

Cuprins

Capitolul 1. Module noetheriene și module artiniene	1
1. Condiții de lanțuri pentru inele și module	1
2. Module de lungime finită	9
3. Descompunere primară în module noetheriene	13
4. Structura inelelor artiniene	38
Bibliografie	42

CAPITOLUL 1

Module noetheriene și module artiniene

Galois a introdus ideea de a studia un obiect matematic (ecuații polinomiale) indirect, prin intermediul altei structuri (grupuri asociate). O paradigmă asemănătoare funcționează cu mult succes în multe alte contexte. Foarte fructuoasă s-a dovedit a fi considerarea relațiilor de ordine pe mulțimi asociate obiectelor de interes. Pe această idee se bazează demonstrația elegantă și simplă dată de E. Noether faptului că în orice inel comutativ în care nu există șiruri infinite de ideale conținute unul în altul, orice ideal este o intersecție finită de ideale primare. Acest punct de vedere a fost însușit în studiul modulelor peste inele necomutative, al laticilor, dar și al spațiilor topologice.

1. Condiții de lanțuri pentru inele și module

PROPOZIȚIE 1.1. *Pentru un A -modul arbitrar E , următoarele condiții sunt echivalente:*

- (ACC) *orice lanț ascendent de submodule $E_0 \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$ este staționar, i.e. există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $E_n = E_k$ pentru orice $n \geq k$,*
- (MAX) *orice mulțime nevidă de submodule ale lui E conține un element maximal față de incluziune.*

DEMONSTRAȚIE. Implicația (ACC) \implies (MAX) o demonstrăm prin reducere la absurd. Să presupunem că există o mulțime nevidă \mathcal{L} de submodule ale lui E astfel încât \mathcal{L} nu are elemente maximale față de incluziune. Considerăm $E_1 \in \mathcal{L}$. Atunci există $E_2 \in \mathcal{L}$ cu $E_1 \subset E_2$, în caz contrar E_1 ar fi element maximal, în contradicție cu presupunerea făcută. Din același motiv există $E_3 \in \mathcal{L}$ cu $E_2 \subset E_3$. Astfel se pune în evidență un șir strict crescător de submodule ale lui E , șir care nu este staționar.

(MAX) \implies (ACC) Fie $E_0 \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$ un șir ascendent de submodule. În virtutea condiției (MAX), mulțimea $\mathcal{L} := \{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ conține un element maximal E_k . Pentru $n \geq k$ avem $E_k \subseteq E_n$ (pentru că lanțul este ascendent) și $E_n \in \mathcal{L}$, deci $E_n = E_k$, altfel s-ar contrazice faptul că E_k este element maximal al mulțimii \mathcal{L} . \square

Considerând pe mulțimea submodulelor ordinea opusă incluziunii, se obține:

PROPOZIȚIE 1.2. Pentru un A -modul arbitrar E , următoarele condiții sunt echivalente:

- (DCC) orice șir descrescător $E_0 \supseteq E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots$ de submodule este staționar,
(MIN) orice mulțime nevidă de submodule ale lui E conține un element minimal față de incluziune.

DEFINIȚIE 1.3. Un A -modul E se numește *noetherian* (resp. *artinian*) dacă îndeplinește una dintre condițiile echivalente ale propoziției 1.1 (resp. 1.2). Un inel se numește *noetherian* (resp. *artinian*) dacă este astfel privit ca modul peste el însuși.

Reamintim că un modul E este numit *finit generat* dacă există $x_1, \dots, x_n \in E$, $n \in \mathbb{N}$, astfel încât $E = \sum_{i=1}^n Ax_i$. Noțiunea duală este definită folosind dualitatea dintre suma și intersecția de submodule.

DEFINIȚIE 1.4. Un A -modul E se numește *finit cogenarat* dacă pentru orice familie de submodule $(E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ cu $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda = 0$ există o parte finită $\Gamma \subseteq \Lambda$ astfel încât $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma = 0$.

Dualitatea este mai puțin misterioasă după ce vom vedea că procedeul cel mai simplu de a construi un lanț ascendent este să facem suma unor submodule, iar pentru a produce un lanț descendent este firesc să considerăm intersecția a tot mai multe submodule.

