Teza de doctorat **“Reprezentare gradient pentru ecuații integrale, continue şi cu salturi”** cuprinde patru capitole, reunind un număr de rezultate privind hamiltonieni stochastici, principiul variațional global asociat cu sisteme gradient de control stochastic, precum şi un studiu asupra comportării asimptotice şi reprezentării gradient a soluțiilor cad-lag asociate cu ecuații diferențiale cu impulsuri.

Capitolul 1

Cuprinde noțiuni generale privind sistemele gradient asociate cu algebre Lie finit dimensionale, noțiuni de teoria proceselor stochastice şi intregralei stochastice. Sunt prezentate, de asemenea, rezultate cunoscute de ecuații diferențiale stochastice–rezultate clasice privind existența şi unicitatea soluției folosind integrale stochastice de tip Itô sau de tip Fisk-Stratonovici.

Se consideră sistemul:

$$(1.1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t_i} = X_i(y),\, i = \overline{1,m} \\ y(0) = x \in V \subseteq \mathbb{R}^n \end{cases}.$$

Definiția 1.1.1. *a) Prin soluție pentru problema* (1.1) *se înțelege o funcție* $G(p;x): D_m \times V \to \mathbb{R}^n$ *de clasă* C^1, *care satisface problema* (1.1) *pentru orice* $p := (t_1 \dots t_m) = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_m \end{pmatrix}^T \in D_m := \prod_{i=1}^{m} (-a_i, a_i)$ *şi* $x \in V \subseteq \mathbb{R}^n$, *V o mulțime deschisă.*

(b) Sistemul din (1.1) *este complet integrabil dacă pentru orice* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *există o vecinătate* $V(x_0) \subseteq \mathbb{R}^n$ *şi o soluție unică a problemei* (1.1)*, fie aceasta* $G(p;x)$, $(p,x) \in D_m \times V(x_0)$, *soluție care satisface condiția* $G(0;x) = x$, $x \in V(x_0)$.

Teorema 1.1.1. (Frobenius in F_n). *Fie* $X_i \in F_n$, $i = \overline{1,m}$. *Sistemul* (1.1) *este complet integrabil dacă şi numai dacă:*

$$[X_i, X_j] = 0, (\forall)\, i, j \in \overline{1,m},$$

unde $\left[X_i, X_j\right] = \dfrac{\partial X_i}{\partial y}(y)\,X_j(y) - \dfrac{\partial X_j}{\partial y}(y)\,X_i(y)$ *este paranteza Lie. În plus, orice soluție locală* $G(p;x)$, $p \in D_m$, $x \in V(x_0)$ *este dată de* $G(p;x) = G_1(t_1)\circ\ldots\circ G_m(t_m)(x)$, *unde* $G_i(\tau)(x)$ *ese curentul local generat de* X_i *(*$F_n = C^\infty\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\right)$*).*

În numeroase demonstrații se va considera următoarea aplicație :

Fie X un câmp vectorial şi $G(t;x)$ difeomorfismul ce reprezintă curentul local generat de X, $t \in (-a,a), y \in D$, cu D mulțime deschisă din $\mathbb{R}^n$. Notăm $H(t;y) \overset{def}{=} \left[\dfrac{\partial G_1}{\partial x}(t;y)\right]^{-1}$. Atunci această aplicație este soluția următorului sistem de ecuații:

$$(1.3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial t}(t,y) = -H(t,y)\dfrac{\partial X}{\partial x}\left(G(t;y)\right), t \in (-a,a), y \in D \\ H(0;y) = I_n \end{cases}$$

Cum $G\left(-t;G(t;y)\right) = y$ şi $G(t;x) = G\left(t;G\left(-t;G(t;x)\right)\right)$, prin derivare în raport cu x se obțin identitățile $H(t;y)\,H\left(-t;G(t;y)\right) = I_n$.

Alte proprietăți ale acestei aplicații sunt prezentate în:

Lema 1.1.1. *Fie date câmpurile* $X, X_1, X_2 \in C^\infty\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\right)$ *şi* $G(t,x)$ *curentul local generat de* $X, t \in (-a;a), y \in D$, *cu D mulțime deschisă în* $\mathbb{R}^n$. *Atunci sunt adevărate relațiile:*

(c1) $H(t;y)[X_1, X_2]\left(G(t;y)\right) = \left[H(t;\cdot)\,X_1\left(G(t;\cdot)\right), H(t;\cdot)\,X_2\left(G(t;\cdot)\right)\right](y)$ *;*

(c2) $H(t;y)\,X\left(G(t;y)\right) = X(y)$ *;*

(c3) $H(-t;y)\,X_1\left(G(-t;y)\right) = (\exp tadX)\,X_1(y)$.

Definiția **1.1.2.** *Fie* $p \overset{def}{=} (t_1, \ldots, t_m) \in D_m \overset{def}{=} \prod_{i=1}^{m}(-a_i, a_i)$, $y \in V \subseteq \mathbb{R}^n$ *şi fie* $X_j(p;y) \in \mathbb{R}^n$ *de clasă* C^1 *pentru* $j = 1, \ldots, m$. *Prin definiție* $X_j(p;y)$, $j = \overline{1,m}$ *defineşte un sistem gradient (sau îndeplineşte condiția de integrabilitate a lui Frobenius) dacă:*

$$(1.7)\qquad \frac{\partial X_j}{\partial t_i}(p;y) - \frac{\partial X_i}{\partial t_j}(p;y) = \left[X_i(p;\cdot), X_j(p;\cdot)\right](y),\ (\forall)\ i,j \in \{1,\ldots,m\},$$

unde:

$$[Z_1, Z_2](y) \overset{def}{=} \frac{\partial Z_1}{\partial y}(y)\, Z_2(y) - \frac{\partial Z_2}{\partial y}(y)\, Z_1(y) \text{ (}\textit{paranteza Lie}\text{).}$$

Teorema 1.1.2. *Fie* $Y_j \in C^2\left(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n\right)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $j = \overline{1,m}$, *fixați. Atunci există* $D_m = \prod_{i=1}^{m} (-a_i, a_i)$, $V(x_0) \subseteq \mathbb{R}^n$ *şi* $X_j\left(p_j; y\right) \in \mathbb{R}^n$, $p \in D_m$, $y \in V(x_0)$ *de clasă* C^1, $p_j := \left(t_1, \ldots, t_{j-1}\right)$, $X_1 = Y_1$, *astfel încât*

(c1) $$\frac{\partial y}{\partial t_1} = Y_1(y),\ \frac{\partial y}{\partial t_2} = X_2(t_1; y), \ldots, \frac{\partial y}{\partial t_m} = X_m(t_1, \ldots, t_{m-1}; y)$$

este un sistem gradient $\left(\frac{\partial X_i}{\partial t_i}\left(p_j; y\right) = \left[X_i(p_i; \cdot), X_j(p_i; \cdot)\right](y), i < j\right)$ *şi*

(c_2) $$G(p; x) = G_1(t_1) \circ \ldots \circ G_m(t_m)(x),\ p \in D_m,\ y = V(x_0)$$

este soluție pentru (c1) *cu condiția Cauchy* $y(0) = x \in V(x_0)$ *unde* $G_i(t)x$ *este curentul local generat de* Y_i.

Am observat înainte că orice compunere finită de câmpuri $y(p) := G_1(t_1) \circ \ldots \circ G_m(t_m)(x_0)$ poate fi asociată cu un sistem gradient

$$\frac{\partial y}{\partial t_1} = Y_1(y),\ \frac{\partial y}{\partial t_2} = X_2(t_1; y), \ldots, \frac{\partial y}{\partial t_m} = X_m(t_1, \ldots, t_{m-1}; y),\ y(0) = x_0,$$

şi soluția sa locală.

Atât soluția cât şi sistemul gradient sunt în mod esențial legate de proprietatea ca $''\frac{\partial}{\partial t_1}'', \ldots, ''\frac{\partial}{\partial t_m}''$ să fie derivări comutative în $\mathrm{Der}\left(\mathbb{R}^m\right)$ şi aceasta poate fi reconsiderată dacă $''\frac{\partial}{\partial t_i}''$, $i = 1, \ldots, m$ sunt înlocuite de

$$\vec{g}_i \in \mathrm{Der}\left(\mathbb{R}^n\right),\ \left(\text{sau } g_i := \vec{g}_i I \in F_n, i = \overline{1,m}\right) \text{ necomutativi.}$$

Observație: Deoarece în capitolul 4 reprezentarea câmpurilor ce definesc un sistem gradient va necesita probarea convergenței seriilor formale în topologia determinată de orbitele asociate cu o algebră Lie, este util să considerăm algebre Lie de un anumit tip, anume algebrele de tip finit (local).

Definiție: O algebră Lie $\Lambda \subset C^\infty\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\right)$ este de tip finit dacă există $\{Y_1, \ldots, Y_M\} \subset \Lambda$ astfel încât fiecare $Y \in \Lambda$ se poate reprezenta sub forma:

$$Y(y) = \sum_{j=1}^{M} a_j(y) Y_j(y),$$

unde $a_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $j \in \{1,...,M\}$ depinzând de y. Mulțimea $\{Y_1, \dots, Y_M\}$ se numeşte sistem de generatori.

Un caz particular este acela al algebrelor Lie finit generate peste $\mathbb{R}$ (f.g.r sau finit dimensionale), unde a_j în defininția de mai sus sunt constante reale.

Definiția 1.2.1. *Prin definiție o algebră Lie reală* Λ *se numeşte finit generată peste* $\mathbb{R}$ $(f.g.r)$ *dacă există* $\{Y_1, \dots, Y_M\} \subseteq \Lambda_M$ *astfel încât orice* $Y \in \Lambda$ *admite reprezentarea* $Y = \sum_{j=1}^{M} a_j Y_j$, *cu* $a_j \in \mathbb{R}$, *unic determinați, depinzând de* Y;$\{Y_1, \dots, Y_M\}$ *un sistem de generatori.*

Cum s-a văzut deja, o algebră Lie Λ finit dimensională, $\Lambda \subset F_n$ $\left(\text{sau Der}\left(\mathbb{R}^n\right)\right)$ poate fi asociată cu algebra Lie a câmpurilor vectoriale analitice. În general, noua algebră Lie nu mai este finit dimensională, dar poate fi caracterizată folosind un sistem global de generatori cu condiția ca spațiul $\mathbb{R}$ al coeficienților să fie înlocuit cu spațiul funcțiilor analitice $C^\omega\left(\mathbb{R}^M;\mathbb{R}\right)$.

Prin orbită a algebrei Λ înțelegem doar o compunere finită de curenti locali.

Definția 1.3.1. *Fie* $\Lambda \subseteq F_n$ *o algebră Lie şi fie* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, *fixat. Prin orbită cu originea în* x_0 *a lui* Λ *se înțelege funcția*

$$G(p;x_0) := G_1(t_1) \circ \dots \circ G_k(t_k)(x_0),$$

$$p := (t_1, \dots, t_k) \in D_k := \prod_{i=1}^{k} (-a_i, a_i),$$

unde $G_i(t)(x)$, $t \in (-a_i, a_i)$, $x \in V(x_0)$ *este fluxul local generat de un anumit* $Y_i \in \Lambda$.

Definiția 1.3.2. *Spunem că* $\Lambda \subseteq F_n$ *este finit generată în raport cu orbitele în* $x_0 \in \mathbb{R}^n (f.g.o;x_0)$ *dacă există* $\{Y_1, \dots, Y_M\} \subseteq \Lambda$ *astfel încât orice* $Y \in \Lambda$ *de-a lungul unei orbite arbitrare* $G(p;x_0)$, $p \in D_k$ *poate fi scrisă sub forma:*

$$Y\left(G\left(p;x_0 \right) \right) = \sum_{j=1}^{M} a_j\left(p \right) Y_j\left(G\left(p;x_0 \right) \right)$$

cu $a_j \in C^{\omega}\left(\Omega_k \right)$ *depinzând de* Y *şi* $G\left(p;x_0 \right)$, $p \in D_k$; $\left\{ Y_1,\dots,Y_M \right\}$ *se numeşte un sistem de generatori.*

Observația 1.3.1. Se vede uşor că $\left\{ g_1,\dots,g_m \right\} \subseteq F_n$ în involuție, adică, $\left[g_i,g_j \right]\left(x \right) = \sum_{k=1}^{m} a_k\left(x \right) g_k\left(x \right)$ cu $a_k \in C^{\infty}\left(\mathbb{R}^n \right)$, determină algebra Lie $\Lambda\left(g_1,\dots,g_m \right)$ care este finit generată pe orbite. În particular orice algebră Lie $f.g.r$ este o $f.g.o$ algebră Lie cu un sistem de generatori fixat independent de originea x_0.

