Academia Română
Institutul de Matematică “Simion Stoilow”

Oana Adela TURCU

SUBMERSII RIEMANNIENE – DEFORMĂRI ALE STRUCTURILOR COMPLEXE GENERALIZATE

Teză de doctorat
Rezumat

Conducător ştiinţific
C.S.I. Dr. Vasile BRÎNZĂNESCU

Bucureşti
2008

INTRODUCERE

În lucrarea sa, *Generalized Calabi – You manifolds*, Q. J. Math. **54** (2003), no. 3, 281-308, Nigel Hitchin a introdus noi structuri geometrice care au impulsionat deja alte cercetări în domeniul geometriei. Teoria sa unifică într-un mod magistral multe structuri clasice şi aruncă o lumină nouă atât în simetria în "oglindă" (*mirror symmetry*) cât şi în ecuaţiile supersimetrice ce apar în teoria stringurilor şi supergravitaţiei.

Ideea fundamentală este aceea de a găsi o cale de unificare a geometriei complexe şi a geometriei simplectice prin considerarea structurilor complexe şi simplectice ca operaţii liniare nu pe fibratul tangent T la o varietate, ci pe fibratul sumă directă $T \oplus T^*$ a fibraţilor tangent şi cotangent; într-adevăr, orice structură complexă sau simplectică pe o varietate determină un subfibrat izotropic maximal al fibratului $T \oplus T^*$. Deoarece secţiunile netede ale fibratului $T \oplus T^*$ au o paranteză naturală, numită paranteza Courant, se pot da condiţii de integrabilitate canonice pe $T \oplus T^*$; în aceste cazuri, condiţia de subfibrat Courant involutiv revine la condiţiile uzuale de integrabilitate ale structurii complexe, respectiv simplectice. Astfel, Hitchin a introdus noţiunea de structură complexă generalizată ca fiind o structură aproape complexă generalizată J pe $T \oplus T^*$, al cărei subfibrat propriu L corespunzător valorii $+i$ este Courant involutiv. Această nouă structură geometrică este, într-un anumit sens, analogul complex al structurii Dirac, introdusă de Courant şi Weinstein în **[7], [8]**, pentru a unifica geometria Poisson cu geometria simplectică.

În teza sa de doctorat, *Generalized complex geometry* (**[11]**), Gualtieri studiază temeinic proprietăţile structurilor complexe generalizate obţinând, printre multe rezultate importante, şi descrierea teoretică a spaţiului de deformări Kuranishi pentru varietăţile complexe generalizate compacte.

În această teză, plecând de la structura complexă clasică pe o suprafaţă Kodaira, studiem deformările acesteia în cadrul structurilor complexe generalizate. Teza are două capitole. Capitolul 1 are un caracter preliminar şi conţine atât definiţiile cât şi rezultatele (fără demonstraţie) cunoscute deja şi necesare studiului făcut în teză: algebră liniară pe $V \oplus V^*$, algebroizi Lie, paranteza Courant şi algebroizi Courant, structuri Dirac, bialgebroizi Lie şi paranteza Courant, structuri complexe generalizate liniare, structuri complexe generalizate pe varietăţi, deformări de structuri complexe generalizate şi teoreme de deformare (din teza lui Gualtieri).

Capitolul 2 conţine numai rezultate originale (vezi lucrarea **[6]**).

În paragraful 2.1, *Suprafeţe Kodaira*, sunt date definiţiile suprafeţelor Kodaira şi descrierile fibraţilor tangent şi cotangent la o suprafaţă Kodaira.

În paragraful 2.2, *Ecuaţia generalizată Maurer-Cartan*, se introduce subfibratul $L = \left(T_{0,1} \oplus T^*_{1,0}\right) \otimes \mathbb{C} \subset (T \oplus T^*) \otimes \mathbb{C}$ definit de structura complexă clasică pe o suprafaţă Kodaira şi se rezolvă ecuaţia generalizată Maurer-Cartan $d_L\tilde{\varepsilon} + \frac{1}{2}\left[\tilde{\varepsilon}, \tilde{\varepsilon}\right] = 0$, ale cărei soluţii descriu deformările acestei structuri în contextul structurilor complexe generalizate. După demonstrarea prin calcule directe a Lemelor 2.1-2.34 se obţin cele două rezultate principale ale paragrafului: Teorema 2.2, care stabileşte anularea termenilor $[\tilde{\varepsilon}, \tilde{\varepsilon}]$ în ecuaţia Maurer-Cartan şi Teorema 2.3 care dă soluţiile acestei ecuaţii.

