căror demonstraţii pot fi găsite, spre exemplu în [Fr98] sau [OSS80].

Propoziţia 1.25. *Fie V un fascicul fără torsiune pe o varietate proiectivă netedă X. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) V este stabil (semistabil).

(ii) $\mu(W) < \mu(V)$ (respectiv $\mu(W) \leq \mu(V)$), pentru orice subfascicul coerent W al lui V, cu $0 < \operatorname{rang}(W) < \operatorname{rang}(V)$ şi V/W fără torsiune.

(iii) $\mu(Q) > \mu(V)$ (respectiv $\mu(W) \geq \mu(V)$), pentru orice cât fără torsiune Q al lui V, cu $0 < \operatorname{rang}(Q) < \operatorname{rang}(V)$.

(iv) V^* este stabil (semistabil).

Atunci când dorim să studiem stabilitatea unui fascicul fără torsiune, pe lângă proprietăţile enunţate în propoziţia 1.25, sunt utile şi rezultate ce precizează acest lucru atunci când este cunoscută stabilitatea altor fascicule. Un exemplu îl constituie propoziţia următoare, a cărei demonstraţie se bazează pe proprietăţile pantei din propoziţia 1.23 şi poate fi consultată, spre exemplu, în [Fr98].

Propoziţia 1.26. *Fie*

$$0 \to V' \to V \to V'' \to 0$$

un şir exact de fascicule nenule fără torsiune având pantele egale. Atunci V nu este stabil, dar este semistabil dacă şi numai dacă V' şi V'' sunt semistabile. În particular, dacă V' şi V'' au rangul 1, atunci V este semistabil.

O condiţie necesară ca un fascicul fără torsiune să fie stabil este aceea de a fi *simplu*, adică singurele sale endomorfisme sunt omotetiile. Acest rezultat reprezintă o consecinţă a unuia mai general care spune

Propoziţia 1.27. *Fie V_1 şi V_2 două fascicule fără torsiune, semistabile, de aceeaşi pantă şi $f : V_1 \to V_2$ un omomorfism nenul. Atunci f este injectiv. În particular, dacă $V_1 = V_2$ sau V_1, V_2 sunt fibrate vectoriale atunci f este izomorfism.*

Două consecinţe ale acestei propoziţii sunt

Corolarul 1.28. *Dacă V este stabil atunci V este simplu.*

Corolarul 1.29. *Fie V_1 şi V_2 două fascicule semistabile. Atunci $V_1 \oplus V_2$ nu este stabil. Este semistabil dacă şi numai dacă $\mu(V_1) = \mu(V_2)$.*

DEMONSTRAŢIE. Deoarece $V_1 \oplus V_2$ nu este simplu rezultă din corolarul 1.28 că nu este nici stabil.
($\Rightarrow$) Arătăm că dacă $V_1 \oplus V_2$ este semistabil atunci $\mu(V_1) = \mu(V_2)$. Din propoziţia 1.25 precum şi din faptul că fiecare din fasciculele V_i poate fi privit în acelaşi timp atât ca un subfascicul, dar şi ca un cât al lui $V_1 \oplus V_2$, deducem că $\mu(V_1) = \mu(V_2) = \mu(V_1 \oplus V_2)$.
($\Leftarrow$) Se aplică propoziţia 1.26 şirului exact $0 \to V_1 \to V_1 \oplus V_2 \to V_2 \to 0$. □

Noţiunea de stabilitate este legată de cele mai multe ori de problema clasificării fibratelor vectoriale şi de conceptul de spaţiu de moduli. Privit la modul grosier, un spaţiu de moduli pentru o colecţie de obiecte A şi o relaţie de echivalenţă $\sim$ este un spaţiu cu proprietatea că fiecărui punct al său îi corespunde exact o clasă de echivalenţă. Ca mulţime de puncte, poate fi identificat cu $A/\sim$, însă este înzestrat şi cu o structură algebrică.

Din momentul în care este stabilită existenţa spaţiului de moduli apar întrebări despre structura sa locală sau globală. Cum arată ca varietate algebrică? Este conex, ireductibil sau neted? Cum arată ca spaţiu topologic? Care este geometria sa?

Un răspuns general la aceste întrebări nu se cunoaşte încă, dar putem da ca exemplu o clasă de fibrate vectoriale ce admite o structură algebrică frumoasă. Provine din G.I.T. şi este dată de clasa fibratelor vectoriale stabile, iar noţiunea de (semi)stabilitate este exact ingredientul care ne asigură că mulţimea fibratelor vectoriale ce dorim a o parametriza este suficient de mică pentru a fi parametrizată de o schemă de tip finit.

În secţiunea 4 din capitolul 3 vom arăta cum se pot construi spaţii de parametri pentru anumite clase de fibrate vectoriale şi vom demonstra ireductibilitatea acestora, fără a face apel la conceptul de stabilitate.

CAPITOLUL 2

Fibrate plate

Acest capitol este structurat pe trei secţiuni. În prima parte vom introduce principalele concepte privind fibratele plate. Vom face legătura cu noţiunile introduse în secţiunea 2.1 din capitolul 1, referindu-ne cu precădere la relaţia care există între fibratele plate şi conexiunile plate. Vom deduce o condiţie necesară şi suficientă ca un fibrat să fie plat utilizând pentru aceasta extinderea unui fibrat E prin $E \otimes \Omega^1_X$ dată de construcţia lui Atiyah ([At57]). În a doua parte vom prezenta principalele rezultate privind suprafeţele Inoue folosind ca referinţe [In74] şi [Pl95]. Utilizând materialul din primele două secţiuni, vom studia în a treia parte a acestui capitol fibratele vectoriale de rang doi plate, date prin extinderi de fibrate în drepte ([BMS01]).

1. Teoria generală

Această secţiune este dedicată prezentării principalelor noţiuni legate de teoria fibratelor vectoriale plate. În prima parte vom introduce noţiunea de conexiune într-un fibrat şi vom stabili o legătura între conexiunile plate şi fibratele plate, având model prezentările făcute în [GH78] şi [Ko87]. A doua parte se referă la expunerea construcţiei lui Atiyah aşa cum apare în [At57] şi o descriere a fibratelor plate dedusă din această construcţie.

1.1. Conexiuni în fibrate vectoriale. O funcţie netedă pe o varietate X cu valori în $\mathbb{R}^k$ poate fi privită ca o secţiune a fibratului trivial $X \times \mathbb{R}^k$. Teoria conexiunilor a apărut, astfel, din dorinţa de a generaliza noţiunea de derivată după o direcţie a unei funcţii şi de a putea fi aplicat acest nou concept secţiunilor în fibrate. Deşi în secţiunea 2.1 din capitolul anterior ne-am referit, cu precădere, la fibratele vectoriale olomorfe, pentru introducerea noţiunii de conexiune şi studierea proprietăţilor acesteia vom considera categoria fibratelor vectoriale complexe diferenţiabile în locul celei a fibratelor vectoriale olomorfe, care este prea mică şi prea rigidă din acest punct de vedere. Pentru o tratare mai amănunţită a subiectului pot fi consultate referinţele [GH78] sau [Ko87].

Să considerăm E un fibrat vectorial complex diferenţiabil, de rang r, pe varietatea diferenţiabilă reală n-dimensională M. Facem următoarele notaţii:

$$\begin{array}{rcl} A^p(M) & = & \text{fibratul } p\text{-formelor complexe de clasă } \mathbb{C}^\infty \text{ pe } M \\ A^p(E) & = & E \otimes A^p(M). \end{array}$$

Definiţia 2.1. *O* conexiune *în E este un omomorfism peste $\mathbb{C}$*

$$D : A^0(E) \to A^1(E)$$

cu proprietatea că satisface regula lui Leibniz:

(7) $$D(f\sigma) = \sigma df + fD\sigma,$$

pentru orice $f \in A^0(M)$ şi $\sigma \in A^0(E)$.

Fie $s = (s_1, \ldots, s_r)$ un reper local al lui E pe deschisul $U \subset M$. Atunci există o matrice de 1-forme $\omega = (\omega_{ij})$ cu $\omega_{ij} \in A^1(U)$, astfel încât

(8) $$Ds = s \cdot \omega.$$

Definiţia 2.2. *Matricea ω definită mai sus se numeşte* forma de conexiune *a lui D în raport cu reperul s.*

Dacă σ este o secţiune arbitrară a lui E pe deschisul U şi notăm tot cu σ vectorul coloană al coordonatelor sale în reperul s atunci

$$D\sigma = d\sigma + \omega\sigma.$$

Definiţia 2.3. *Numim $D\sigma$* derivata covariantă *a lui σ.*

Considerând un alt reper local $s' = (s'_1, \ldots, s'_r)$ pe deschisul U şi exprimând fiecare s_i în reperul s', obţinem o matrice $a : U \to GL(r, \mathbb{C})$ cu proprietatea că

$$s = s' \cdot a.$$

Dacă notăm cu ω' forma de conexiune a lui D în raport cu reperul s', atunci

(9) $$\omega = a^{-1}\omega' a + a^{-1}da,$$

relaţie ce face legătura între cele două forme de conexiune la o schimbare de reper.

Pasul următor este de a extinde conexiunea $D : A^0(E) \to A^1(E)$ la o aplicaţie $\mathbb{C}$-liniară

$$D : A^p(E) \to A^{p+1}(E),$$

pentru orice $p \geq 0$, impunându-i să satisfacă condiţia

$$D(\sigma\varphi) = (D\sigma) \wedge \varphi + \sigma d\varphi,$$

pentru orice $\sigma \in A^0(E)$ şi $\varphi \in A^p(M)$.

Definiţia 2.4. *Definim* curbura *R a conexiunii D ca fiind*

$$R = D \circ D : A^0(E) \to A^2(E).$$

Se arată imediat că R este $A^0(M)$-liniară, deci R este o 2-formă pe M cu valori în $\mathrm{End}(E)$. Pentru a utiliza scrierea matriceală, definim matricea Ω astfel încât, în raport cu un reper local s, are loc egalitatea

$$Rs = s\Omega.$$

Definiţia 2.5. *Matricea Ω definită mai sus se numeşte* forma de curbură *a conexiunii D în raport cu reperul local s.*

Ţinând cont de relaţia $R = D^2$, de exprimarea matriceală a conexiunii D şi de definiţia conexiunii deducem că

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega.$$

Dacă Ω şi Ω' sunt formele de curbură ale conexiunii D în raport cu două repere locale s, respectiv s', cu $s = s' \cdot a$, atunci legătura dintre ele este dată de relaţia

$$\Omega = a^{-1}\Omega' a.$$

În particular, dacă $\mathcal{U} = (U_i)$ este o acoperire deschisă a lui M şi (s_{U_i}) sunt repere locale între care există legătura $s_{U_j} = s_{U_i} g_{ij}$ dată de relaţia (3), atunci

$$\Omega_{U_j} = g_{ij}^{-1}\Omega_{U_i} g_{ij},$$

unde Ω_{U_i} este forma de curbură a conexiunii D relativă la reperul local s_{U_i}.

Definiţia 2.6. *Spunem că o conexiune D într-un fibrat E este* plată *dacă curbura sa R este zero.*

Pentru a introduce noţiunea de fibrat plat considerăm E un fibrat vectorial complex diferenţiabil, de rang r, pe varietatea diferenţiabilă reală M. Fie $\mathcal{U} = (U_i)$ o acoperire deschisă a lui M şi (s_{U_i}) repere locale corespunzătoare acestei acoperiri (cu notaţiile din secţiunea 2.1, capitolul 1). Dacă (g_{ij}) sunt funcţiile de tranziţie, atunci din relaţia (3) avem că

$$s_{U_j} = s_{U_i} g_{ij}.$$

Definiţia 2.7. *O* structură plată *pe E este definită de o acoperire $\mathcal{U} = (U_i)$ şi reperele locale (s_{U_i}) pentru care funcţiile de tranziţie (g_{ij}) sunt matrice constante în $GL(r, \mathbb{C})$. Un fibrat vectorial înzestrat cu o structură plată se numeşte* fibrat plat.

Un fibrat plat admite în mod natural o conexiune plată. Într-adevăr, dată o structură plată pe E definită de acoperirea şi reperele locale (U_i, s_{U_i}), atunci conexiunea este dată de relaţiile

$$Ds_{U_i} = 0, \tag{10}$$

ce au loc pentru orice i. Cum funcţiile de tranziţie (g_{ij}) sunt toate constante, condiţiile $Ds_{U_i} = 0$ şi $Ds_{U_j} = 0$ sunt compatibile pe $U_i \cap U_j$ şi conexiunea D

este bine definită. Să observăm că ecuaţia (10) este echivalentă cu

$$\omega_{U_i} = 0, \tag{11}$$

datorită relaţiei (8). Oricare din egalităţile (10) sau (11) conduce la faptul că $R = 0$, adică D este conexiune plată.

Reciproc, un fibrat vectorial E cu o conexiune plată D admite în mod natural o structură plată (U_i, s_{U_i}). Pentru a arăta acest lucru, trebuie să construim reperele locale s_{U_i} care să îndeplinească condiţia (10). Vom porni cu un reper local arbitrar s'_{U_i} şi vom căuta o funcţie $a : U_i \to GL(r, \mathbb{C})$ astfel încât reperul $s_{U_i} := s'_{U_i} \cdot a$ verifică relaţia (11). Dacă ω'_{U_i} este forma de conexiune a lui D relativă la reperul s'_{U_i}, atunci condiţia $\omega_{U_i} = 0$ este echivalentă, conform relaţiei (9), cu

$$a^{-1}\omega'_{U_i}a + a^{-1}da = \omega_{U_i} = 0.$$

Această egalitate reprezintă un sistem de ecuaţii diferenţiale, în care ω'_{U_i} este cunoscută şi vrem să determinăm a. Înmulţind cu a şi diferenţiind ecuaţia rezultată, obţinem condiţia de integrabilitate

$$\Omega' a = 0,$$

care nu semnifică altceva decât anularea formei de curbură $\Omega' = 0$.

În general, dacă s şi s' sunt două repere locale ce îndeplinesc condiţia $Ds = Ds' = 0$, atunci există o matrice constantă $a \in GL(r, \mathbb{C})$ astfel ca $s = s'a$. Acest fapt rezultă din relaţia (9), în care ţinem cont că formele de conexiune ω şi ω' se anulează. Drept urmare, dacă $Ds_{U_i} = Ds_{U_j} = 0$, atunci g_{ij} este matrice constantă. În consecinţă, o conexiune plată D pe fibratul E duce la apariţia unei structuri plate (U_i, s_{U_i}) pe E.

Am dedus astfel o echivalenţă între mulţimea fibratelor plate şi cea a fibratelor ce admit conexiuni plate. Un rezultat mai general, demonstrat spre exemplu în [Ko87], este următorul:

Propoziţia 2.8. *Fie E un fibrat vectorial complex de rang r pe varietatea M. Următoarele condiţii sunt echivalente:*

(i) E este fibrat vectorial plat;
(ii) E admite o conexiune plată D;
(iii) E este definit de o reprezentare a grupului fundamental $\rho : \pi_1 \to GL(r, \mathbb{C})$.

1.2. Construcţia lui Atiyah. Vom prezenta în continuare construcţia lui Atiyah prin care vom obţine o extinderea a unui fibrat vectorial E prin $E \otimes \Omega^1_X$ având ca scop găsirea unei condiţii necesare şi suficiente ca E sa fie plat.

Fie X o varietate complexă compactă şi E un fibrat vectorial olomorf de rang r peste X. Vom identifica E cu fasciculul local liber al secţiunilor sale (ca în secţiunea 2.1 din capitolul 1). Definim

$$\mathcal{D}(E) := E \oplus (E \otimes \Omega^1_X),$$

unde suma directă este o sumă directă de $\mathbb{C}$-module.

Pentru fiecare $x \in X$, $f \in \mathcal{O}_x$ şi $\alpha = s \oplus \beta \in \mathcal{D}(E)_x$ definim

$$f\alpha = fs \oplus (f\beta + s \otimes \mathrm{d}f)$$

unde $\mathrm{d} : \mathcal{O}_X \to \Omega^1_X, f \mapsto \mathrm{d}f$. Se obţine astfel o structură de $\mathcal{O}_X$-modul pe $\mathcal{D}(E)$. În consecinţă vom avea un şir exact de $\mathcal{O}_X$-module (care scindează ca şir exact de $\mathbb{C}$-module)

$$(\mathcal{B}(E)) \qquad 0 \to E \otimes \Omega^1_X \xrightarrow{i} \mathcal{D}(E) \xrightarrow{p} E \to 0,$$

unde $i(\beta) = 0 \oplus \beta$ şi $p(s \oplus \beta) = s$, pentru $\beta \in E \otimes \Omega^1_X$, $s \oplus \beta \in \mathcal{D}(E)$.

Observaţia 11. Extinderea lui Atiyah dată de $\mathcal{B}(E)$ defineşte un element

$$b(E) \in H^1(X, \mathcal{H}om(E, E \otimes \Omega^1_X)) \cong H^1(X, \mathcal{E}nd(E) \otimes \Omega^1_X)$$

şi scindează ca şir exact de $\mathcal{O}_X$-module dacă şi numai dacă $b(E) = 0$.

Fie

$$(\Gamma) \qquad 0 \to E' \to E \to E'' \to 0,$$

un şir exact de fibrate vectoriale pe X. Vom avea şirul exact

$$0 \to \mathcal{H}om(E'', E') \to \mathcal{H}om(E'', E) \to \mathcal{H}om(E'', E'') \to 0$$

şi şirul lung exact de coomologie asociat

$$0 \to H^0(X, \mathcal{H}om(E'', E')) \to H^0(X, \mathcal{H}om(E'', E)) \to$$
$$\to H^0(X, \mathcal{H}om(E'', E'')) \xrightarrow{\delta} H^1(X, \mathcal{H}om(E'', E')) \to \dots$$

Atunci $\delta(\mathrm{id}_{E''})$ corespunde exact extinderii (Γ). Pentru o acoperire deschisă convenabilă $\mathcal{U} = (U_i)$ a lui X vom avea că E', E, E'' sunt local triviale, iar restricţia extinderii (Γ) la fiecare U_i scindează. Notăm cu $E_i = E|_{U_i}, E'_i = E'|_{U_i}, E''_i = E''|_{U_i}$ şi cu $h_i : E''_i \to E_i$ morfismul de scindare. Atunci $(h_i - h_j)$ este un 1-cociclu Čech reprezentând elementul

$$\delta(\mathrm{id}_{E''}) \in H^1(X, \mathcal{H}om(E'', E')).$$

Vom da în continuare o formulă explicită pentru elementul

$$b(E) \in H^1(X, \mathcal{H}om(E, E \otimes \Omega^1_X))$$

în funcţie de 1-cociclul (g_{ij}) definit de trivializările locale ale fibratului vectorial olomorf E.

Fie $\mathcal{U} = (U_i)$ o acoperire deschisă a lui X şi trivializările locale

$$u_i : \mathcal{O}^{\,r}_{U_i} \xrightarrow{\sim} E_i,$$

unde $u_i = \varphi_i^{-1}$ după notaţiile din secţiunea 2.1 a capitolului 1. Notăm cu

$$u_i \otimes \mathrm{id}_\Omega : \mathcal{O}^{\,r}_{U_i} \otimes \Omega^1_{U_i} \xrightarrow{\sim} E_i \otimes \Omega^1_{U_i}$$

izomorfismele induse. Din izomorfismele

$$\varphi_{ij} = u_i^{-1} \circ u_j : \mathcal{O}^{\,r}_{U_i \cap U_j} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}^{\,r}_{U_i \cap U_j}$$

se obţin aplicaţiile olomorfe

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow \mathrm{GL}(r, \mathbb{C}),$$

cu proprietatea că

(12) $$\varphi_{ij}(v) = g_{ij} \cdot v, \forall v \in \mathcal{O}^{\,r}_{U_i \cap U_j}.$$

În plus, (g_{ij}) este 1-cociclul acoperirii $\mathcal{U}$, cu coeficienţi în $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$, definit de fibratul vectorial olomorf E.

Fie

$$d : \mathcal{O}^{\,r}_{U_i} \longrightarrow (\Omega^1_{U_i})^r$$

morfismul de $\mathbb{C}$-module dat prin

$$(f_1, \ldots, f_r) \mapsto (\mathrm{d}f_1, \ldots, \mathrm{d}f_r).$$

Definim morfismul de $\mathbb{C}$-module

$$d_i : E_i \longrightarrow E_i \otimes \Omega^1_{U_i},\ d_i = (u_i \otimes \mathrm{id}_\Omega) \circ d \circ u_i^{-1},$$

şi fie

$$\psi_i : E_i \longrightarrow \mathcal{D}(E)_i,\ \psi_i(s) = s \oplus d_i(s).$$

Se obţine că aplicaţiile ψ_i sunt morfisme de $\mathcal{O}_X$-module şi $p_i \circ \psi_i(s) = s$, unde $p_i = p|_{U_i}$ sunt proiecţiile pe prima componentă. În plus, morfismele ψ_i dau scindările locale ale şirului exact $\mathcal{B}(E)$. În consecinţă

$$(\psi_j - \psi_i)(s) = s \oplus d_j(s) - s \oplus d_i(s) = 0 \oplus (d_j - d_i)(s),$$

ceea ce conduce la faptul că elementul $b(E)$, care determină extinderea $\mathcal{B}(E)$, este dat prin 1-cociclul (b_{ij}), unde $b_{ij} = d_j - d_i$.