În cele ce urmează originea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ a orbitelor este fixată şi pentru orice sistem de generatori $\left\{ Y_1,\dots,Y_M \right\}$ în algebra Lie $\Lambda\left(f.g.o;x_0 \right)$ considerăm sistemul gradient general asociat algebrei Lie. Aceasta revine la a spune că, pentru $G_i\left(t \right)\left(x \right)$, $t \in \left(-a_i,a_i \right)$, $x \in V\left(x_0 \right)$, curentul local generat de Y_i, scriem:

(3.1) $$H_i\left(t;y \right) := \left(\frac{\partial G_i}{\partial y}\left(t;y \right) \right)^{-1}, y_{i+1} := G_i\left(-t_i;y_i \right), y_1 := y, \ i = 1,\dots,M-1.$$

Apoi definim câmpurile de vectori:

$$X_1\left(y \right) = Y\left(y \right)$$

$$X_2\left(t_1;y \right) = H_1\left(-t_1;y_1 \right) Y_2\left(G_1\left(-t_1;y_1 \right) \right)$$

$$X_M\left(t_1,\dots,t_{M-1};y \right) = H_1\left(-t_1;y_1 \right) \times H_2\left(-t_2;y_2 \right) \times \dots \times H_{M-1}\left(-t_M;y_{M-1} \right) Y_M\left(y_M \right),$$

unde $x \in V\left(x_0 \right)$ şi $p := \left(t_1,\dots,t_M \right) \in D_M = \prod_{i=1}^{M} \left(-a_i,a_i \right)$.

Câmpurile vectoriale din (3.2) determină un sistem gradient (a se vedea Teorema 1.1.2):

(3.3) $$\frac{\partial y}{\partial t_1} = X_1\left(y \right), \ \frac{\partial y}{\partial t_2} = X_2\left(t_1;y \right), \dots, \frac{\partial y}{\partial t_M} = X_M\left(t_1,\dots,t_{M-1};y \right),$$

pentru $p \in D_M$ şi $y \in V\left(x_0 \right)$, şi orbita cu originea $x_0 \in \mathbb{R}^n$,

(3.4) $$y\left(p \right) = G_1\left(t_1 \right) \circ G_2\left(t_2 \right) \circ \dots \circ G_M\left(t_M \right)\left(x_0 \right), \ p := \left(t_1,\dots,t_M \right) \in D_M,$$

satisface (3.3).

Lema 1.3.1. *Fie* $\Lambda \subseteq F_n$ *o* $(f.g.o;x_0)$ *algebră Lie şi* $x_0 \in \mathbb{R}^n$*, fixat. Se consideră sistemul gradient* (3.3) *asociat cu sistemul fixat de generatori* $\{Y_1,\dots,Y_M\} \subseteq \Lambda$ *. Atunci orbita* (3.4) *este soluția sistemului gradient* (3.3) *şi există matricele nesingulare, de tip* $(M \times M)$, $Z_j(t_j;t_j,\dots,t_M)$, $j = 1,\dots,M-1$ *astfel încât câmpurile vectoriale* $X_j(p_j;y)$ *din* (2), *pentru* $y = y(p)$ *dat de* (3.4) *satisfac:*

$$X_{j+1}(p_{j+1};y(p)) = \{Y_1(y(p)),\dots,Y_M(y(p))\}\, Z_1(t_1;t_1,\dots,t_M)\times\dots$$
$$\times Z_j(t_j;t_j,\dots,t_M)\, e_{j+1},$$

unde $e_1,\dots,e_M \in \mathbb{R}^M$ *este baza canonică şi* Z_j *este de clasă* C^∞ *în* $p \in D_M$ *şi satisface ecuațiile diferențiale liniare:*

$$\frac{\mathrm{d}Z_j}{\mathrm{d}t} = Z_j B_j(t_j - t, t_{j+1},\dots,t_M),\ Z_j(0) = I_M .$$

În paragraful 2 sunt prezentate rezultate din teoria ecuațiilor diferențiale; rezultate clasice privind existența şi unicitatea soluției unei ecuații diferențiale stochastice date în teorema 4.1, 4.2 şi 4.3.

Un rol important în analiza stochastică îl are Regula de diferențiere stochastică.

Avem următoarea versiune multidimensională a regulei Itô:

Teorema 2.1. (Formula lui Itô) Fie $(M_t) = \left(M_t^{(1)},\dots,M_t^{(d)}\right)_{0\le t\le T}$ un vector cu componentele martingale locale, continue şi $(B_t) = \left(B_t^{(1)},\dots,B_t^{(d)}\right)$ un vector cu componentele procese $\mathcal{F}_t$ - adaptate şi cu variație mărginită, cu $B_0 = 0$. Fie $X_t = X_0 + M_t + B_t, 0 \le t \le T$, unde X_0 este $\mathcal{F}_0$ - măsurabilă cu valori în $\mathbb{R}^d$. Fie de asemenea $f(t,x) : [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ o aplicație de clasă $C^{1,2}$. Atunci are loc formula:

$$f(t,X_t) = f(0,X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,X_s)\,ds + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(s,X_s)\,dB_s^{(i)}$$
$$+\sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(s,X_s)\,dM_s^{(i)} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^d\sum_{j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(s,X_s)\,d\langle M^{(i)},M^{(j)}\rangle_s,\ a.s.\ \omega\ (\forall)\ 0\le t\le T .$$

Observația 2.1. Formula lui Itô precizează faptul că o funcție de clasă $C^{1,2}$ ce depinde de un semimartingal este tot un semimartingal şi ne furnizează şi scrierea corespunzătoare.

Corolarul 2.1. Fie $(X_t)_{0\le t\le T}, (Y_t)_{0\le t\le T}$ două semimartingale continue.

$X_t = X_0 + M_t + B_t, Y_t = Y_0 + N_t + C_t, 0 \le t \le T$ unde (M_t) si (N_t) sunt martingale locale continue iar (B_t) şi (C_t) sunt procese continue, $\mathcal{F}_t$ - adaptate cu variaţie mărginită şi $B_0 = C_0, \omega$ a.s. Este adevarată formula de integrare prin părţi:

$$\int_0^t X_s\, dY_s = X_t Y_t - X_0 Y_0 - \int_0^t Y_s\, dX_s - \langle M, N \rangle_t, (\forall)\, 0 \le t \le T, \text{ unde}$$

$$\int_0^t X_s\, dY_s \overset{def}{=} \int_0^t X_s\, dM_s + \int_0^t X_s\, dB_s$$

(o formulă asemănătoare are loc şi pentru $\int_0^t Y_s\, dX_s$).

Observaţia 2.2. Această formulă diferă de formula de integrare prin părţi clasică, din cazul determininst, prin termenul de corectie $\langle M, N \rangle_t$. O metodă de a elimina acest termen este de a-l „absorbi" în definiţia integralei, obţinându-se astfel un nou tip de integrală stochastică care este mai utilă atunci când calculul ordinar se intersectează cu calculul stochastic. Această nouă integrală se numeşte integrala Fisk-Stratonovich şi se defineşte astfel:

Fie $(X_t)_{0 \le t \le T}$ si $(Y_t)_{0 \le t \le T}$ două semimartingale continue ca şi în corolarul precedent. Atunci integrala Fisk-Stratonovich a lui Y în raport cu X este:

$$\int_0^t Y_s \circ dX_s \triangleq \int_0^t Y_s\, dM_s + \int_0^t Y_s\, dB_s + \frac{1}{2}\langle M, N \rangle_t, 0 \le t \le T \ .$$

Capitolul 2

În acest capitol este introdusă noţiunea de diferenţială stochastică (hamiltonaian stochastic). Sunt analizaţi hamiltonieni stochastici asociaţi cu ecuaţii diferenţiale stochastice şi valoare finală nenetedă, precum şi hamiltononieni stochastici asociaţi cu filtre neliniare finit dimensionale şi valoare finală nenetedă.

Capitolul conţine rezultate originale publicate în Revue Roumaine de mathematiques pures et appliquees (a se vedea referinţa [13] din bibliografie) la care s-au adăugat şi unele rezultate din referinţa [17].

Cu ajutorul diferenţialei stochastice se obţine un control optimal asociat cu probleme de control stochastic şi este descrisă o strategie admisibilă sub formă de feedback implicată în piaţa financiară.

Pentru o funcţie Lipschitz continuă $\varphi(x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ care admite gradient în sens slab $\partial_x \varphi(x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ asociem variabila aleatoare $\varphi(x(T))$, unde

$x(t), t \in [0,T]$, este soluția sistemului diferențial stochastic cu coeficienți funcții Lipschitz continue și coeficienții de difuzie funcții continue diferențiabile de ordinul 1. Aceasta arată că variabila aleatoare $\varphi(x(T))$ poate fi reprezentată ca valoare finală $S(T,x(T)) = \varphi(x(T))$ utilizând funcția continuă $S(t,x):[0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ care admite gradient în sens slab $\partial_x S(t,x):[0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ și $S(t,x(t)), t \in [0,T]$ satisface un sistem de ecuații diferențiale stochastice de ordinul 1 (diferențiala stochastică $d_t\left[S(t,x(t))\right] =$ hamiltonian stochastic).

Considerăm sistemul markovian:

$$(1.1) \qquad \begin{cases} d_t x = f(t,x)\,dt + \sum_{k=1}^{m} g_k(t,x)\,dw_k(t), t \in [0,T], x \in \mathbb{R}^d \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

unde $w(t) = (w_1(t),...,w_m(t))$ este un process Wiener standard m-dimensional peste spațiul probabilitate filtrat {Ω, $\mathcal{F}$, P; {$\mathcal{F}_t$} ↑ } și $f(t,\cdot), g_k(t,\cdot), k \in \{1,...,m\}$ sunt funcții Lipscitz continue pe $\mathbb{R}^d$.

Fie $h(x):\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ o funcție Lipschitz continuă și pentru o soluție $x(t), t \in [0,T]$, a lui (1.1) considerăm funcționala:

$$(1.2) \qquad J(x(T)) = h(x(T))$$

ca variabilă aleatoare. Problema care se pune este de a reprezenta funcționala din (1.2) ca valoare finală $S(T,x(T)) = h(x(T))$ utilizând o funcție $S(t,x):[0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ diferențiabilă în sens slab astfel încât procesul stochastic $S(t,x(t))$, $t \in [0,T]$, este obținut din următoarea ecuație diferențială stochastică liniară de ordinul 1:

$$(1.3) \qquad \begin{aligned} S(t,x(t)) = S(0,x_0) &+ \int_0^t \langle \partial_x S(s,x(s)), f(s,x(s)) \rangle ds + \\ &+ \sum_{k=1}^{m} \int_0^t \langle \partial_x S(s,x(s)), g_k(s,x(s)) \rangle dw_k(s),\ t \in [0,T] \end{aligned}$$

Ecuația din (1.3) poate fi asociată cu funcția valoare $V_\theta(t), t \in [0,T]$, scrisă pentru o strategie admisibilă în piața financiară, și pentru exprimarea principiului Pontryagin de optimalitate pentru probleme de control stochastic unde driftul $f(t,x)$ depinde de parametrul $\omega \in \Omega$ implicat în funcțiile de control.

Rezultatele principale sunt cuprinse în lema 2.2.1 şi în teorema 2.2.1.

Lema 2.2.1. *Fie* $h(x):\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *şi* $g_k(t,x):[0,T]\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, k\in\{1,...,m\}$ *funcții continue date, care se supun ipotezelor* (a_1), (a_2), (a_3). *Atunci există o unică soluție netedă* $S^\varepsilon \in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ *satisfăcând ecuația Kolmogorov retrogradă :*

$$(2.18)\qquad \begin{cases} \partial_t S^\varepsilon(t,x) + \dfrac{1}{2}Tr\left[\dfrac{\partial^2 S^\varepsilon}{\partial x^2}(t,x)\left(\sum\limits_{k=1}^{m} g_k^\varepsilon(t,x)\left(g_k^\varepsilon(t,x)\right)^*\right)\right] = 0 \\ S^\varepsilon(t,x) = h_\varepsilon(x), x\in\mathbb{R}^d, t\in[0,T], \varepsilon > 0 \end{cases}$$

şi poate fi reprezentată ca $S^\varepsilon(t,x) = Eh_\varepsilon\left(y_{t,x}^\varepsilon(T)\right)$, *unde versiunea netedă* $h_\varepsilon(\cdot)$ *este dată în (2.1) şi procesul stochastic* $y_{t,x}^\varepsilon(s), s\in[t,T]$, *este soluția următoarei ecuații :*

$$\begin{cases} d_s y = \sum\limits_{k=1}^{m} g_k^\varepsilon(s,y)\,dw_k(s), \quad s\in[t,T] \\ \mathrm{y}(\mathrm{t}) = x \end{cases}$$

pentru fiecare $t\in[0,T]$.

