Clasificări de module Cohen-Macaulay - Inelul bază asociat unui polimatroid transversal

Teză de Doctorat-rezumat

Alin Ştefan

Coordonator: Profesor dr. Dorin Popescu

Institutul de Matematică
al Academiei Română

Septembrie 2008

Rezumat

Teza se axează pe studiu inelelor bază asociate unor polimatroizi transversali. Polimatroizii transversali sunt o clasă specială de polimatroizi discreţi. Polimatroizii discreţi au fost introduşi de Herzog şi Hibi [2] în 2002.

Teza este structurată în patru capitole. Capitolul unu are patru secţiuni. Astfel, în prima secţiune începe cu o scurtă excursie în geometrie convexă. În a doua secţiune prezentăm câteva proprietăţii importante ale inelelor semigrupale afine. În secţiunea a treia prezentăm o scurtă introducere în teoria matroizilor şi polimatroizilor. În ultima secţiune prezentăm câteva proprietăţi ale inelului bază asociat unui polimatroid discret.

Capitolul doi este devotat studiului modulului canonic al inelului bază asociat unui polimatroid transversal. Determinăm faţetele conului poliedral generat de mulţimea exponenţilor monoamelor ce definesc inelul bază. Acestea ne permit să descriem modulul canonic în funcţie de interiorul relativ a conului poliedral. De asemenea, acestea ne permit determinarea a-invariantului. Cum inelul bază asociat unui polimatroid discret este inel normal, atunci funcţia Ehrhart şi funcţia Hilbert coincid şi cunoscînd $a-$invariantul putem foarte simplu afla seria Hilbert. La sfârşitul capitolului prezentăm următoarea problemă deschisă:
Problemă Deschisă: Fie $n \geq 4$, $A_i \subset [n]$ pentru orice $1 \leq i \leq n$ şi $K[\mathcal{A}]$ inelul bază asociat polimatroidului transversal prezentat de $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$. Dacă seria Hilbert este:

$$H_{K[\mathcal{A}]}(t) \ = \ \frac{1 + h_1\ t + \ldots + h_{n-r}\ t^{n-r}}{(1-t)^n},$$

atunci avem următoarele:
1) Dacă $r = 1$, atunci $type(K[\mathcal{A}]) = 1 + h_{n-2} - h_1$.
2) Dacă $2 \leq r \leq n$, atunci $type(K[\mathcal{A}]) = h_{n-r}$.

În capitolul trei studiem intersecţii de inele bază Gorenstein. Acestea, deasemenea sunt inele Gorenstein şi suntem interesaţi când o intersecţie de inele bază Gorenstein este inel bază asociat unui anume polimatroid transversal. Mai precis, dăm condiţii necesare şi suficiente pentru ca intersecţia a două inele bază să fie inel bază asociat unui anume polimatroid transversal.

În capitolul patru arătăm că polimatroizii transversali prezentaţi de $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ astfel încât orice mulţime A_i să aibă două elemente, iar intersecţia a oricăror două consecutive este cel mult unu au inelul bază $K[\mathcal{A}]$ Gorenstein. Folosind identitatea Worpitzky,

numărătorul seriei Hilbert are ca coeficienţi numerele Euler şi folosind un rezultat al lui M. Bona şi M. Ehrenborg [1] avem că seria Hilbert este unimodală.

Menţionez că de un mare ajutor pentru descoperirea acestor rezultate a fost numeroasele experimente cu computerul electonic, mai precis, cu ajutorul sistemelor *"NORMALIZ"* şi *"SINGULAR"*.

Mulţumiri.

Doresc să-mi exprim recunoştiinţa faţă de profesorul meu coordonator, domnul Dorin Popescu, pentru căldurosul sprijin acordat şi pentru bunăvoinţa plăcerii de a discuta toate întrebările şi problemele mele. De asemene sunt profund îndatorat soţiei mele Mădălina şi părinţilor mei pentru încurajări şi continuul sprijin în timpul pregătirii acestei teze.

Prezentarea Tezei

Teza este structurată pe patru capitole:
1) Introducere;
2) Tipul inelului bază asociat unui polimatroid transversal;
3) Intersecţii de inele bază asociate polimatroizilor transversali;
4) O remarcă asupra seriei Hilbert asociată unor polimatroizi transversali.

Primul capitol este structurat pe patru secţiuni:
1.1) O scurtă incursiune în geometrie convexă;
1.2) Inele semigrupale afine;
1.3) Polimatroizi discreţi.
1.4) Inelul Ehrhart şi inelul bază asociat unui polimatroid transversal.
În fiecare secţiune sunt prezentate rezultate generale.