Prin calcul direct se arată că (b_{ij}) verifică egalitatea

(13) $$(u_i^{-1} \otimes \mathrm{id}_\Omega) \circ b_{ij} \circ u_i = g_{ij}\, d(g_{ji}).$$

Într-adevăr,

$$\begin{aligned} b_{ij}\circ u_i &= (u_j\otimes id)\circ d\circ u_j^{-1}\circ u_i-(u_i\otimes id)\circ d=\\ &=(u_j\otimes id)\circ d\circ \varphi_{ji}-(u_i\otimes id)\circ d,\\ (u_i^{-1}\otimes id)\circ b_{ij}\circ u_i &= (u_i^{-1}\circ u_j\otimes id)\circ d\circ\varphi_{ji}-(u_i^{-1}\circ u_i\otimes id)\circ d=\\ &=(\varphi_{ij}\otimes id)\circ d\circ\varphi_{ji}-d. \end{aligned}$$

Considerând v arbitrar în $\mathcal{O}^r_{U_i\cap U_j}$ şi ţinând cont de relaţia (12) obţinem

$$\begin{aligned} ((u_i^{-1}\otimes id)\circ b_{ij}\circ u_i)(v) &= (\varphi_{ij}\otimes id)(d(\varphi_{ji}(v))-dv=g_{ij}(d(g_{ji}\cdot v))-dv=\\ &=g_{ij}(d(g_{ji})\cdot v+g_{ji}\cdot dv)-dv=g_{ij}d(g_{ji})\cdot v, \end{aligned}$$

ceea ce demonstrează egalitatea (13).

Revenind la problemă, cum $b(E)=0$ dacă şi numai dacă $b_{ij}=0$, deducem din relaţia (13) că $b(E)=0$ dacă şi numai dacă $d(g_{ji})=0$. Pe de altă parte, un fibrat vectorial olomorf E este plat dacă şi numai dacă funcţiile de tranziţie (g_{ij}) sunt constante, sau echivalent, dacă şi numai dacă $d(g_{ji})=0$. În concluzie, putem enunţa următorul rezultat

Propoziţia 2.9. *Un fibrat vectorial olomorf E este plat dacă şi numai dacă $b(E)=0$.*

Deşi această propoziţie exprimă o condiţie necesară şi suficientă ca un fibrat vectorial să fie plat, prezintă dezavantajul de a fi mai dificil de verificat. În secţiunea 3 a acestui capitol vom găsi o condiţie suficientă ca un fibrat de rang doi dat printr-o extindere de fibrate în drepte să fie plat.

2. Suprafeţe Inoue

Aşa cum am afirmat anterior, obiectivul acestui capitol constă în determinarea unei condiţii ca un fibrat de rang doi dat printr-o extindere de fibrate în drepte plate să fie, la rândul său, plat. Condiţia se va dovedi doar suficientă, un contraexemplu care să infirme necesitatea fiindu-ne oferit de un anumit tip de fibrate de rang doi existent pe o suprafaţă Inoue. Pentru a înţelege acest contraexemplu este utilă o scurtă prezentare în care ne vom concentra atenţia atât asupra suprafeţelor Inoue, având drept model prezentarea acestora din [Br96], cât şi asupra unor anumite tipuri de fibrate existente pe aceste suprafeţe. Pentru început vom reaminti câteva lucruri despre dimensiunea algebrică, respectiv dimensiunea Kodaira a unei varietăţi.

Fie X o varietate complexă compactă conexă şi notăm cu $\mathcal{M}$ fasciculul de funcţii meromorfe pe X. Dintr-o teoremă a lui Siegel (vezi [Sg55]) ştim că $H^0(X,\mathcal{M})$ este corp finit generat peste $\mathbb{C}$, al cărui grad de transcendenţă peste $\mathbb{C}$ nu depăşeşte dimensiunea lui X.

Definiţia 2.10. *Gradul de transcendenţă al corpului funcţiilor (global) meromorfe $H^0(X, \mathcal{M})$ peste corpul $\mathbb{C}$ se numeşte* dimensiunea algebrică *a varietăţii X şi se notează cu $\mathfrak{a}(X)$.*

Spre exemplu, dacă X este *suprafaţă complexă* (adică dimensiunea lui X este doi) atunci $\mathfrak{a}(X)$ poate lua valorile 0, 1, sau 2. În plus, după dimensiunea algebrică pot fi recunoscute *suprafeţele complexe algebrice* (anume cele care se pot scufunda într-un spaţiu proiectiv $\mathbb{P}^n$). Amintim în acest sens următorul rezultat al lui Chow şi Kodaira ce poate fi consultat în [CK52]:

Teorema 2.11. *Fie X o suprafaţă complexă. Atunci $\mathfrak{a}(X) = 2 \Leftrightarrow X$ este algebrică.*

Drept urmare, o suprafaţă complexă cu dimensiunea algebrică 0 sau 1 nu este algebrică. În plus, avem

Teorema 2.12. *Fie X o suprafaţă nealgebrică. Atunci $\mathfrak{a}(X) = 1 \Leftrightarrow X$ este eliptică.*

Reamintim că o suprafaţă X se numeşte *eliptică* dacă admite o fibrare eliptică, adică există un morfism surjectiv $\pi : X \to B$ pe o curbă nesingulară B a cărui fibră generică este curbă eliptică netedă.

Interesant este că, dimensiunea algebrică a unei suprafeţe poate fi corelată cu "numărul de curbe" de pe suprafaţa respectivă. Spre exemplu, dacă $\mathfrak{a}(X) = 2$, atunci X este proiectivă şi, în consecinţă, prin fiecare punct trec o infinitate de curbe situate pe suprafaţa respectivă. Dacă $\mathfrak{a}(X) = 1$ se arată că pentru orice curbă ireductibilă a lui X există o fibră care o conţine, iar fibrarea este unică (să nu uităm că în acest caz X este eliptică). Şi nu în ultimul rând, în cazul unei suprafeţe nealgebrice cu $\mathfrak{a}(X) = 0$ se arată că pe suprafaţa X există cel mult $h^{1,1}(X) + 2$ curbe, unde $h^{1,1}(X) = \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \Omega^1_X)$.

Fie X o varietate complexă compactă şi considerăm $\mathcal{K}_X$ fibratul canonic pe X (vezi secţiunea 2.1 din capitolul 1). Definim

$$R(X) := \mathbb{C} \oplus \sum_{m \geq 1} H^0(X, \mathcal{K}_X^{\otimes m})$$

care, după cum se poate vedea în [Ue75], are o structură de inel comutativ cu gradul de transcendenţă peste $\mathbb{C}$ finit, notat cu $\mathrm{tr}(R(X))$.

Definiţia 2.13. *Dată varietatea complexă compactă X, definim* dimensiunea Kodaira *a lui X ca fiind*

$$k(X) = \begin{cases} -\infty, & \text{dacă } R(X) \cong \mathbb{C} \\ \mathrm{tr}(R(X)) - 1, & \text{în rest.} \end{cases}$$

O legătură cu dimensiunea algebrică este dată prin inegalităţile

$$k(X) \leq \mathfrak{a}(X) \leq \dim(X).$$

Fie $P_m(X) := h^0(X, \mathcal{K}_X^{\otimes m})$, pentru orice $m \geq 1$. Acest număr se numeşte *plurigenul de ordin m* al lui X (spre exemplu $P_1(X)$ coincide cu genul geometric $p_g(X)$ al lui X). Legătura dintre dimensiunea Kodaira şi plurigenuri este sugerată de următoarea teoremă, a cărei demonstraţie poate fi găsită în [Ue75].

Teorema 2.14. *Fie X o varietate complexă compactă. Atunci:*

$$\begin{array}{lcl} k(X) = -\infty & \Leftrightarrow & P_m(X) = 0 \textit{ pentru orice } m \geq 1; \\ k(X) = 0 & \Leftrightarrow & P_m(X) \in \{0,1\} \textit{ şi există } N \textit{ cu } P_N(X) = 1; \\ k(X) = k & \Leftrightarrow & \textit{există un întreg } 1 \leq k \leq \dim(X) \textit{ şi } \alpha, \beta > 0 \textit{ astfel ca} \\ & & \alpha m^k < P_m(X) < \beta m^k \textit{ pentru orice } m \textit{ suficient de mare.} \end{array}$$

Observaţia 12. În particular, dacă X este suprafaţă atunci $k(X) \leq 2$.

În continuare ne vom concentra atenţia numai asupra suprafeţelor de clasa VII, printre ele găsindu-se suprafeţele Inoue. Menţionăm că o tratare detaliată asupra clasificării suprafeţelor poate fi consultată în [Br96].

Definiţia 2.15. *O suprafaţă X cu dimensiunea Kodaira $k(X) = -\infty$ şi primul număr Betti $b_1(X) = 1$ se numeşte* suprafaţă de clasă VII. *Mulţimea suprafeţelor minimale de acest tip formează* clasa VII_0.

De fapt, pentru suprafeţele cu $k(X) = -\infty$, dimensiunea algebrică $\mathfrak{a}(X)$ poate lua valorile 0, 1, sau 2. Cele cu $\mathfrak{a}(X) = 2$ sunt algebrice şi se dovedesc a fi suprafeţele riglate. Modelele minimale ale suprafeţelor rămase formează clasa VII_0, despre care putem afirma că sunt nealgebrice (chiar non-Kähler având $b_1 = 1$). Dintre acestea, suprafeţele cu dimensiunea algebrică $\mathfrak{a}(X) = 1$ sunt *suprafeţe Hopf* (au acoperirea universală analitic izomorfă cu $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$). Rămân în atenţia noastră, din această clasă, suprafeţele minimale cu dimensiunea algebrică $\mathfrak{a}(X) = 0$. Clasificarea acestora se face în continuare după al doilea număr Betti, care poate fi zero sau nenul. Deşi problema clasificării suprafeţelor din clasa VII având $b_2 > 0$ este încă deschisă, menţionăm ca exemple *suprafeţele Inoue-Hirzebruch*. Acestea au fost introduse de Inoue în [In77] şi reprezintă suprafeţe complexe fără funcţii meromorfe (vezi, de asemenea [Nk84]). Rămân în discuţie suprafeţele de clasă VII_0 cu $\mathfrak{a}(X) = 0$ şi $b_2(X) = 0$. Acestea se împart în două categorii: care conţin cel puţin o curbă şi cele care nu conţin nici o curbă. Kodaira a arătat în [Kd68] că suprafeţele din prima categorie sunt suprafeţe Hopf. Şi astfel am ajuns la suprafeţele de clasă VII_0 având $\mathfrak{a}(X) = 0$, $b_2(X) = 0$ şi care nu conţin nici o curbă. Inoue a construit în [In74] trei familii de suprafeţe aparţinând acestei ultime categorii. Mai mult, a arătat că dacă o suprafaţă de clasă VII_0 cu $\mathfrak{a}(X) = 0$, $b_2(X) = 0$ şi care nu conţine curbe admite un fibrat în drepte L cu proprietatea că spaţiul $(1,0)$-formelor olomorfe cu valori în L este netrivial atunci ea face parte din una din cele trei familii construite de el. Ulterior, Bogomolov în [Bog76] şi printr-o metodă mai simplă Li, Yau şi Zheng în [LYZ90], au demonstrat că un astfel de fibrat în drepte întotdeauna există. În concluzie, familiile construite de Inoue sunt singurele exemple de suprafeţe din această ultimă categorie şi pe care le vom numi în continuare *suprafeţe Inoue*. Ele sunt câturi ale lui $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$, unde $\mathbb{H}$ este semiplanul superior al planului complex. Factorizarea se face prin grupuri de transformări afine, care acţionează propriu, discontinuu şi fără puncte fixe asupra lui $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$, iar suprafeţele obţinute sunt notate cu S_M, S_N^+ şi S_N^-. Vom prezenta în continuare un singur tip din cele trei construite în [In74] de Inoue, anume suprafaţa de tip S_M.

Fie $M = (m_{ij}) \in SL(3, \mathbb{Z})$ o matrice unimodulară având valorile proprii $\alpha, \beta, \overline{\beta}$ cu $\alpha > 1$ şi $\beta \neq \overline{\beta}$. Spre exemplu, putem considera matricea

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ n & 0 & 1 \\ 1 & 1-n & 0 \end{pmatrix}$$

cu $n \in \mathbb{Z}$. Având matricea M fixată, alegem (a_1, a_2, a_3) un vector propriu real al matricei M corespunzător valorii proprii α, respectiv (b_1, b_2, b_3) un vector propriu corespunzător lui β. Cum (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) şi $(\overline{b_1}, \overline{b_2}, \overline{b_3})$ sunt liniar independenţi peste $\mathbb{C}$, deducem că

(14) $\qquad (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3)$ sunt liniar independenţi peste $\mathbb{R}$.

În plus, α este iraţional şi

(15) $$(\alpha a_j, \beta b_j) = \sum_{k=1}^{3} m_{jk}(a_k, b_k) \text{ pentru } j = 1, 2, 3.$$

Notăm cu $\mathbb{H}$ semiplanul superior al planului complex şi cu G_M grupul automorfismelor analitice ale lui $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ generate de

$$g_0(w, z) = (\alpha w, \beta z),$$
$$g_i(w, z) = (w + a_i, z + b_i), \text{ pentru } i = 1, 2, 3.$$

Relaţiile (14) şi (15) implică faptul că G_M acţionează propriu şi discontinuu, fără puncte fixe, pe $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$. Se arată că $S_M = \mathbb{H} \times \mathbb{C}/G_M$ este o suprafaţă complexă compactă, având $k(S_M) = -\infty$, $b_1(S_M) = 1$, $b_2(S_M) = 0$ şi nu conţine nici o curbă (deci $\mathfrak{a}(X) = 0$).

Încheiem această secţiune prin a enunţa un rezultat al lui Plantiko, a cărui demonstraţie poate fi găsită în [Pl95] şi care ne oferă o descriere a fibratelor vectoriale olomorfe indecompozabile, de rang doi, cu $c_2 = 0$, pe o suprafaţă Inoue:

Teorema 2.16. *Fibratele vectoriale olomorfe indecompozabile de rang doi cu $c_2 = 0$ pe o suprafaţă Inoue pot fi împărţite în următoarele clase:*

(A) Fibratele de tipul $\mathcal{F}_0 \otimes L$, unde $\mathcal{F}_0$ este dat prin extinderea $\mathcal{O}_X \to \mathcal{F}_0 \to \mathcal{K}_X^*$ şi L este fibrat în drepte. Fibratele din această clasă sunt filtrabile şi simple, dar nu sunt semistabile.

(B) Fibratele de tipul $\mathcal{F}_1 \otimes L$, unde $\mathcal{F}_1$ este dat prin extinderea $\mathcal{O}_X \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{O}_X$ şi L este fibrat în drepte. Fibratele din această clasă sunt filtrabile şi semistabile, dar nu sunt simple.

(C) Fibratele olomorfe asociate unei reprezentări liniare ireductibile de grad doi a grupului fundamental. Fibratele din această clasă sunt stabile şi nefiltrabile. În particular, aceste fibrate nu conţin subfascicule netriviale de rang strict mai mic. Mai mult, dacă suprafaţa este de tipul S_M, atunci orice fibrat din clasa (C) este imaginea directă a unui fibrat în drepte printr-o doi-acoperire neramificată a suprafeţei.

Vom utiliza acest rezultat în secţiunea următoare pentru arăta că există fibrate de rang doi plate care nu apar ca extinderi de fibrate în drepte plate.

3. Fibrate plate date ca extinderi

În această secţiune vom determina o condiţie suficientă ca un fibrat de rang doi dat printr-o extindere de fibrate în drepte plate să fie plat. Un prim pas în stabilirea acestui fapt va fi determinarea formei 1-cociclului asociat unui fibrat de rang doi dat printr-o extindere de fibrate în drepte. În final vom oferi un contraexemplu prin care vom justifica de ce condiţia găsită nu este şi necesară. Menţionăm că acest material face obiectul articolului [BMS01].

Fie X o varietate complexă conexă. Vom studia 2-fibratele vectoriale olomorfe E peste X date prin extinderi de tipul

$$(\eta) \qquad 0 \to L_1 \overset{\alpha}{\to} E \overset{\beta}{\to} L_2 \to 0,$$

unde L_1, L_2 sunt fibrate în drepte. Notăm tot cu η elementul din

$$H^1(X, \mathcal{H}om(L_2, L_1)) \cong H^1(X, L_2^{-1} \otimes L_1)$$

corespunzător extinderii date.

Fie $\mathcal{U} = (U_i)$ o acoperire deschisă a lui X, trivializările locale

$$w_i : \mathcal{O}_{U_i} \overset{\sim}{\longrightarrow} L_{1\,i},\ v_i : \mathcal{O}_{U_i} \overset{\sim}{\longrightarrow} L_{2i},$$

şi morfismele locale de scindare

$$h_i : L_{2i} \longrightarrow E_i,$$

unde $L_{1i} = L_{1/U_i}$, $L_{2i} = L_{2/U_i}$, $E_i = E_{/U_i}$ (ca în secţiunea 1.2 a acestui capitol). Pentru 1-cociclii $(g^1_{ij}), (g^2_{ij})$ asociaţi fibratelor în drepte L_1, L_2 au loc egalităţile

$$g^1_{ij} = w_i^{-1} \circ w_j,\ g^2_{ij} = v_i^{-1} \circ v_j,$$

iar 1-cociclul $(h_j - h_i) = \eta_{ij}$ reprezintă elementul $\eta \in H^1(X, L_2^{-1} \otimes L_1)$.

Lema 2.17. *Cu notaţiile de mai sus, 1-cociclul acoperirii $\mathcal{U}$ definit de 2-fibratul vectorial E are forma*

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g^1_{ij} & \tilde{g}_{ij} \\ 0 & g^2_{ij} \end{pmatrix},$$

unde $\tilde{g}_{ij}$ este determinat de trivializările locale w_i, v_i şi 1-cociclul η_{ij}.

Demonstraţie. Definim trivializările locale ale 2-fibratului vectorial E

$$u_i : \mathcal{O}_{U_i} \oplus \mathcal{O}_{U_i} \xrightarrow{\sim} L_{1\,i} \oplus L_{2\,i} \xrightarrow{\sim} E_i$$

prin

$$u_i(s' \oplus s'') = \alpha(w_i(s')) + h_i(v_i(s'')).$$

Notăm cu α^{-1} inversa aplicaţiei

$$\alpha : L_1 \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}(\alpha) \subset E,$$

şi cu

$$\tilde{g}_{ij} = w_i^{-1} \circ \alpha^{-1} \circ (h_j - h_i) \circ v_j.$$

Atunci

$$\begin{aligned}
&u_i\Big(\big(g^1_{ij}(s') + \tilde{g}_{ij}(s'')\big) \oplus g^2_{ij}(s'')\Big) = \\
&= \alpha\big(w_i\big(g^1_{ij}(s') + \tilde{g}_{ij}(s'')\big)\big) + h_i\big(v_i\big(g^2_{ij}(s'')\big)\big) = \\
&= \alpha\big(w_j(s') + \alpha^{-1} \circ (h_j - h_i) \circ v_j(s'')\big) + h_i\big(v_j(s'')\big) = \\
&= \alpha\big(w_j(s')\big) + h_j\big(v_j(s'')\big) - h_i\big(v_j(s'')\big) + h_i\big(v_j(s'')\big) = \\
&= u_j(s' \oplus s'').
\end{aligned}$$

Obţinem

$$(u_i^{-1} \circ u_j)(s' \oplus s'') = \big(g^1_{ij}(s') + \tilde{g}_{ij}(s'')\big) \oplus g^2_{ij}(s''),$$

de unde rezultă concluzia. □

Lema 2.18. *Fie X o varietate complexă conexă cu proprietatea că aplicaţia*

$$H^1(X, \mathbb{C}) \to H^1(X, \mathcal{O}_X)$$

este surjectivă. Atunci orice 2-fibrat vectorial olomorf E dat prin extinderea

$$(\eta) \qquad 0 \to \mathcal{O}_X \to E \to \mathcal{O}_X \to 0$$

este plat.

DEMONSTRAŢIE. Din lema 2.17, pentru $\mathcal{U} = (U_i)$ o acoperire deschisă convenabilă a lui X, 1-cociclul fibratului vectorial E este dat prin

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{g}_{ij} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

unde $\tilde{g}_{ij} = \eta_{ij}$ este 1-cociclul corespunzător elementului $\eta \in H^1(X, \mathcal{O}_X)$.

Din ipoteza de surjectivitate deducem că există un cociclu $(\tilde{c}_{ij})$ dat prin constante şi care reprezintă un element în $H^1(X, \mathbb{C})$ astfel ca

$$\tilde{g}_{ij} = \tilde{c}_{ij} + (\delta\tilde{h})_{ij} = \tilde{c}_{ij} + \tilde{h}_j - \tilde{h}_i.$$

Fie

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{c}_{ij} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ h_i = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{h}_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Prin calcul obţinem

$$h_i^{-1} c_{ij} h_j = g_{ij}.$$

Deducem că 2-fibratul vectorial olomorf E este definit de 1-cociclul (c_{ij}) cu funcţiile de tranziţie constante, deci este plat. $\square$

Teorema 2.19. *Fie X o varietate complexă conexă cu proprietatea că aplicaţia $H^1(X, \mathbb{C}) \to H^1(X, \mathcal{O}_X)$ este surjectivă. Atunci orice 2-fibrat vectorial olomorf E dat printr-o extindere de forma*

$$0 \to L \to E \to L \to 0,$$

unde L este fibrat în drepte plat, este plat.