Ipotezele (a_1) **-(**a_3**)** sunt:

$$(a_1)\qquad \begin{cases} |\mathrm{h}(\mathrm{x})| \le L(x), (\forall)\, x\in\mathbb{R}^d \\ |h(x+z)-h(x)| \le L(x)|z|, (\forall)\, z\in B(0,1)\subseteq\mathbb{R}^d \end{cases}$$

unde $L(x)\le C\left(1+|x|^N\right)$ pentru orice $x\in\mathbb{R}^d$ şi $N\ge 1$ un număr natural fixat.

Presupunem următoarele : câmpurile vectoriale de difuzie $g_k(t,x), k\in\{1,...,m\}$ sunt funcții continue în ambele variabile şi continuu diferențiabile de ordinul 1 în raport cu $x\in\mathbb{R}^d$ astfel încât :

(a_2) $\quad |\partial_i g_k(t,x)| \le M, (\forall)(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d$, unde $\partial_i\varphi(t,x) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}(t,x), i\in\{1,...,d\}$.

(a_3**)** Există o funcție măsurabilă Borel $h^1(x;z), z\in B(0,1), x\in\mathbb{R}^d$ astfel încât $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0}\dfrac{h(x+\varepsilon z)-h(x)}{\varepsilon} = h^1(x;z)$ pentru fiecare $x\in\mathbb{R}^d$ şi $z\in B(0,1)\subseteq\mathbb{R}^d$.

Teorema 2.2.1. *Fie* $h(x):\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *si* $f(t,x), g_k(t,x):[0,T]\times\mathbb{R}^d, k\in\{1,...,m\}$ *date astfel încât presupunerile* $(a_1),(a_2),(a_3)$ *sunt satisfăcute. Scriem* $S(t,x)=Eh(y_{t,x}(T))$, *pentru* $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d$.

Atunci :

(2.19) $$h(x(T)) = S(T,x(T)) = S(0,x_0) + \int_0^T \langle \partial_x S(t,x(t)), d_t x(t)\rangle$$

unde $x=x(t), t\in[0,T]$ *este soluția ecuației:*

$$\mathrm{h}_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^d} h(x+z)\omega_\varepsilon(z)dz = \int_{\mathbb{R}^d} h(y)\omega_\varepsilon(y-x)\,dy = \int_{B(x,\varepsilon)} h(y)\omega_\varepsilon(y-x)\,dy$$

şi gradientul în sens slab $\partial_x S(t,x) = \lim_{\varepsilon\searrow 0}\partial_x S^\varepsilon(t,x)$ *este calculat în acord cu* $S^\varepsilon(t,x)=Eh_\varepsilon(y^\varepsilon_{t,x}(T))$ *şi* $\partial_x S(t,x) = E\left\{\left[\partial_y h(y_{t,x}(T))\right]^* \partial_x y_{t,x}(T)\right\}$.

În secțiunea 2.3 este dată o aplicație şi asfel motivăm considerarea ecuației retrograde Kolmogorov.

Secțiunea 2.4 cuprinde hamiltonieni stochastici asociați cu filtre neliniare finit dimensionale şi valoare finală nenetedă.

O cunoaştere incompletă a stării $x(t), t\in[0,T]$, a unui sistem neliniar diferențial stochastic implică media condiționată $E\{\varphi(x(T))\mid y^T\}$ a variabilei aleatoare $\varphi(x(T))$ dată de observațiile trecute $y^T=\{y(s):0\le s\le T\}$, unde $\varphi(x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ este funcție local Lipschitz continuă. Utilizând o nouă măsură probabilitate $\widehat{P}_y(A)=\widehat{J}_y(T)P(A)$ şi un nou sistem dinamic stochastic care descrie evoluția $\{(\hat{x}_y(t),\xi_y(t))\in\mathbb{R}^{n+1}; t\in[0,T]\}$, reprezentăm $E\{\varphi(x(T))\mid y^T\}$ ca $\widehat{E}_y\{\varphi(\hat{x}_y(T))[\exp y(T)\cdot h(\hat{x}_y(T))]\xi_y(T)\}$ pentru fiecare funcție $y(\cdot)\in\widehat{C}([0,T];\mathbb{R}^d)$ cu $y(0)=0$. În plus, funcția continuă $S(t,x;y(\cdot)):[0,T]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ este construită astfel încât $S(T,x;y(\cdot))=\varphi(x)\exp(y(T)\cdot h(x))$ şi $\xi_y(t)S(t,\hat{x}_y(t);y(\cdot)), t\in[0,T]$, să satisfacă o ecuație diferențială stochastică de ordinul 1 care permite definirea strategiei admisibile sub formă de feedback asociată cu o piață financiară sau cu o problemă de control stochastic sub cunoaşterea incompletă a variabilei de stare.

Teoremele principale ale acestui paragraf sunt conținute în secțiunea 2.6, în timp ce calculele auxiliare implicate în reprezentarea soluției în sens slab sunt adunate în secțiunea 2.5.

Teorema 2.6.1. *Fie* $h\in C_0^4(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^d), \varphi\in C(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ *şi* $f, g_k\in C(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ *date astfel încât presupunerile(5.a)-(5.c). Notăm*

$$S\left(t,x;y(\cdot)\right)=E\varphi\left(z_{t,x}(T)\right)\left[\exp\left(y(T)\cdot h\left(z_{t,x}(T)\right)\right)\right]\left[\exp\int_t^T e\left(y(s),z_{t,x}(s)\right)ds\right]$$

pentru fiecare $y(\cdot)\in\widehat{C}\left([0,T];\mathbb{R}^d\right)$ *fixat şi* $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$, *unde* $z_{t,x}(s),s\in[t,T]$, *este soluţia asociată ecuaţiei (5.4). Atunci* $S\left(t,x;y(\cdot)\right):[0,T]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *este funcţie continuă satisfăcând :*

$$S\left(T,x;y(\cdot)\right)=\varphi(x)\exp\left(y(T)\cdot h(x)\right),x\in\mathbb{R}^n$$

şi

(6.1) $\left|S\left(t,x;y(\cdot)\right)\right|\le C_y^0\left(1+|x|^N\right),\quad\forall x\in\mathbb{R}^n,t\in[0,T]$, *unde* $C_y^0>0$ *depinde de* $y(\cdot)$;

(6.2) *există un gradient în sens slab măsurabil Borel* $\partial_x S\left(t,x;y(\cdot)\right):[0,T]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ *satisfăcând condiţia de creştere polinomială*

$$\left|\partial_x S\left(t,x;y(\cdot)\right)\right|\le C_y^1\left(1+|x|^N\right),\forall x\in\mathbb{R}^n,t\in[0,T]$$

(6.3) $\xi_y(t)\,S\left(t,\widehat{x_y}(t);y(\cdot)\right)=S\left(0,x_0;y(\cdot)\right)+\int_0^t\left\langle\xi_y(s)\,\partial_x S\left(s,\widehat{x_y}(s);y(\cdot)\right),d_s\widehat{x_y}(s)\right\rangle$

pentru orice $t\in[0,T]$, *unde* $\widehat{x_y}(t),t\in[0,T]$, *este soluţia asociată următorului sistem:*

$$\begin{cases}d_t\hat{x}(t)=\widehat{f}\left(\hat{x},y(t)\right)dt+\sum_{i=1}^m g_i\left(\hat{x}\right)dw_i(t)\\ \hat{x}(0)=x_0,\quad\hat{x}\in\mathbb{R}^n,\quad t\in[0,T]\end{cases}$$

şi:

$$\xi_y(t)=\int_0^t e\left(y(s),\widehat{x_y}(s)\right)ds,\ t\in[0,T]$$

pentru $e(y,x)$ *dată de:*

$$E\left\{\varphi\left(x(t)\right)/y^t\right\}=\widehat{E}_y\left\{\varphi\left(\hat{x}_y(t)\right)\left[\exp y(t)\cdot h\left(\hat{x}_y(t)\right)\right]\left[\exp\int_0^t e\left(y(s),\hat{x}_y(s)\right)ds\right]\right\}$$

şi fiecare $y(\cdot)\in\widehat{C}\left([0,T];\mathbb{R}^d\right)$ *fixat.*

$\varphi(x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ satisface :

(5.a) $$\begin{cases}\left|\varphi(x)\right|\le L(x)\le C\left(1+|x|^N\right),\quad\forall x\in\mathbb{R}^n, N\text{ numar natural}\\ \left|\varphi(x+z)-\varphi(x)\right|\le L(x)\,z,\forall z\in B(0,1),x\in\mathbb{R}^n\end{cases}$$

Câmpurile vectoriale $f(x), g_k(x), k \in \{1,2,...,m\}$ sunt funcții continue și continuu diferențiabile de ordinul 1 astfel încât :

(5.b) $\left|\partial_i f(x)\right|, \left|\partial_i g_k(x)\right| \le M$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$,

unde $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}, i \in \{1,2,...,n\}$.

(5.c) există o funcție măsurabilă Borel $\varphi^1(x;z), x \in \mathbb{R}^n, z \in B(0,1)$ astfel încât $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \dfrac{\varphi(x+\varepsilon z) - \varphi(x)}{\varepsilon} = \varphi^1(x;z)$ pentru fiecare $(x;z) \in \mathbb{R}^n \times B(0,1)$.

Teorema 2.6.2. În aceleași ipoteze ca în teorema 2.6.1, există o strategie admisibilă $\left\{\left(\theta_0^y(t), \theta^y(t)\right) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \in [0,T]\right\}$ asociată cu funcția valoare $\left\{V_\theta^y(t), t \in [0,T]\right\}$ astfel încât $\theta^y(t) = \xi_y(t)\partial_x S\left(t, \widehat{x_y}(t); y(\cdot)\right), t \in [0,T]$, și $\theta_0^y(0)$ satisface $V_\theta^y(0) = \theta_0^y(0) + \left\langle \theta^y(0), x_0 \right\rangle \ge S\left(0, x_0; y(\cdot)\right)$, unde funcția continuă $S\left(t, x; y(\cdot)\right)$ este definită în teorema 2.6.1.

Capitolul 3

Cuprinde rezultate originale publicate în Revue Roumaine de mathematiques pures et appliquees (a se vedea referința [10] din bibliografie) la care s-au adăugat rezultate obținute în lucrarea [18] din bibliografie.

În prima parte este prezentat principiul variațional global în cazul deterministic, iar în partea a doua principiul variațional global în cazul stochastic.

În cazul deterministic sistemele de control sunt considerate asociind un sistem gradient de control utilizând control în sens slab. Sistemul original de control este analizat folosind soluțiile unor ecuații Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) care apar ca intregrale prime de-a lungul unor soluții admisibile.

De obicei, starea reală a unui sistem de control este restricționată la variabila principală $x \in \mathbb{R}^n$, în timp ce funcțiile de control admisibile sub formă de feedback sunt aplicații netede. Acest subiect a fost tratat pe larg în mai multe rânduri și noi ne rezumăm la a menționa analiza stochastică conținută în referințele [14]-[18].

Aici, complexitatea sistemului de control este dată de variabila principală extinsă $(x,p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^M$ și transformarea de coordonate

$x = G(p)[y], x, y \in \mathbb{R}^n$, pentru fiecare $p \in B(0,2\rho) \subset \mathbb{R}^M$ astfel încât câmpul vectorial de control care depinde de $x \in \mathbb{R}^n$ este exprimat ca derivata Lie a lui $x = G(p)[y]$ de-a lungul câmpului vectorial de control care depinde de $p \in B(0,2\rho)$. Construcția aplicației netede $x = G(p)[y]$ şi a inversei ei $y = [G(p)]^{-1}(x)$ este sursa principală pentru generarea unui sistem gradient de control şi a integralelor prime de-a lungul unei perechi admisibile $\{(\hat{x}(t), \hat{p}(t)) | t \in [0,T]\}$. Ideea de bază a acestei analize a apărut în [7], unde a fost utilizată o algebră Lie finit dimensională pentru a descrie un sistem gradient stochastic.

În cazul deterministic, construcția sistemului gradient de control implică algebra Lie finit dimensională (de tip finit) şi, în plus, este introdus un control feedback special (feedback în sens slab).