În paragraful 2.3, *Deformări de structuri complexe generalizate pe suprafeţe Kodaira*, se obţine rezultatul principal al tezei Teorema 2.4, care dă deformările structurilor complexe generalizate (ce depind de patru parametri complecşi). Acest rezultat arată că deformările de structuri complexe generalizate ale structurii complexe standard pe o suprafaţă Kodaira sunt aceleaşi ca *deformările extinse* în sensul lui Kontsevich, Baranikov-Kontsevich **[15], [1]**, obţinute de Poon **[20]** folosind algebrele Gerstenhaber diferenţiale (vezi **[9]**). În particular, prin anularea a doi parametri, se obţin deformările clasice de structuri complexe pe suprafeţe Kodaira, obţinute de Borcea **[3]**. Corolarul 2.1 precizează enunţul Teoremei 2.4 arătând că familia de deformări de structuri complexe generalizate pe o suprafaţă Kodaira este o familie local completă netedă.

În paragraful 2.4, *Tipurile structurilor complexe generalizate din deformări*, se obţine Teorema 2.5, care arată că tipul unei deformări din familia obţinută este simplectic sau complex. În cazul în care parametrul $t_{14} = 0$, dar parametrul $t_{32} \neq 0$ (vezi notaţiile din Teorema 2.4) se obţin exemple de structuri complexe generalizate de tip complex, dar care nu sunt structuri complexe clasice.

În lucrarea **[22]**, aflată în stadiul de pregătire, se face studiul deformărilor de structuri complexe generalizate pe varietăţi Kodaira în sensul din lucrarea **[10]**; calculele sunt extrem de laborioase.

Capitolul 1

Preliminarii

Fie V un spaţiu vectorial real de dimensiune m şi fie V^* dualul său. Atunci $V \oplus V^*$ este înzestrat cu următoarea formă biliniară, simetrică şi nedegenerată:

$$< X + \xi, Y + \eta >= \frac{1}{2} (\xi(Y) + \eta(X)) \text{ cu } X, Y \in V, \xi, \eta \in V^*.$$

De obicei ne referim la$< , >$ ca la produsul interior.

Definiţia 1.1 *Un subspaţiu $L \subset V \oplus V^*$ se numeşte izotropic dacă $< X, Y >= 0, (\forall) X, Y \in L$.*

Exemplul 1.1 *Fie $E \subseteq V$ un subspaţiu şi fie $\varepsilon \in \Lambda^2 E^*$. Privind ε ca o aplicaţie strâmb simetrică $E \to E^*$ prin $X \longmapsto i_X \varepsilon$, considerăm următorul subspaţiu, analog graficului lui ε:*

$$L(E, \varepsilon) = \{X + \xi \in E \oplus V^* : \xi|_E = \varepsilon(X)\}$$

Dacă $X + \xi, Y + \eta \in L(E, \varepsilon)$ se verifică că $< X + \xi, Y + \eta >= 0$, ceea ce arată că $L(E, \varepsilon)$ este subspaţiu izotropic maximal.

Definiţia 1.2 *Tipul unui subspaţiu izotropic maximal $L(E, \varepsilon)$ este codimensiunea k a proiecţiei sale pe V.*

Definiţia 1.3 *Un algebroid Lie* **([Pradines], [Mackenizie], [Gualtieri])** *este un fibrat vectorial L pe o varietate netedă M, înzestrat cu o paranteză Lie $[\ ,\ ]$ pe $\mathscr{C}^\infty(L)$ şi o aplicaţie netedă $a : L \to T$ numită aplicaţia ancoră, unde T este fibratul tangent al lui M.*
Aplicaţia ancoră trebuie să inducă un homomorfism de algebre Lie $a : \mathscr{C}^\infty(L) \to \mathscr{C}^\infty(T)$, adică $a([X, Y]) = [a(X), a(Y)], (\forall) X, Y \in \mathscr{C}^\infty(L)$ şi a trebuie să verifice regula lui Leibniz $[X, fY] = f[X, Y] + (a(X)f)Y, (\forall) X, Y \in \mathscr{C}^\infty(L), f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ (pentru exemple vezi **[Gualtieri]***).*