EXEMPLE. 1. \mathbb{Z} -modulul \mathbb{Z} este finit generat (un sistem de generatori constă doar din elementul unitate), dar nu este finit cogenarat întrucât $\bigcap \{p\mathbb{Z} : p \text{ prim}\} = 0$ și

$$\bigcap_{i=1}^n p_i \mathbb{Z} = p_1 p_2 \cdots p_n \mathbb{Z}$$

pentru orice numere prime p_1, \dots, p_n , $n \geq 1$.

2. Fie K un corp. Un K -spațiu vectorial este finit generat dacă și numai dacă este de dimensiune finită, dacă și numai dacă este finit cogenarat.

PROPOZIȚIE 1.5. Pentru un A -modul arbitrar E , următoarele condiții sunt echivalente:

- (i) E este A -modul finit generat,
(ii) pentru orice familie de submodule $(E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ astfel ca $\sum_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda = E$ există o parte finită $\Gamma \subseteq \Lambda$ astfel încât $\sum_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma = E$.

DEMONSTRAȚIE. (i) \implies (ii) Fie o familie de submodule $(E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ astfel ca $\sum_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda = E$. Se consideră un sistem finit de generatori x_1, \dots, x_n pentru E . Fiecare x_k se scrie ca o sumă finită de elemente nenule $y_{kj} \in E_j$ pentru j parcurgând o mulțime finită Λ_j . Strângem în Γ toți indicii submodulelor din familia considerată care conțin componentele y_{kj} ale generatorilor modulului E : $\Gamma := \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_n$. Este clar că Γ este o parte finită a lui Λ și că orice element din E este combinație liniară de x_k , deci și de y_{kj} .

(ii) \implies (i) Se consideră familia de submodule $(Ax)_{x \in E}$ ale lui E . \square

TEOREMA 1.6. *Următoarele afirmații sunt echivalente:*

- (i) E este A -modul noetherian,
- (ii) orice submodule al lui E este finit generat,
- (iii) pentru orice familie nevidă de submodule $(E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ există o parte finită $\Gamma \subseteq \Lambda$ astfel încât $\sum_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma = \sum_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$.

DEMONSTRAȚIE. (i) \implies (ii) Să presupunem că există un submodule F al unui modul noetherian E care nu este finit generat. Atunci pentru orice $x_1, \dots, x_n \in F$, $n \in \mathbb{N}$, avem $Ax_1 + \dots + Ax_n \subset F$, deci există $x_{n+1} \in F \setminus \sum_{i=1}^n Ax_i$. Inductiv se construiește un lanț ascendent nestaționar de submodule ale lui F , deci și ale lui E .

(ii) \implies (iii) Se aplică propoziția 1.5 A -modulului $\sum_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$.

(iii) \implies (i) Dacă $E_0 \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$ este un lanț ascendent de submodule ale lui E , există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\sum_{n \geq 0} E_n = \sum_{i=0}^k E_i = E_k .$$

Rezultă $E_n \subseteq E_k$ pentru toți $n \geq k$. Cum incluziunea inversă are loc pentru că E_n formează un lanț crescător față de incluziune, rezultă că lanțul considerat este staționar. \square

Rezultatul corespunzător pentru module artiniene este următorul:

TEOREMA 1.7. *Următoarele afirmații sunt echivalente:*

- (i) E este A -modul artinian,
- (ii) orice modul cât al lui E este finit cogenerat,
- (iii) pentru orice familie nevidă de submodule $(E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ există o parte finită $\Gamma \subseteq \Lambda$ astfel încât $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$.

DEMONSTRAȚIE. Echivalența dintre prima și ultima condiție se demonstrează ca și în cazul noetherian.

(ii) \implies (iii) Fie $F := \bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ și $p : E \longrightarrow E/F$ surjecția canonică. Întrucât

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} p(E_\lambda) = p\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda\right) = p(F) = 0 ,$$

iar modulul cât E/F este finit cogenarat conform condiției (ii), deducem că există o parte finită $\Gamma \subseteq \Lambda$ pentru care $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} p(E_\gamma) = 0$. Ultima relație este echivalentă cu $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$.