Funcțiile de control feedback în sens slab admisibile sunt funcții Lipschitz în a doua componentă $p \in B(0,2\rho) \subset \mathbb{R}^M$ păstrând în mod necesar dependența netedă a soluției în raport cu $x \in \mathbb{R}^n$ când este implicată o ecuație Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB).

Rezultatele principale privind construcția sistemului gradient de control sunt date în teorema 3.2.2. Teorema 3.2.1 conține principiul varațional global legat cu principiul Pontryagin şi cu ecuațiile HJB. Observația 3.2.2. prezintă un algoritm pentru construcția unui şir ca soluție optimală generalizată.

Considerăm sisteme de control neliniare de forma:

$$(2.1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,u) \\ x(0) = x_0, x \in \mathbb{R}^n, u \in U \subset \mathbb{R}^d, t \in [0,T] \end{cases}$$

unde câmpul vectorial controlat $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n)$ este un polinom în $u \in \mathbb{R}^d$ şi, $U \subset \mathbb{R}^d$ este fixat. Notăm prin $\{g_0, ..., g_m\} \subset C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ câmpurile vectoriale care apar ca şi coeficienți ai polinomului $f(x,\cdot)$. Definim algebra Lie reală $L = L(g_0, ..., g_m) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ generată de câmpurile vectoriale $\{g_0, ..., g_m\}$ şi presupunem că L este de tip finit. Atunci poate fi asociat un sistem gradient de control ca în teorema 3.2.1.

Un sistem gradient de control extins este definit astfel:

Definiția 3.2.1. *Fie bila fixată* $B(0,2\rho)\subset\mathbb{R}^M$. *Spunem că perechea de câmpuri vectoriale netede* $(g,q), g\in C^\infty\left(B(0,2\rho)\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^n\right), q\in C^\infty\left(\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^M\right)$ *defineşte un sistem gradient de control asociat cu (2.1) dacă există difeomorfismul* $x=G(p)[y], x,y\in\mathbb{R}^n$ *aplicație netedă pentru fiecare* $p\in B(0,2\rho)$ *astfel încât* $G\in C^\infty\left(B(0,2\rho)\times\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n\right)$ *a cărei inversă* $y=\psi(p,x):=\left[G(p)\right]^{-1}$ *admite derivate parțiale de ordinul 1 mărginite şi*

(i) $G(0)[y]=y$;

(ii) $\partial_p G(p)\left[\psi(p,x)\right]q(p,u)=g(p,x,u)$;

(iii) $q(p,u)=0$ *pentru* $p\notin B(0,2\rho), u\in\mathbb{R}^d$ *şi* $g\left(p,G(p)[x_0],u\right)=f\left(G(p)[x_0],u\right), p\in B(0,\rho)$ *unde* $x_0\in\mathbb{R}^n$ *este fixat.*

În acord cu definiția 3.2.1 putem considera sistemul extins de control:

$$(2.2)\qquad \begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=g(p,x,u), x(0)=x_0,\\ \dfrac{dp}{dt}=q(p,u), p(0)=0,\end{cases}$$

unde $p\in B(0,2\rho), u\in U\subset\mathbb{R}^d, t\in[0,T]$ şi $q(p,u)=0$ pentru $p\notin B(0,2\rho)$.

Definiția 3.2.2. *Spunem că sistemul de control (2.1) cu* $f\in C^\infty\left(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^n\right)$ *poate fi extins la sistemul gradient de control (2.2) cu* $g\in C^\infty\left(B(0,2\rho)\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^n\right), q\in C^\infty\left(\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^M\right)$, *cu condiția să existe aplicația netedă* $x=G(p)[y]:B(0,2\rho)\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ *astfel încât să fie satisfăcute condițiile (i)-(iii) din definiția 3.2.1.*

Presupunând câmpul vectorial $f(x,u)$ ca fiind un polinom în $u\in\mathbb{R}^d$, construim în teorema 3.2.1 sistemul gradient care depinde de $x_0\in\mathbb{R}^n$ fixat. Formularea problemei şi rezultatul din teorema 3.2.1 se bazează pe următoarea ipoteză:

Ipoteza 3.2.1. *Sistemul de control (2.1) cu* $f\in C^\infty\left(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^n\right)$ *poate fi extins la sistemul gradient de control (2.2), unde:*

$$g\in C^\infty\left(B(0,2\rho)\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^n\right), q\in C^\infty\left(\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^M\right).$$

Teorema 3.2.1. *Presupunem că ipoteza 3.2.1 este satisfacută de (2.1) şi asociem sistemul gradient de control (2.2). Fie* $\left(\hat{u},\hat{p}\right)\in W_{ad}\times P$ *perechea optimală şi definim funcția valoare* $\hat{V}(t,x), t\in[0,a], x\in\mathbb{R}^n$ *ca în (2.4).*
Atunci ecuațiile HJB:

$$\text{(2.5)}\qquad \begin{aligned} &\partial_t\hat{V}(t,x)+\left\langle \partial_x\hat{V}(t,x), g\left(\hat{p}(t),x,\hat{u}(t)\right)\right\rangle=0,\\ &\hat{V}(a,x)=\varphi(x),\ x\in\mathbb{R}^n\end{aligned}$$

$$\text{(2.6)}\qquad \max_{u\in U}\left\langle \partial_x\hat{V}\left(t,\hat{x}(t)\right), f\left(\hat{x}(t),u\right)\right\rangle=\left\langle \partial_x\hat{V}\left(t,\hat{x}(t)\right), f\left(\hat{x}(t),\hat{u}(t)\right)\right\rangle$$

au loc pentru fiecare $t\in[0,a]$, *unde* $\hat{u}(s):=\hat{u}\left(s,\hat{p}(s)\right), s\in[0,a]$ *este o funcție continuă.*

Definitia 3.2.3. *Mulțimea* W_{ad} *a feedback-urilor de control în sens slab constă în toate funcțiile mărginite* $u(t,p):[0,T]\times B(0,2\rho)\to U$ *care sunt funcții de* $t\in[0,T]$ *continue pe porțiuni şi funcții Lipschitz de* $p\in B(0,2\rho)$, *unde* $U\subset\mathbb{R}^d$ *este o mulțime închisă fixată.*

P reprezintă mulțimea constând din toate soluțiile satisfăcând sistemul de control auxiliar (2.2) pentru orice control feedback în sens slab $\hat{u}\in W_{ad}$.

Observație: Concluziile teoremei 3.2.1 depind de ipoteza 3.2.1 care specifică existența sistemului gradient de control (2.2). În teorema următoare vom construi sistemul gradient de control (2.2) implicat.

Teorema 3.2.2. *Considerăm sistemul de control (2.1) unde* $f\in C^\infty\left(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^n\right)$ *este un polinom în* $u\in\mathbb{R}^d$. *Fie* $\{g_0,\dots,g_m\}\subset C^\infty\left(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n\right)$ *câmpurile vectoriale corespunzătoare care sunt coeficienți ai polinomului* $f(x,\cdot)$ *şi presupunem că algebra Lie reală* $L(g_0,g_1,\dots,g_m)\subset C^\infty\left(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n\right)$ *este de tip finit. Atunci sistemul (2.1) poate fi extins la sistemul gradient de control (2.2).*

Observația 3.2.2 Ecuațiile HJB din teorema 3.2.1. sugerază următorul algoritm pentru obținerea unui candidat optimal $\hat{u}\in W_{ad}$. Pornim din $u_0\in W_{ad}$ şi definim $p_0(t):[0,T]\to B(0,2\rho)$ ca soluție corespunzătoare a sistemului de control auxiliar (2.2). Alegem funcția valoare $V_0(t,x)=\varphi\left(G\left(p_0(a)\right)\right)\left[\psi\left(p_0(t),x\right)\right], t\in[0,a], x\in\mathbb{R}^n$, unde $0<a\le T$ este primul timp de ieşire al lui p_0 din bila $B(0,\rho)\subset\mathbb{R}^M$. Găsim $u_1\in W_{ad}$ astfel încât:

$$\max_{u\in U}\left\langle \partial_x V_o\left(t,G(p)[x_0]\right), f\left(G(p)[x_0],u\right)\right\rangle=\left\langle \partial_x V_0\left(t,G(p)[x_0]\right), f\left(G(p)[x_0],u_1(t,p)\right)\right\rangle$$

pentru orice $(t,p)\in[0,a]\times B(0,\rho)$. Atunci definim $p_1(t):[0,T]\to B(0,2\rho)$ ca soluție a lui (2.2) corespunzătoare lui $u_1\in W_{ad}$, şi fie

$$V_1(t,x):=\varphi\left(G\left(p_1(a)\right)\right)\left[\psi\left(p_1(t),x\right)\right],t\in[0,a],x\in\mathbb{R}^n,$$

funcția valoare corespunzătoare, unde $0<a\le T$ este primul timp de ieşire a lui p_1 din bila $B(0,2\rho)\subset\mathbb{R}^M$. Găsim $u_2\in W_{ad}$ astfel încât ecuația (2.5) scrisă cu $\widehat{V}=V_1$ este satisfăcută. În acest mod producem un şir $\left\{V_n(t,x),u_n(t,p)\right\}_{n\ge 0}$ astfel încât orice punct limită $\left\{\widehat{V}(t,x),\hat{u}(t,p)\right\}$ poate fi văzut ca o soluție generalizată a ecuației HJB din teorema 3.2.1.

În cazul stohastic, un sistem complet de control stochastic este dat de o mulțime finită de câmpuri vectoriale de control $\left\{f_0(x,u),f_1(x,u),...,f_m(x,u)\right\}$ unde f_0 defineşte driftul iar $f_1,...,f_m$ sunt câmpurile vectoriale de difuzie. În cazul în care comenzile feedback admisibile sunt aplicații netede în $x\in\mathbb{R}^n$ putem să asociem ecuația Kolmogorov corespunzătoare sau ecuația Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB), ecuații care descriu evoluția unei anumite funcționale cost.

Suportul bibliografic al acestui subiect este semnificativ şi bine reprezentat ; ne mărginim să menționăm referințele [1, 14, 19] din bibliografie. În acest caz, sistemul extins GSCS, clasa de comenzi admisă (comenzi în sens slab sub formă de feedback) şi chiar funcționalele sunt definite în conformitate cu o transformare netedă de coordonate $x=G(p)[y],x,y\in\mathbb{R}^n$, pentru orice $p\in B(0,2\rho)\subset\mathbb{R}^M$, astfel încât câmpul vectorial care depinde de $x\in\mathbb{R}^n$ poate fi scris ca o derivată Lie a lui $x=G(p)[x_0],p\in B(0,2\rho)$. Se introduce o variabilă de stare extinsă $(x,p)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^M$ şi se construieşte o aplicație netedă $x=G(p)[y]$ a cărei inversă $y=\left[G(p)\right]^{-1}\overset{def}{=}\psi(p,x)$ utilizează o algebră Lie de tip finit, generată de câmpurile vectoriale de control originale.

Ideea de bază a acestei analize a apărut în [7] şi a fost aplicată la anumite SPDE în [3] considerând algebre Lie finit-dimensionale. Folosind comenzile în sens slab sub formă de feedback $(u\in W_{ad})$ ca funcții Lipschitz de $p\in B(0,2\rho)\subset\mathbb{R}^M$, funcționala cost poate fi descrisă folosind ecuațiile Hamilton-Jacobi corespunzătoare câmpurilor vectoriale aleatoare în raport cu $x\in\mathbb{R}^n$. Deşi câmpurile vectoriale de difuzie depind de comenzile $u\in W_{ad}$

se obține o descriere a optimalității cu ajutorul unui principiu variațional global. Principalele rezultate sunt date în teorema 3.3.1 în care se stabileşte principiul variațional global şi în teorema 3.3.2 în care se construieşte un GSCS în care $f_0, f_1, ..., f_m$ sunt presupuse a fi polinoame în raport cu variabila de control $u \in \mathbb{R}^d$. În secțiunea 3.4 este dat un algoritm care se bazează pe principiul variațional global GVP dat în Teorema 3.3.1.

Considerăm sistemul neliniar de control de forma următoare :

$$(3.1) \qquad \begin{cases} d_t x = f_0(x,u)\,dt + \sum_{j=1}^{m} f_j(x,u) \circ dw_j(t), \quad t \in [0,T],\ x(0) = x_0 \\ x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in U(multime\ inchisa) \subset \mathbb{R}^d \end{cases}$$

unde câmpul vectorial neted de control $f_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n)$ este polinom în raport cu $u \in \mathbb{R}^d$ pentru fiecare $i \in \{0,1,...,m\}$ şi $w(t) := (w_1(t), w_2(t), ..., w_m(t)) \in \mathbb{R}^m,\ t \in [0,T]$ este un proces Wiener standard peste spațiul probabilitate complet filtrat $\{\Omega, \mathcal{F} \supset \{\mathcal{F}_t\}, P\}$.