Fie M o varietate netedă şi T fibratul său tangent,iar T^* dualul său.
Paranteza Courant este o paranteză strâmb - simetrică definită pe secţiunile netede din $T \oplus T^*$, dată de relaţia

$$[X+\xi, Y+\eta] = [X,Y] + \mathcal{L}_X\eta - \mathcal{L}_Y\xi - \frac{1}{2}d(i_X\eta - i_Y\xi),$$

unde $X+\xi, Y+\eta \in \mathscr{C}^\infty(T \oplus T^*)$.
Observăm că pe câmpurile vectoriale paranteza Courant se reduce la paranteza Lie $[X,Y]$. Altfel spus, dacă $\pi : T \oplus T^* \to T$ este proiecţia naturală

$$\pi([A,B]) = [\pi(A), \pi(B)],\ (\forall)A, B \in \mathscr{C}^\infty(T \oplus T^*).$$

Pe de altă parte, pe 1-forme paranteza Courant se anulează.
Paranteza Courant nu este un algebroid Lie din cauza termenilor exacţi implicând produsul interior $< \ , \ >$. Din acest motiv dacă am găsit un sub-fibrat $L \subset (T \oplus T^*) \otimes \mathbb{C}$ care să fie involutiv (închis la paranteza Courant) şi izotropic, termenii ce produc anomalia dispar şi $(L, [\ ,\ ], \pi)$ va defini un algebroid Lie.

Ideea studierii structurilor complexe generalizate aparţine lui Nigel Hitchin si a fost dezvoltata de Gualtieri in teza sa.

Definiţia 1.4 *O structură complexă generalizată pe V este un endomorfism $\mathcal{J}$ pe suma directă $V \oplus V^*$ ce satisface două condiţii:*

1. *$\mathcal{J}$ este complexă, adică $\mathcal{J}^2 = -1$ şi*
2. *$\mathcal{J}$ este simplectică, adică $\mathcal{J}^* = -\mathcal{J}$.*

Propoziţia 1.1 ([Gualtieri]) *O structură complexă generalizată pe V este echivalentă cu specificarea unui subspaţiu izotropic maximal complex $L \subset (V \oplus V^*) \otimes \mathbb{C}$ de index real zero, adică $L \cap \overline{L} = \{0\}$.*

Definiţia 1.5 *O structură aproape complexă generalizată pe o varietate reală M de dimensiune $2n$ este dată prin următoarele condiţii echivalente:*

- *o structură aproape complexă $\mathcal{J}$ pe $T \oplus T^*$ care este ortogonală relativ la produsul interior natural $< \ , \ >$.*
- *un sub-fibrat izotropic maximal $L \subset (T \oplus T^*) \otimes \mathbb{C}$ de index real zero, adică $L \cap \bar{L} = \{0\}$.*

Acum vom introduce condiţia de integrabilitate pe structuri complexe aproape generalizate.

Definiţia 1.6 *Structura aproape complexă generalizată $\mathcal{J}$ se numeşte integrabilă dacă fibratul propriu asociat lui $+i,\ L \subset (T \oplus T^*) \otimes \mathbb{C}$ este Courant involutiv. Altfel spus o structură complexă generalizată este o structură Dirac complexă de index real zero.*

Exemplul 1.2 *(***Tipul simplectic** $k = 0$*)*
Structura aproape complexă generalizată determinată de o structură simplectică

$$\mathcal{J}\omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^{-1} \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

are subspaţiul propriu asociat lui $+i$

$$L = \{X - i\omega(X) : X \in T \otimes \mathbb{C}\},$$

care este Courant involutiv dacă şi numai dacă $d\omega = 0$.