DEMONSTRAŢIE. Din ipoteză rezultă şirul exact

$$0 \to \mathcal{O}_X \to E \otimes L^{-1} \to \mathcal{O}_X \to 0.$$

Aplicând lema 2.18, obţinem că fibratul vectorial $E \otimes L^{-1}$ este plat. Cum $E \cong (E \otimes L^{-1}) \otimes L$ şi un 1-cociclu pentru E este constant deoarece este dat de produsul Kronecker dintre cociclii corespunzători fibratelor $E \otimes L^{-1}$ şi L (care sunt constanţi), deducem că E este plat. $\square$

Observaţia 13. Surjectivitatea aplicaţiei $H^1(X, \mathbb{C}) \to H^1(X, \mathcal{O}_X)$ este satisfăcută de către orice varietate Kähler conexă compactă şi de către orice suprafaţa complexă compactă (vezi [BPV84], Cap. IV).

Observaţia 14. Se cunoaşte faptul că, pentru un fibrat vectorial plat, clasele Chern sunt elemente de torsiune.

Observaţia 15. Din [Mo59] şi [Ma59] orice 2-fibrat vectorial plat E peste un tor complex este dat de o extindere

$$0 \to L \to E \to L \to 0,$$

unde L este un fibrat în drepte plat. Apare astfel întrebarea dacă reciproca teoremei 2.19 este adevărată. Răspunsul este negativ, iar un contraexemplu este oferit, pe suprafeţe Inoue, de fibratele din clasa (C) ale teoremei 2.16.

Într-adevăr, un fibrat vectorial din clasa (C) este asociat unei reprezentări (ireductibile de grad doi) a grupului fundamental, iar conform propoziţiei 2.8 este plat. Pe de altă parte, tot din teorema 2.16, aceste fibrate nu conţin subfascicule netriviale de rang strict mai mic, deci nu sunt date de extinderi şi constituie contraexemple pentru întrebarea formulată.

Observaţia 16. Ne putem întreba, de asemenea, dacă se poate formula un enunţ asemănător pentru fibrate de rang doi E date prin extinderi ale lui L_2 prin L_1, unde L_1 şi L_2 sunt fibrate în drepte plate distincte. Răspunsul la această întrebare poate constitui subiectul unei viitoare teme de cercetare.

CAPITOLUL 3

Fibrate vectoriale pe suprafeţe Hirzebruch

Acest capitol este structurat pe patru secţiuni. Prima dintre ele este dedicată şirurilor spectrale Beilinson. Am inclus aici câteva idei despre varietăţile cu proprietatea diagonalei, urmate de construcţia şirului spectral Beilinson pentru fibrate definite pe astfel de varietăţi, respectiv particularizarea lui pe $\mathbb{P}^n$ şi scroll-uri.

În a doua secţiune vom surprinde o corespondenţă între anumite tipuri de extinderi ale fibratelor de rang doi pe suprafeţe Hirzebruch şi şirul spectral Beilinson determinat de acestea. De asemenea, vom putea observa din nou legătura dintre extinderi şi şirul spectral Beilinson în momentul determinării unei descrieri a fibratului trivial.

În partea a treia, prin utilizarea tehnicilor cu şiruri spectrale Beilinson, vom obţine diferite criterii de scindare pentru anumite tipuri de fibrate de rang doi pe suprafeţe Hirzebruch.

Ultima secţiune reprezintă un studiu asupra fibratelor de rang doi pe o suprafaţă Hirzebruch, având clasele Chern egale cu ale fibratului cotangent. Vom determina forma şirului spectral Beilinson al fibratelor de acest tip şi care satisfac o condiţie suplimentară (un twist potrivit al lor nu are secţiuni globale). Rezultatul final demonstrează că mulţimea acestor fibrate formează un spaţiu ireductibil.

Având în vedere faptul că cea mai mare parte a capitolului se referă la fibrate vectoriale pe suprafeţe Hirzebruch, vom face în introducere o scurtă prezentare a acestor suprafeţe cu scopul de fixa de la început anumite notaţii.

Fie $e \geq 0$. Notăm cu Σ_e suprafaţa raţională riglată determinată de fibratul vectorial de rang doi $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-e)$ pe $\mathbb{P}^1$. Dacă $\pi : \Sigma_e \to \mathbb{P}^1$ este morfismul de proiecţie, atunci cei doi generatori ai grupului Picard a lui X îi notăm cu $C_0 = \mathcal{O}_{\Sigma_e}(1)$ pentru secţiunea negativă şi cu $F = \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ pentru o fibră a riglării. Avem

$$Pic(\Sigma_e) = \mathbb{Z} \cdot C_0 \oplus \mathbb{Z} \cdot F$$

şi sunt îndeplinite relaţiile de intersecţie:

$$C_0^2 = -e, \quad C_0.F = 1, \quad F^2 = 0.$$

În aceste condiţii, divizorul canonic K_{Σ_e} şi cel relativ $K_{\Sigma_e/\mathbb{P}^1}$ sunt

$$K_{\Sigma_e} = -2C_0 - (e+2)F, \qquad K_{\Sigma_e/\mathbb{P}^1} = -2C_0 - eF.$$

1. Şiruri spectrale Beilinson

Şirurile spectrale Beilinson reprezintă principala tehnică pe care o vom utiliza pe parcursul acestui capitol. Din acest motiv considerăm utilă o scurtă prezentare a acestor noţiuni. Este descrisă construcţia generală a şirului spectral Beilinson în cazul varietăţilor cu proprietatea diagonalei, nu fără a avea, în prealabil, o scurtă prezentare a acestora. În final sunt evidenţiate două situaţii particulare: şirul spectral Beilinson pentru $\mathbb{P}^n$, respectiv şirul spectral Beilinson pentru scroll-uri.

1.1. Varietăţi cu proprietatea diagonalei. Studiul proprietăţilor subschemei diagonale a unei varietăţi şi-a dovedit de multe ori utilitatea, oferind răspuns unor întrebări dintre cele mai variate. Spre exemplu, putem menţiona clasica "reducere la diagonală" utilizată în [Fu98] pentru a răspunde la întrebări ce ţin de teoria intersecţiei sau, faptul că, prin cunoaşterea clasei fundamentale a diagonalei unei varietăţi, se face un pas important în direcţia determinării claselor fundamentale ale tuturor subschemelor varietăţii respective, aşa cum se poate vedea în [Gr97], [Pr96] sau [PR97]. De asemenea, o rezoluţie potrivită a fasciculului structural al diagonalei unei varietăţi X peste fasciculul structural al lui $X \times X$ poate conduce la o descriere a categoriei derivate $D(X)$ a lui X (conform [Ka88]) sau poate fi utilă în studiul K-teoriei algebrice a spaţiilor omogene ori a twist-urilor lor (conform [Bri05] sau [LSW89]).

Interesul nostru va fi concentrat asupra construirii unui şir spectral Beilinson în cazul varietăţilor ce au proprietatea diagonalei, noţiune ce o vom introduce în cele ce urmează, urmând calea din [PSP08].

Fie X o varietate netedă. Notăm cu $\Delta_X \subset X \times X$ subschema diagonală, adică imaginea scufundării

$$\delta : X \hookrightarrow X \times X,$$

dată prin $\delta(x) = (x, x)$.

Definiţia 3.1. *Spunem că varietatea X are* proprietatea diagonalei *dacă există un fibrat vectorial $\mathcal{E}$ pe $X \times X$ având proprietăţile:* $\mathrm{rang}(\mathcal{E}) = \dim(X)$ *şi există o secţiune s a lui $\mathcal{E}$ astfel încât Δ_X coincide schematic cu $zero(s)$, schema zerourilor secţiunii s.*

O întrebare care apare în mod natural se referă la existenţa unor astfel de varietăţi, care să aibă proprietatea diagonalei. În cazul suprafeţelor, Pragacz, Srinivas şi Pati folosesc un argument rezultat din metoda Serre de construcţie a fibratelor de rang doi, împreună cu dualitatea Serre pentru a face legătura dintre "proprietatea diagonalei" şi existenţa sau absenţa fibratelor în drepte coomologic triviale. În acest sens, rezultatul principal din [PSP08] este

Teorema 3.2. *Fie X o suprafaţă proiectivă netedă peste un corp algebric închis.*
(a) Există un morfism biraţional $Y \to X$ astfel încât Y are proprietatea diagonalei.
(b) Dacă $Y \to X$ este un morfism biraţional, X are proprietatea diagonalei şi $\mathrm{Pic}(X)$ este finit generat, atunci Y are proprietatea diagonalei.
(c) X are proprietatea diagonalei dacă este biraţională cu una din următoarele suprafeţe: riglată, abeliană, $K3$ cu două curbe raţionale disjuncte, fibrare eliptică cu o secţiune, produs de două curbe, Enriques complexă sau hipereliptică.
(d) Presupunem că $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}$ astfel încât generatorul amplu al lui $\mathrm{Pic}(X)$ are o secţiune nenulă şi X are proprietatea diagonalei. Atunci $X \cong \mathbb{P}^2$. În particular, nici suprafeţele algebrice $K3$ foarte generale, nici hipersuprafeţele $X \subset \mathbb{P}^3$ de grad ≥ 4 foarte generale, nu au proprietatea diagonalei.

În aceeaşi lucrare este demonstrat următorul rezultat pentru varietăţi de dimensiune superioară:

Teorema 3.3. *Fie X o varietate proiectivă netedă cu $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}$, astfel încât generatorul amplu $\mathcal{O}_X(1)$ are o secţiune nenulă. Dacă X are proprietatea diagonalei atunci există $r \geq 2$ astfel ca $\omega_X \cong \mathcal{O}_X(-r)$, i.e. X este varietate Fano de index ≥ 2.*

1.2. Şiruri spectrale Beilinson. Vom prezenta în continuare construcţia generală a şirului spectral Beilinson pentru varietăţile cu proprietatea diagonalei. Ideea de bază este cea a construcţiei clasice conform [Be78] şi [OSS80].

Fie X o varietate complexă d-dimensională care are proprietatea diagonalei (ca în secţiunea 1.1). Există atunci un fibrat vectorial V de rang d pe $X \times X$ şi $u \in H^0(X \times X, V)$ o secţiune ce se anulează exact pe diagonala Δ_X, i.e. $zero(u) = \Delta_X$ schematic. Notând cu V^* dualul lui V, deducem existenţa unui complex Koszul exact:

(16) $$0 \to \wedge^d V^* \to \cdots \to \wedge^2 V^* \to V^* \to \mathcal{O}_{X\times X} \to \mathcal{O}_{\Delta_X} \to 0,$$

care prin trunchiere conduce la un complex:

$$0 \to \wedge^d V^* \to \cdots \to \wedge^2 V^* \to V^* \to \mathcal{O}_{X\times X} \to 0.$$

Fie M un fibrat vectorial pe X. Notăm cu $p_1, p_2 : X \times X \to X$ proiecţiile pe primul, respectiv al doilea factor şi considerăm

$$C_M^0 = p_2^* M, C_M^{-1} = V^* \otimes p_2^* M, \ldots, C_M^{-d} = \wedge^d V^* \otimes p_2^* M.$$

Obţinem un complex de fascicule pe $X \times X$,

$$0 \to C_M^{-d} \to \cdots \to C_M^{-1} \to C_M^0 \to 0,$$

astfel încât $H^i(C_M^*) = 0$ cu excepţia $H^0(C_M^*) = (p_2^* M)_{|\Delta_X}$, i.e.

$$H^0(C_M^*) \cong M$$

via identificarea $X \cong \Delta_X$. Vom avea două şiruri spectrale cu aceeaşi limită

$$\begin{array}{ll} {}'E_2^{p,q} & = H^p(R^q p_{1*}(C_M^*)) \ \Rightarrow \mathbb{R}^{p+q} p_{1*}(C_M^*) \\ {}''E_2^{p,q} & = R^p p_{1*}(H^q(C_M^*)) \ \Rightarrow \mathbb{R}^{p+q} p_{1*}(C_M^*), \end{array}$$

în baza teoriei prezentate în secţiunile 1.1 şi 1.2.3 din capitolul 1. Ţinând cont că ${}''E_2^{p,\,q} = 0$ cu excepţia ${}''E_2^{0,0} = M$, obţinem

$${}'E_1^{p,q} \Rightarrow \begin{cases} M & \text{dacă } p+q=0 \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$

În plus, ${}'E_1^{p,q} = R^q p_{1*}(C_M^p) = 0$ dacă $p \geq 1$ sau $p \leq -d-1$ sau $q \leq -1$ sau $q \geq d+1$.

Definiţia 3.4. *Cu notaţiile de mai sus, şirul spectral* $({}'E_r)$ *se numeşte* şirul spectral Beilinson al lui M asociat datelor (V, u). *Va fi notat în continuare cu* (E_r).

Observaţia 17. O distincţie între diferite (V, u) este necesară, atât timp cât această pereche care să descrie diagonala prin ecuaţii nu este, în general, unică. De cele mai multe ori, pentru o varietate arbitrară X, existenţa lui (V, u) nu este satisfăcută. Toată construcţia se bazează, de fapt, pe presupunerea existenţei unei astfel de perechi.

Observaţia 18. Folosind formula de schimbare a bazei, putem simplifica calculele dacă toate puterile exterioare ale lui V sunt produse externe, adică $\wedge^{-p}V^*$ este de tipul $p_1^* A_{-p} \otimes p_2^* B_{-p}$ pentru orice p. Cu această presupunere avem $E_1^{p,\,q} = H^q(X, B_{-p} \otimes M) \otimes A_{-p}$. Se poate aplica atunci când X este spaţiu proiectiv, [Be78], [OSS80], sau un scroll raţional, Corolarul 3.10.

1.3. Şirul spectral Beilinson pentru $\mathbb{P}^n$. Aplicând observaţia 18 în cazul $X = \mathbb{P}^n$, construim un complex Koszul pornind de la şirul lui Euler şi $V = p_1^* T_{\mathbb{P}^n}(-1) \otimes p_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$. Găsim $\wedge^{-p}V^* = p_1^* \Omega_{\mathbb{P}^n}^{-p}(-p) \otimes p_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(p)$. Obţinem

Teorema 3.5. (Beilinson). *Fie M un fibrat vectorial pe $\mathbb{P}^n$. Atunci există un şir spectral $E_r^{p,\,q}$ având primul termen*

$$E_1^{p,\,q} = H^q(\mathbb{P}^n, M(p)) \otimes \Omega_{\mathbb{P}^n}^{-p}(-p),$$

care converge la

$$E^i = \begin{cases} M, & \textit{dacă } i = 0 \\ 0, & \textit{altfel} \end{cases},$$

adică $E_\infty^{p,\,q} = 0$ pentru $p + q \neq 0$ şi $\bigoplus_{p=0}^n E_\infty^{-p,\,p}$ este fasciculul graduat asociat unei filtrări a lui M.

Pentru ilustrarea modului în care poate fi aplicată această teoremă şi stabilirii unei legături mai strânse cu secţiunea 3, vom da un exemplu (vezi

[OSS80]) în care vom determina 2-fibratele stabile pe $\mathbb{P}^2$ ce îndeplinesc anumite condiţii asupra claselor Chern utilizând şirul spectral Beilinson.

Propoziţia 3.6. *Fie M fibrat stabil de rang doi pe $\mathbb{P}^2$, cu $c_1(M) = -1$, $c_2(M) = 1$. Atunci*

$$M \cong \Omega^1_{\mathbb{P}^2}(1).$$

DEMONSTRAŢIE. Pentru a arăta acest lucru vom determina termenii şirului spectral Beilinson daţi de teorema 3.5, anume

$$E_1^{p,\,q} = H^q(\mathbb{P}^2, M(p)) \otimes \Omega^{-p}_{\mathbb{P}^2}(-p).$$

Deoarece M este stabil şi normalizat deducem că

$$H^0(\mathbb{P}^2, M) = 0,$$

de unde

$$H^0(\mathbb{P}^2, M(-1)) = H^0(\mathbb{P}^2, M(-2)) = 0.$$

Cum $M \cong M^* \otimes det(M)$ obţinem

$$M^* \cong M(1)$$

şi aplicând dualitatea Serre găsim

$$H^2(\mathbb{P}^2, M) = H^2(\mathbb{P}^2, M(-1)) = H^2(\mathbb{P}^2, M(-2)) = 0.$$

Atunci

$$E_1^{p,\,0} = E_1^{p,\,2} = 0, \text{ pentru } p \in \{0, -1, -2\}.$$

Drept urmare, diagrama la nivel de E_1 are forma celei din figura 1,

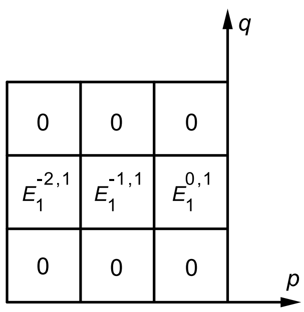

FIGURA 1. Şirul spectral la nivel de E_1

iar diferenţialele $d_1^{p,\,q} : E_1^{p,\,q} \to E_1^{p+1,\,q}$ dau complexul

$$E_1^{-2,\,1} \xrightarrow{a} E_1^{-1,\,1} \xrightarrow{b} E_1^{0,\,1}.$$

Fie $K = \ker a$, $L = \ker b/\mathrm{Im}\, a$ şi $H = \mathrm{coker}\, b$. Diagrama la nivel de E_2 este prezentată în figura 2.

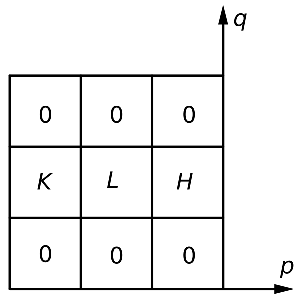

FIGURA 2. Şirul spectral la nivel de E_2

Diferenţialele $d_2^{p,\,q} : E_2^{p,\,q} \to E_2^{p+2,\,q-1}$ sunt toate nule şi atunci

$$E_\infty^{-2,\,1} = K,\ E_\infty^{-1,\,1} = L,\ E_\infty^{0,\,1} = H.$$

Din teorema 3.5 deducem că

$$K = H = 0 \quad \text{şi} \quad L = M.$$

Acest fapt nu semnifică altceva decât că

$$0 \to E_1^{-2,\,1} \xrightarrow{a} E_1^{-1,\,1} \xrightarrow{b} E_1^{0,\,1} \to 0$$

este o monadă, a cărei coomologie este M. Dar

$$E_1^{-2,\,1} = H^1(\mathbb{P}^2, M(-2)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$$

şi

$$E_1^{0,\,1} = H^1(\mathbb{P}^2, M) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}.$$

Din formula Riemann-Roch aplicată pentru M obţinem

$$h^1(\mathbb{P}^2, M) = h^1(\mathbb{P}^2, M(-2)) = 0 \quad \text{şi} \quad h^1(\mathbb{P}^2, M(-1)) = 1.$$

Atunci

$$M \cong H^1(\mathbb{P}^2, M(-1)) \otimes \Omega^1_{\mathbb{P}^2}(1) \cong \Omega^1_{\mathbb{P}^2}(1).$$

□

1.4. Şirul spectral Beilinson pentru scroll-uri. O altă situaţie în care se poate aplica observaţia 18 o reprezintă cazul scroll-urilor. Pentru prezentarea noţiunilor importante ce privesc şirurile spectrale Beilinson pe scroll-uri, vom urma calea descrisă în [AB09].

Considerăm C o curbă proiectivă, netedă, ireductibilă peste $\mathbb{C}$, $\mathcal{E}$ un fibrat vectorial de rang d pe curba C. Fie $X = \mathbb{P}(\mathcal{E}^*) = \mathrm{Proj}(\mathrm{Sym}(\mathcal{E}))$ fibratul proiectiv asociat lui $\mathcal{E}$ şi notăm cu $\pi : X \to C$, $p : X \times X \to C \times C$ proiecţiile naturale. Considerăm $\mathcal{O}_X(H) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}^*)}(1)$ şi $\mathcal{O}_X(R_y) = \pi^*(\mathcal{O}_C(y))$, unde R_y este fibra lui π peste un punct oarecare $y \in C$.

În această situaţie avem un şir Euler relativ:

$$0 \to \mathcal{O}_X(-H) \to \pi^*(\mathcal{E}^*) \to T_{X|C}(-H) \to 0, \tag{17}$$

unde $T_{X|C}$ reprezintă fibratul tangent relativ. În particular, pentru fibratul canonic relativ avem

$$\Omega^{d-1}_{X|C} \cong \mathcal{O}_X(-dH) \otimes \pi^*(\det(\mathcal{E})). \tag{18}$$

Cum $\Delta_C \subset C \times C$ este divizor, există un fibrat în drepte L pe $C \times C$ şi o secţiune globală $s_C \in H^0(C \times C, L)$ astfel încât $L = \mathcal{O}_{C\times C}(\Delta_C)$ şi Δ_C este schema zerourilor secţiunii s_C. Notăm cu

$$Y = X \times_C X \subset X \times X$$

imaginea inversă a lui Δ_C prin p şi care este, la rândul ei, schema zerourilor secţiunii globale $p^*(s_C)$ a fibratului în drepte $p^*(L)$. Pentru orice $x \in X$, notând $y = \pi(x)$ şi identificând $X_x := \{x\} \times X \cong X$, avem

$$p^*(L)|_{X_x} \cong \mathcal{O}_X(R_y).$$

Considerăm fibratul vectorial de rang $d-1$ pe $X \times X$

$$F = p_1^*(T_{X|C}(-H)) \otimes p_2^*(\mathcal{O}_X(H)). \tag{19}$$

Să observăm că, deşi fibratul vectorial F se modifică atunci când tensorăm $\mathcal{E}$ cu un fibrat în drepte, restricţia sa la Y rămâne aceeaşi.