Definitia 3.3.1. *Fie bila $B(0,2\rho) \subset \mathbb{R}^M$ fixată. Spunem că mulțimea de câmpuri vectoriale netede $\{(g_0,q_o),(g_1,q_1),...,(g_m,q_m)\}, q_i \in C^\infty(\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^M)$, $g_i \in C^\infty(B(0,2\rho) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n)$ defineşte un sistem gradient de control stohastic (GSCS) asociat cu (3.1), dacă există un difeomorfism $x = G(p)[y],\ x, y \in \mathbb{R}^n$, aplicație netedă pentru orice $p \in B(0,2\rho)$ astfel incat $G \in C^\infty(B(0,2\rho) \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ şi inversa sa $y = [G(p)]^{-1}(x) := \psi(p,x)$ au derivatele parțiale de ordinul 1 si 2 mărginite, şi:*

$(i)\quad G(0)[y] = y,$

$(ii)\quad \partial_p G(p)[\psi(p,x)]\, q_i(p,u) = g_i(p,x,u),\ i \in \{0,1,...,m\}$

$(iii)\quad q_i(p,u) = 0$ *pentru* $p \notin B(0,2\rho)$ *si* $g_i(p, G(p)[x_0], u) = f_i(G(p)[x_o], u)$ *pentru* $p \in B(0,\rho),\ i \in \{0,1,...,m\}$, *unde* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *este fixat.*

Pentru anumite câmpuri vectoriale controlate netede $q_i \in C^\infty(\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^M)$, $g_i \in C^\infty(B(0,2\rho) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n)$, $i \in \{0,1,...,m\}$, definim următorul sistem de control stochastic :

$$\text{(3.2)}\qquad \begin{cases} d_t x = g_0(p,x,u)\,dt + \sum_{j=1}^{m} g_j(p,x,u)\circ dw_j(t),\; x(0) = x_0,\, x\in \mathbb{R}^n \\ d_t p = q_0(p,u)\,dt + \sum_{j=1}^{m} q_j(p,u)\circ dw_j(t),\; p(0) = 0,\, p\in B(0,2\rho) \end{cases}$$

pentru $t\in[0,T]$, $u\in U\subseteq \mathbb{R}^d$, unde integrala de tip Stratonovich este exprimată utilizând integrala Itô astfel:

$$\begin{cases} q_j(p,u)\circ dw_j(t) = q_j(p,u)\,dw_j(t) + \frac{1}{2}\partial_p q_j(p,u)\,q_j(p,u)\,dt \\ g_j(p,x,u)\circ dw_j(t) = g_j(p,x,u)\,dw_j(t) + \\ \qquad\qquad + \frac{1}{2}\left[\partial_p g_j(p,x,u)\,q_j(p,u) + \partial_x g_j(p,x,u)\,g_j(p,x,u)\right]dt \end{cases}$$

pentru orice $j\in\{0,1,...,m\}$.

Definiția 3.3.2. *Spunem că sistemul de control stochastic (3.1) poate fi extins la GSCS (3.2) cu condiția să găsim o aplicație netedă* $x = G(p)[y]$, $x,y\in\mathbb{R}^n$, $p\in B(0,2\rho)\subseteq\mathbb{R}^M$ *astfel încât condițiile (i)-(iii) din definiția 3.3.1 să* fie *satisfăute.*

Observăm că integrala de tip Stratonovici „$\circ$ „ în ambele sisteme (3.1) şi (3.2) nu cere ca funcția de comandă admisă $u = u(t,p)$ să depindă neted de $p\in B(0,2\rho)$.

Ipoteza 3.3.1. *Presupunem că sistemul de control stochastic (3.1) cu* $f_i\in C^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^n)$ *poate fi extins la GSCS (3.2) cu* $g_i\in C^\infty(B(0,2\rho)\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^n)$, $q_i\in C^\infty(\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^M)$ *şi* $q_i(p,u) = 0$ *pentru orice* $p\in B(0,2\rho),\, i\in\{0,1,...,m\}$.

Teorema 3.3.1. *Fie* $(\hat{u},\hat{p})\in W_{ad}\times\Gamma$ *o soluție optimală pentru S şi presupunem că ipoteza 3.3.1 este satisfacută. Atunci următoarea inegalitate este adevarată*

$$0\le E\left[H\left(t,u\left(\hat{p}(t)\right)\right) - H\left(t,\hat{u}(t)\right)\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} E\left\langle S_j\left(t,u\left(\hat{p}(t)\right)\right) - S_j\left(t,\hat{u}(t)\right), g_j\left(\hat{p}(t),\hat{x}(t),u\left(\hat{p}(t)\right)\right) - g_j\left(\hat{p}(t),\hat{x}(t),\hat{u}(t)\right)\right\rangle$$

pentru orice $u(p): B(0,2\rho)\subseteq\mathbb{R}^M\to U\subseteq\mathbb{R}^d$ si $t\in[0,T]$.

(S) este problema de control constând din funcţionala $J\left(u,\widehat{p}\right)$ dată de:

$$J\left(u,\widehat{p}\right)=E\varphi\left(\psi\left(\widehat{p}(T),\bar{x}(T)\right)\right)$$

şi asociată cu GSCS (3.2) ca restricţii; $\varphi\in C^2\left(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}\right)$ cu condiţia de creştere polinomială pentru $\varphi,\partial_x\varphi,\partial_x^2\varphi$.

Aici W_{ad} a comenzilor feedback în sens slab constă în toate funcţiile mărginite $u(t,p):[0,T]\times B(0,2\rho)\to U$ care sunt r.p.r.c în raport cu $t\in[0,T]$ şi Lipschitz în $p\in B(0,2\rho)$.

Spunem că $u(t,p):[0,T]\times B(0,2\rho)\to U$ este o variabilă aleatoare continuă la dreapta pe porţiuni (r.p.r.c) în raport cu $t\in[0,T]$ dacă mulţimea finită de timpi Markov $0\le\tau_1\le\tau_2\le\ldots\le\tau_N\le T$ există astfel încât $u(t,p)$ restricţionată la fiecare $[\tau_i,\tau_{i+1})$ este continuă.

Γ este mulţimea constând din toate soluţiile sistemului auxiliar de control (3.2) utilizând $\hat{u}\in W_{ad}$.

Teorema 3.3.2. *Presupunem că sistemul de control stochastic (3.1) este dat astfel încât câmpul vectorial neted controlat* $f_i\in C^\infty\left(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^n\right)$ *este polinom în raport cu* $u\in\mathbb{R}^d$ *pentru fiecare* $i\in\{1,\ldots,m\}$. *Fie* $\{X_1,\ldots,X_N\}\subseteq C^\infty\left(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n\right)$ *câmpuri vectoriale reprezentând coeficienţii polinoamelor* $\{f_0,f_1,\ldots,f_m\}$. *Presupunem că algebra reală Lie* $L(X_1,\ldots,X_N)\subseteq C^\infty\left(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n\right)$ *este de tip finit. Atunci sistemul de control stochastic (3.1) poate fi extins la GSCS (3.2).*

O posibilitate simplă de a produce şirul $\{u_n,p_n\}_{n\ge1}\subseteq W_{ad}\times\Gamma$ care este în acord cu principiul variaţional din teorema 3.2.1, este de a folosi numai funcţiile scalare $H(t,u)$ care reprezintă extinderea funcţiei hamiltoniene asociată cu problema optimală stochastică (S).

În acest scop, pornind cu $u_1\in W_{ad}$, definim şirul $\{u_n,p_n\}_{n\ge1}\subseteq W_{ad}\times\Gamma$, unde p_n satisface (3.2) corespunzător lui $u_n\in W_{ad}$ şi $u_{n+1}\in W_{ad}$ se determină astfel încât:

$$H^n\left(t,\bar{u}_{n+1}(t)\right)\le H^n(t,u),\quad (t,u)\in[0,T]\times U \tag{3.24}$$

unde $\bar{u}_{n+1}(t)=u_{n+1}\left(t,p_n(t)\right)$, si

$$H^n(t,u):=\left\langle\psi_0^n(t),g_0^n(t,u)\right\rangle+\sum_{j=1}^m\left\langle\psi_j^n(t),g_j\left(p_n(t),x_n(t),u\right)\right\rangle \tag{3.25}$$

Aici $x_n(t) = G(p_n(t))[x_0]$ si $\psi_i^n(t), i \in \{0,1,...,m\}$, sunt definite astfel :

(3.26) $$\begin{cases} \psi_0^n(t) = \left[\partial_x \psi\left(p_n(t), x_n(t)\right)\right]^* \partial_x \varphi(x_0), \\ \psi_j^n(t) = \left[\partial_x g_j\left(p_n(t), x_n(t), u_n(t)\right)\right]^* \psi_0^n(t), \ j \in \{1,2,...,m\} \end{cases}$$

În plus, $g_0^n(t,u)$ este dat de:

(3.27)

$$g_0^n(t,u) := g_0\left(p_n(t), x_n(t), u\right) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^m \partial_x g_j\left(p_n(t), x_n(t), u\right) g_j\left(p_n(t), x_n(t), u_n(t)\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^m \partial_p g_j\left(p_n(t), x_n(t), u\right) g_j\left(p_n(t), u_n(t)\right)$$

Observăm că sistemul gradient de control asociat este definit în teorema 3.2.1 şi sunt verificate ecuaţiile:

(3.28) $$\begin{cases} g_i\left(p_n(t), x_n(t), u\right) = \partial_p G\left(p_n(t)\right)[x_0]\, q_i\left(p_n(t), u\right) \\ \partial_x g_i\left(p_n(t), x_n(t), u\right) = \partial_p\left[\partial_y G\left(p_n(t)\right)[x_0]\right] q_i\left(p_n(t), u\right) \end{cases}$$

pentru $t \in [0,T], u \in U$ şi $i \in \{0,1,...,m\}, n \geq 1$.

Astfel şirul $\{u_n, p_n\}_{n\geq 1} \subseteq W_{ad} \times \Gamma$ satisface (3.24) şi va fi numit soluţie generalizată a problemei de control (S).

Capitolul 4

Se referă la reprezentarea gradient si comportarea asimptotică a soluţiilor cad-lag asociate cu ecuaţii diferenţiale cu impulsuri.

Este în întregime nou, cu posibilităţi de dezvoltare. Ceva incipient s-a prezentat la conferinţa AMAMEF, Viena 2008. Rezultatele principale apar în referinţa [9] din bibliografie.

În prima parte este dată definiţia reprezentării gradient a soluţiilor cad-lag şi sunt prezentate pe larg o serie de comentarii asupra acestei reprezentări. Apar elemente noi faţă de reprezentarea gradient din cazul continuu (a se vedea şirul de probleme la frontieră).

Prin considerarea ecuaţiilor diferenţiale neliniare cu impulsuri au apărut probleme dificile specifice generate de influenţa componentei discontinue asupra celei continue, ambele descriind soluțiile cad-lag corespunzătoare fără să fie separate. O reprezentare gradient a soluțiilor cad-lag poate fi văzută ca o metodă pentru a utiliza aplicațiile difeomorfism ca să obținem o reprezentare integrală în care cele două componente acționează separat.

Pentru realizarea acestui scop trebuie să începem prin a analiza partea de salt redusă dată de câmpuri vectoriale neliniare şi unde apar toate noțiunile esențiale ale reprezentării gradient. Apoi este prezentată teorema corespunzătoare de reprezentare integrală unde au fost analizate două cazuri: câmpurile comută şi câmpurile sunt în involuție. Reprezentarea gradient fiind obținută în teorema 4.4.3.1 pentru cazul în care câmpurile comută şi în teorema 4.4.4.1 pentru cazul în care câmpurile sunt în involuție. Rezultatele sunt prezentate în detaliu în ambele situații (a se vedea şi teoremele 4.4.2.1 şi 4.4.4.2).