Exemplul 1.3 *(***Tipul complex** $k = n$*)*
Structura complexă generalizată determinată de o structură complexă

$$\mathcal{J}_J = \begin{pmatrix} -J & 0 \\ 0 & J^* \end{pmatrix}$$

are fibratul propriu izotropic maximal

$$L = T_{0,1} \oplus T^*_{1,0},$$

care este Courant involutiv dacă şi numai dacă J este integrabilă ca structură complexă.

Capitolul 2

Deformări de structuri complexe generalizate

Fie (M, J) o varietate complexă compactă, T fibratul său tangent şi T^* fibratul cotangent.
Structura complexă generalizată $\mathcal{J}$ este determinată de fibratul propriu asociat lui $+i,\ L \subset (T \oplus T^*) \otimes \mathbb{C}$ care este izotropic, satisface relaţia $L \cap \bar{L} = \{0\}$ şi este închis la paranteza Courant.
Deoarece $(T \oplus T^*) \otimes \mathbb{C} = L \oplus \bar{L}$, folosim produsul interior natural $<\ ,\ >$ pentru a identifica $\bar{L}$ cu L^*.
Orice subspaţiu izotropic maximal având intersecţia cu $\bar{L}$ zero poate fi unic descris ca graficul unui homomorfism $\varepsilon : L \to \bar{L}$ satisfăcând relaţia $< \varepsilon X, Y > +$ $+ < X, \varepsilon Y >= 0, (\forall) X, Y \in \mathscr{C}^\infty(L)$ sau echivalent $\varepsilon \in \mathscr{C}^\infty(\Lambda^2 L^*)$. Noul subspaţiu izotropic este dat de $L_\varepsilon = (1 + \varepsilon)L$.
Pentru ca structura complexă generalizată deformată $\mathcal{J}$ să rămână reală trebuie verificată relaţia $\bar{L}_\varepsilon = (1 + \bar{\varepsilon})\bar{L}$. Observăm că $L_\varepsilon \cap \bar{L}_\varepsilon = \{0\}$ dacă şi numai dacă endomorfismul definit pe $L \oplus L^*$

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & \bar{\varepsilon} \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

este inversabil. Acesta este cazul pentru ε într-o mulţime deschisă în jurul lui zero. Astfel, pentru ε suficient de mic, $\mathcal{J}_\varepsilon = A_\varepsilon \mathcal{J} A_\varepsilon^{-1}$ este o nouă structură complexă aproape generalizată şi orice astfel de structuri sunt obţinute în acest mod.

condiţia de integrabilitate pentru $\varepsilon \in \mathscr{C}^\infty(\Lambda^2 L^*)$ este că $\mathcal{J}_\varepsilon$ este integrabilă dacă şi numai dacă $\varepsilon \in \mathscr{C}^\infty(\Lambda^2 L^*)$ satisface ecuaţia Maurer-Cartan generalizată:

$$d_L \varepsilon + \frac{1}{2}[\varepsilon, \varepsilon] = 0.$$

2.1 Suprafeţe Kodaira

O suprafaţă Kodaira primară N (vezi **[Kodaira], [2], [4] sau [5]**) este un fibrat analitic complex de curbe eliptice peste o curbă eliptică. De fapt, o suprafaţă Kodaira este o suprafaţă complexă eliptică cu fibratul canonic trivial de forma $N = \mathbb{C}^2/_G$, unde $\mathbb{C}^2$ este spaţiul celor două variabile complexe (z, w) si G este un grup neabelian propriu discontinuu de transformări afine, generat de patru elemente $g_i, i = 1, 2, 3, 4$, satisfăcând următoarele relaţii:

$$g_i g_j g_i^{-1} g_j^{-1} = id$$

pentru toate cuplurile $(i, j), i < j, (i, j) \neq (3, 4)$ şi $g_3 g_4 g_3^{-1} g_4^{-1} = g_2^m$,pentru m număr întreg pozitiv.
Acoperirea universală a lui N este complex analitic izomorfă cu $\mathbb{C}^2$, spaţiul celor două variabile complexe (z, w) astfel incât g_j privit ca transformare de acoperire (G este grupul fundamental al lui N), are forma:

$$g_j(z, w) = (z + \alpha_j, w + \overline{\alpha_j} + \beta_j), j = 1, 2, 3, 4,$$