Orlov a observat că, lucrând pe Y, la fel ca în cazul spaţiilor proiective, există o secţiune globală σ a lui $F_{|Y}$ a cărei schemă a zerourilor este exact Δ_X, [Or92, p. 855]. Din complexul Koszul, a obţinut o rezoluţie a lui $\mathcal{O}_{\Delta_X}$ peste $\mathcal{O}_Y$, care, eventual, conduce la şirul spectral Beilinson [Or92].

În cele ce urmează vom avea nevoie de un rezultat a cărui demonstraţie apare în [AB09] şi al cărui enunţ este următorul

Lema 3.7. *Fie Z o varietate netedă, ireductibilă, Y un divizor efectiv pe Z, F un fibrat vectorial pe Z şi $\sigma \in H^0(Y, F_{|Y})$. Dacă V reprezintă fibratul vectorial pe Z dat de extinderea*

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow V \longrightarrow \mathcal{O}_Z(Y) \longrightarrow 0,$$

ce corespunde lui σ prin morfismul canonic $H^0(Y, F_{|Y}) \xrightarrow{\delta} H^1(Z, F(-Y))$, atunci există $u \in H^0(Z, V)$ astfel încât $u_{|Y} = \sigma$. În particular, se obţine că

$$zero(u) = zero(\sigma) \subset Y.$$

În plus, dacă $H^0(Z, F(-Y)) = 0$ şi extinderea nu este trivială, atunci u este unic.

Vom construi o rezoluţie a lui $\mathcal{O}_{\Delta_X}$ peste $\mathcal{O}_{X\times X}$ după cum urmează. Aplicând lema 3.7, obţinem un fibrat vectorial V, de rang d, dat de o extindere:

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow V \longrightarrow p^*(L) \longrightarrow 0, \tag{20}$$

şi o secţiune globală $u \in H^0(X \times X, V)$ astfel încât $zero(u) = \Delta_X$, după care putem aplica (16).

Rezultatul principal al acestei secţiuni, aşa cum apare în [AB09], este:

Teorema 3.8. *Notaţiile sunt cele introduse anterior. Pentru orice fibrat vectorial M pe X, există un şir spectral, ce depinde de $\mathcal{E}$:*

$$E_1^{p,q} = R^q p_{1*}\left(\wedge^{-p}V^* \otimes p_2^*M\right) \Rightarrow \begin{cases} M & \textit{dacă } p+q=0 \\ 0 & \textit{altfel} \end{cases},$$

ai cărui termeni pot fi determinaţi dintr-un şir lung exact:

$$\begin{aligned} \cdots \to R^q p_{1*}\left(p^*(L^*) \otimes p_2^*M((p+1)H)\right) \otimes \Omega_{X|C}^{-p-1}(-(p+1)H) \to \\ \to E_1^{p,q} \to H^q(X, M(pH)) \otimes \Omega_{X|C}^{-p}(-pH) \to \\ \to R^{q+1}p_{1*}\left(p^*(L^*) \otimes p_2^*M((p+1)H)\right) \otimes \Omega_{X|C}^{-p-1}(-(p+1)H) \to E_1^{p,q+1} \to \dots \end{aligned} \tag{21}$$

În plus,

$$E_1^{0,q} \cong H^q(X, M) \otimes \mathcal{O}_X, \tag{22}$$

şi

$$E_1^{-d,q} \cong R^q p_{1*}\left(p^*(L^*) \otimes p_2^*M((-d+1)H)\right) \otimes \mathcal{O}_X(-H) \otimes \pi^*(\det(\mathcal{E})) \tag{23}$$

pentru orice q.

Demonstraţie. Existenţa şirului spectral $E_1^{p,q}$ este justificată de rezultatele din secţiunea 1.3.

Pentru a găsi şirul lung exact (21), dualizăm şi luăm puterile exterioare în (20), obţinând şirul scurt exact indus

$$0 \to \wedge^{-p-1}F^* \otimes p^*(L^*) \to \wedge^{-p}V^* \to \wedge^{-p}F^* \to 0, \tag{24}$$

pentru toţi întregii negativi p.

Se ajunge apoi la şirul exact (21) aplicând p_{1*} lui (24), tensorat mai întâi cu p_2^*M, şi ţinând cont de identificările

$$\begin{aligned} R^q p_{1*}\left(p^*L^* \otimes \wedge^{-p-1}F^* \otimes p_2^*M\right) = \\ = R^q p_{1*}\left(p^*L^* \otimes p_2^*M((p+1)H)\right) \otimes \Omega_{X|C}^{-p-1}(-(p+1)H), \end{aligned} \tag{25}$$

respectiv

$$R^q p_{1*}\left(\wedge^{-p}F^* \otimes p_2^*M\right) = H^q(X, M(pH)) \otimes \Omega_{X|C}^{-p}(-pH). \tag{26}$$

Ultima afirmaţie rezultă imediat din (21) şi (18). □

Observaţia 19. Aplicând teorema de semicontinuitate, avem

$$R^q p_{1*}\left(p^*(L^*) \otimes p_2^* M((p+1)H)\right) = 0$$

dacă

$$H^q(X, M((p+1)H - R_y)) = 0,$$

pentru orice y.

Observaţia 20. Se poate obţine o altă variantă a teoremei 3.8 prin schimbarea factorilor în (19) şi pornind cu

$$F = p_1^*(\mathcal{O}_X(H)) \otimes p_2^*(T_{X|C}(-H)).$$

Termenii noului şir spectral E se determină dintr-un şir lung exact asemănător cu (21)

$$\begin{aligned}(27)\qquad R^q p_{1*}\Big(p^*(L^*) \otimes p_2^*\big(M \otimes \Omega_{X|C}^{-p-1}(-(p+1)H)\big)\Big) \otimes \mathcal{O}_X((p+1)H) \to \\ \to E_1^{p,\,q} \to H^q(X, M \otimes \Omega_{X|C}^{-p}(-pH)) \otimes \mathcal{O}_X(pH) \to \dots\end{aligned}$$

Observaţia 21. Faptul că şirul spectral depinde de $\mathcal{E}$ reprezintă un avantaj, atât timp cât putem înlocui pe $\mathcal{E}$ cu un twist, cu scopul de a anula câţi mai mulţi termeni ai şirului spectral, aşa cum se va vedea în secţiunile următoare. Pentru spaţiile proiective, e util câteodată să tensorăm fibratele M cu scopul de a obţine o descriere printr-o monadă, [OSS80, Ch. II, Section 3.2].

Cu notaţiile din teorema 3.8 avem

Corolarul 3.9. *Fibratul M este global generat dacă şi numai dacă $E_\infty^{-p,p} = 0$ pentru orice $p \geq 1$.*

Demonstraţie. Observăm că aplicaţia obţinută prin compunerea

$$H^0(X, M) \otimes \mathcal{O}_X = E_1^{0,0} \twoheadrightarrow E_\infty^{0,0} \hookrightarrow M$$

coincide cu morfismul de evaluare, deci M este global generat dacă şi numai dacă se anulează toţi ceilalţi termeni ai filtrării induşi de şirul spectral. □

În cazul $C = \mathbb{P}^1$, şirul spectral Beilinson are o formă simplificată. Fie $H = \mathcal{O}_X(1)$ şi $\mathcal{O}_X(R) = \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ cei doi generatori ai grupului Picard al lui X. Cu notaţiile de mai sus, avem

$$p^*(L) = p_1^*\mathcal{O}_X(R) \otimes p_2^*\mathcal{O}_X(R),$$

deci

$$R^q p_{1*}\left(p^*(L^*) \otimes p_2^*(M((p+1)H))\right) = H^q(X, M((p+1)H - R)) \otimes \mathcal{O}_X(-R).$$

Aplicând teorema 3.8, obţinem, prin comparaţie cu [Bu87, Secţiunea 1], următoarea consecinţă:

Corolarul 3.10. *Fie $\mathcal{E} \to \mathbb{P}^1$ un fibrat vectorial de rang d cu $\deg(\mathcal{E}) = n$. Considerăm $X = \mathbb{P}(\mathcal{E}^*)$, $H = \mathcal{O}_X(1)$ şi R clasa unei fibre a riglării. Atunci, pentru orice fibrat vectorial M pe X, există un şir spectral,*

$$E_1^{p,\,q} \Rightarrow \begin{cases} M & \text{dacă } p+q=0 \\ 0 & \text{altfel} \end{cases},$$

ai cărui termeni se găsesc într-un şir lung exact:

$$(28) \quad \cdots \to H^q(X, M((p+1)H-R)) \otimes \Omega^{-p-1}_{X|\mathbb{P}^1}(-(p+1)H-R) \to E_1^{p,\,q} \to$$
$$\to H^q(X, M(pH)) \otimes \Omega^{-p}_{X|\mathbb{P}^1}(-pH) \to$$
$$\to H^{q+1}(X, M((p+1)H-R)) \otimes \Omega^{-p-1}_{X|\mathbb{P}^1}(-(p+1)H-R) \to \dots$$

În plus, pentru orice q, avem

$$E_1^{0,\,q} \cong H^q(X, M) \otimes \mathcal{O}_X,$$

şi

$$E_1^{-d,\,q} \cong H^q(X, M((-d+1)H-R)) \otimes \mathcal{O}_X(-H+(n-1)R).$$

Cu notaţiile din 3.10 şi aplicând corolarele 3.9, 3.10 se obţine un criteriu coomologic suficient pentru global generare.

Corolarul 3.11. *Fibratul M este global generat dacă*

$$H^p(X, M((p+1)H-R)) = H^p(X, M(pH)) = 0,$$

pentru orice $p \geq 1$.

Suntem interesaţi de forma şirului spectral pentru fibrate pe suprafeţe Hirzebruch. Vom aplica corolarul 3.10 pentru fibratul $\mathcal{E}$ de rang $d = 2$ şi grad $\deg(\mathcal{E}) = -e$ pentru a obţine că X este suprafaţa Hirzebruch Σ_e. Folosind notaţiile introduse la începutul capitolului pentru cei doi generatori ai grupului Picard, C_0 şi F, precum şi faptul că $\Omega^1_{X|\mathbb{P}^1}(C_0) = \mathcal{O}_X(-C_0 - eF)$ obţinem

Corolarul 3.12. *Fie M un fibrat vectorial de rang arbitrar pe suprafaţa Hirzebruch $X = \Sigma_e$. Există un şir spectral convergent la M:*

$$E_1^{p,q} \Rightarrow \begin{cases} M & \text{dacă } p+q=0 \\ 0 & \text{altfel,} \end{cases}$$

cu proprietatea că

$$E_1^{p,q} = 0, \text{ dacă } (p,q) \notin \{-2,-1,0\} \times \{0,1,2\},$$

iar pentru orice $q \in \{0,1,2\}$ avem:

$$(29) \quad \begin{aligned} E_1^{0,\,q} &\cong H^q(X, M) \otimes \mathcal{O}_X, \\ E_1^{-2,\,q} &\cong H^q(X, M(-C_0 - F)) \otimes \mathcal{O}_X(-C_0-(e+1)F), \end{aligned}$$

şi $E_1^{-1,q}$ poate fi determinat din şirul exact

(30) $H^q(X, M(-F)) \otimes \mathcal{O}_X(-F) \to E_1^{-1,q} \to H^q(X, M(-C_0)) \otimes \mathcal{O}_X(-C_0 - eF).$

Observaţia 22. O concluzie care se poate formula în acest moment este aceea că utilizarea şirului spectral Beilinson ar trebui să conducă la determinarea completă a unui fibrat vectorial în cazul în care se cunoaşte coomologia unor twist-uri potrivite ale fibratului precum şi anumite morfisme de fibrate (este vorba despre diferenţialele şirului spectral). Vom aplica această observaţie în secţiunile următoare pentru a arăta că, în cazul fibratelor de rang doi ce îndeplinesc anumite condiţii, poate fi determinată forma şirului spectral la primul nivel şi, eventual, fibratul respectiv.

2. Corespondenţă între şirul spectral Beilinson şi extinderi

Conţinutul acestei secţiuni face obiectul articolului [AM11]. În literatură, două metode constructive sunt utilizate cu precădere pentru studiul fibratelor vectoriale pe o suprafaţă Hirzebruch. Pe de o parte, este vorba de metoda Serre şi modificări elementare, care descriu prin extinderi, în mod canonic, fibratele de rang doi (vezi [BS84], [BS82], [Br96], [Br83], [Fr98]), iar pe de altă parte, avem un şir spectral de tip Beilinson (vezi [Bu87] sau secţiunea 1.2 din acest capitol). Mai precis, şirul spectral Beilinson indică modalitatea prin care un fibrat poate fi recuperat din coomologia twist-urilor sale şi anumite morfisme de fascicule (diferenţialele şirului spectral). În cadrul acestui capitol vom arăta că extinderea canonică a unui fibrat de rang doi poate fi dedusă din şirul spectral Beilinson a unui twist potrivit, numit *normalizat*. În final vom evidenţia un criteriu coomologic pentru ca un fibrat vectorial topologic trivial pe o suprafaţă Hirzebruch, să fie trivial. Vom demonstra acest criteriu pe două căi diferite, tocmai pentru a sublinia legăturile şi diferenţele dintre cele două metode constructive menţionate anterior.

2.1. Extinderi şi şiruri spectrale Beilinson. Vom compara în cele ce urmează două metode constructive, utilizate frecvent în studiul fibratelor vectoriale pe o suprafaţă Hirzebruch: extinderi şi şiruri spectrale Beilinson.

2.1.1. *Fibrate de rang doi date prin extinderi.* În afara claselor Chern, orice fibrat vectorial M, de rang doi pe o suprafaţă Hirzebruch X, are doi invarianţi numerici ce îl descriu, într-un mod canonic, printr-o extindere (vezi [BS84], [BS82], [Br96], [Br91] sau [Br01]). Primul invariant d_M este definit de tipul de scindare pe o fibră generală F. Dacă

$$M|_F \cong \mathcal{O}_F(d) \oplus \mathcal{O}_F(d'), \quad d \geq d'$$

atunci

$$d_M := d.$$

Al doilea invariant r_M este obţinut dintr-o imagine directă. Să observăm că $\pi_*(M(-dC_0))$ este ori de rang 1, ori de rang 2, după cum $d > d'$ sau $d = d'$. Dacă $d > d'$, definim

$$r_M := r = \deg(\pi_*(M(-dC_0))).$$

Dacă $d = d'$, atunci

$$\pi_*(M(-dC_0)) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(r) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(s), \quad r \geq s$$

şi definim

$$r_M := r.$$

Întregul s reprezintă un invariant în plus pentru fibratele cu $d = d'$ (sau de tip "egal", după terminologia din [Br83]).

Fibratul M se exprimă printr-o extindere

$$0 \to \mathcal{O}_X(dC_0 + rF) \to M \to \mathcal{O}_X(d'C_0 + r'F) \otimes \mathcal{I}_\zeta \to 0, \tag{31}$$

unde $\zeta \subset X$ este o subschemă zero-dimensională, iar această extindere este unică dacă ori $d > d'$, ori $d = d'$ şi $s < r$. Twistul $M(-dC_0 - rF)$ este numit *normalizatul* lui M, iar M se numeşte *normalizat* dacă $d = r = 0$. În concluzie, extinderea (31) este unică dacă şi numai dacă spaţiul secţiunilor globale ale normalizatului este unu-dimensional.

Lungimea lui ζ este gradul de *uniformitate* al lui M. Mai exact, M are acelaşi tip de scindare peste toate fibrele lui π (i.e. este *uniform*) dacă şi numai dacă ζ este vidă (vezi [AB96]). Invariantul r măsoară stabilitatea lui M (vezi [AB97]).

Discriminantul lui M se calculează cu formula:

$$\frac{1}{4}\Delta(M) = c_2(M) - \frac{c_1(M)^2}{4} = \ell(\zeta) - \frac{1}{4}(d - d')\left(e(d' - d) - 2(r' - r)\right) \tag{32}$$

În particular, dacă $d = d'$, atunci $\Delta(M) = 4\ell(\zeta) \geq 0$. De asemenea, în cazul $d = d'$, M poate fi descris ca o modificare elementară a unui fibrat proiectiv plat de rang 2 (vezi [Br83], [Fr98]):

$$0 \to \pi^*(\pi_* M(-dC_0))(dC_0) \to M \to Q \to 0 \tag{33}$$

unde $Q(-dC_0)$ are suportul pe fibre (posibil multiple) ce trec prin ζ, este de grad $-\ell(\zeta)$ şi nu are secţiuni globale. Observăm că

$$\pi^*(\pi_* M(-dC_0))(dC_0) \cong \mathcal{O}_X(dC_0 + rF) \oplus \mathcal{O}_X(dC_0 + sF)$$

şi, în particular, orice fibrat vectorial M, cu scindarea de tipul $\mathcal{O}_F(d)^{\oplus 2}$ pe fiecare fibră a lui π, este decompozabil.

Propoziţia 3.13. *Cu notaţiile de mai sus avem:*

(1) *Dacă $d > d'$ sau $d = d'$ şi $s < r$, atunci fibratul $\mathcal{O}_X(dC_0 + rF)$ coincide cu imaginea aplicaţiei de multiplicare:*

$$H^0(X, M(-dC_0 - rF)) \otimes \mathcal{O}_X(dC_0 + rF) \to M.$$

(2) *Dacă $d = d'$ şi $s = r$, atunci fibratul $\pi^* (\pi_* M(-dC_0)) (dC_0)$ coincide cu imaginea aplicaţiei de multiplicare:*

$$H^0(X, M(-dC_0 - rF)) \otimes \mathcal{O}_X(dC_0 + rF) \to M.$$

DEMONSTRAŢIE. Din formula de proiecţie avem

$$\pi^* (\pi_* M(-dC_0 - rF)) (dC_0 + rF) = \pi^* (\pi_* M(-dC_0)) (dC_0),$$

şi, după o tensorare potrivită, putem presupune că M este normalizat, i.e. $d = r = 0$. În acest caz, este suficient să identificăm imaginea morfismului de evaluare $H^0(\pi_*(M)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \to \pi_* M$. Dacă $d' = c_1(M) \cdot F < 0$ atunci $\pi_*(M) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$. Dacă $c_1(M) \cdot F = 0$ atunci $\pi_*(M) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(s)$, deci imaginea morfismului de evaluare este $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ sau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus 2}$ după cum $s < 0$ sau $s = 0$. □

Reducerea la normalizat, folosită în demonstraţia propoziţiei anterioare, va fi întâlnită din nou în cele ce urmează, legat de şirurile spectrale Beilinson.

2.1.2. *Şiruri spectrale Beilinson.* După cum am mai afirmat, prin utilizarea şirului spectral Beilinson, orice fibrat vectorial ar putea fi complet determinat de coomologia unor twist-uri potrivite ale sale şi anumite morfisme de fibrate vectoriale (diferenţialele şirului spectral). Pentru a ilustra acest principiu vom arăta că în cazul fibratelor de rang doi, extinderile din secţiunea anterioară pot fi recuperate din şirurile spectrale Beilinson ale normalizatelor. Pentru simplitate, vom presupune că fibratul în cauză este deja normalizat, situaţie în care va avea $h^0 = 1$ sau $h^0 = 2$, în concordanţă cu cele două cazuri ale propoziţiei 3.13.

Teorema 3.14. *Fie M un fibrat vectorial de rang doi, normalizat, pe o suprafaţă Hirzebruch X.*

(1) *Dacă $h^0(X, M) = 1$, atunci ori $E_\infty^{-1,1} = 0$, ori $E_\infty^{-2,2} = 0$ şi filtrarea obţinută din şirul spectral Beilinson coincide cu extinderea canonică (31).*

(2) *Dacă $h^0(X, M) = 2$, i.e. M este o modificare elementară de-a lungul fibrelor a fibratului trivial, atunci $E_\infty^{-2,2} = 0$ şi filtrarea obţinută din şirul spectral Beilinson coincide cu şirul definit de modificarea elementară (33).*

DEMONSTRAŢIE. Să observăm pentru început că aplicaţia naturală

$$E_1^{0,0} \cong H^0(X, M) \otimes \mathcal{O}_X \twoheadrightarrow E_\infty^{0,0} \subset M$$

coincide cu aplicaţia de evaluare.

Presupunem că $h^0(X, M) = 1$. Aplicând propoziţia 3.13, deducem că

$$E_1^{0,0} \cong E_\infty^{0,0} \cong \mathcal{O}_X$$

este primul termen al şirului (31). După forma şirului spectral,

$$E_\infty^{-2,2} \subset E_1^{-2,2} \cong H^2(X, M(-C_0 - F)) \otimes \mathcal{O}_X(-C_0 - (e+1)F),$$

deci $E_\infty^{-2,2}$ este ori de rang 1, fără torsiune, ori este zero.