Capitolul doi este structurat pe trei secţiuni:
2.1) Conuri de dimensiune n şi $n+1$ faţete;
2.2) Tipul inelului bază asociat unui polimatroid transversal avînd conul poliedral de dimensiune n şi cu n+1 faţete;
2.3) Funcţia Ehrhart

În prima secţiune este prezentată descompunerea ireductibilă a conului poliedral generat de mulţimea exponenţilor generatorilor inelului bază asociat unui polimatroid transversal. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $\sigma \in S_n$, $\sigma = (1, 2, \ldots, n)$ ciclul de lungime n, $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ şi $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ baza canonică a lui $\mathbb{R}^n$. Pentru un vector $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, vom nota cu $\mid x \mid := x_1 + \ldots + x_n$. Dacă x^a este un monom în $K[x_1, \ldots, x_n]$ notăm $\log(x^a) = a$. Fie A o mulţime de monoame, atunci $\log(A)$ este mulţimea exponenţilor $\log(x^a)$ cu $x^a \in A$. Considerăm următoarea mulţime de vectori din $\mathbb{N}^n$:

$$\nu^j_{\sigma^t[i]} = -j \sum_{k=1}^{i} e_{\sigma^t(k)} + (n-j) \sum_{k=i+1}^{n} e_{\sigma^t(k)}$$

unde $\sigma^t[i] := \{\sigma^t(1), \ldots, \sigma^t(i)\}$ pentru toţi $1 \leq i \leq n-2$, $1 \leq j \leq n-1$ şi $0 \leq t \leq n-2$.

Remarcă. Este simplu de văzut că pentru orice $1 \leq i \leq n-2$ şi $0 \leq t \leq n-2$ avem $\nu^{n-i-1}_{\sigma^t[i]} = \nu_{\sigma^t[i]}$ ([3]).

Dacă $0 \neq a \in \mathbb{R}^n$, atunci prin H_a vom nota hiperplanul din $\mathbb{R}^n$ ce conţine originea şi având ca vector normal $a \in \mathbb{R}^n$, adică:

$$H_a = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a \rangle = 0\},$$

unde $\langle , \rangle$ este produsul scalar în $\mathbb{R}^n$. Avem două semispaţii mărginite de H_a :

$$H_a^+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a \rangle \geq 0\} \text{ şi } H_a^- = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a \rangle \leq 0\}.$$

Principalul rezultat al acestei secţiuni este Lema 2.1.1 :

Lemă. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $1 \leq i \leq n-2$ şi $1 \leq j \leq n-1$. Considerăm următoarele cazuri:

a) Dacă $i+j \leq n-1$, atunci fie $A := \{\log(x_{j_1} \cdots x_{j_n}) \mid j_k \in A_k, \text{ pentru } 1 \leq k \leq n\} \subset \mathbb{N}^n$ mulţimea exponenţilor generatorilor $K-$algebrei $K[\mathcal{A}]$, unde $\mathcal{A} = \{A_1 = [n], \ldots, A_i = [n], A_{i+1} = [n] \setminus [i], \ldots, A_{i+j} = [n] \setminus [i], A_{i+j+1} = [n], \ldots, A_n = [n]\}$.

b) Dacă $i+j \geq n$, atunci fie $A := \{\log(x_{j_1} \cdots x_{j_n}) \mid j_k \in A_k, \text{ pentru } 1 \leq k \leq n\} \subset \mathbb{N}^n$ mulţimea exponenţilor generatorilor $K-$algebrei $K[\mathcal{A}]$, unde $\mathcal{A} = \{A_1 = [n] \setminus [i], \ldots, A_{i+j-n} = [n] \setminus [i], A_{i+j-n+1} = [n], \ldots, A_i = [n], A_{i+1} = [n] \setminus [i], \ldots, A_n = [n] \setminus [i]\}$.

Atunci conul poliedral generat de A are descompunerea ireductibilă:

$$\mathbb{R}_+ A = \bigcap_{a \in N} H_a^+,$$

unde $N = \{\nu^j_{\sigma^0[i]},\ ne_k \mid 1 \leq k \leq n\}$.

În a doua secţiune calculăm tipul inelelor bază asociate polimatroizilor transversali pentru care conul poliedral generat de mulţimea exponenţilor monoamelor ce definesc inelul bază are descompunerea ireductibilă prezentată în lema de mai înainte.