unde $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ şi $\overline{\alpha_3} \cdot \alpha_4 - \overline{\alpha_4} \cdot \alpha_3 = m \cdot \beta_2$.
Vom identifica $\mathbb{C}^2$ cu $\mathbb{R}^4$, spaţiul a patru variabile reale (x, y, u, v), prin

$$z = x + iy, w = u + iv.$$

Din punctul de vedere al structurii diferenţiale (sau chiar al structurii real-analitice) o suprafaţă Kodaira este o varietate paralelizabilă.
Fie X, Y, Usi Vcâmpurile vectoriale globale pe N generate de $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial u}$ şi $\frac{\partial}{\partial v}$ respectiv. Atunci, fibratul tangent T_N este generat global de $\{X, Y, U, V\}$. Endomorfismul structurii complexe J acţionează pe T_N prin

$$JX = Y, JY = -X, JU = V, JV = -U.$$

Singura paranteză Poisson nenulă este $[X, Y] = U$.

Introducem următoarele notaţii:

$$T = \frac{1}{2}(X - iY), \overline{T} = \frac{1}{2}(X + iY)$$

$$W = \frac{1}{2}(U - iV), \overline{W} = \frac{1}{2}(U + iV). \tag{2.1}$$

Atunci fibratul tangent $T_N$al suprafeţei Kodaira este generat de $\left\{T, W, \overline{T}, \overline{W}\right\}$, iar T_N^* dualul său (fibratul cotangent) este generat de 1-formele $\{\omega, \rho, \overline{\omega}, \overline{\rho}\}$.

Avem următoarele relaţii:

$$JT = \frac{1}{2}(Y + iX) = iT, JW = \frac{1}{2}(V + iU) = iW,$$

$$J\overline{T} = \frac{1}{2}(Y - iX) = -i\overline{T}, J\overline{W} = \frac{1}{2}(V - iU) = -i\overline{W}.$$

Rezultă că subfibratele $T_{0,1}$ şi $T_{1,0}$ ale lui T_N sunt generate global de $\left\{\overline{T}, \overline{W}\right\}$, respectiv de $\{T, W\}$.
Observăm că dualul $T_{1,0}^*$ este global generat de $\{\omega, \rho\}$.

2.2 Ecuaţia generalizată Maurer - Cartan

Structura complexă a unei suprafeţe Kodaira (primară) poate fi privită ca o structră complexă generalizată luând subfibratul $L \subset (T_N \oplus T_N^*) \otimes \mathbb{C}$ de forma

$$L = \left\{\overline{T}, \overline{W}, \omega, \rho\right\}^{\sim} = \left(T_{0,1} \oplus T_{1,0}^*\right) \otimes \mathbb{C}.$$

Luând subfibratul $\overline{L} = \{T, W, \overline{\omega}, \overline{\rho}\}^{\sim} \subset (T_N \oplus T_N^*) \otimes \mathbb{C}$ avem:

$$L \bigcap \overline{L} = \{0\}$$

şi

$$L \oplus \overline{L} = (T_N \oplus T_N^*) \otimes \mathbb{C}$$

Lema 2.1 *Subfibratul L este izotropic, adică:*

$$\langle X, Y\rangle = 0, X, Y \in \mathscr{C}^{\infty}(L).$$

Observaţia 1 *Deoarece* $\dim_{\mathbb{C}} \mathscr{C}^{\infty}(L) = 4 = \frac{1}{2}\dim_{\mathbb{C}}(T_N \oplus T_N^*) \otimes \mathbb{C}$*, rezultă că L este subfibrat izotropic maximal.*

Lema 2.2 *Subfibratul L este involutiv (adică închis la paranteza Courant).*

Teorema 2.1 *Diferenţiala $d_L\tilde{\varepsilon}$ din ecuatia Maurer-Cartan are forma:*

$$(d_L\tilde{\varepsilon})(X_0, X_1, X_2) = \frac{i}{2}t_{12}(\alpha_4\beta_1u_2 - \alpha_1\beta_4u_2 - \alpha_2\beta_1u_4 + \alpha_2\beta_4u_1 + \alpha_1\beta_2u_4 - \alpha_4\beta_2u_1).$$