(iii) \implies (ii) Fie $G \leq E$, $F := E/G$, $p : E \longrightarrow F$ surjecția canonică și $(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ o familie nevidă de submodule ale lui F cu $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda = 0$. Considerând preimaginele $E_\lambda := p^{-1}(F_\lambda)$, avem

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda = p^{-1}\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda\right) = p^{-1}(0) = G .$$

Condiția (iii) asigură existența unei părți finite $\Gamma \subseteq \Lambda$ pentru care $G = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma$. De aici rezultă

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} F_\gamma = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} p(E_\gamma) = p\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma\right) = p(G) = 0 .$$

□

TEOREMA 1.8. Fie $0 \longrightarrow E' \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} E'' \longrightarrow 0$ un șir exact de A -module. Atunci E este modul noetherian (resp. artinian) dacă și numai dacă E' și E'' sunt module noetheriene (resp. artiniene).

DEMONSTRAȚIE. Vom demonstra numai echivalența afirmațiilor referitoare la noetherianitate, restul demonstrației fiind similar.

Să presupunem că E este modul noetherian. Dacă $E'_0 \subseteq E'_1 \subseteq \dots \subseteq E'_2 \subseteq \dots$ este un lanț ascendent de submodule ale lui E' , atunci $(f(E'_n))_{n \geq 0}$ este un lanț ascendent de submodule ale modului noetherian E . Așadar, există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $f(E'_n) = f(E'_k)$ pentru toți $n \geq k$. Morfismul f fiind injectiv, avem $E'_i = f^{-1}(f(E'_i))$ pentru orice $i \in \mathbb{N}$. Prin urmare, $E'_n = E'_k$ pentru $n \geq k$. Cum lanțul ascendent $(E'_n)_{n \geq 0}$ a fost arbitrar, conchidem că E' îndeplinește condiția (ACC).

Pentru fiecare lanț ascendent $(E''_n)_{n \geq 0}$ de submodule ale lui E'' , lanțul ascendent $(g^{-1}(E''_n))_{n \geq 0}$ de submodule ale lui E este staționar. Cum g este surjectivă, avem $g(g^{-1}(E''_n)) = E''_n$ pentru toți $n \in \mathbb{N}$. De aici se deduce rapid că lanțul considerat în E'' este staționar.

Pentru reciprocă, se consideră $(E_n)_{n \geq 0}$ un lanț ascendent de submodule ale lui E . Preimaginele modulelor E_i prin f , resp. imaginile lor prin g , formează lanț ascendent pe modulul noetherian E' , resp. E'' . Acestea staționează: $f^{-1}(E_n) = f^{-1}(E_k)$ și $g(E_n) = g(E_k)$ pentru toți

$n \geq k$, unde k a fost convenabil ales. Vom arăta că $E_n = E_k$ pentru $n \geq k$.

Fie $x \in E_n$, unde $n \geq k$. Din $g(x) \in g(E_n) = g(E_k)$ rezultă că există $y \in E_k$ astfel ca $g(y) = g(x)$. Atunci $x - y \in \ker g = \text{Im } f$. Așadar, există $z \in E'$ cu $f(z) = x - y \in E_n + E_k = E_n$. Deci $z \in f^{-1}(E_n) = f^{-1}(E_k)$, astfel că $x - y = f(z) \in E_k$. Prin urmare $x = (x - y) + y \in E_k$. \square

COROLAR 1.9. *Un modul izomorf cu un modul noetherian (resp. artinian) este noetherian (resp. artinian).*

DEMONSTRAȚIE. Se aplică teorema șirului exact

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow E \longrightarrow E \longrightarrow 0 .$$

\square

COROLAR 1.10. *Suma directă a unei familii finite de module este modul noetherian (resp. artinian) dacă și numai dacă fiecare membru al familiei are aceeași proprietate.*

DEMONSTRAȚIE. Se raționează prin inducție după cardinalul familiei folosind șirul exact canonic

$$0 \longrightarrow E_n \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n E_i \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n-1} E_i \longrightarrow 0 .$$