Dacă $E_\infty^{-2,2} = 0$, atunci filtrarea Beilinson se reduce la

$$0 \to E_\infty^{0,0} \to M \to E_\infty^{-1,1} \to 0,$$

şi cum $E_\infty^{0,0} = \mathcal{O}_X$, iar $h^0(X, M) = 1$, deducem că acest şir exact coincide cu extinderea (31). Observăm că această situaţie apare dacă $c_1(M) \cdot F = 0$, cât timp $E_1^{-2,2} = 0$ în acest caz.

Dacă $E_\infty^{-2,2}$ este de rang 1, fără torsiune, atunci el este un cât al lui M printr-un subfascicul de rang 1, deci $E_\infty^{-1,1}$ trebuie să fie zero şi filtrarea Beilinson se reduce la şirul

$$0 \to E_\infty^{0,0} \to M \to E_\infty^{-2,2} \to 0,$$

care coincide din nou, ţinând cont de ipoteză şi propoziţia 3.13, cu extinderea (31). Această situaţie apare, spre exemplu, dacă $M = \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X(-C_0 - F)$ pe $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Cazul $h^0(X, M) = 2$ se rezolvă într-un mod asemănător. Într-adevăr, din propoziţia 3.13 şi ipoteză deducem că

$$E_1^{0,0} \cong E_\infty^{0,0} \cong \mathcal{O}_X^{\oplus 2}.$$

Din considerente de rang, deducem că $E_\infty^{-2,2} = 0$ şi filtrarea Beilinson se reduce la şirul

$$0 \to E_\infty^{0,0} \to M \to E_\infty^{-1,1} \to 0,$$

care coincide, ţinând cont de ipoteză şi propoziţia 3.13, cu extinderea (33).

$\square$

Observaţia 23. Aşa cum am menţionat deja, dacă M este un fibrat de rang doi, normalizat, cu $h^0(X, M) = 1$, atunci extinderea canonică (31) este unică şi atunci, depinde numai de M. Dacă $h^0(X, M) = 2$, i.e. M este o modificare elementară de-a lungul fibrelor a fibratului trivial, unicitatea extinderii (31) nu este realizată, în schimb, este unic şirul (33) definit prin modificarea elementară.

2.2. Descrierea coomologică a fibratului trivial. În această secţiune vom da un criteriu coomologic ca, pe o suprafaţă Hirzebruch, un fibrat topologic trivial să fie trivial. Reamintim că, pentru suprafeţele Hirzebruch, trivialitatea topologică este echivalentă cu anularea claselor Chern.

Teorema 3.15. *Notaţiile sunt cele de mai sus. Un fibrat vectorial M, topologic trivial pe X, de rang $r \geq 2$, este trivial dacă şi numai dacă*

$$h^0(X, M(-C_0)) = h^0(X, M(-F)) = h^1(X, M) = h^2(X, M(-C_0 - F)) = 0.$$

DEMONSTRAŢIE. (rang arbitrar, folosind şirul spectral Beilinson) Este clar că fibratul trivial satisface cele patru condiţii de anulare.

Reciproc, presupunem că fibratul M satisface condiţiile

$$h^0(X, M(-C_0)) = h^0(X, M(-F)) = h^1(X, M) = h^2(X, M(-C_0 - F)) = 0$$

şi vom demonstra că este trivial. Pentru aceasta, vom utiliza şirul spectral Beilinson. Din trivialitatea topologică, clasele Chern ale lui M se anulează, iar din Riemann-Roch, obţinem

$$\chi(M) = r, \quad \chi(M(-C_0)) = \chi(M(-F)) = \chi(M(-C_0 - F)) = 0.$$

Deducem, folosind ipoteza, relaţiile (29), (30) şi dualitatea Serre că $E_1^{-2,q} = 0$ şi $E_1^{-1,q} = 0$ pentru orice q. Pe de altă parte, $E_1^{0,0} \cong \mathcal{O}_X^r$ şi $E_1^{0,1} = E_1^{0,2} = 0$.

Deci $E_\infty^{p,q} = 0$ pentru orice $(p, q) \neq (0, 0)$. Atunci $M \cong E_\infty^{0,0} \cong \mathcal{O}_X^r$. □

DEMONSTRAŢIE. (rang 2, folosind extinderea canonică) Demonstrăm că M este normalizat. Folosind formula (32), vom deduce că M este trivial.

Mai întâi, verificăm că $d_M = 0$. Presupunem $d_M = d > 0$. Din extinderea (31) şi din condiţia $h^0(M(-C_0)) = 0$ rezultă $r_M = r < 0$. Cum $h^1(M) = 0$, şirul lung de coomologie implică faptul că $h^1(\mathcal{O}_X(dC_0 + rF)) = 0$, de unde $r \geq de - 1$. Acest lucru este posibil numai dacă $e = 0$ şi $r = -1$. Pe de altă parte, formula (32) implică $d(2r - de) = -2d \geq 0$, ceea ce reprezintă o contradicţie. Deci $d_M = 0$ şi extinderea (31) este de tipul

$$0 \to \mathcal{O}_X(rF) \to M \to \mathcal{O}_X(-rF) \to 0,$$

unde $r = r_M$. Din definiţia lui r_M deducem că $r \geq 0$. Cum $h^0(M(-F)) = 0$, r trebuie să fie ≤ 0. Atunci $r_M = 0$. Am folosit doar trei din cele patru condiţii din ipoteză. Observăm că, în acest caz, $M \cong M^*$ şi atunci condiţia $h^2(X, M(-C_0 - F)) = 0$ se obţine din celelalte trei şi dualitatea Serre. □

Observaţia 24. În enunţul teoremei 3.15, pentru cazul fibratelor de rang doi, nu a fost făcută nici o presupunere asupra tipului de scindare al lui M pe fibre, dar, oricum, fibratul este normalizat. Se deduce de asemenea, din demonstraţie, că un fibrat de rang doi topologic trivial este analitic trivial dacă şi numai dacă este normalizat.

Observaţia 25. Şirul spectral Beilinson clasic pentru $\mathbb{P}^2$ ne oferă un criteriu similar de trivialitate. Mai precis, un fibrat vectorial plat, de rang ≥ 2 pe $\mathbb{P}^2$ este trivial dacă şi numai dacă $h^0(M(-1)) = h^1(M(-2)) = 0$. Rezultate asemănătoare pot fi demonstrate pentru fibrate pe scroll-uri raţionale (folosind [AB09]) şi pe spaţii proiective de dimensiune superioară.

3. Criterii de scindare

Tema acestei secţiuni îşi are rădăcinile în următoarea întrebare generală: dată o varietate proiectivă complexă şi un fibrat vectorial olomorf E pe X, se poate determina dacă E este sau nu scindat doar din analiza coomologiei lui E şi a unor twist-uri potrivite ale sale?

Pentru spaţii proiective problema a fost rezolvată de Horrocks în [Ho64], arătând că un fibrat este scindat exact atunci când se anulează coomologia intermediară a tuturor twist-urilor sale. În 1981, Evans şi Griffith simplifică acest criteriu pentru fibratele de rang $r \leq n$ pe $\mathbb{P}^n$, după cum poate fi văzut în [EG81]. Ottaviani îşi aduce şi el o contribuţie privind această problemă, prezentând în 1989 criterii de scindare pentru fibrate vectoriale pe Grassmanniene şi cuadrice [Ot89]. În 2000 Kumar şi Rao obţin un criteriu diferit de cele anterioare pentru fibratele de rang doi pe $\mathbb{P}^n$, pentru $n \geq 4$. În 2003, Kumar, Paterson şi Rao rafinează criteriul lui Horrocks pentru fibrate de rang $r < n$ pentru n par şi rang $r < n-1$ pentru n impar [KPR03]. În 2005, Costa şi Miró-Roig extind criteriul lui Horrocks la spaţiile multiproiective [CMR05]. Recent, Malaspina a generalizat aceste rezultate în [Ma08] şi a optimizat rezultatele lui Ottaviani pentru cuadrice în [Ma09].

Toate aceste eforturi sunt conectate la o problemă actuală în geometria algebrică. Ne referim aici la conjectura lui Hartshorne care stipulează că orice fibrat vectorial de rang doi pe un spaţiu proiectiv de dimensiune cel puţin şase este scindat.

În cele ce urmează, ne vom axa pe determinarea unor condiţii necesare şi suficiente de scindare pentru anumite fibrate vectoriale de rang doi pe o suprafaţă raţională riglată. Vom utiliza tehnica şirurilor spectrale Beilinson, făcându-se legătura cu exemplul dat în secţiunea 1.3 din acest capitol. Situaţiile pe care le vom trata completează cazul abordat anterior în teorema 3.15. Acestea se vor concretiza în final prin rezultatele exprimate în teorema 3.28, constituind obiectul articolului [FM11]. Pentru calculul termenilor şirului spectral Beilinson, vom aplica corolarul 3.12.

Lema 3.16. *Fie X o varietate proiectivă netedă, D un divizor efectiv pe X şi M un fibrat vectorial pe X cu $H^0(X, M) = 0$. Atunci $H^0(X, M(-D)) = 0$, unde $M(-D) = M \otimes \mathcal{O}_X(-D)$.*

DEMONSTRAŢIE. D fiind divizor efectiv avem şirul scurt exact

$$0 \to \mathcal{O}_X(-D) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_D \to 0.$$

Prin tensorare cu M, trecerea la şirul lung de coomologie şi utilizarea ipotezei $H^0(X, M) = 0$ deducem că fibratul $M(-D)$ nu are secţiuni globale. $\square$

Lema 3.17. *Fie $e \geq 0$, $X = \Sigma_e$ o suprafaţă Hirzebruch şi $a, b \in \mathbb{Z}$. Atunci*

$$H^1(X, \mathcal{O}_X(aC_0 + bF)) \cong \begin{cases} H^0(\mathbb{P}^1, \bigoplus_{k=1}^{-a-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(ke+b)), & \textit{dacă } a \leq -2 \\ 0, & \textit{dacă } a = -1 \\ H^0(\mathbb{P}^1, \bigoplus_{k=0}^{a} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(ke-b-2)), & \textit{dacă } a \geq 0 \end{cases}.$$

DEMONSTRAŢIE. Din şirul spectral Leray (vezi obs.3, sec.1.2.1, cap.1) aplicat morfismului $f = \pi : X \to \mathbb{P}^1$ şi fasciculului $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X(aC_0 + bF)$, deducem existenţa şirului exact

$$0 \to H^1(\mathbb{P}^1, \pi_*\mathcal{F}) \to H^1(X, \mathcal{F}) \to H^0(\mathbb{P}^1, R^1\pi_*\mathcal{F}) \to 0.$$

Dar

$$R^1\pi_*\mathcal{F} = R^1\pi_*\mathcal{O}_X(aC_0) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b)$$

şi cum

$$R^1\pi_*\mathcal{O}_X(aC_0) = (\pi_*\mathcal{O}_X((-a-2)C_0))^* \otimes \det(\mathcal{E})$$

găsim

$$R^1\pi_*\mathcal{F} = (\pi_*\mathcal{O}_X((-a-2)C_0))^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e+b),$$

şi

$$\pi_*\mathcal{F} = \pi_*\mathcal{O}_X(aC_0) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b).$$

Pe de altă parte,

$$\pi_*\mathcal{O}_X(\alpha C_0) = \begin{cases} \mathcal{S}^\alpha(\mathcal{E}), & \text{dacă } \alpha > 0 \\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}, & \text{dacă } \alpha = 0 \\ 0, & \text{dacă } \alpha < 0 \end{cases}, \tag{34}$$

unde

$$\mathcal{S}^\alpha(\mathcal{E}) = \mathcal{S}^\alpha(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-e)) = \bigoplus_{k=0}^{\alpha} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-ke).$$

Să observăm că, dacă $a \leq -2$ atunci $\pi_*\mathcal{F} = 0$ şi obţinem

$$H^1(X, \mathcal{F}) \cong H^0(\mathbb{P}^1, (\pi_*\mathcal{O}_X((-a-2)C_0))^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e+b)).$$

Pentru $\alpha = -a-2$ în (34) găsim

$$\pi_*\mathcal{O}_X((-a-2)C_0) = \bigoplus_{k=0}^{-a-2} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-ke),$$

şi atunci

$$(\pi_*\mathcal{O}_X((-a-2)C_0))^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e+b) = \bigoplus_{k=0}^{-a-2} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}((k+1)e+b).$$

În concluzie, dacă $a \leq -2$ avem că

$$H^1(X,\mathcal{F}) \cong H^0(\mathbb{P}^1, \bigoplus_{k=1}^{-a-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(ke+b)).$$

Dacă $a \geq 0$ deducem din (34) că $R^1\pi_*\mathcal{F} = 0$ şi

$$H^1(X,\mathcal{F}) \cong H^1(\mathbb{P}^1, \pi_*\mathcal{F}) \cong H^0(\mathbb{P}^1, \omega_{\mathbb{P}^1} \otimes (\pi_*\mathcal{F})^*).$$

Aplicând (34) pentru $\alpha = a$ obţinem că

$$\pi_*\mathcal{F} = \bigoplus_{k=0}^{a} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-ke+b),$$

şi

$$\omega_{\mathbb{P}^1} \otimes (\pi_*\mathcal{F})^* = \bigoplus_{k=0}^{a} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(ke-b-2),$$

finalizând astfel cazul $a \geq 0$.

Pentru $a = -1$ deducem din (34) că $\pi_*\mathcal{F} = 0$ şi $R^1\pi_*\mathcal{F} = 0$, de unde $H^1(X,\mathcal{F}) = 0$. $\square$

În continuare vom determina condiţiile necesare şi suficiente ca un fibrat vectorial de rang doi să fie scindat în cinci situaţii diferite.

Propoziţia 3.18. *Fie $X = \Sigma_e$ o suprafaţă Hirzebruch şi M un fibrat vectorial de rang doi pe X cu clasele Chern $c_1(M) = 0, c_2(M) = 0$. Atunci*

$$M \cong \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X$$

dacă şi numai dacă sunt îndeplinite condiţiile

(35) $$h^0(M(-C_0)) = h^0(M(-F)) = h^1(M) = 0.$$

DEMONSTRAŢIE. ($\Rightarrow$) Dacă $M \cong \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X$ atunci $h^i(M \otimes L) = 2h^i(L)$, pentru orice $L \in Pic(X)$ şi $i = \overline{0,2}$. Găsim imediat că

$$\begin{aligned}
&h^1(M) = 2h^1(\mathcal{O}_X) = 2h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)) = 0,\\
&h^0(M(-C_0)) = 2h^0(\mathcal{O}_X(-C_0)) = 0,\\
&h^0(M(-F)) = 2h^0(\mathcal{O}_X(-F)) = 0.
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Vom arăta că dacă sunt îndeplinite condiţiile din (35), atunci

$$\text{(36)}\quad \begin{array}{l} h^0(M)=2, h^2(M)=0,\\ h^1(M(-C_0))=h^2(M(-C_0))=0,\\ h^1(M(-F))=h^2(M(-F))=0,\\ h^0(M(-C_0-F))=h^1(M(-C_0-F))=h^2(M(-C_0-F))=0. \end{array}$$

Pentru aceasta, vom calcula clasele Chern ale fibratelor $M(-C_0), M(-F)$ şi $M(-C_0-F)$, ţinând cont că $c_1(M)=0, c_2(M)=0$. Obţinem

$$\begin{array}{rclrcl} c_1(M(-C_0)) & = & -2C_0, & c_2(M(-C_0)) & = & -e,\\ c_1(M(-F)) & = & -2F, & c_2(M(-F)) & = & 0,\\ c_1(M(-C_0-F)) & = & -2C_0-2F, & c_2(M(-C_0-F)) & = & -e+2. \end{array}$$

Aplicând Riemann-Roch găsim

$$\text{(37)}\quad \begin{array}{ll} \chi(M)=2, & \chi(M(-C_0))=0,\\ \chi(M(-C_0-F))=0, & \chi(M(-F))=0. \end{array}$$

Cum $c_1(M)=0$ rezultă că $\det(M)=\mathcal{O}_X$, de unde $M^*\cong M$. Atunci

$$\begin{array}{l} h^2(M)=h^0(M^*(K))=h^0(M(-2C_0-(e+2)F)),\\ h^2(M(-C_0))=h^0(M^*(K+C_0))=h^0(M(-C_0-(e+2)F)),\\ h^2(M(-F))=h^0(M^*(K+F))=h^0(M(-2C_0-(e+1)F)),\\ h^2(M(-C_0-F))=h^0(M^*(K+C_0+F))=h^0(M(-C_0-(e+1)F)). \end{array}$$

Aplicând lema 3.16 pentru fibratul $M(-C_0)$ cu $h^0(M(-C_0))=0$ şi divizorul

$$D\in\{C_0+(e+2)F, C_0+(e+1)F, (e+2)F, (e+1)F, F\}$$

deducem

$$\text{(38)}\quad \begin{array}{l} h^2(M)=h^2(M(-C_0))=h^2(M(-F))=0,\\ h^2(M(-C_0-F))=h^0(M(-C_0-F))=0. \end{array}$$

Ţinând cont de (35),(37) şi (38) se obţin şi celelalte patru relaţii din (36).

Vom determina în continuare termenii $E_1^{p,q}$ ai şirului spectral Beilinson pentru fibratul M. Cei care contează sunt termenii cu $p\in\{-2,-1,0\}$ şi $q\in\{0,1,2\}$. Pentru aceasta, ţinând cont de relaţiile (29) şi (30) avem că

$$\text{(39)}\quad \begin{array}{ll} E_1^{0,q} & \cong H^q(X,M)\otimes\mathcal{O}_X,\\ E_1^{-2,q} & \cong H^q(X,M(-C_0-F))\otimes\mathcal{O}_X(-C_0-(e+1)F), \end{array}$$

iar pentru $E_1^{-1,q}$ avem şirul exact

$$\text{(40)}\quad \begin{array}{l} \cdots\ \to H^q(X,M(-F))\otimes\mathcal{O}_X(-F)\to E_1^{-1,q}\to\\ \to H^q(X,M(-C_0))\otimes\mathcal{O}_X(-C_0-eF)\to\cdots. \end{array}$$

Din condiţiile (35), (36) şi (39) obţinem

$$\begin{aligned}
E_1^{0,0} &\cong H^0(X,M)\otimes\mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_X\oplus\mathcal{O}_X,\\
E_1^{0,1} &\cong H^1(X,M)\otimes\mathcal{O}_X = 0,\\
E_1^{0,2} &\cong H^2(X,M)\otimes\mathcal{O}_X = 0,\\
E_1^{-2,q} &\cong H^q(X,M(-C_0-F))\otimes\mathcal{O}_X(-C_0-(e+1)F) = 0, (\forall)q\in\{0,1,2\}.
\end{aligned}$$

Din şirul exact (40) şi $H^q(X,M(-C_0)) = H^q(X,M(-F)) = 0$ deducem

$$E_1^{-1,q} = 0, (\forall)q\in\{0,1,2\}.$$

Astfel, şirul spectral la nivel de E_1 are reprezentarea din figura 3.