Pentru rezolvarea ecuaţiei Maurer-Cartan vom calcula în continuare $[\tilde{\varepsilon}, \tilde{\varepsilon}]$. Putem scrie omomorfismul $\tilde{\varepsilon}$ sub forma:

$$\tilde{\varepsilon} = t_{32}\overline{T}^* \wedge \overline{W}^* - t_{11}\overline{T}^* \wedge \omega^* - t_{21}\overline{T}^* \wedge \rho^* - t_{12}\overline{W}^* \wedge \omega^* - t_{22}\overline{W}^* \wedge \rho^* + t_{14}\omega^* \wedge \rho^*. \tag{2.2}$$

Teorema 2.2 $[\tilde{\varepsilon}, \tilde{\varepsilon}] = 0, \qquad \tilde{\varepsilon} \in \mathscr{C}^\infty(\Lambda^2 L^*).$

Obţinem acum soluţiile ecuaţiei generalizate Maurer-Cartan, ceea ce reprezintă rezultatul principal al acestui paragraf:

Teorema 2.3 *Soluţiile ecuaţiei generalizate Maurer-Cartan sunt date de*

$$\tilde{\varepsilon} = t_{23}\overline{T}^* \wedge \overline{W}^* - t_{11}\overline{T}^* \wedge \omega^* - t_{21}\overline{T}^* \wedge \rho^* - t_{22}\overline{W}^* \wedge \rho^* + t_{14}\omega^* \wedge \rho^*,$$

sau, echivalent, de

$$\tilde{\varepsilon} = 4(t_{32}\overline{\omega} \wedge \overline{\rho} - t_{11}\overline{\omega} \wedge T - t_{21}\overline{\omega} \wedge W - t_{22}\overline{\rho} \wedge W + t_{14}T \wedge W)$$

sau încă, echivalent, de

$$\tilde{\varepsilon} : L \to L^*, M_{\tilde{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & t_{32} & -t_{11} & -t_{21} \\ -t_{32} & 0 & 0 & -t_{22} \\ t_{11} & 0 & 0 & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & -t_{14} & 0 \end{pmatrix}.$$

Putem acum să dăm rezultatul principal al tezei:

Teorema 2.4 *Deformările de structuri complexe generalizate pe o suprafaţă Kodaira sunt date de*

$$\tilde{\varepsilon} = t_{32}\overline{\omega} \wedge \overline{\rho} - t_{11}\overline{\omega} \wedge T - t_{22}\overline{\rho} \wedge W + t_{14}T \wedge W,$$

cu $(t_{32}, t_{11}, t_{22}, t_{14}) \in \mathbb{C}^4$.

Observaţia 2 *Rezultatul obţinut în Teorema 2.4 arată că deformările de structuri complexe generalizate ale structurii complexe standard pe o suprafaţă Kodaira sunt aceleaşi ca deformările extinse (în sensul lui Kontsevich* **[13]**, *Kontsevich – Barannikov* **[1]***) obţinute de Poon în* **[18]** *folosind algebrele Gerstenhaber diferenţiale. În particular, luând* $t_{32} = 0$ *şi* $t_{14} = 0$, *obţinem deformările clasice de structuri complexe pe suprafeţe Kodaira obţinute de Borcea* **[3]**.

Următorul rezultat precizează enunţul Teoremei 2.4:

Corolarul 1 *Familia de deformări de structuri complexe generalizate pe o suprafaţă Kodaira dată de*
$\tilde{\varepsilon} = t_{32}\overline{\omega} \wedge \overline{\rho} - t_{11}\overline{\omega} \wedge T - t_{22}\overline{\rho} \wedge W + t_{14}T \wedge W$, *cu* $(t_{32}, t_{11}, t_{22}, t_{14}) \in C^4$, *este o familie local completă netedă.*

Teorema 2.5 *Pentru o suprafaţă Kodaira tipul structurii complexe generalizate date de o deformare* ε *(adică de subfibratul* L_ε*) este* $k_\varepsilon = 0$ *(tip simplectic) sau* $k_\varepsilon = 2$ *(tip complex).*

Observaţia 3 *Dacă în cazul* $t_{14} = 0$ *avem şi* $t_{32} = 0$*, obţinem, conform rezultatului din [***Borcea***], chiar deformări de structuri complexe clasice, ceea ce este în concordanţă cu rezultatul din teorema 2.5.*
În cazul în care $t_{14} = 0$*, dar* $t_{32} \neq 0$*, avem deci exemple de structuri complexe generalizate de tip complex, dar care nu sunt structuri complexe clasice.*

Bibliografie

[1] S.Barannikov and M. Kontsevich, *Frobenius manifolds and formality of Lie algebras of polyvector fields* , Internat. Math. Res. Notes **14** (1998), 201-215.