Astfel, principalul rezultat al acestei secţiuni (Teorema 2.2.1.) este următorul:

Teoremă. Fie $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ un inel de polinoame standard graduat peste un corp K şi A mulţimea finită de monoame din R ce verifică ipotezele lemei de mai înainte. Atunci:

$a)$ Dacă $i+j \leq n-1$, atunci tipul inelului $K[\mathcal{A}]$ este:

$$type(K[\mathcal{A}]) = 1 + \sum_{t=1}^{n-i-j-1} \binom{n+i-j+t-1}{i-1} \binom{n-i+j-t-1}{n-i-1}.$$

$b)$ Dacă $i+j \geq n$, atunci tipul inelului $K[\mathcal{A}]$ este:

$$type(K[\mathcal{A}]) = \sum_{t=1}^{r(n-j)-i} \binom{r(n-j)-t-1}{i-1} \binom{rj+t-1}{n-i-1},$$

unde $r = \left\lceil \frac{i+1}{n-j} \right\rceil$ ($\lceil x \rceil$ este partea întreagă superioară a lui x).
Avem două consecinţe importante (Corolar 2.2.2. şi Corolar 2.2.3.):
Consecinţă. $K[\mathcal{A}]$ este inel Gorenstein dacă şi numai dacă $i+j = n-1$.
Consecinţă. a-invariantul inelului bază $K[\mathcal{A}]$ este $a(K[\mathcal{A}]) = \begin{cases} -1 \text{ , pentru } & i+j \leq n-1 \\ -r \text{ , pentru } & i+j \geq n \end{cases}$

Cum inelul bază asociat unui polimatroid discret este inel normal, atunci funcţia Ehrhart este egală cu funcţia Hilbert şi cunoscînd a-invariantul obţinem seria Hilbert. Astfel, avem:
funcţia Hilbert este:

$$h(t) = \sum_{k=0}^{(n-j)t} \binom{k+i-1}{k} \binom{nt-k+n-i-1}{nt-k}.$$

pentru orice $t \geq 1$ şi $h(0) = 1$;
seria Hilbert este:

$$H_{K[\mathcal{A}]}(t) \ = \ \frac{1 + h_1\ t + \ldots + h_{n-r}\ t^{n-r}}{(1-t)^n},$$

unde

$$h_j = \sum_{s=0}^{j} (-1)^s\ h(j-s)\ \binom{n}{s},$$

$h(s)$ este funcţia Hilbert a lui $K[\mathcal{A}]$ şi $r = \left\lceil \frac{i+1}{n-j} \right\rceil$.

Capitolul trei este structurat pe două secţiuni:
3.1) Intersecţii de conuri de dimensiune n şi $n+1$ faţete;
3.2) Când $K[A \cap B]$ este inel bază asociat unui polimatroid transversal?

În prima secţiune demonstrăm că o intersecţie de inele bază Gorenstein (introduse în capitolul doi) este inel Gorenstein. În a doua secţiune dăm condiţii necesare şi suficiente ca intersecţia a două inele bază sa fie inel bază asociat unui polimatroid transversal. De asemenea, calculăm $a-$invariantul acestor inele bază.

Fie $r \geq 2$, $1 \leq i_1, \ldots, i_r \leq n-2$, $0 = t_1 \leq t_2, \ldots, t_r \leq n-1$ şi considerăm r prezentări de polimatroizi transversali: $\mathcal{A}_s = \{A_{s,k} \mid A_{s,\sigma^{t_2}(k)} = [n],$ pentru $k \in [i_2] \cup \{n\},$ $A_{s,\sigma^{t_2}(k)} = [n] \setminus \sigma^{t_2}[i_2],$ pentru $k \in [n-1] \setminus [i_2]\}$ pentru orice $1 \leq s \leq r$.
Notăm $K[A_1 \cap \ldots \cap A_r]$, $K-$ algebra generată de x^α cu $\alpha \in A_1 \cap \ldots \cap A_r$, unde pentru orice $1 \leq s \leq r$, A_s este mulţimea exponenţilor monoamelor ce definesc inelul bază asociat polimatroidului transversal prezentat de $\mathcal{A}_\mathbf{s}$.
Astfel, principalele rezultate ale acestui capitol sunt (Lema 3.1.1. şi Teorema 3.2.1.):
Lemă. $K-$ algebra $K[A_1 \cap \ldots \cap A_r]$ este inel Gorenstein.
Teoremă. Fie $1 \leq i_1, i_2 \leq n-2$, $0 \leq t_2 \leq n-1$. Considerăm doi polimatroizi transversali avînd ca prezentări: $\mathcal{A} = \{A_k \mid A_k = [n],$ pentru $k \in [i_1] \cup \{n\},$ $A_k = [n] \setminus [i_1],$ pentru $k \in [n-1] \setminus [i_1]\}$ şi $\mathcal{B} = \{B_k \mid B_{\sigma^{t_2}(k)} = [n],$ pentru $k \in [i_2] \cup \{n\},$ $B_{\sigma^{t_2}(k)} = [n] \setminus \sigma^{t_2}[i_2],$ pentru $k \in [n-1] \setminus [i_2]\}$ astfel încât A, respectiv B sunt mulţimea exponenţilor monoamelor ce definesc inelul bază asociat polimatroizilor transversali prezentaţi de $\mathcal{A}$, respectiv $\mathcal{B}$.
Atunci, $K-$algebra $K[A \cap B]$ este inelul bază asociat polimatroidului transversal dacă şi numai dacă sunt îndeplinite una din următoarele condiţii:
a) $i_1 = 1$.
b) $i_1 \geq 2$ şi $t_2 = 0$.
c) $i_1 \geq 2$ şi $t_2 = i_1$.
d) $i_1 \geq 2$, $1 \leq t_2 \leq i_1 - 1$ şi $i_2 \in \{1, \ldots, i_1 - t_2\} \cup \{n - t_2, \ldots, n-2\}$;
e) $i_1 \geq 2$, $i_1 + 1 \leq t_2 \leq n-1$ şi $i_2 \in \{1, \ldots, n - t_2\} \cup \{n - t_2 + i_1, \ldots, n-2\}$.