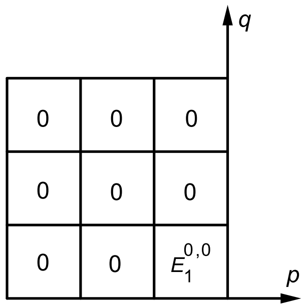

FIGURA 3. Şirul spectral Beilinson la nivel de E_1

Cum $E_\infty^{p,q} \Rightarrow M$ pentru $p+q=0$ şi $E_\infty^{p,q} = E_1^{p,q}$ deducem că

$$M \cong E_1^{0,0} \cong \mathcal{O}_X\oplus\mathcal{O}_X.$$

□

Corolarul 3.19. *Fie M un fibrat vectorial de rang doi pe suprafaţa Hirzebruch $X=\Sigma_e$, având clasele Chern $c_1(M)=0, c_2(M)=0$ şi care îndeplineşte condiţiile $h^1(M)=h^0(M(-C_0))=h^0(M(-F))=0$. Atunci M este strict semistabil faţă de orice fibrat amplu pe X.*

DEMONSTRAŢIE. Se aplică propoziţia 3.18 şi corolarul 1.29. □

Propoziţia 3.20. *Fie M un fibrat vectorial de rang doi pe suprafaţa Hirzebruch $X=\Sigma_e$ având clasele Chern $c_1(M)=-C_0-(e+1)F, c_2(M)=1$. Atunci*

$$M\cong\mathcal{O}_X(-F)\oplus\mathcal{O}_X(-C_0-eF)$$

dacă şi numai dacă

$$h^0(M)=0. \tag{41}$$

DEMONSTRAŢIE. ($\Rightarrow$) Implicaţia directă este evidentă.
($\Leftarrow$) Vom arăta că dacă este îndeplinită condiţia (41) din ipoteză, atunci

$$\begin{array}{l} h^1(M) = h^2(M) = 0, \\ h^0(M(-C_0)) = h^2(M(-C_0)) = 0, h^1(M(-C_0)) = 1, \\ h^0(M(-F)) = h^2(M(-F)) = 0, h^1(M(-F)) = 1, \\ h^0(M(-C_0 - F)) = h^1(M(-C_0 - F)) = h^2(M(-C_0 - F)) = 0. \end{array} \tag{42}$$

Pentru aceasta, vom calcula clasele Chern ale fibratelor $M(-C_0), M(-F)$ şi $M(-C_0 - F)$, ţinând cont că $c_1(M) = -C_0 - (e+1)F, c_2(M) = 1$. Obţinem

$$\begin{array}{lclllcl} c_1(M(-C_0)) & = & -3C_0 - (e+1)F, & c_2(M(-C_0)) & = & 2-e, \\ c_1(M(-F)) & = & -C_0 - (e+3)F, & c_2(M(-F)) & = & 2, \\ c_1(M(-C_0 - F)) & = & -3C_0 - (e+3)F, & c_2(M(-C_0 - F)) & = & 5-e. \end{array}$$

Aplicând Riemann-Roch găsim

$$\begin{array}{ll} \chi(M) = 0, & \chi(M(-C_0)) = -1, \\ \chi(M(-C_0 - F)) = 0, & \chi(M(-F)) = -1. \end{array} \tag{43}$$

Lema 3.16 aplicată fibratului M cu $h^0(M) = 0$ şi divizorului

$$D \in \{C_0, F, C_0 + F\}$$

conduce la

$$h^0(M(-C_0)) = h^0(M(-F)) = h^0(M(-C_0 - F)) = 0. \tag{44}$$

Cum $c_1(M) = -C_0 - (e+1)F$ rezultă că $\det(M) = \mathcal{O}_X(-C_0 - (e+1)F)$, de unde $M^* \cong M(C_0 + (e+1)F)$. Atunci

$$\begin{array}{l} h^2(M) = h^0(M^*(K)) = h^0(M(-C_0 - F)) = 0, \\ h^2(M(-C_0)) = h^0(M^*(K + C_0)) = h^0(M(-F)) = 0, \\ h^2(M(-F)) = h^0(M^*(K + F)) = h^0(M(-C_0)) = 0, \\ h^2(M(-C_0 - F)) = h^0(M^*(K + C_0 + F)) = h^0(M) = 0. \end{array} \tag{45}$$

Din (41),(43), (44) şi (45) se obţin şi celelalte patru relaţii din (42).

Vom determina termenii $E_1^{p,q}$ ai şirului spectral Beilinson pentru fibratul M, cu $p \in \{-2, -1, 0\}$ şi $q \in \{0, 1, 2\}$. Din relaţiile (39), (40) şi (42) obţinem

$$\begin{array}{ll} E_1^{0,q} & \cong H^q(X, M) \otimes \mathcal{O}_X = 0, \\ E_1^{-2,q} & \cong H^q(X, M(-C_0 - F)) \otimes \mathcal{O}_X(-C_0 - (e+1)F) = 0, \end{array}$$

pentru orice $q \in \{0, 1, 2\}$. Pentru $E_1^{-1,q}$ avem şirul exact

$$\begin{array}{c} \to H^{q-1}(X, M(-C_0)) \otimes \mathcal{O}_X(-C_0 - eF) \to H^q(X, M(-F)) \otimes \mathcal{O}_X(-F) \to \\ \to E_1^{-1,q} \to \\ \to H^q(X, M(-C_0)) \otimes \mathcal{O}_X(-C_0 - eF) \to H^{q+1}(X, M(-F)) \otimes \mathcal{O}_X(-F) \to . \end{array}$$

Cum $h^0(M(-C_0)) = h^2(M(-F)) = 0$, $h^1(M(-C_0)) = h^1(M(-F)) = 1$ din (42) deducem că $E_1^{-1,1}$ se găseşte în şirul exact

$$0 \to \mathcal{O}_X(-F) \to E_1^{-1,1} \to \mathcal{O}_X(-C_0 - eF) \to 0. \tag{46}$$

Dar extinderile de acest tip sunt parametrizate de

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_X(-C_0 - eF), \mathcal{O}_X(-F)) \cong H^1(X, \mathcal{O}_X(C_0 + (e-1)F)).$$

Aplicând lema (3.17) avem că

$$H^1(X, \mathcal{O}_X(C_0 + (e-1)F)) \cong H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-e-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) = 0,$$

deci şirul exact (46) scindează şi, prin urmare,

$$E_1^{-1,1} \cong \mathcal{O}_X(-F) \oplus \mathcal{O}_X(-C_0 - eF).$$

Astfel, şirul spectral la nivel de E_1 are reprezentarea din figura 4.

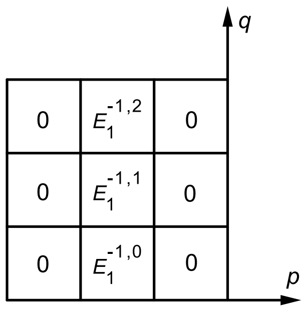

FIGURA 4. Şirul spectral Beilinson la nivel de E_1

Cum $E_\infty^{p,q} \Rightarrow M$ pentru $p + q = 0$ şi $E_\infty^{p,q} = E_1^{p,q}$ deducem că

$$M \cong E_1^{-1,1} \cong \mathcal{O}_X(-F) \oplus \mathcal{O}_X(-C_0 - eF).$$

□

Corolarul 3.21. *Dacă M este fibrat vectorial de rang doi pe suprafaţa Hirzebruch $X = \Sigma_e$, având clasele Chern $c_1(M) = -C_0 - (e+1)F, c_2(M) = 1$ şi $h^0(M) = 0$, atunci M este instabil faţă de orice fibrat amplu pe X.*

DEMONSTRAŢIE. Se aplică propoziţia 3.20 şi corolarul 1.29. □

Propoziţia 3.22. *Fie M un fibrat vectorial de rang doi pe suprafaţa Hirzebruch $X = \Sigma_e$ având clasele Chern $c_1(M) = -F, c_2(M) = 0$. Atunci*

$$M \cong \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X(-F)$$

dacă şi numai dacă

$$h^0(M(-C_0)) = h^0(M(-F)) = h^1(M) = 0. \tag{47}$$

DEMONSTRAŢIE. ($\Rightarrow$) Deoarece $M(-C_0) = \mathcal{O}_X(-C_0) \oplus \mathcal{O}_X(-C_0 - F)$ şi $M(-F) = \mathcal{O}_X(-F) \oplus \mathcal{O}_X(-2F)$ rezultă că $h^0(M(-C_0)) = h^0(M(-F)) = 0$. Pe de altă parte, din lema 3.17 rezultă că $H^1(X, \mathcal{O}_X) = H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)) = 0$ şi $H^1(X, \mathcal{O}_X(-F)) = H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-3)) = 0$, ceea ce conduce la $h^1(M) = 0$.
($\Leftarrow$) Pentru început vom arăta că dacă este îndeplinită condiţia (47) atunci

$$\begin{aligned} &h^0(M) = 1, h^2(M) = 0,\\ &h^1(M(-C_0)) = h^2(M(-C_0)) = 0,\\ &h^1(M(-F)) = 1, h^2(M(-F)) = 0,\\ &h^0(M(-C_0 - F)) = h^1(M(-C_0 - F)) = h^2(M(-C_0 - F)) = 0. \end{aligned} \tag{48}$$

Ştiind că $c_1(M) = -F, c_2(M) = 0$, putem determina clasele Chern ale fibratelor $M(-C_0), M(-F)$ şi $M(-C_0 - F)$. Obţinem

$$\begin{array}{lclllcr} c_1(M(-C_0)) & = & -2C_0 - F, & c_2(M(-C_0)) & = & 1 - e,\\ c_1(M(-F)) & = & -3F, & c_2(M(-F)) & = & 0,\\ c_1(M(-C_0 - F)) & = & -2C_0 - 3F, & c_2(M(-C_0 - F)) & = & 3 - e. \end{array}$$

Aplicând Riemann-Roch găsim

$$\begin{array}{ll} \chi(M) = 1, & \chi(M(-C_0)) = 0,\\ \chi(M(-C_0 - F)) = 0, & \chi(M(-F)) = -1. \end{array} \tag{49}$$

Lema 3.16 aplicată fibratului $M(-C_0)$ cu $h^0(M(-C_0)) = 0$ şi divizorului

$$D \in \{C_0 + (e+1)F, (e+1)F, C_0 + eF, eF\}$$

conduce la

$$\begin{aligned} &h^0(M(-2C_0 - (e+1)F)) = h^0(M(-C_0 - (e+1)F)) = 0,\\ &h^0(M(-2C_0 - eF)) = h^0(M(-C_0 - eF)) = 0. \end{aligned} \tag{50}$$

Cum $c_1(M) = -F$ rezultă că $\det(M) = \mathcal{O}_X(-F)$, de unde $M^* \cong M(F)$. Atunci, din dualitatea Serre şi relaţiile (50) rezultă

$$\begin{aligned} &h^2(M) = h^0(M^*(K)) = h^0(M(-2C_0 - (e+1)F)) = 0,\\ &h^2(M(-C_0)) = h^0(M^*(K + C_0)) = h^0(M(-C_0 - (e+1)F)) = 0,\\ &h^2(M(-F)) = h^0(M^*(K + F)) = h^0(M(-2C_0 - eF)) = 0,\\ &h^2(M(-C_0 - F)) = h^0(M^*(K + C_0 + F)) = h^0(M(-C_0 - eF)) = 0. \end{aligned} \tag{51}$$

Din (47),(49), (50) şi (51) se obţin şi celelalte patru relaţii din (48).

Vom determina termenii $E_1^{p,q}$ ai şirului spectral Beilinson pentru fibratul M, cu $p \in \{-2, -1, 0\}$ şi $q \in \{0, 1, 2\}$. Din relaţiile (39), (40) şi (48) obţinem

$$\begin{array}{ll} E_1^{0,0} & \cong \mathcal{O}_X,\\ E_1^{-1,1} & \cong \mathcal{O}_X(-F),\\ E_1^{p,q} & = 0, \forall (p,q) \notin \{(0,0), (-1,1)\}. \end{array}$$

Astfel, şirul spectral la nivel de E_1 are reprezentarea din figura 5.

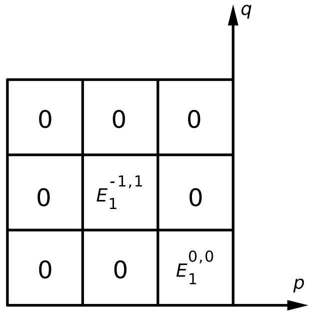

FIGURA 5. Şirul spectral Beilinson la nivel de E_1

Cum $E_\infty^{p,q} \Rightarrow M$ pentru $p+q=0$ şi $E_\infty^{p,q} = E_1^{p,q}$ deducem că avem extinderea

$$0 \to \mathcal{O}_X \to M \to \mathcal{O}_X(-F) \to 0,$$

care scindează deoarece

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_X(-F), \mathcal{O}_X) \cong H^1(X, \mathcal{O}_X(F)) \cong H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-3)) = 0$$

(ultimul izomorfism se obţine din lema 3.17).

În concluzie, $M \cong \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X(-F)$.

$\square$

Corolarul 3.23. *Fie $X = \Sigma_e$ o suprafaţă Hirzebruch şi M un fibrat vectorial de rang doi pe X, având clasele Chern $c_1(M) = -F, c_2(M) = 0$ şi care îndeplineşte condiţiile $h^0(M(-C_0)) = h^0(M(-F)) = h^1(M) = 0$. Atunci M este instabil faţă de orice fibrat amplu pe X.*

DEMONSTRAŢIE. Se aplică propoziţia 3.22 şi corolarul 1.29. $\square$

Propoziţia 3.24. *Fie M un fibrat vectorial de rang doi pe suprafaţa Hirzebruch $X = \Sigma_e$ având clasele Chern $c_1(M) = -C_0 - (e+2)F, c_2(M) = 1$. Atunci*

$$M \cong \mathcal{O}_X(-F) \oplus \mathcal{O}_X(-C_0 - (e+1)F)$$

dacă şi numai dacă

$$h^0(M) = h^1(M(-C_0 - F)) = h^2(M(-F)) = 0. \tag{52}$$

DEMONSTRAŢIE. ($\Rightarrow$) Se demonstrează imediat prin calcul direct, dualitate Serre şi lema 3.17.

($\Leftarrow$) Primul pas constă în a arăta că dacă au loc egalităţile din (52) atunci

$$\begin{aligned} &h^1(M) = h^2(M) = 0, \\ &h^0(M(-C_0)) = h^1(M(-C_0)) = h^2(M(-C_0)) = 0, \\ &h^0(M(-F)) = 0, h^1(M(-F)) = 1, \\ &h^0(M(-C_0 - F)) = 0, h^2(M(-C_0 - F)) = 1. \end{aligned} \tag{53}$$

Pentru aceasta, determinăm mai întâi clasele Chern ale fibratelor $M(-C_0)$, $M(-F)$ şi $M(-C_0-F)$. Obţinem

$$\begin{array}{rclrcl} c_1(M(-C_0)) &=& -3C_0-(e+2)F, & c_2(M(-C_0)) &=& 3-e,\\ c_1(M(-F)) &=& -C_0-(e+4)F, & c_2(M(-F)) &=& 2,\\ c_1(M(-C_0-F)) &=& -3C_0-(e+4)F, & c_2(M(-C_0-F)) &=& 6-e. \end{array}$$

Aplicând Riemann-Roch găsim

$$\begin{array}{ll} \chi(M)=0, & \chi(M(-C_0))=0,\\ \chi(M(-C_0-F))=1, & \chi(M(-F))=-1. \end{array} \tag{54}$$

Lema 3.16 aplicată fibratului M cu $h^0(M)=0$ şi divizorului

$$D\in\{C_0,F,C_0+F\}$$

conduce la

$$h^0(M(-C_0))=h^0(M(-F))=h^0(M(-C_0-F))=0. \tag{55}$$

Cum $c_1(M)=-C_0-(e+2)F$ rezultă că $\det(M)=\mathcal{O}_X(-C_0-(e+2)F)$, de unde $M^*(K)\cong M(-C_0)$. Atunci, din dualitatea Serre şi relaţiile (55) rezultă

$$\begin{array}{l} h^2(M)=h^0(M^*(K))=h^0(M(-C_0)=0,\\ h^2(M(-C_0))=h^0(M^*(K+C_0))=h^0(M)=0. \end{array} \tag{56}$$

Din (52),(54), (55) şi (56) se obţin şi celelalte patru relaţii din (53).

Vom determina termenii $E_1^{p,q}$ ai şirului spectral Beilinson pentru fibratul M, cu $p\in\{-2,-1,0\}$ şi $q\in\{0,1,2\}$. Din relaţiile (39), (40) şi (53) obţinem

$$\begin{array}{ll} E_1^{-1,1} & \cong\mathcal{O}_X(-F),\\ E_1^{-2,2} & \cong\mathcal{O}_X(-C_0-(e+1)F),\\ E_1^{p,q} & =0,\forall(p,q)\notin\{(-1,1),(-2,2)\}. \end{array}$$

Astfel, şirul spectral la nivel de E_1 are reprezentarea din figura 6.

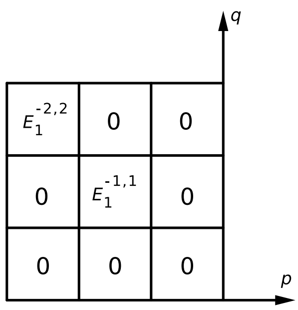

FIGURA 6. Şirul spectral Beilinson la nivel de E_1

Cum $E_\infty^{p,q}\Rightarrow M$ pentru $p+q=0$ şi $E_\infty^{p,q}=E_1^{p,q}$ deducem că avem extinderea

$$0\to\mathcal{O}_X(-F)\to M\to\mathcal{O}_X(-C_0-(e+1)F)\to 0,$$

care scindează deoarece

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_X(-C_0-(e+1)F),\mathcal{O}_X(-F))\cong H^1(X,\mathcal{O}_X(C_0+eF))$$

şi, din lema 3.17,

$$H^1(X,\mathcal{O}_X(C_0+eF))\cong H^0(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-e-2)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2))=0.$$

În concluzie, $M\cong\mathcal{O}_X(-F)\oplus\mathcal{O}_X(-C_0-(e+1)F)$.

□

Corolarul 3.25. *Fie $X=\Sigma_e$ o suprafaţă Hirzebruch şi M un fibrat vectorial de rang doi pe X, având clasele Chern $c_1(M)=-F, c_2(M)=0$ şi care îndeplineşte condiţiile $h^0(M(-C_0))=h^0(M(-F))=h^1(M)=0$. Atunci M este instabil faţă de orice fibrat amplu pe X.*

DEMONSTRAŢIE. Se aplică propoziţia 3.24 şi corolarul 1.29. □

Propoziţia 3.26. *Fie M un fibrat vectorial de rang doi pe suprafaţa Hirzebruch $X=\Sigma_e$ având clasele Chern $c_1(M)=-C_0-(e+1)F, c_2(M)=0$. Atunci*

$$M\cong\mathcal{O}_X\oplus\mathcal{O}_X(-C_0-(e+1)F)$$

dacă şi numai dacă

$$h^0(M(-C_0))=h^0(M(-F))=h^1(M)=0. \tag{57}$$

DEMONSTRAŢIE. ($\Rightarrow$) Implicaţia directă se obţine imediat prin calcul direct, dualitate Serre şi lema 3.17.
($\Leftarrow$) Reciproc, vom arăta mai întâi că dacă este îndeplinită condiţia (57) atunci

$$\begin{aligned}&h^0(M)=1, h^2(M)=0,\\&h^1(M(-C_0))=h^2(M(-C_0))=0,\\&h^1(M(-F))=h^2(M(-F))=0,\\&h^0(M(-C_0-F))=h^1(M(-C_0-F))=0, h^2(M(-C_0-F))=1.\end{aligned} \tag{58}$$

Cum $c_1(M)=-C_0-(e+1)F, c_2(M)=0$, deducem că

$$\begin{array}{lclll} c_1(M(-C_0)) &=& -3C_0-(e+1)F, & c_2(M(-C_0)) &=\ 1-e,\\ c_1(M(-F)) &=& -C_0-(e+3)F, & c_2(M(-F)) &=\ 1,\\ c_1(M(-C_0-F)) &=& -3C_0-(e+3)F, & c_2(M(-C_0-F)) &=\ 4-e.\end{array}$$

Aplicând Riemann-Roch găsim

$$\begin{array}{ll}\chi(M)=1, & \chi(M(-C_0))=0,\\ \chi(M(-C_0-F))=1, & \chi(M(-F))=0.\end{array} \tag{59}$$

Lema 3.16 aplicată fibratului $M(-C_0)$ şi divizorului $D=F$ conduce la

$$h^0(M(-C_0-F))=0. \tag{60}$$

Cum $c_1(M) = -C_0 - (e+1)F$ rezultă că $\det(M) = \mathcal{O}_X(-C_0 - (e+1)F)$, de unde $M^* \cong M(C_0 + (e+1)F)$. Atunci, din ipoteză, dualitate Serre şi relaţia (60) rezultă

$$\begin{aligned} &h^2(M) = h^0(M^*(K)) = h^0(M(-C_0 - F)) = 0,\\ &h^2(M(-C_0)) = h^0(M^*(K + C_0)) = h^0(M(-F)) = 0,\\ &h^2(M(-F)) = h^0(M^*(K + F)) = h^0(M(-C_0)) = 0,\\ &h^1(M(-C_0 - F)) = h^1(M^*(K + C_0 + F)) = h^1(M) = 0. \end{aligned} \tag{61}$$

Din (57),(59), (60) şi (61) se obţin şi celelalte patru relaţii din (58).

Relaţiile (39), (40) şi (58) dau termenii $E_1^{p,q}$ ai şirului spectral Beilinson:

$$\begin{aligned} E_1^{0,0} &\cong \mathcal{O}_X,\\ E_1^{-2,2} &\cong \mathcal{O}_X(-C_0 - (e+1)F),\\ E_1^{p,q} &= 0, \forall (p,q) \notin \{(0,0), (-2,2)\}. \end{aligned}$$

În figura 7 este reprezentată forma şirului spectral Beilinson la primul nivel.

Cum $E_\infty^{p,q} \Rightarrow M$ pentru $p + q = 0$ şi $E_\infty^{p,q} = E_1^{p,q}$ deducem că M se găseşte în extinderea

$$0 \to \mathcal{O}_X \to M \to \mathcal{O}_X(-C_0 - (e+1)F) \to 0,$$

care scindează deoarece

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_X(-C_0 - (e+1)F), \mathcal{O}_X) \cong H^1(X, \mathcal{O}_X(C_0 + (e+1)F)),$$

iar din lema 3.17 avem

$$H^1(X, \mathcal{O}_X(C_0 + (e+1)F)) \cong H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-e-3) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-3)) = 0.$$

În concluzie, $M \cong \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X(-C_0 - (e+1)F)$.