[2] W. Barth, C.Peters and A. Van de Ven, *Compact complex surfaces*, Erg. Math. Grenzgebiete.Springer-Verlag, 1984.

[3] C. Borcea, *Moduli for Kodaira surfaces*, Comp. Math. **52** (1984), 373-380.

[4] V. Brînzănescu, *Holomorphic Vector Bundles over Compact Complex Surfaces*, Lecture Notes in Math. 1624, Springer 1996.

[5] V.Brînzănescu, *ThePicard group of a primary Kodaira surface*, Math. Ann.. 296 (1993), 725-738.

[6] V. Brînzănescu and O. A. Turcu, *Generalized complex structures on Kodaira surfaces*, trimis la publicare.

[7] T.Courant.*Dirac manifold*.Trans. Amer. Math.Soc., 319:631-661, 1990.

[8] T.Courant and A. Weinstein. *Beyond Poisson structures. In action hamiltoniennes de groupes*, Troisième théorème de Lie (Lyon, 1986), volume 27 of Travaux en Cours, pages 39-49. Hermann, Paris, 1988.

[9] M. Gerstenhaber, *The cohomology structure on an associative ring*, Ann. Math. **78** (1963), 267-288.

[10] G. Grantcharov, C. Maclaughlin, H. Pedersen and Y. S. Poon, *Lie groups, Kodaira manifolds and complex deformations*, Glasgow Math. J. **46** (2004), 259-281.

[11] M. Gualtieri, *Generalized complex geometry*, D. Phil. Thesis, St. John's College, University of Oxford, 2003.

[12] N. Hitchin, *Generalized Calabi-Yau structures, K3 surfaces and B-fields*. Math. A.G/0306162, 2003.

[13] N. Hitchin, *Lectures on special Lagrangian submanifolds*. In Winter School on Mirror Symetry, Vector Bundles and Lagrangian Submanifolds (Cambridge, MA, 1999), Volume 23 of AMS/IP Stud. Adv. Math., pages 151-182. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

[14] K. Kodaira, *On the structure of compact complex analytic surfaces*, I, Amer.J.Math. **86** (1964), 751-798.

[15] M. Kontsevich, *Homological algebra of mirror symetry*, In proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Z$\ddot{u}rich, 1994), pages 120-139, Basel, 1995 Birkh\ddot{a}user.$

[16] M. Kuranishi, *New proof for the existence of locally complete families of complex structures*, In Proc. Conf. Complex Analysis (Minneapolis, 1964), pages 142-154, Springer, Berlin, 1965.

[17] Z.-J. Liu, A. Weinstein and P. Xu, *Manin Triples for Lie bialgebroids*, J. Diff. Geom., 45:547-574, 1997.

[18] K. Mackenzie, *Lie groupoids and Lie algebroids in differential geometry*, volume 124 of London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[19] K. Makenzie and P. Xu, *Lie bialgebroids and Poisson groupoids*, Duke Math. J., 73(2):415-452, 1994.

[20] Y. S. Poon, *Extended deformation of Kodaira surfaces*, J. reine angew. Math. 590 (2006), 45-65.

[21] J. Pradines, *Théorie de Lie pour les groupoides différentiables. Relations entre propriétés locales et globales*, C. R. Acad. Sci. Paris S$\acute{e}r. A-B, 263: A907-A910, 1966.$

[22] O. A. Turcu, *Generalized complex structures on Kodaira manifolds*, in preparare.

[23] R. Wells, *Differential Analysis on Complex Manifolds*, Springer-Verlag, second edition, 1980.

Cuprins