Capitolul patru este structurat pe două secţiuni:
4.1) Produsul Segre şi inelul bază asociat unui polimatroid transversal;
4.2) Seria Hilbert
Arătăm că polimatroizii transversali prezentaţi de $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ astfel încât orice mulţime A_i să aibă două elemente, iar intersecţia a oricăror două consecutive este cel mult un element, au inelul bază Gorenstein (Propoziţia 4.2.12.). Folosind identitatea Worpitzky, numărătorul seriei Hilbert are ca coeficienţi numerele Euler şi folosind un rezultat al lui M. Bona şi M. Ehrenborg [1] avem că seria Hilbert este unimodală.

Propoziţie. Dacă $|A_i| = 2$ pentru $1 \leq i \leq m$, $|A_i \cap A_{i+1}| \leq 1$ şi $A_j \cap A_i = \varnothing$ pentru $1 \leq i \leq m-1$, $1 \leq j < i-1$. Notăm cu B_m inelul bază asociat polimatroidului transversal prezentat de $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$. Atunci seria Hilbert a lui B_m este

$$H_{B_m}(t) = \frac{\sum_{k=0}^{m-1} A(m,k+1)t^k}{(1-t)^{m+1}},$$

unde

$$A(m,k) \;=\; kA(m-1,k) + (m-k+1)A(m-1,k-1),$$

cu $A(m,1) = A(m,m) = 1$ and $2 \leq k \leq m-1$.

Bibliography

[1] M.Bona, R.Ehrenborg, *Combinatorial Proof of the Log-Concavity of the Numbers of Permutations with k Runs*, Journal of Combinatorial Theory, Series A 90, (2000), 293-303.

[2] J. Herzog, T. Hibi, *Discrete polymatroids*, J. Algebraic Combin., 16(2002), no. 3, 239–268.

[3] A. Ştefan, *A class of transversal polymatroids with Gorenstein base ring,* Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie Tome 51(99) No. 1, (2008), 67-79.

[4] A. Ştefan, *Intersections of base rings associated to transversal polymatroids*, to appear in Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie Tome 51(99), No. 4, (2008), http://arXiv.org/pdf/:0805.2729.

[5] A. Ştefan, *The type of the base ring associated to a transversal polymatroid*, submitted, http://arXiv.org/pdf/:0807.2371.

[6] A. Ştefan, *A remark on the Hilbert series of transversal polymatroids* , Analele Ştiinţifice ale Universitaţii "Ovidius" Constanţa Seria Matematica volumul XIV (2006), fascicola 2, 85-96.

[7] A. Ştefan, *The Facets Cone Associated To Some Classes Of Transversal Polymatroids* , Analele Ştiinţifice ale Universitaţii "Ovidius" Constanţa Seria Matematica volumul XV (2007), fascicola 1, 139-158.

[8] A. Ştefan, *Some examples of transversal polymatroids with Gorenstein base ring*, Preprint 2006.

Alin Ştefan, Assistant Professor
"Petroleum and Gas" University of Ploieşti
Ploieşti, Romania
E-mail:nastefan@upg-ploiesti.ro