\square

COROLAR 1.11. *Orice modul finit generat peste un inel noetherian (resp. artinian) este modul noetherian (resp. artinian).*

DEMONSTRAȚIE. Un modul generat de n elemente este izomorf cu un cât al A -modulului A^n , care este A -modul noetherian (resp. artinian) conform rezultatului precedent. Apoi se aplică teorema 1.8. \square

COROLAR 1.12. *Dacă A este un inel noetherian (resp. artinian) și I este un ideal al său, atunci A/I este inel noetherian (resp. artinian).*

DEMONSTRAȚIE. Conform teoremei 1.8, A/I este A -modul noetherian (resp. artinian). Apoi se ține cont că orice ideal al inelului A/I este A -modul. \square

Ambele proprietăți se comportă bine la localizare.

PROPOZIȚIE 1.13. *Dacă E este un A -modul noetherian (resp. artinian) și S este un sistem multiplicativ închis în A , atunci $S^{-1}E$ este $S^{-1}A$ -modul noetherian (resp. artinian).*

DEMONSTRAȚIE. Aserțiunea rezultă din binecunoscuta corespondență dintre $S^{-1}A$ -submodulele lui $S^{-1}E$ și A -submodulele lui E care sunt S -saturate. \square

EXEMPLE. 1. Orice inel finit este noetherian și artinian pentru că există doar un număr finit de ideale.

2. Orice corp este inel noetherian și artinian, având doar două ideale.

3. Orice inel principal este noetherian. Un inel principal este artinian dacă și numai dacă este corp. Într-adevăr, dacă $p \neq 0$ este generatorul unui ideal maximal, șirul descrescător de ideale $(p) \supset (p^2) \supset (p^3) \supset \dots$ nu este staționar — în caz contrar rezultând existența unui număr natural $n > 0$ și a unui element a al inelului astfel ca $p^n = ap^{n+1}$, ceea ce implică p inversabil.

4. Un spațiu vectorial V este modul noetherian dacă și numai dacă este modul artinian, dacă și numai dacă are dimensiunea finită. Dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este o familie liniar independentă de elemente ale lui V , pentru $n \in \mathbb{N}$ se consideră subspațiile vectoriale V_n și W_n generate de elementele cu indici $\leq n$, respectiv $> n$. Atunci $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un lanț ascendent nestaționar, iar $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un lanț descendent nestaționar. Dacă V este finit dimensional, se folosește exemplul 2 și corolarul 1.11.

5. Pentru K corp, $K^{\mathbb{N}}$ și $K[X_1, X_2, \dots, X_n, \dots]$ nu sunt inele noetheriene. Afirmatia referitoare la $K^{\mathbb{N}}$ este consecință a exemplului 4. Pentru inelul de polinoame într-o infinitate de nedeterminate se observă, de pildă, că lanțul constând din idealele generate de primele n variabile, $n = 1, 2, \dots$, nu este staționar.

6. Pentru p număr prim se definește $H_p := \{ \frac{x}{p^n} : x \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \}$ și $\mathbb{Z}_{p^\infty} := H_p/\mathbb{Z}$. Atunci \mathbb{Z}_{p^∞} este \mathbb{Z} -modul artinian, dar nu noetherian. Pentru a demonstra aceste afirmații, considerăm G un subgroup propriu al lui \mathbb{Z}_{p^∞} și observăm că există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât G este generat de clasa lui $1/p^n$. Rezultă că dacă $G = p^{-s}\mathbb{Z}_{p^\infty}$ și $G' = p^{-t}\mathbb{Z}_{p^\infty}$ cu $s, t \in \mathbb{N}$, atunci $G' \leq G$ dacă și numai dacă $t \leq s$. Prin urmare, laticea \mathbb{Z} -submodulelor lui \mathbb{Z}_{p^∞} este bine ordonată relativ la incluziune, adică îndeplinește condiția (MIN). Cum mulțimea numerelor naturale nu satisface condiția lanțurilor ascendente, tragem concluzia că \mathbb{Z}_{p^∞} nu are proprietatea (ACC).