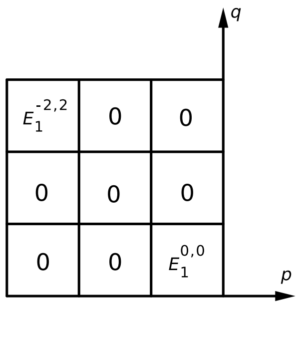

FIGURA 7. Şirul spectral Beilinson la nivel de E_1

$\square$

Corolarul 3.27. *Fie $X = \Sigma_e$ o suprafaţă Hirzebruch şi M un fibrat vectorial de rang doi pe X, având clasele Chern $c_1(M) = -C_0 - (e+1)F, c_2(M) = 0$ şi care îndeplineşte condiţiile $h^0(M(-C_0)) = h^0(M(-F)) = h^1(M) = 0$. Atunci M este instabil faţă de orice fibrat amplu pe X.*

DEMONSTRAŢIE. Se aplică propoziţia 3.26 şi corolarul 1.29. □

Observaţia 26. Menţionăm că acestea sunt singurele cazuri care pot fi obţinute din analiza primului nivel al şirului spectral Beilinson. Pentru a obţine alte situaţii se impune o analiză mai fină, implicând în aceasta şi diferenţialele şirului spectral.

Reunind rezultatele obţinute în propoziţiile 3.18, 3.20, 3.22, 3.24, 3.26, putem enunţa următoarea teoremă:

Teorema 3.28. *Fie $X = \Sigma_e$ o suprafaţă Hirzebruch şi M un fibrat vectorial de rang doi pe X. Atunci*

(i) $M \cong \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X$ *dacă şi numai dacă*
$c_1(M) = 0, c_2(M) = 0$ *şi* $h^0(M(-C_0)) = h^0(M(-F)) = h^1(M) = 0.$

(ii) $M \cong \mathcal{O}_X(-F) \oplus \mathcal{O}_X(-C_0 - eF)$ *dacă şi numai dacă*
$c_1(M) = -C_0 - (e+1)F, c_2(M) = 1$ *şi* $h^0(M) = 0.$

(iii) $M \cong \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X(-F)$ *dacă şi numai dacă*
$c_1(M) = -F, c_2(M) = 0$ *şi* $h^0(M(-C_0)) = h^0(M(-F)) = h^1(M) = 0.$

(iv) $M \cong \mathcal{O}_X(-F) \oplus \mathcal{O}_X(-C_0 - (e+1)F)$ *dacă şi numai dacă*
$c_1(M) = -C_0 - (e+2)F, c_2(M) = 1$ *şi*
$h^0(M) = h^1(M(-C_0 - F)) = h^2(M(-F)) = 0.$

(v) $M \cong \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X(-C_0 - (e+1)F)$ *dacă şi numai dacă*
$c_1(M) = -C_0 - (e+1)F, c_2(M) = 0$ *şi*
$h^0(M(-C_0)) = h^0(M(-F)) = h^1(M) = 0.$

4. Fibrate vectoriale cu clase canonice

În această secţiune vom studia câteva proprietăţi ale fibratelor vectoriale de rang doi pe suprafeţe Hirzebruch, având clasele Chern egale cu ale fibratului cotangent Ω^1_X. Vom studia, pentru început, forma şirului spectral Beilinson pentru Ω^1_X şi vom arăta că Ω^1_X reprezintă coomologia unei monade. Vom determina apoi o condiţie necesară ca un fibrat cu clasele Chern canonice să reprezinte coomologia unei monade de acelaşi tip cu cea determinată de Ω^1_X, iar spaţiul fibratelor ce îndeplinesc această condiţie necesară îl vom nota cu $\mathcal{V}(\Omega^1_X)$. Vom găsi apoi care dintre monadele implicate în această corespondenţă conduc la fibrate izomorfe. Menţionăm că tehnicile cu monade sunt frecvent folosite pentru descrierea diverselor spaţii de moduli de fibrate vectoriale (vezi, spre exemplu, [Ho77], [BH78] sau [OSS80]). În final vom demonstra că spaţiul $\mathcal{V}(\Omega^1_X)$ este ireductibil, arătând că orice fibrat al său este prioritar.

Vom defini, mai întâi noţiunile de fibrat cu clase canonice şi monadă.

Definiţia 3.29. *Să considerăm $X = \Sigma_e$ o suprafaţă Hirzebruch şi V un fibrat vectorial de rang 2 pe X. Vom spune că V este* fibrat cu clase canonice *pe X dacă are clasele Chern egale cu ale fibratului cotangent, adică*

$$\begin{aligned} c_1(V) &= c_1(\Omega^1_X) = K_X = -2C_0 - (e+2)F, \\ c_2(V) &= c_2(\Omega^1_X) = 4. \end{aligned}$$

Monadele au fost introduse pentru prima dată de Horrocks, arătând că orice fibrat vectorial pe $\mathbb{P}^3$ reprezintă coomologia unei monade de tipul

$$0 \to \oplus_i \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(a_i) \to \oplus_j \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(b_j) \to \oplus_k \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(c_k) \to 0.$$

Au apărut în diferite contexte în geometria algebrică şi sunt foarte utile atunci când se doreşte construirea unor fibrate vectoriale cu anumiţi invarianţi precum rang, determinant sau clase Chern.

Definiţia 3.30. *Fie X o varietate compactă complexă.*
(a) Numim monadă *pe X un complex*

$$0 \to A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \to 0$$

de fibrate vectoriale, care este exact în A şi C, iar $\mathrm{Im}(a)$ este subfibrat al lui B.
(b) Fibratul vectorial

$$V = \ker(b)/\mathrm{Im}(a)$$

se numeşte coomologia monadei.
(c) Prin morfism de monade *se înţelege un morfism de complexe.*

De asemenea vom avea nevoie de extinderea naturală a lui Ω^1_X

(62) $$0 \to \mathcal{O}_X(-2F) \to \Omega^1_X \to \mathcal{O}_X(-2C_0 - eF) \to 0.$$

Observaţia 27. Extinderea (62) coincide cu extinderea (31) din secţiunea 2.1.1. Într-adevăr, din extinderea (62) deducem că $\Omega^1_{X/F} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$, deci $d = 0$ şi $d' = -2$. Prin aplicarea lui π_* aceleiaşi extinderi şi ţinând cont că $\pi_*\mathcal{O}_X(-2F) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$, respectiv $\pi_*\mathcal{O}_X(-2C_0 - eF) = 0$, obţinem $\pi_*\Omega^1_X \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$. Atunci $r = \deg \pi_*\Omega^1_X = -2$, iar $r' = -e$ din calculul claselor Chern.

Reamintim din secţiunea 1.4 că dacă V este fibrat vectorial de rang arbitrar pe X obţinem un şir spectral convergent la V:

(63) $$E_1^{p,q} \Rightarrow \begin{cases} V & \text{dacă } p+q=0 \\ 0 & \text{altfel,} \end{cases}$$

unde $E_1^{p,q} = 0$ dacă $p \notin \{-2,-1,0\}$ sau $q \notin \{0,1,2\}$, iar pentru orice $q \in \{0,1,2\}$, ceilalţi termeni ai şirului spectral sunt daţi prin:

$$(64)\qquad E_1^{0,q} \cong H^q(V) \otimes \mathcal{O}_X,$$

$$(65)\qquad E_1^{-2,q} \cong H^q(V(-C_0-F)) \otimes \mathcal{O}_X(-C_0-(e+1)F),$$

$$(66)\qquad H^q(V(-F)) \otimes \mathcal{O}_X(-F) \to E_1^{-1,q} \to H^q(V(-C_0)) \otimes \mathcal{O}_X(-C_0-eF).$$

Menţionăm că, pentru simplificarea scrierii, notăm cu $H^i(\mathcal{F}) := H^i(X, \mathcal{F})$ pentru coomologia unui fascicul $\mathcal{F}$ pe suprafaţa Hirzebruch X. Dacă va fi vorba de coomologia pe un alt spaţiu, acesta va fi specificat.

Pentru determinarea termenilor şirului spectral în cazul $V := \Omega_X^1$ vom ţine cont că $V \cong V^* \otimes \mathcal{K}_X$ şi vom utiliza extinderea (62). Cum

$$H^0(\mathcal{O}_X(-2F)) = H^0(\mathcal{O}_X(-2C_0-eF)) = 0,$$

deducem din (62) că $H^0(V) = 0$, iar apoi

$$H^2(V) \cong H^0(V^* \otimes \mathcal{K}_X) \cong H^0(V) = 0.$$

Din (64) rezultă $E_1^{0,0} = E_1^{0,2} = 0$. Prin tensorarea cu $\mathcal{O}_X(-C_0-F)$ a şirului exact (62) obţinem

$$0 \to \mathcal{O}_X(-C_0-3F) \to V(-C_0-F) \to \mathcal{O}_X(-3C_0-(e+1)F) \to 0.$$

Cum $H^0(\mathcal{O}_X(-C_0-3F)) = H^0(\mathcal{O}_X(-3C_0-(e+1)F)) = 0$, deducem că $H^0(V(-C_0-F)) = 0$. Folosind (65) găsim $E_1^{-2,0} = 0$. Pe de altă parte, $H^2(V(-C_0-F)) = H^0(V^* \otimes \mathcal{K}_X \otimes \mathcal{O}_X(C_0+F)) = H^0(V(C_0+F))$. Tensorând în (62) cu $\mathcal{O}_X(C_0+F)$ obţinem şirul exact

$$0 \to \mathcal{O}_X(C_0-F) \to V(C_0+F) \to \mathcal{O}_X(-C_0-(e-1)F) \to 0.$$

Dar $H^0(\mathcal{O}_X(-C_0-(e-1)F)) = 0 = H^0(\mathcal{O}_X(C_0-F))$ (ultima egalitate are loc deoarece $(C_0-F)^2 = -e-2 < -e$), de unde $H^0(V(C_0+F)) = 0$. Atunci $H^2(V(-C_0-F)) = 0$, deci $E_1^{-2,2} = 0$. Pentru calculul termenilor $E_1^{-1,0}$ şi $E_1^{-1,2}$ ţinem cont că se află în şirurile exacte (conform (66))

$$H^0(V(-F)) \otimes \mathcal{O}_X(-F) \to E_1^{-1,0} \to H^0(V(-C_0)) \otimes \mathcal{O}_X(-C_0-eF),$$

respectiv

$$H^2(V(-F)) \otimes \mathcal{O}_X(-F) \to E_1^{-1,2} \to H^2(V(-C_0)) \otimes \mathcal{O}_X(-C_0-eF).$$

Se arată la fel ca în cazurile tratate că

$$H^0(V(-F)) = H^0(V(-C_0)) = H^2(V(-F)) = H^2(V(-C_0)) = 0,$$

de unde rezultă că $E_1^{-1,0} = E_1^{-1,2} = 0$. Ca o scurtă recapitulare, am obţinut până acum

$$E_1^{p,0} = E_1^{p,2} = 0, \forall p \in \{-2,-1,0\}.$$

Pentru calculul lui $E_1^{0,1} \cong H^1(V) \otimes \mathcal{O}_X$ ţinem cont că $h^1(V) = h^1(\Omega_X^1) = h^{1,1}(X)$, $h^{2,0}(X) = h^{0,2}(X) = 0$ şi $h^{2,0}(X) + h^{1,1}(X) + h^{0,2}(X) = b_2(X) = 2$. Rezultă $E_1^{0,1} \cong \mathcal{O}_X^{\oplus 2}$.
Pentru calculul lui $E_1^{-2,1} \cong H^1(V(-C_0 - F)) \otimes \mathcal{O}_X(-C_0 - (e+1)F)$ ţinem cont de faptul că $h^0(V(-C_0 - F)) = h^2(V(-C_0 - F)) = 0$ şi $\chi(V(-C_0 - F)) = -e$ (prin calcul). Obţinem $E_1^{-2,1} \cong \mathcal{O}_X(-C_0 - (e+1)F)^{\oplus e}$.
Pentru calculul lui $E_1^{-1,1}$ ţinem cont de (66) şi de faptul că $H^0(V(-C_0)) = H^2(V(-F)) = 0$. Deducem că $E_1^{-1,1}$ se găseşte în şirul exact
(67)
$$0 \to H^1(V(-F)) \otimes \mathcal{O}_X(-F) \to E_1^{-1,1} \to H^1(V(-C_0)) \otimes \mathcal{O}_X(-C_0 - eF) \to 0.$$

Prin calcul obţinem $\chi(V(-F)) = -2$ şi $\chi(V(-C_0)) = -e - 2$. Deoarece $h^0(V(-F)) = h^0(V(-C_0)) = h^2(V(-F)) = h^2(V(-C_0)) = 0$, rezultă $h^1(V(-F)) = 2$ şi $h^1(V(-C_0)) = e + 2$. Pe de altă parte
$$\begin{aligned} &\mathrm{Ext}^1\big(H^1(V(-C_0)) \otimes \mathcal{O}_X(-C_0 - eF), H^1(V(-F)) \otimes \mathcal{O}_X(-F)\big) = \\ &= H^1(V(-C_0)) \otimes H^1(V(-F)) \otimes \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_X(-C_0 - eF), \mathcal{O}_X(-F)). \end{aligned}$$
Cum $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_X(-C_0 - eF), \mathcal{O}_X(-F)) \cong H^1(\mathcal{O}_X(C_0 + (e-1)F))$ şi aplicând propoziţia 3.17 pentru $a = 1$ şi $b = e - 1$, deducem că
$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_X(-C_0 - eF), \mathcal{O}_X(-F)) = 0.$$
Înseamnă că şirul (67) este scindat, deci
$$E_1^{-1,1} \cong \mathcal{O}_X(-F)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}_X(-C_0 - eF)^{\oplus(e+2)}.$$
Drept urmare, diagrama la nivel de E_1 are forma celei din figura 8, iar dife-

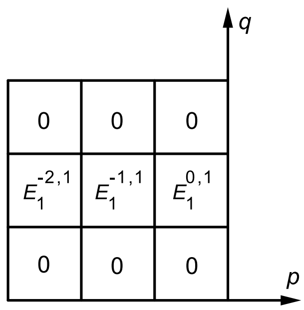

FIGURA 8. Şirul spectral la nivel de E_1

renţialele $d_1^{p,q} : E_1^{p,q} \to E_1^{p+1,q}$ dau complexul
$$E_1^{-2,1} \xrightarrow{a} E_1^{-1,1} \xrightarrow{b} E_1^{0,1}.$$
Fie $K = \ker a$, $L = \ker b/\mathrm{Im}\, a$ şi $M = \mathrm{coker}\, b$. Diagrama la nivel de E_2 este prezentată în figura 9.

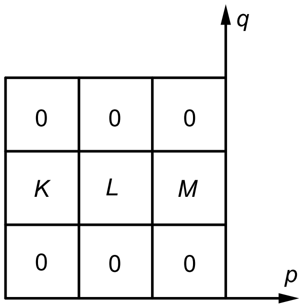

FIGURA 9. Şirul spectral la nivel de E_2

Diferenţialele $d_2^{p,\,q} : E_2^{p,\,q} \to E_2^{p+2,\,q-1}$ sunt toate nule şi atunci

$$E_\infty^{-2,\,1} = K,\ E_\infty^{-1,\,1} = L,\ E_\infty^{0,\,1} = M.$$

Din (63) deducem că

$$K = M = 0 \quad \text{şi} \quad L = V.$$

Acest fapt nu semnifică altceva decât că

$$0 \to E_1^{-2,\,1} \xrightarrow{a} E_1^{-1,\,1} \xrightarrow{b} E_1^{0,\,1} \to 0$$

este o monadă, a cărei coomologie este V.

Am obţinut astfel următorul rezultat

Propoziţia 3.31. Ω_X^1 *reprezintă coomologia unei monade*

$$(M) \qquad 0 \to A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \to 0,$$

unde $A = \mathcal{O}_X(-C_0 - (e+1)F)^{\oplus e}$, $B = \mathcal{O}_X(-F)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}_X(-C_0 - eF)^{\oplus (e+2)}$, $C = \mathcal{O}_X^{\oplus 2}$.

Notăm cu $\mathcal{M}(\Omega_X^1)$ mulţimea monadelor de tipul celei din propoziţia 3.31. Condiţia necesară ca un fibrat vectorial V de rang doi pe X, cu clase Chern canonice să reprezinte coomologia unei monade din $\mathcal{M}(\Omega_X^1)$ este exprimată în propoziţia următoare:

Propoziţia 3.32. *Fie V un fibrat de rang doi, cu clase canonice pe X, astfel încât $H^0(V(C_0 + F)) = 0$. Atunci V reprezintă coomologia unei monade din $\mathcal{M}(\Omega_X^1)$.*

DEMONSTRAŢIE. Pentru a obţine concluzia e suficient să arătăm că termenii şirului spectral $E_1^{p,q}$ pentru fibratul V sunt aceeaşi cu cei găsiţi în demonstraţia propoziţiei 3.31 pentru Ω_X^1. Acest lucru este echivalent cu a demonstra următoarele anulări:

$$\begin{aligned}
&H^0(V) = H^2(V) = 0,\\
&H^0(V(-C_0 - F)) = H^2(V(-C_0 - F)) = 0,\\
&H^0(V(-C_0)) = H^2(V(-C_0)) = 0,\\
&H^0(V(-F)) = H^2(V(-F)) = 0,\\
&H^0(V(C_0 + F)) = 0.
\end{aligned}$$

Vom arăta că ipoteza $H^0(V(C_0 + F)) = 0$ le implică pe toate celelalte. Să observăm pentru început că $V \cong V^*(K_X)$.

Din şirul exact $0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X(C_0 + F) \to \dots$, prin tensorare cu V şi trecere la şirul lung de coomologie obţinem $0 \to H^0(V) \to H^0(V(C_0+F)) \to$, care conduce la $H^0(V) = 0$.

Din dualitatea Serre,

$$H^2(V) \cong H^0(V^*(K_X)) \cong H^0(V) = 0.$$

Din şirul exact

$$0 \to \mathcal{O}_X(-C_0 - F) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{C_0+F} \to 0,$$

prin tensorare cu V, trecere la şirul lung de coomologie şi $H^0(V) = 0$, deducem că $H^0(V(-C_0 - F)) = 0$.

Apoi, $H^2(V(-C_0 - F)) \cong H^0(V^*(K_X + C_0 + F)) \cong H^0(V(C_0 + F)) = 0$.

Din şirul exact $0 \to \mathcal{O}_X(-C_0) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{C_0} \to 0$, prin tensorare cu V şi trecere la şirul lung de coomologie, deducem că $H^0(V(-C_0)) = 0$. Analog $H^0(V(-F)) = 0$.

Din şirul exact $0 \to \mathcal{O}_X(-F) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_F \to 0$, prin tensorare cu $V(-C_0)$ şi trecere la şirul lung de coomologie obţinem şirul exact

$$\to H^2(V(-C_0 - F)) \to H^2(V(-C_0)) \to H^2(V(-C_0)_{|F}) \to .$$

Cum $H^2(V(-C_0 - F)) = H^2(V(-C_0)_{|F}) = 0$, deducem $H^2(V(-C_0))) = 0$. Analog se arată că $H^2(V(-F))) = 0$, ceea ce încheie demonstraţia.

$\square$

Pentru a stabili care dintre monadele din $\mathcal{M}(\Omega^1_X)$ conduc la fibrate izomorfe avem nevoie de următoarea lemă, a cărei demonstraţie poate fi găsită în [OSS80].