Ecuațiile diferențiale ordinare cu impulsuri vor conține salturi şi comutări determinate de un proces constant pe porțiuni şi mărginit

$$\lambda(t,\omega) = \left(y(t,\omega), \mu(t,\omega)\right) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d(\Lambda)$$

verificând $\lambda(t,\omega) = \lambda(t_j,\omega), t \in [t_j, t_{j+1}), j \geq 0, t_0 = 0$, pentru un şir $\{t_j\}_{j\geq 0} \uparrow \subseteq \mathbb{R}_+$, unde $\lambda(t_j,\cdot)$ este un vector aleator $\mathcal{F}_j$ - măsurabil pe spațiul probabilitate filtrat $\{\Omega, \{\mathcal{F}j\}\uparrow \subseteq \mathcal{F}, P\}$. Prin abuz, vom nota $\lambda(t,\omega) = \lambda(t)$ şi $\lambda(t_j,\omega) = \lambda(t_j), t \geq 0, j \geq 0$. Soluțiile (cad-lag) sunt funcții continue pe porțiuni având continuitate la dreapta (continuite a droite) şi limită la stânga (limite a gauche) la fiecare moment $t = t_j$ astfel încât următorul sistem de ecuații diferențiale este satisfăcut:

$$(1.1)\quad \begin{cases} d_t z(t) = f_0\left(z(t); \mu(t_j)\right) dt + \sum_{i=1}^{m} f_i\left(z(t_j -); \mu(t_j -)\right)\left[y_i(t_j) - y_i(t_j -)\right], t \in [t_j, t_{j+1}), j \geq 0 \\ z(0) = x, \text{ unde } v(t-) = \lim_{s \uparrow t} v(s), t > 0 \end{cases}$$

Aici câmpurile vectoriale $h(z;\mu) = f_i(z;\mu), i \in \{0,1,...,m\}$ sunt funcții continue de $(z,\mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$ cu valori în $\mathbb{R}^n$, satisfăcând o proprietate de continuitate Lipschitz în $z \in \mathbb{R}^n$,

(1.2) $\left|h\left(z'';\mu(t)\right) - h\left(z';\mu(t)\right)\right| \leq C_1\left|z'' - z'\right|, \forall z', z'' \in \mathbb{R}^n, t \geq 0, \text{unde } C_1 > 0$ este o constantă.

Presupunând că ipoteza (1.2) are loc, o soluție (cad-lag) unică pentru (1.1) se construieşte după cum urmează:
$\left\{ z(t,x) = z_j(t), t \in [t_j, t_{j+1}), j \geq 0 \right\}$ unde $\left\{ z_j(t) : t \in [t_j, t_{j+1}) \right\}$ este procesul continuu care satisface următorul sistem de ecuații integrale:

(1.3) $$z_0(t) = x + \int_0^t f_0(z_0(s); \mu(0))ds, t \in [0, t_1),$$

(1.4) $$z_j(t) = z_{j-1}(t_j -) + \sum_{i=1}^{m} f_i\left(z_{j-1}(t_j -); \mu(t_j -)\right)\left[y_i(t_j) - y_i(t_j -)\right] + \\ + \int_{t_j}^{t} f_0(z_j(s); \mu(t_j))ds, t \in [t_j, t_{j+1}), j \geq 1$$

unde $z_{j-1}(t_j -) \overset{def}{=} \lim_{t \uparrow t_j} z_{j-1}(t), j \geq 1$.

Definiția 4.4.1.2. *Spunem că* $\hat{G} \in C_g^2(R^m; Z)$, *împreună cu o pereche de procese constante pe porțiuni* $\left\{ (p(t), \hat{p}(t)) = (p(t_j), \hat{p}(t_j)) \in B(0,R) \times B(0,R) : t \in [t_j, t_{j+1}), j \geq 0 \right\}$ *şi cu procesul continuu* $\left\{ \hat{z}(t) = \hat{z}_j(t) : t \in [t_j, t_{j+1}), j \geq 0 \right\}$ *definesc o reprezentare gradient pentru soluția (cad - lag)* $\left\{ z(t,x) = z_j(t) : t \in [t_j, t_{j+1}), j \geq 0 \right\}$ *satisfăcând (1.1) dacă:*

$$\begin{cases} z_j(t) = \hat{G}\left(\hat{p}(t_j -); \hat{z}_j(t)\right) + \sum_{1 \leq k \leq m} f_k\left(\hat{G}\left(\hat{p}(t_j -); \hat{z}_j(t_j)\right)\right)\left[y_k(t_j) - y_k(t_j -)\right], t \in [t_j, t_{j+1}) \\ \partial_y \hat{G}\left(\hat{p}(t_j -); \hat{z}_j(t_j)\right)\left[p(t_j) - p(t_j -)\right] = \sum_{k=1}^{m} f_k\left(\hat{G}\left(\hat{p}(t_j -); \hat{z}_j(t_j)\right)\right)\left[y_k(t_j) - y_k(t_j -)\right], j \geq 0 \end{cases}$$

$Z = C^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ iar $C_g^2(\mathbb{R}^m; Z) \subseteq C^2(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ este subspațiul funcțiilor $G(y,z) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ îndeplinind:

(4.1.1) $G(0,z) = z$ şi există inversa $H(y;\cdot) = \left[G(y;\cdot)\right]^{-1}$ pentru fiecare $y \in B(0,R) \subseteq \mathbb{R}^m$.

$\hat{G} \in C_g^2\left(\mathbb{R}^m; Z\right)$ se va fixa sub forma unei compoziții finite de curenți globali:

(4.1.3) $\hat{G}(y;z) \overset{\text{def}}{=\!=} G_1(y_1) \circ \ldots \circ G_m(y_m)(z), y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m, z \in \mathbb{R}^n,$

unde $G_i(y_i)(z), y_i \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}^n$, reprezintă curentul generat de câmpul vectorial $f_i \in C^2\left(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n\right)$.

Restricția semnificativă din Definiția 4.4.1.2 este că vom putea construi $\left[p\left(t_j\right) - p\left(t_j -\right)\right] \in \mathbb{R}^m$ dacă:

(4.1.4) există câmpurile netede $\left\{q_k(p) \in \mathbb{R}^m : p \in \mathbb{R}^m\right\}$, $k \in \{1, \ldots, m\}$, astfel încât $\partial_y \hat{G}(p;z) q_k(p) = f_k\left(\hat{G}(p;z)\right), (\forall) p \in \mathbb{R}^m, z \in \mathbb{R}^n, 1 \le k \le m$.

Presupunând (4.1.4), vom construi $\left[p\left(t_j\right) - p\left(t_j -\right)\right]$ ca soluție a ecuației:

(E1) $p\left(t_j\right) - p\left(t_j -\right) = \sum_{k=1}^{m} q_k\left(\hat{p}\left(t_j -\right)\right)\left[y_k\left(t_j\right) - y_k\left(t_j -\right)\right], j \ge 0.$

4.2 Reprezentarea gradient asociată cu soluții (cad-lag)

(I) **Cazul** $\{f_1, \ldots, f_m\} \subseteq C_b^2\left(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n\right)$ **comută**

Sistemul de ecuații diferențiale cu impulsuri va fi dat de:

$$
(2.1)\quad \begin{cases} d_t z(t) = f_0\left(z(t);\mu\left(t_j\right)\right)dt + \sum_{i=1}^{m} f_i\left(z\left(t_j -\right)\right)\left[y_i\left(t_j\right) - y_i\left(t_j -\right)\right], \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad t \in \left[t_j, t_{j+1}\right), j \geq 0 \\ z(0) = x \end{cases}
$$

Asupra câmpurilor $\{f_1, \ldots, f_m\} \subset C_b^2\left(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n\right)$ se face presupunerea că:

(4.2.3) $\qquad \{f_1, \ldots, f_m\} \subseteq C_b^2\left(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n\right) \subseteq Z$ comută, i.e.

orice paranteza Lie verifică $[f_i, f_k] = 0,\ i, k \in \{1, \ldots, m\}$.

De asemenea, procesul constant pe porțiuni $\left\{y(t) \in \mathbb{R}^m : t \geq 0\right\}$ satisface:

(4.2.4) $\qquad V_y \overset{\text{def}}{=\!=} \sum_{j=0}^{\infty} \left|y\left(t_{j+1}\right) - y\left(t_j\right)\right| \leq \rho$, $y(t) = 0$, $t \in (-t_1, t_1)$.

unde $\rho > 0$ este o constantă.

Considerăm mai întâi sistemul cu salturi redus:

$$
(4.2.7)\quad \begin{cases} d_t h(t, \hat{z}) = \sum_{1 \leq k \leq m} f_k\left(h(t-;\hat{z})\right) dy_k(t), t \geq 0 \\ h(0, \hat{z}) = \hat{z} \in \mathbb{R}^n \end{cases}
$$

Soluția (cad-lag) din (4.2.7) se construieşte ca un proces constant pe porțiuni verificând $\left\{h(t;\hat{z}) = h\left(t_j;\hat{z}\right), t \in \left[t_j, t_{j+1}\right), j \geq 0\right\}$ şi:

$$
(4.2.8)\quad \begin{cases} h\left(t_j;\hat{z}\right) = h\left(t_j -;\hat{z}\right) + \sum_{1 \leq i \leq m} f_i\left(h\left(t_j -;z\right)\right)\left[y_i\left(t_j\right) - y_i\left(t_j -\right)\right], j \geq 0 \\ h(0;\hat{z}) = \hat{z} \in \mathbb{R}^n \end{cases}
$$

Asocierea unei reprezentări gradient va respecta restricțiile din Definiția 4.1.2 (vezi 4.1) şi în acest sens alegem $\hat{G} \in C_g^2\left(\mathbb{R}^m; Z\right)$.

$$\begin{aligned}&\hat{G}(y;z) \overset{\text{def}}{=\!=} G_1(y_1)\circ\ldots\circ G_m(y_m)(z),\ y=(y_1,\ldots,y_m)\in\mathbb{R}^n,\\ &\hat{G}(0,z)=z\in\mathbb{R}^n\end{aligned}\tag{4.2.9}$$

unde $G_k(y_k)(z)$ este curentul global generat de $f_k\in C_b^2\left(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n\right)$, $k\in\{1,\ldots,m\}$. Prin definiție şi folosind (4.2.3) avem:

$$\begin{cases}\hat{H}(y;\cdot)\overset{\text{def}}{=\!=}\left[\hat{G}(y;\cdot)\right]^{-1}=\hat{G}(-y;\cdot),\\ \hat{G}(y''+y';z)=\hat{G}\left(y';\hat{G}(y'';z)\right) \text{ şi}\\ \partial_y\hat{G}(y;z)=\left(f_1\left(\hat{G}(y;z)\right),\ldots,f_m\left(\hat{G}(y;z)\right)\right),(\forall)\,y\in\mathbb{R}^m,z\in\mathbb{R}^n\end{cases}\tag{4.2.10}$$

De asemenea, ipoteza (4.1.4) asociată cu Definiția 4.4.1.2 a reprezentării gradient este satisfăcută dacă se presupune că $\{f_1,\ldots,f_m\}$ comută (vezi (4.2.3)) şi ca urmare obținem $q_k(y)=e_k, k\in\{1,\ldots,m\}$ unde $\{e_1,\ldots,e_m\}\subseteq\mathbb{R}^m$ este baza canonică. Această observație ne arată că procesul constant pe porțiuni $\left\{p(t)=p(t_j)\in\mathbb{R}^m : t\in\left[t_j,t_{j+1}\right), j\geq 0\right\}$ ca soluție din (E1) (vezi Definiția 4.4.1.2) trebuie să verifice:

$$\begin{aligned}&p(t_j)-p(t_j-)=y(t_j)-y(t_j-)\\ &p(t)=y(t)=0, t\in(-t_1,t_1), j\geq 0\end{aligned}\tag{4.2.11}$$

Ca urmare, $p(t)=y(t),(\forall)\,t\geq 0$, şi alegând $\hat{z}\in\mathbb{R}^n$ ca un proces continuu $\{\hat{z}(t)=\hat{z}:t\geq 0\}$, trebuie să definim un proces constant pe porțiuni

$$\left\{\hat{y}(t)=\hat{y}(t_j)\in\mathbb{R}^m : t\in\left[t_j,t_{j+1}\right), j\geq 0\right\},\ \hat{y}(t)=0, t\in(-t_1,t_1),$$

astfel ca:

$$\begin{aligned}h(t_j,\hat{z})&=\hat{G}\left(\hat{y}(t_j-);\hat{z}\right)+\\ &+\sum_{k=1}^{m} f_k\left(\hat{G}\left(\hat{y}(t_j-);\hat{z}\right)\right)\left[y_k(t_j)-y_k(t_j-)\right], j\geq 0\end{aligned}\tag{4.2.12}$$

unde $h(t_j,\hat{z})\in\mathbb{R}^n$ definit în (4.2.8) înlocuieşte procesul continuu $\left\{z_j(t):t\in\left[t_j,t_{j+1}\right)\right\}$ din cadrul soluției (cad-lag) (vezi Definiția 4.1.2) .