7. În notațiile exemplului precedent, H_p nu este \mathbb{Z} -modul artinian și nici noetherian, pentru că există un șir exact de grupuri abeliene $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow H_p \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^\infty} \longrightarrow 0$.

8. Un subinel al unui inel noetherian (resp. artinian) nu are neapărat aceeași proprietate. De pildă, inelul de polinoame într-o infinitate de nedeterminate de la exemplul 5 este subinel al corpului său de fracții.

Rezultatul care urmează arată că proprietatea unui inel de a fi noetherian se transferă la inelul de polinoame într-o variabilă. Astfel putem da noi exemple de inele noetheriane.

TEOREMA 1.14. (*Teorema bazei a lui Hilbert*) *Dacă A este inel noetherian, atunci inelul de polinoame $A[X]$ este încă noetherian.*

DEMONSTRAȚIE. Arătăm că dacă $A[X]$ nu este inel noetherian, atunci nici A nu este. Fie I un ideal în $A[X]$ care nu este finit generat. Alegem $f_1 \in I$ un polinom nenul de grad minim printre elementele lui I . Întrucât I nu coincide cu idealul generat de f_1 , există $f_2 \in I \setminus f_1A[X]$. Alegem un polinom f_2 de grad minim între toate polinoamele cu această proprietate. Repetând construcția, se obține un șir de polinoame $(f_n)_{n \geq 1}$ cu f_n un polinom de grad minim din $I \setminus (f_1, \dots, f_{n-1})A[X]$, $n \geq 1$. Notăm cu d_n gradul lui f_n și cu a_n coeficientul său dominant. Din alegerea polinoamelor rezultă $d_1 \leq d_2 \leq \dots$. Arătăm că lanțul de ideale $a_1A \subseteq (a_1, a_2)A \subseteq \dots$ este strict crescător. Să presupunem contrariul. Atunci există $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, astfel încât $(a_1, a_2, \dots, a_k)A = (a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1})A$ sau echivalent $a_{k+1} = a_1b_1 + \dots + a_kb_k$ pentru niște elemente $b_i \in A$. Atunci polinomul

$$g := f_{k+1} - \sum_{i=1}^k b_i X^{d_{k+1}-d_i} f_i$$

are gradul $< d_{k+1}$, este din idealul considerat I , dar nu aparține idealului generat de f_1, \dots, f_k . Existența unui astfel de polinom contrazice alegerea lui f_{k+1} . \square

Reciproca este valabilă pentru că dacă $A[X]$ este inel noetherian, atunci $A \simeq A[X]/(X)$ este $A[X]$ -modul noetherian, deci inel noetherian conform corolarului 1.12.

Pentru a formula consecințe importante ale acestui rezultat fundamental în algebra comutativă, reamintim următoarele noțiuni. Dacă $u : A \rightarrow B$ este un morfism unitar de inele comutative, B va fi numit *A -algebră de morfism structural u* . Pe grupul abelian $(B, +)$ subiacent inelului B se introduce o structură de A -modul prin restricția scalarilor via morfismul u , înmulțirea exterioară fiind definită prin formula $a \cdot x = u(a) \cdot x$, $a \in A$, $x \in B$, unde înmulțirea din partea dreaptă este înmulțirea internă cu care este înzestrat inelul B . În cazul în care u este

injectiv, identificând pe A cu imaginea sa prin u , putem presupune că A este un subinel al lui B și că u este morfismul de incluziune $A \subseteq B$. Spunem în acest caz că B este o *extindere* a inelului A .

Pentru $x_1, \dots, x_n \in B$ arbitrare se notează cu $A[x_1, \dots, x_n]$ cel mai mic subinel al lui B care conține elementele alese și $u(A)$. Din proprietatea de universalitate a algebrei polinoamelor rezultă că aplicația $\alpha : A[X_1, \dots, X_n] \rightarrow B$ definită prin evaluarea $f \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$ este unicul morfism de inele astfel încât $\alpha(X_i) = x_i$, $1 \leq i \leq n$, și $\alpha(a) = u(a)$, $a \in A$. Este clar că

$$A[x_1, \dots, x_n] = \text{Im } \alpha = \{ f(x_1, \dots, x_n) : f \in A[X_1, \dots, X_n] \}.$$