Lema 3.33. *Fie $E = H(M), E' = H(M')$ fibrate ce reprezintă coomologia a două monade*

$$\begin{aligned}
(M) \quad &: \quad 0 \to A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \to 0\\
(M') \quad &: \quad 0 \to A' \xrightarrow{a'} B' \xrightarrow{b'} C' \to 0
\end{aligned}$$

peste o varietate complexă X. Aplicaţia

$$h : \mathrm{Hom}(M, M') \to \mathrm{Hom}(E, E')$$

care asociază fiecărui omomorfism de monade omomorfismul indus între coomologiile lor este bijectivă dacă următoarele ipoteze sunt satisfăcute:

$$\begin{array}{l}\mathrm{Hom}(B, A') = \mathrm{Hom}(C, B') = 0,\\ H^1(X, B^* \otimes A') = H^1(X, C^* \otimes B') = 0,\\ H^1(X, C^* \otimes A') = H^2(X, C^* \otimes A') = 0.\end{array}$$

Vom arăta că pentru monadele din $\mathcal{M}(\Omega^1_X)$ sunt îndeplinite ipotezele lemei. Considerăm două monade (M) şi (M') din $\mathcal{M}(\Omega^1_X)$

$$\begin{array}{lcl}(M) & : & 0 \to A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \to 0\\ (M') & : & 0 \to A \xrightarrow{a'} B \xrightarrow{b'} C \to 0,\end{array}$$

unde

$$\begin{array}{l}A = \mathcal{O}_X(-C_0 - (e+1)F)^{\oplus e},\\ B = \mathcal{O}_X(-F)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}_X(-C_0 - eF)^{\oplus (e+2)},\\ C = \mathcal{O}_X^{\oplus 2}.\end{array}$$

Cum

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X(-F), \mathcal{O}_X(-C_0 - (e+1)F)) = H^0(\mathcal{O}_X(-C_0 - eF)) = 0,$$

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X(-C_0 - eF), \mathcal{O}_X(-C_0 - (e+1)F)) = H^0(\mathcal{O}_X(-F)) = 0,$$

respectiv

$$\begin{array}{l}\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(-F)) = H^0(\mathcal{O}_X(-F)) = 0,\\ \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(-C_0 - eF)) = H^0(\mathcal{O}_X(-C_0 - eF)) = 0,\end{array}$$

deducem că

$$\mathrm{Hom}(B, A) = \mathrm{Hom}(C, B) = 0.$$

În fiecare dintre fibratele $B^* \otimes A$, respectiv $C^* \otimes B$, apar exact două componente distincte (aceleaşi în ambele situaţii): $\mathcal{O}_X(-C_0 - eF)$ şi $\mathcal{O}_X(-F)$. Cum

$$\begin{array}{l}H^0(\mathcal{O}_X(-C_0 - eF)) = H^0(\mathcal{O}_X(-F)) = 0,\\ H^2(\mathcal{O}_X(-C_0 - eF)) = H^0(\mathcal{O}_X(-C_0 - 2F)) = 0,\\ H^2(\mathcal{O}_X(-F)) = H^0(\mathcal{O}_X(-2C_0 - (e+1)F)) = 0,\\ \chi(\mathcal{O}_X(-C_0 - eF)) = \frac{1}{2}(-C_0 - eF)(C_0 + 2F) + 1 = 0,\\ \chi(\mathcal{O}_X(-F)) = \frac{1}{2}(-F)(2C_0 + (e+1)F) + 1 = 0,\end{array}$$

obţinem că

$$H^1(X, B^* \otimes A) = H^1(X, C^* \otimes B) = 0.$$

Fibratul $C^* \otimes A$ are o componentă distinctă: $\mathcal{O}_X(-C_0 - (e+1)F)$. Cum

$$\begin{array}{l}H^0(\mathcal{O}_X(-C_0 - (e+1)F)) = 0,\\ H^2(\mathcal{O}_X(-C_0 - (e+1)F)) = H^0(\mathcal{O}_X(-C_0 - F)) = 0,\\ \chi(\mathcal{O}_X(-C_0 - (e+1)F)) = \frac{1}{2}(-C_0 - (e+1)F)(C_0 + F) + 1 = 0,\end{array}$$

găsim că

$$H^1(X, C^* \otimes A) = H^2(X, C^* \otimes A) = 0,$$

ceea ce încheie verificarea ipotezelor lemei. În concluzie, avem

Propoziţia 3.34. *Aplicaţia*

$$h : \mathrm{Hom}(M, M') \to \mathrm{Hom}(E, E')$$

care asociază fiecărui omomorfism de monade din $\mathcal{M}(\Omega^1_X)$ omomorfismul indus între coomologiile lor este bijectivă.

Notăm cu $\mathcal{V}(\Omega^1_X)$ spaţiul fibratelor vectoriale V de rang doi pe suprafaţa Hirzebruch X, cu clase canonice şi având proprietatea $H^0(V(C_0 + F)) = 0$. Faptul că acest spaţiu este nevid este surprins în următoarea propoziţie:

Propoziţia 3.35. $\Omega^1_X \in \mathcal{V}(\Omega^1_X)$. *În particular,* $\mathcal{V}(\Omega^1_X) \neq \emptyset$.

Demonstraţie. Nu avem de arătat decât că $H^0(X, \Omega^1_X(C_0 + F)) = 0$. Pentru aceasta utilizăm şirul exact (62)

$$0 \to \mathcal{O}_X(-2F) \to \Omega^1_X \to \mathcal{O}_X(-2C_0 - eF) \to 0.$$

Prin tensorare cu $\mathcal{O}_X(C_0 + F)$, trecere la şirul lung de coomologie şi faptul că

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(C_0 - F)) = 0 = H^0(X, \mathcal{O}_X(-C_0 - (e-1)F))$$

(prima egalitate având loc deoarece $(C_0 - F)^2 = -e - 2 < -e$), deducem că

$$H^0(X, \Omega^1_X(C_0 + F)) = 0.$$

□

De asemenea, vom arăta că $\mathcal{V}(\Omega^1_X)$ este spaţiu ireductibil demonstrând că orice fibrat al său este prioritar. Ireductibilitatea lui $\mathcal{V}(\Omega^1_X)$ va rezulta imediat dintr-un rezultat al lui Walter, pe care îl vom enunţa în cele ce urmează şi a cărui demonstraţie poate fi găsită în [Wa93]. Reamintim întâi noţiunea de fibrat prioritar:

Definiţia 3.36. *Un fibrat V se numeşte* prioritar *dacă* $\mathrm{Ext}^2(V, V(-F)) = 0$.

Rezultatul lui Walter este următorul:

Propoziţia 3.37. *Fie $\pi : S \to C$ o suprafaţă biraţională riglată. Presupunem că $r \geq 2$, $c_1 \in NS(S)$ şi $c_2 \in \mathbb{Z}$ sunt daţi. Atunci stack-ul* $\mathrm{Prior}_S(r, c_1, c_2)$ *al fasciculelor pe S, prioritare, de rang r şi clase Chern c_1, c_2 este neted şi ireductibil.*

Cu ajutorul acestei propoziţii putem demonstra teorema:

Teorema 3.38. *Spaţiul $\mathcal{V}(\Omega^1_X)$ al fibratelor vectoriale V de rang doi pe suprafaţa Hirzebruch X, cu clase canonice şi având proprietatea $H^0(V(C_0 + F)) = 0$ este ireductibil.*

DEMONSTRAŢIE. Vom arăta că orice fibrat din $\mathcal{V}(\Omega^1_X)$ este prioritar. Concluzia rezultă apoi din propoziţia 3.37. Din secţiunea 2.1.1 rezultă existenţa invarianţilor numerici d şi r, precum şi $\zeta \subset X$ local intersecţie completă 0-dimensională astfel încât V se găseşte în extinderea

$$0 \to L_1 \to V \to L_2 \otimes \mathcal{I}_\zeta \to 0, \tag{68}$$

unde $L_1 = \mathcal{O}_X(dC_0 + rF)$, $L_2 = \mathcal{O}_X(-(d+2)C_0 - (e+2+r)F)$ şi $d \geq -(d+2)$, adică $d \geq -1$. Pentru ζ avem şirul exact

$$0 \to \mathcal{I}_\zeta \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_\zeta \to 0. \tag{69}$$

Din (68) obţinem, pe de o parte, şirul lung al Ext-urilor

$$\to \mathrm{Ext}^2(L_2 \otimes \mathcal{I}_\zeta, V(-F)) \to \mathrm{Ext}^2(V, V(-F)) \to \mathrm{Ext}^2(L_1, V(-F)) \to, \tag{70}$$

iar prin tensorare cu $\mathcal{O}_X(-F)$ şirul exact

$$0 \to L_1(-F) \to V(-F) \to L_2(-F) \otimes \mathcal{I}_\zeta \to 0,$$

care conduce la şirul exact al Ext-urilor

$$\to \mathrm{Ext}^2(L_1, L_1(-F)) \to \mathrm{Ext}^2(L_1, V(-F)) \to \mathrm{Ext}^2(L_1, L_2(-F) \otimes \mathcal{I}_\zeta) \to . \tag{71}$$

Cum

$$\mathrm{Ext}^2(L_1, L_1(-F)) \cong H^2(X, \mathcal{O}_X(-F)) \cong H^0(X, \mathcal{O}_X(-2C_0 - (e+1)F)) = 0$$

găsim că

$$\mathrm{Ext}^2(L_1, L_1(-F)) = 0. \tag{72}$$

Din (69) prin tensorare cu $L_2(-F)$ obţinem şirul scurt exact

$$0 \to L_2(-F) \otimes \mathcal{I}_\zeta \to L_2(-F) \to \mathcal{O}_\zeta \to 0,$$

care conduce la şirul lung al Ext-urilor

$$\to \mathrm{Ext}^1(L_1, \mathcal{O}_\zeta) \to \mathrm{Ext}^2(L_1, L_2(-F) \otimes \mathcal{I}_\zeta) \to \mathrm{Ext}^2(L_1, L_2(-F)) \to . \tag{73}$$

Dar

$$\mathrm{Ext}^1(L_1, \mathcal{O}_\zeta) \cong H^1(X, \mathcal{O}_\zeta) = 0$$

şi

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^2(L_1, L_2(-F)) &\cong H^2(X, L_1^{-1} \otimes L_2(-F)) \cong \\ &\cong H^0(X, \mathcal{O}_X(2dC_0 + (2r+1)F)) = 0, \end{aligned}$$

deoarece $2r + 1 < 0$ ($r \leq -2$). Într-adevăr, prin tensorare în (68) cu $\mathcal{O}_X(C_0 + F)$, trecere la şirul lung de coomologie şi $H^0(X, V(C_0 + F)) = 0$ obţinem $H^0(X, \mathcal{O}_X((d+1)C_0 + (r+1)F)) = 0$. Cum $d + 1 \geq 0$ rezultă $r + 1 < 0$. Din (73) rezultă $\mathrm{Ext}^2(L_1, L_2(-F) \otimes \mathcal{I}_\zeta) = 0$ şi combinat cu (72) şi (71) deducem că

$$\mathrm{Ext}^2(L_1, V(-F)) = 0. \tag{74}$$

Din (69) prin tensorare cu L_2 obţinem şirul scurt exact

$$0 \to L_2 \otimes \mathcal{I}_\zeta \to L_2 \to \mathcal{O}_\zeta \to 0,$$

care conduce la şirul lung al Ext-urilor

$$\to \mathrm{Ext}^2(L_2, V(-F)) \to \mathrm{Ext}^2(L_2 \otimes \mathcal{I}_\zeta, V(-F)) \to 0, \tag{75}$$

pentru care ştim că

$$\mathrm{Ext}^2(L_2, V(-F)) \cong H^2(L_2^{-1}(-F) \otimes V). \tag{76}$$

Din (68) prin tensorare cu $L_2^{-1}(-F)$ obţinem şirul scurt exact

$$0 \to L_1 \otimes L_2^{-1}(-F) \to V \otimes L_2^{-1}(-F) \to \mathcal{I}_\zeta(-F) \to 0,$$

care conduce la şirul lung exact de coomologie

$$\to H^2(X, L_1 \otimes L_2^{-1}(-F)) \to H^2(X, V \otimes L_2^{-1}(-F)) \to H^2(X, \mathcal{I}_\zeta(-F)) \to . \tag{77}$$

Dar

$$H^2(X, L_1 \otimes L_2^{-1}(-F)) \cong H^0(X, \mathcal{O}_X(-(2d+4)C_0 - (2e+r+3)F)) = 0, \tag{78}$$

iar din (69) prin tensorare cu $\mathcal{O}_X(-F)$ rezultă şirul scurt exact

$$0 \to \mathcal{I}_\zeta(-F) \to \mathcal{O}_X(-F) \to \mathcal{O}_\zeta \to 0,$$

care conduce la şirul lung de coomologie

$$\to H^1(X, \mathcal{O}_\zeta) \to H^2(X, \mathcal{I}_\zeta(-F)) \to H^2(X, \mathcal{O}_X(-F)) \to .$$

Cum $H^1(X, \mathcal{O}_\zeta) = 0$ şi $H^2(X, \mathcal{O}_X(-F)) \cong H^0(X, \mathcal{O}_X(-2C_0 - (e+1)F)) = 0$ deducem

$$H^2(X, \mathcal{I}_\zeta(-F)) = 0. \tag{79}$$

Ţinând cont de (77), (78), (79) deducem că $H^2(L_2^{-1}(-F) \otimes V) = 0$, care împreună cu (76) conduce la $\mathrm{Ext}^2(L_2, V(-F)) = 0$. Combinat cu (75) găsim

$$\mathrm{Ext}^2(L_2 \otimes \mathcal{I}_\zeta, V(-F)) = 0. \tag{80}$$

Din (70), (74), (80) obţinem $\mathrm{Ext}^2(V, V(-F)) = 0$, adică V este prioritar.

□

Corolarul 3.39. *Fibratul cotangent Ω_X^1 este prioritar.*

DEMONSTRAŢIE. Se obţine imediat din propoziţia 3.35 şi teorema 3.38.

□

Observaţia 28. Ştiind că spaţiul $\mathcal{V}(\Omega_X^1)$ este ireductibil şi prin prisma rezultatului dat de propoziţia 3.34, ne-am putea pune întrebări asupra structurii de varietate sau a dimensiunii sale, constituind astfel direcţii noi de cercetare.

Glosar

Bibliografie

[AB96] M. Aprodu, V. Brînzănescu, *Fibrés vectoriels de rang 2 sur les surfaces réglées*, C. R. Acad. Sci., Paris Sér. I, Math. **323**, no. 6, 627-630, 1996.

[AB97] M. Aprodu, V. Brînzănescu, *Stable rank-2 vector bundles over ruled surfaces*, C. R. Acad. Sci., Paris Sér. I, Math. **325**, no. 3, 295-300, 1997.

[AB09] M. Aprodu, V. Brînzănescu, *Beilinson type spectral sequences on Scrolls*, Moduli spaces and vector bundles, London Math. Soc. Lecture Note Series, **359**, pp. 426-436, Cambridge, 2009.

[AM11] M. Aprodu, M. Marchitan, *A note on vector bundles on Hirzebruch surfaces*, C. R. Acad. Sci., Paris Sér. I, Math. **349**, no. 11-12, 687-690, 2011.

[At57] M.F. Atiyah, *Complex analytic connections in fibre bundles*, Trans. Amer. Math. Soc., **85**, pp. 181-207, 1957.

[BH78] W. Barth, K. Hulek, *Monads and moduli of vector bundles*, Manuscripta Math. **25**, pp. 323-347, 1978.

[BPV84] W. Barth, C. Peters, A. Van de Ven, *Compact complex surfaces*, Berlin, Heidelberg, New York, Springer Verlag, 1984.

[Be78] A. Beilinson, *Coherent sheaves on $\mathbb{P}^N$ and problems of linear algebra*, Funkts. Analysis, **12**, pp. 214-216, 1978.

[Bog76] F. Bogomolov, *Classification of surfaces of class VII_0 with $b_2 = 0$*, Math. USSR Izv. **10**, pp. 255-269, 1976.

[Bri05] M. Brion, *Lectures on geometry of flag varieties*, in: "Topics in Cohomological Studies of Algebraic Varieties", Trends in Mathematics, Birkhäuser, pp. 33-85, 2005.

[Br91] V. Brînzănescu, *Algebraic 2-vector bundles on ruled surfaces*, Ann. Univ. Ferrara-Sez VII, Sc. Mat., XXVII, 55-64, 1991.

[Br96] V. Brînzănescu, *Holomorphic vector bundles over compact complex surfaces*, Lecture Notes in Math., **1624**, Berlin, Heidelberg, New York, Springer Verlag, 1996.

[Br01] V. Brînzănescu, *Double covers and vector bundles*, An. Şt. Univ. Ovidius, Constanţa, vol. 9(2), 21-26, 2001.

[BMS01] V. Brînzănescu, M. Marchitan, R. Slobodeanu, *Flat 2-vector bundles over complex manifolds*, Math. Reports, **3**(**53**), 2, pp. 151-157, 2001.

[BS82] V. Brînzănescu, M. Stoia, *Topologically trivial algebraic 2-vector bundles on ruled surfaces II* Algebraic geometry, Bucharest 1982 (Bucharest, 1982), 34-46, Lecture Notes in Math. **1056**, Springer, Berlin, 1984.

[BS84] V. Brînzănescu, M. Stoia, *Topologically trivial algebraic 2-vector bundles on ruled surfaces I*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 29, no. 8, 661-673, 1984.

[Br83] J.E. Brosius, *Rank-2 vector bundles on a ruled surface I*, Math. Ann. **265**, no. 2, 155-168, 1983.

[Bu87] N.P. Buchdahl, *Stable 2-bundles on Hirzebruch surfaces*, Math. Z., **194**, pp. 143-152, 1987.

[CK52] W.L. Chow, K. Kodaira, *On analytic surfaces with two independent meromorphic functions*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A **38**, pp.319-325, 1952. interaction with representation theory, Oxford Science Publications.

[CMR05] L. Costa, R.M. Miró-Roig, *Cohomological characterization of vector bundles on multiprojective spaces*, Journal of Algebra **294**(1), 73-96, 2005.

[EG81] E.G. Evans, P. Griffith, *The syzygy problem*, Annals of Mathematics, Second Series **114**(2), 323-333, 1981.

[Fr98] R. Friedman, *Algebraic surfaces and holomorphic vector bundles*, Berlin, Heidelberg, New York, Springer Verlag, 1998.

[FM11] M. Fulger, M. Marchitan, *Some splitting criteria on Hirzebruch surfaces*, to appear in Bull.Math. Soc.Sci.Math.Roumanie, Bucureşti, 2011.

[Fu98] W. Fulton, *Intersection theory*, 2nd Edition, Springer, 1998.

[Gr97] W. Graham, *The class of the diagonal in flag bundles*, J. Diff. Geom. **45**, pp. 471-487, 1997.

[GH78] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, John Wileys and Sons, New York, 1978.

[Ha77] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Grad. Texts Math. **52**, Springer Verlag 1977.

[Ho64] G. Horrocks, *Vector bundles on the punctured spectrum of a local ring*, Proceedings of the London Mathematical Society, Third Series **14**, 689-713, 1964.

[Ho77] G. Horrocks, *Construction of bundles on* $\mathbb{P}^n$, in Séminaire Douady-Verdier. Ec. Norm. Sup. Paris, 1977.

[In74] M. Inoue, *On surfaces of class* VII_0, Invent. Math. **24**(1974), pp. 269-310, 1974.

[In77] M. Inoue, *New surfaces with no meromorphic functions. II*, Complex analysis and algebraic geometry, Tokyo: Iwanami Shoten, pp. 91-106, 1977.

[Ka88] M.M. Kapranov, *On the derived categories of coherent sheaves on some homogeneous spaces*, Inv. Math. **92**, pp. 479-508, 1988.

[Ko87] S. Kobayashi, *Differential geometry of complex vector bundles*, The Mathematical Society of Japan, vol.15, 1987

[Kd68] K. Kodaira, *On the structure of compact complex analytic surfaces. III*, Amer.J. Math. **90**, pp. 55-83, 1968.

[LSW89] M. Levine, V. Srinivas, J. Weyman, *K-Theory of twisted grassmannians*, K-Theory **3**, pp. 99-121, 1989.

[KPR03] N. M. Kumar, C. Peterson, A. P. Rao, *Monads on projective spaces*, Manuscripta Mathematica **112**(2), 183-189, 2003.

[LYZ90] J. Li, S.T. Yau, F. Zheng, *A simple proof of Bogomolov's theorem on class* VII_0 *surfaces with* $b_2 = 0$, Illinois J.Math. **34**(2), pp. 217-220, 1990

[Ma08] F. Malaspina, *A few splitting criteria for vector bundles*, Ricerche di Matematica **57**(1), 55-64, 2008.

[Ma09] F. Malaspina, *Monads and vector bundles on quadric*, Advances in Geometry **9**(1), 137-152, 2009.

[Ma59] Y. Matsushima, *Fibrés holomorphes sur un tore complexe*, Nagoya Math. J., **14**, pp. 1-24, 1959.

[Mo79] S. Mori, *Projective manifolds with ample tangent bundles*, Annals of Mathematics, Second Series **110**(3), 593-606, 1979.

[Mo59] A. Morimoto, *Sur la classification des espaces fibrés vectoriels holomorphes admetant des connexions holomorphes sur un tore complexe*, Nagoya Math. J., **15**, pp. 83-154, 1959.

[Nk84] I. Nakamura, *On surfaces of class* VII_0 *with curves*, Invent. Math. **78**, pp. 393-443, 1984.

[OSS80] C. Okonek, M. Schneider, H. Spindler, *Vector bundles on complex projective spaces*, Progress in Math., Birkhauser, Boston, 1980.

[Or92] D.O. Orlov, *Projective bundles, monomial transformations, and derived categories of coherent sheaves*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat., **56**, pp. 852-862, 1992.

[Ot89] G. Ottaviani, *Some extensions of Horrocks criterion to vector bundles on Grassmannians and quadrics*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, Serie Quarta CLV, 317-341, 1989.

[Pl95] R. Plantiko, *A rigidity property of class* VII_0 *surface fundamental groups*, J. reine angew. Math., **465**, pp. 145-163, 1995.

[Pr96] P. Pragacz, *Symmetric polynomials and divided differences in formulas of intersection theory*, Parameter Spaces, Banach Center Publications **36**, pp. 125-177, 1996.

[PR97] P. Pragacz, J. Ratajski, *Formulas for Lagrangian and orthogonal degeneracy loci;* $\tilde{Q}$*-polynomial approach*, Compositio Math. **107**, pp. 11-87, 1997.

[PSP08] P. Pragacz, V. Srinivas, V. Pati, *Diagonal subschemes and vector bundles*, Pure and Applied Math. Quart., vol.4, no.4, part 1, special volume ofdedicated to J-P. Serre on his 80th Birthday (S.T. Yau et al. eds.), 1233-1278, 2008.

[Sg55] C.L. Siegel, *Meromorphe funktionen auf kompakten analytischen manigfaltigkeiten*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl.II, pp. 71-77, 1955.

[Ue75] K. Ueno, *Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces*, Lectures Notes in Math. **439**, Springer, Berlin Heidelberg, 1975

[Wa93] C. Walter, *Irreducibility of moduli spaces of vector bundles on birationally ruled surfaces*, Algebraic Geometry (Catania, 1993/Barcelona, 1994), pp. 201-211, Lect. Not. Pure Appl. Math. **200**, Deckker, 1998.