Soluția unică $\hat{y}\left(t_{j}-\right)=\hat{y}\left(t_{j-1}\right)$ din (4.2.12) se obține prin rezolvarea următoarelor ecuații:

$$\hat{G}\left(\hat{y}\left(t_{j-1}\right);\hat{z}\right)=h\left(t_{j-1};\hat{z}\right),\ j\geq 1 \tag{4.2.13}$$

care ne conduc direct la $\hat{y}(0)=0$ şi $\hat{G}\left(\hat{y}\left(t_{j}\right);\hat{z}\right)=h\left(t_{j};\hat{z}\right)$ pentru orice $j\geq 1$.

Este util să presupunem că fiecare $f_k\in C_b^2\left(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n\right)$ are următoarea structură:

$$f_k(z)=\alpha_k(z)\,b_k,\ k\in\{1,\dots,m\}, \tag{4.2.16}$$

unde $\{b_1,\dots,b_m\}\subseteq\mathbb{R}^n$ sunt fixați iar $\alpha_k(\cdot)\in C_b^2\left(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}\right)$ satisface $0<\delta\leq\alpha_k(z)\leq M$, $z\in\mathbb{R}^n$.

Soluția unică pentru (4.2.13) este construită ca limita unui şir Cauchy $\left\{\hat{y}^j\right\}_{j\geq 0}\subseteq\hat{Y}$ în spațiul metric complet $\hat{Y}$, unde $\hat{Y}\overset{\text{def}}{=\!=}C\left(B(0,\rho)\times\mathbb{R}^{2n};B(0,2\rho_1)\right)$

Lema 4.4.2.1. *Considerăm funcția* $\hat{G}(y;z):\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ *definită în (4.2.9) unde câmpurile vectoriale* $\{f_1,\dots,f_m\}\subseteq C_b^2\left(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n\right)$ *îndeplinesc condițiile (4.2.3) şi (4.2.16). Asociem următoarele ecuații*

$(\mathbf{E})$ $\hat{G}(\hat{y};z_2)=z_2+\sum\limits_{1\leq k\leq m}f_k(z_1)\,y_k,\quad y=(y_1,\dots,y_m)\in B(0,\rho)\subseteq\mathbb{R}^m$

$z_1,z_2\in\mathbb{R}^n$ *şi necunoscuta* $\hat{y}\in B(0,2\rho_1)\subseteq\mathbb{R}^m$, $\rho_1=\dfrac{M}{\delta}\rho$, *unde* $\rho>0$.

Atunci există o singură funcție continuă şi mărginită

$$\hat{y}=f(y,z_1,z_2):B(0,\rho)\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to B(0,2\rho_1)$$

verificând (E) *şi :*

$$\|f(y)\|\overset{\text{def}}{=\!=}\sup_{z_1,z_2\in\mathbb{R}^n}\left|f(y,z_1,z_2)\right|\leq\frac{2M}{\delta}|y|\leq 2\rho_1,(\forall)\,y\in B(0,\rho)$$

Observație: Demonstrația lemei are la bază principiul contracției.

Scopul rezolvării ecuațiilor de forma (E) din Lema 4.4.2.1 este acela de a găsi soluția ecuațiilor (4.2.13) pentru $j = 2$.

Aceleaşi ecuații (E) din Lema 4.4.2.1 sunt utile pentru a proba că ecuațiile (4.2.13) se pot rezolva pentru orice $j \geq 1$ folosind un argument de inducție.

Calculele şi observațiile de mai sus, având ca țintă sistemul redus cu salturi din (4.2.7) cu soluția (cad-lag) dată în (4.2.8), se vor reformula sub forma unei teoreme.

Teorema 4.4.2.1. *Presupunem că procesul constant pe porțiuni* $\left\{ y(t) = y\left(t_j\right) : t \in \left[t_j, t_{j+1}\right), j \geq 0, y(0) = 0 \right\}$ *şi câmpurile vectoriale* $\{f_1, \ldots, f_m\} \subseteq C_b^2\left(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n\right) \subseteq Z$ *îndeplinesc ipotezele (4.2.3), (4.2.4) şi (4.2.16).*

Atunci există un proces constant pe porțiuni şi mărginit $\left\{ \hat{y}(t) = \hat{y}\left(t_j\right) \in \mathbb{R}^m : t \in \left[t_j, t_{j+1}\right), j \geq 0, \hat{y}(0) = 0 \right\}$ *astfel încât soluția (cad-lag) dată în (4.28) se poate exprima prin:*

$$h\left(t_j; \hat{z}\right) = \hat{G}\left(\hat{y}\left(t_j -\right); \hat{z}\right) + \tag{4.2.33}$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} f_k\left(\hat{G}\left(\hat{y}\left(t_j -\right); \hat{z}\right)\right)\left[y_k\left(t_j\right) - y_k\left(t_j -\right)\right], j \geq 0,$$

unde $\hat{G} \in C_g^2\left(\mathbb{R}^m; Z\right)$ *este definit în (4.2.9) şi*

$$V_{\hat{y}} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{j=1}^{\infty} \left|\hat{y}\left(t_j\right) - \hat{y}\left(t_j -\right)\right| \leq \frac{2M}{\delta} V_y \leq \frac{2M}{\delta} \rho = 2\rho_1. \tag{4.2.34}$$

Observație: În demonstrație se aplică teorema de punct fix din lema 4.4.2.1.

Proprietatea de comutare asumată în (4.2.3) ne conduce direct la concluzia că $\hat{G} \in C_g^2\left(\mathbb{R}^m; Z\right)$, fixat ca o compoziție finită de curenți.

$$\hat{G}(y; z) \stackrel{\text{def}}{=\!=} G(y_1) \circ \ldots \circ G_m(y_m)(z), \; y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m, z \in \mathbb{R}^n, \tag{4.3.1}$$

unde $G_i(y_i)(z)$ este curentul generat de $f_i \in C_b^2\left(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n\right)$ satisface următoarele ecuații:

(4.3.2) $\partial_y \hat{G}(y;z) = \left[f_1\left(\hat{G}(y;z)\right), \ldots, f_m\left(\hat{G}(y;z)\right)\right], y \in \mathbb{R}^m, z \in \mathbb{R}^n.$

Ecuațiile (4.3.2) ne arată că putem alege câmpurile vectoriale auxiliare $q_i(p) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $q_i(p) = e_i$, unde $\{e_1, \ldots, e_m\} \subseteq \mathbb{R}^m$ este baza canonică.

Teorema 4.4.3.1 *Considerăm sistemul de ecuații diferențiale ordinare cu impulsuri (4.2.1) unde câmpul vectorial* $f_0(z;\mu)$ *satisface ipoteza (4.2.2), iar câmpurile* $\{f_1, \ldots, f_m\} \subseteq C_b^2\left(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n\right)$ *şi procesul constant pe porțiuni* $\left\{ y(t) \subset \mathbb{R}^m; t \geq 0\right\}$ *îndeplinesc condițiile (4.2.3), (4.2.4) şi (4.2.16), unde* $\rho > 0$ *este suficient de mic astfel încât (4.2.19) se îndeplineşte. Atunci există un proces constant pe porțiuni* $\left\{ \hat{y}(t) = \hat{y}(t_j) : t \in \left[t_j, t_{j+1}\right), j \geq 0\right\}$ *cu (*$\hat{y}(t_j)$ *este* $\mathcal{F}_j$ *– măsurabil,* $j \geq 0$*) şi un proces continuu.*
$\left\{ \hat{z}(t,x) = \hat{z}_j(t) : t \in \left[t_j, t_{j+1}\right), j \geq 0\right\}$ *astfel încât soluția cad-lag din (4.2.1) are următoarea reprezentare gradient (vezi Definiția 4.4.1.2):*

(4.3.32)
$$z(t,x) = \hat{G}\left(\hat{y}(t_{j-1}); \hat{z}(t,x)\right) + \\ + \sum_{1 \leq k \leq m} f_k\left(\hat{G}\left(\hat{y}(t_{j-1}); \hat{z}(t_j,x)\right)\right)\left[y_k(t_j) - y_k(t_j -)\right]$$

$(\forall)\ t \in \left[t_j, t_{j+1}\right), j \geq 0,$

(4.3.33)
$$V_{\hat{y}} \overset{\text{def}}{=\!=} \sum_{j=1}^{\infty} \left|\Delta \hat{y}(t_j)\right| \leq \frac{2M}{\delta} \sum_{j=1}^{\infty} \left|\Delta y(t_j)\right| = \frac{2M}{\delta} V_y \leq \frac{2M}{\delta}\rho$$

În plus, procesul continuu $\left\{ \hat{z}(t,x) = \hat{z}_j(t) : t \in \left[t_j, t_{j+1}\right), j \geq 0\right\}$ *este soluția sistemului (4.3.30) unde câmpul* h_0 *este dat în (4.3.31), iar* $\hat{z}_0(t) = \hat{z}(t,x) = z_0(t), (\forall)\ t \in [0, t_1)$.

Observație: Ecuațiile (4.3.32) exprimă conținutul reprezentării gradient dată în Definiția 4.4.1.2 şi asociată cu ecuații diferențiale ordinare cu impulsuri (4.2.1).

4.4 Reprezentarea gradient asociată cu soluții cad-lag;

(II) *Cazul* $\{f_1,\dots,f_m\} \subseteq C_b^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ ***în involuție peste*** $\mathbb{R}$**.**

Sistemul de ecuații diferențiale ordinare cu impulsuri va fi cel descris în 4.2 şi pentru simplitate îl vom rescrie:

$$(4.4.1)\qquad \begin{cases} d_t z(t) = f_0\left(z(t);\mu(t_j)\,dt\right) + \\ \qquad + \sum\limits_{1\le i\le m} f_i\left(z(t_j -)\right)\left[y_i\left(t_j - y_i(t_j -)\right)\right], t\in\left[t_j,t_{j+1}\right), j\ge 0 \\ z(0) = x\in\mathbb{R}^n \end{cases}$$

Asupra câmpurilor $\{f_1,\dots,f_m\} \subseteq C_b^2(R^n;R^n)$ se presupune că:

(4.4.3a) fiecare pereche $(f_i,f_k), i<k$ este în involuție peste $\mathbb{R}$, $i\cdot e\ [f_i,f_k] = \alpha f_1 + \beta f_k$ pentru $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ constante;

$$(4.4.3b)\qquad f_k(z) = \alpha_k(z)\,b_k,\ k\in\{1,\dots,m\}$$

unde $\{b_1,\dots,b_m\}\subseteq\mathbb{R}^n$ sunt fixați iar $\alpha_k(\cdot)\subset C_b^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ satisface $0<\delta\le\alpha_k(z)\le M,\ z\in\mathbb{R}^n,\ k\in\mathbb{R}^n,\ k\in\{1,\dots,m\}$.

De asemenea, procesul constant pe porțiuni îndeplineşte:

$$(4.4.4)\qquad V_y \overset{\text{def}}{=\!=} \sum_{j=0}^{\infty}\left|y(t_{j+1}) - y(t_j)\right| \le \rho,\ y(t) = 0,\ t\in(-t_1,t_1),$$

unde $\rho > 0$ constantă.

Condițiile (4.4.3a) şi (4.4.3b) reprezintă o rafinare a celor de comutare asumate în 4.2, iar reprezentarea soluției cad-lag $\left\{z(t,x) = z_j(t) : t\in\left[t_j,t_{j+1}\right), j\ge 0\right\}$ care satisface sistemul (4.4.1) este dată prin ecuațiile:

$$(4.4.5)\qquad z_0(t) = x + \int_0^t f_0\left(z_0(s);\mu(0)\right)ds,\ t\in[0,t_1)$$

$$
(4.4.6)\quad \begin{aligned} z_j(t) = z_{j-1}(t_j-) + \sum_{1\le k\le m} f_k\big(z_{j-1}(t_j-)\big)\big[y_k(t_j) - y_k(t_j-)\big] + \\ + \int_{t_j}^{t} f_0\big(z_j(\ );\mu(t_j)\big)\,\mathrm{d}s,\ t\in\big[t_j.t_{j+1}\big) \end{aligned}
$$

unde $z_{j-1}(t_j-) \overset{\text{def}}{=\!=} \lim\limits_{t\uparrow t_j} z_{j-1}(t),\ j\ge 1$.

Reprezentarea gradient utilizată va fi cea dată în Definiția 4.4.1.2 (vezi 4.4.1) utilizând o funcție $\hat{G}\in C_g^2\left(\mathbb{R}^m;Z\right)$ fixată sub forma:

(4.4.7) $\hat{G}(p;z) = G_1(y_1)\circ\ldots\circ G_m(y_m)(z),\ p=(y_1,\ldots y_m)\in\mathbb{R}^m,\ z\in\mathbb{R}^n$

unde $G_i(y_i)(z)$, $y_i\in\mathbb{R}, z\in\mathbb{R}^n$, este curentul global generat de câmpul $f_i\in C_b^2\left(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n\right)$, $i\in\{1,\ldots,m\}$.

De la început trebuie menționat că de această dată neavând asumată proprietatea de comutare a câmpurilor $\{f_1,\ldots,f_m\}$ nu mai sunt adevărate ecuațiile $\partial_p\hat{G}(p;z) = \left[f_1\big(\hat{G}(p;z)\big),\ldots,f_m\big(\hat{G}(p;z)\big)\right]$.

În schimb se poate proba o formulă de reprezentare algebrică nesingulară de forma:

(4.4.8) $\partial_p\hat{G}(p;z) = \{f_1,f_2,\ldots f_m\}\big(\hat{G}(p;z)\big)A(p),(\forall)\ p\in\mathbb{R}^m,\ z\in\mathbb{R}^n$,

unde matricea $(m\times m)$, $A(p)$ este analitică în $p\in\mathbb{R}^m$, superior triunghiulară şi nesingulară, iar $A(0)=I_m$.

Dacă presupunem că ecuațiile (4.4.8) au fost obținute atunci determinarea necunoscutelor din Definiția 4.4.1.2 (vezi 4.1) va presupune să fixăm câmpurile vectoriale analitice.

$\left\{q_1(p),\ldots,q_m(p) : p\in\mathbb{R}^m\right\}$, $q_i\in C^\omega\left(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^m\right)$, astfel încât

(4.4.9) $A(p)\,q_i(p) = e_i,\ i\in\{1,\ldots,m\}$,

unde $\{e_1,\ldots,e_m\}\subseteq\mathbb{R}^m$ este baza canonică.

Ca şi în cazul în care câmpurile comută, analiyăm mai întâi sistemul cu salturi redus (conține numai salturile):

(4.4.11) $$\begin{cases} h(t_j;\hat{z}) - h(t_j-;\hat{z}) \overset{\text{def}}{=\!=} \Delta h(t_j;\hat{z}) = \\ \qquad\qquad = \sum\limits_{1\le k\le m} f_k\big(h(t_j-;\hat{z})\big)\Delta y_k(t_j),\ j\ge 0, \\ h(0,\hat{z}) = \hat{z}\in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

unde $\Delta y(t_j) \overset{\text{def}}{=\!=} y(t_j) - y(t_j-),\ j\ge 0$.

Soluția cad-lag a sistemului (4.4.11) se construieşte ca un proces constant pe porțiuni:

(4.4.12) $$\begin{cases} h(t;\hat{z}) = h(t_j;\hat{z}),\ t\in [t_j;t_{j+1}) \\ h(t_j;\hat{z}) = h(t_j-;\hat{z}) + \sum\limits_{1\le k\le m} f_k\big(h(t_j-;\hat{z})\big)\Delta y_k(t_j),\ j\ge 1 \\ h(0,\hat{z}) = \hat{z}\in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

În acest caz, procesul continuu $\{\hat{z}(t,x) : t\in [t_j,t_{j+1}),\ j\ge 0\}$ invocat în Definiția 4.4.1.2 (vezi 4.1) va fi ales procesul constant $\hat{z}(t,x) = \hat{z}_t,\ t\ge 0$.

Lema 4.4.4.1. *Fie* $\{f_1,\dots,f_m\}\subseteq C_b^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ *astfel încât condițiile ipotezei (4.4.3a) sunt îndeplinite.*

Fie $\hat{G}(p;z) = G_1(y_1)\circ\ldots\circ G_m(y_m)(z)$, $p=(y_1,\ldots y_m)\in\mathbb{R}^m$, $z\in\mathbb{R}^n$ *orbita definită în (4.4.7). Atunci există o matrice* $(m\times m), A(p), p\in\mathbb{R}^m$, *analitică, superior triunghiulară şi nesingulară astfel încât:*

(4.4.13) $$\partial_p \hat{G}(p;z) = \Big[f_1\big(\hat{G}(p;z)\big),\ldots,f_m\big(\hat{G}(p;z)\big)\Big]A(p), \quad p\in\mathbb{R}^m, z\in\mathbb{R}^n,$$

(4.4.14) $$A(p) = \{\exp B_1 y_1\}\cdot\{\exp B_2 y_2\}\ldots\{\exp B_{m-1}y_{m-1}\},\ p=(y_1,\ldots,y_m)\in\mathbb{R}^m, \quad A(0) = I_m$$

Aici matricele $(m\times m)$ *constante* $B_i, i\in\{1,\ldots,m-1\}$ *sunt superior triunghiulare şi satisfac ecuațiile:*

(4.4.15) $$B_j e_k = \theta,\ k \in \{1,\ldots,j\},\ j \in \{1,\ldots,m-1\},$$

unde $\{e_1,\ldots,e_m\} \subseteq \mathbb{R}^m$ *este baza canonică şi* $\theta \in \mathbb{R}^m$ *este vectorul nul.*

Observația 4.4.4.1. Dacă $\{f_1,\ldots,f_m\} \subseteq C_b^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ îndeplinesc condițiile ipotezei (4.4.3a) atunci concluziile Lemei 4.4.4.1 ne arată că reprezentarea algebrică din (4.4.8) este adevărată şi ne conduce direct la determinarea câmpurilor analitice $q_i \in C^{\omega}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^m)$, $i \in \{1,\ldots,m\}$, astfel încât ecuațiile (4.4.9) sunt îndeplinite.

Teorema 4.4.4.1. *Considerăm că* $\{f_1,\ldots,f_m\} \subseteq C_b^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ *sunt date astfel încât condițiile ipotezei 4.4.3 sunt îndeplinite. Atunci există* $\rho_0 > 0$ *astfel încât reprezentarea gradient a sistemului redus (4.4.11) (vezi (4.4.38) şi (4.4.39)) este îndeplinită folosind un triplet* $\{(y(t), p(t), \hat{p}(t)) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m : t \geq 0\}$ ρ_0 – *admisibil. În plus,* $V_{\hat{p}} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{j\geq 1} \left|\Delta \hat{p}(t_j)\right| \leq \left(\frac{2M}{\delta}\right)\rho_0$.

Definiția 4.4.1. *Spunem că tripletul de procese constante pe porțiuni* $\{(y(t), p(t)\ \hat{p}(t)) = (y(t_j), p(t_j), \hat{p}(t_j)) : t \in [t_j, t_{j+1}),\ j \geq 0\}$ *este* ρ_0 – *admisibil dacă următoarele ecuații sunt îndeplinite:*

$$\begin{cases} \Delta p(t_j) \stackrel{\text{def}}{=\!=} p(t_j) - p(t_j -) = \sum_{k=1}^{m} q_k(\hat{p}(t_j -))\Delta y_k(t_j) = \\ \qquad = A^{-1}(\hat{p}(t_j -))\Delta y(t_j),\ j \geq 0 \\ p(t) = 0,\ t \in (-t_1, t_1) \end{cases}$$

şi $V_p \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{j\geq 1} \left|\Delta p(t_j)\right| \leq \rho_0$*, unda* $\rho_0 > 0$ *este o constantă.*

Observația 4.4.4.2. Reprezentarea gradient cuprinsă în Teorema 4.4.4.1 vizează sistemul redus (4.4.11) şi soluția sa cad-lag din (4.4.12). Această reprezentare gradient se va extinde la soluția cad-lag dată în (4.4.5) şi (4.4.6) pentru sistemul de ecuații diferențiale cu implusuri (4.4.1).

Teorema 4.4.4.2. *Considerăm sistemul cu impulsuri (4.4.1) unde câmpul* $f_0 \in C\left(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d;\mathbb{R}^n\right)$ *îndeplineşte ipoteza 4.4.2, iar* $\{f_1,\ldots,f_m\} \subseteq C_b^2\left(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n\right)$ *satisface condițiile ipotezei4.4. 3. Atunci există* $\rho_0 > 0$*, şi* $\left\{\left(y(t),p(t),\hat{p}(t)\right):t \geq 0\right\}$ *un triplet de procese constante pe porțiuni care este* ρ_0 *– admisibil cu* $V_{\hat{p}} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum_{j\geq 1}\left|\Delta\hat{p}\left(t_j\right)\right| \leq \left(\frac{2M}{\delta}\right)\rho_0$ *şi un proces continuu* $\left\{\hat{z}(t,x) = \hat{z}_j(t):t\in\left[t_j,t_{j+1}\right),j\geq 0\right\}$ *astfel încât soluția cad-lag* $\left\{z(t,x):t\geq 0\right\}$ *a sistemului (4.4.1) satisface reprezentarea gradient*

$$z(t,x) = \hat{G}\left(\hat{p}\left(t_j-\right);\hat{z}(t,x)\right) + \sum_{k=1}^{m} f_k\left(\hat{G}\left(\hat{p}\left(t_j-\right);\hat{z}\left(t_j,x\right)\right)\right)\Delta y_k\left(t_j\right), \tag{4.4.92}$$
$$t\in\left[t_j,t_{j+1}\right),\ j\geq 0,$$

unde $\hat{G}(p,z)$*,* $p\in\mathbb{R}^m, z\in\mathbb{R}^n$*, este definit în (4.4.7) şi satisface reprezentarea nesingulară din Lema4.4.4.1.*

Bibliografie

[1] W.M. Mc. ENEANEY, G.G.ZIN şi Q. ZANG (Eds), Stochastic Analysis, Control Optimization and Applications, A volume in Honor of W.H. Fleming. Birkhäuser,1999.

[2] A. FRIEDMANN, Stochastic differential equations and applications,Vol.1, Academic Press, 1975.

[3] B. IFTIMIE, M. MARINESCU, Admissible stragies for a portofolio problem associated to an American Option, International Conference on Mathematics & Infromatics, Septembrie 18-20, (2006), Bacau.

[4] B.IFTIMIE şi C. VÂRSAN, A pathwise solution for nonlinear parabolic equations with stochastic perturbations. Cent.Eur. J.Math 3 (2003).

[5] B.IFTIMIE I. MOLNAR, C.VÂRSAN, Stochastic Differential Equations with jumps; Liapunov exponents, asymptotic behaviour of solutions and applications to financial mathematics, Preprint nr.10/2007, IMAR.

[6] B.IFTIMIE, C.VÂRSAN, Asymptotic behavior and admissible strategies associated with jump solutions of s.d.e. Int. AMAMEF Conference, Vienna, sept. 2007.

[7] I. KARATZAS, S;.SHREVE, Brownian Motion and Stochastic Calculus, Springer Verlag, 1988.

[8] D. LAMBERTON şi B. LAPEYRE, Introduction au calcul stochastique applique a la finance, Ellipses, Paris, (1992).

[9] M. MARINESCU, I. MOLNAR, C. VÂRSAN, Gradient representation and positive cad-lag solution for jump differential equations, Preprint IMAR.

[10] M. MARINESCU şi C. VÂRSAN, A global variational principle associated with gradient stochastic control systems. Revue Roumanie de mathematiques pures et appliquées, (3) (2006).

[11] M. MARINESCU şi C. VÂRSAN, A global variational principle associated with gradient stochastic control systems-cazul deterministic, Al 6-lea Congres al Matematicienilor Români, 28 iunie-4iulie, Bucureşti, 2008.

[12] M. MARINESCU şi C. VÂRSAN, Implication of the Kolmogorov equation in solving an european option problem, InternationalWorkshop „Diferential Systems and Financial Mathematics",September, 15-23, (2003), Bucuresti.

[13] M. MARINESCU şi C. VÂRSAN, Stochastic hamiltonians associatedwith finite dimensional nonlinear filtres and non-smooth final value, Revue Roumaine de mathematiques pures et appliquees, (1) (2004), pag. 28-37.

[14] B. OKSENDAL, Stochastic differential equations, 5th edition, Springer-Verlag, (2000).

[15] B. OKSENDAL, A. SALEM, Applied stochastic control of jump diffusions, Universitext, Springer, Berlin, 2007.

[16] C. VÂRSAN, Applications of Lie Algebras to Hyperbolic and Stochastic Differential Equations. Kluwer, Dordrecht,(1999).

[17] C. VÂRSAN, Stochastic hamiltonians associated with stochastic differential equations and non-smooth final value. Math. Reporth, (55) (2003), pag. 399-413.

[18] C. VÂRSAN, On the optimal weak feedback controls involving deterministic gradient control systems, Mathematical Reports, (3) (2006).

[19] J. YONG şi X. Y. ZHOU, Stochastic Controls, Hamiltonian Systems and HJB Equations. Springer, 1999.