Se spune că morfismul de inele $u : A \rightarrow B$ este *de tip finit* sau că B este o *A-algebră de tip finit* sau că B este o *A-algebră finit generată* dacă există $x_1, \dots, x_n \in B$, $n \in \mathbb{N}$, astfel încât $B = A[x_1, \dots, x_n]$. În acest caz, x_1, \dots, x_n se numește *sistem de generatori ai A-algebrei B*. Din cele de mai sus rezultă că $B \simeq A[X_1, \dots, X_n]/I$ pentru un ideal I în inelul de polinoame $A[X_1, \dots, X_n]$. Se spune că morfismul u este *finit* sau că B este o *A-algebră finită* dacă B este A -modul finit generat.

PROPOZIȚIE 1.15. *Fie A un inel noetherian (resp. artinian) și B o A-algebră finită. Atunci B este inel noetherian (resp. artinian).*

DEMONSTRAȚIE. Conform corolarului 1.11 B este un A -modul noetherian (resp. artinian). Cum orice ideal al lui B este și un A -submodul al lui B privit ca A -modul, laticea idealelor lui B satisface condiția (ACC) (resp. (DCC)). \square

Are loc și o reciprocă parțială a acestui rezultat:

TEOREMA 1.16. *(Eakin-Nagata-Eisenbud) Dacă A este un subinel al lui B astfel încât B este o A-algebră finită via morfismul incluziune $A \subseteq B$, iar B este inel noetherian (resp. artinian), atunci A este inel noetherian (resp. artinian).*

DEMONSTRAȚIE. Pentru o demonstrație a afirmației referitoare la noetherianitate trimitem la [3, teorema 8.10]. Cazul artinian se găsește în [10]. \square

PROPOZIȚIE 1.17. *Fie A un inel noetherian și B o A-algebră de tip finit. Atunci B este un inel noetherian.*

DEMONSTRAȚIE. Inelul B este izomorf cu un inel factor al inelului de polinoame peste A într-un număr finit de nedeterminate. Un inel de forma $A[X_1, \dots, X_n]$ este noetherian conform teoremei bazei a lui Hilbert. Demonstrația se încheie folosind corolarul 1.12. \square

EXERCITII.

1. Fie E un A -modul. Arătați că următoarele condiții sunt echivalente:

- (i) E este modul noetherian,
- (ii) condiția (ACC) este satisfăcută pentru submodulele finit generate ale lui E ,
- (iii) orice modul cât al lui E este noetherian.

2. Un inel este noetherian dacă și numai dacă orice ideal prim este finit generat.

3. Dacă un inel are proprietatea că orice ideal maximal al său este finit generat, rezultă că inelul este noetherian?

4. Inelul de serii formale într-o variabilă cu coeficienți într-un inel noetherian este inel noetherian.

5. Fie E un A -modul și f un A -endomorfism al său.

a) Dacă E este modul artinian, atunci există un număr natural nenul n astfel încât $E = \text{Im } f^n + \ker f^n$. Deduceți că f este monomorfism dacă și numai dacă este automorfism.

b) Dacă E este modul noetherian, atunci există un număr natural nenul n astfel încât $\text{Im } f^n \cap \ker f^n = 0$. Așadar, f este epimorfism dacă și numai dacă este automorfism.

6. Orice endomorfism surjectiv al unui modul finit generat este automorfism.

2. Module de lungime finită

Până acum am studiat în paralel noetherianitatea și artinianitatea modulelor, ghidați de dualitatea existentă între cele două proprietăți. Am demonstrat câteva proprietăți ale modulelor noetheriene care nu au corespondent în cazul artinian. În această secțiune arătăm că prezența simultană a celor două proprietăți are consecințe importante, conducând la o generalizare a noțiunii de spațiu vectorial de dimensiune finită.

DEFINIȚIE 2.1. Un lanț finit de submodule

$$0 = E_n \subset E_{n-1} \subset \dots \subset E_1 \subset E_0 = E \quad (1)$$

se numește *filtrare finită* sau *serie normală* a lui E . Numărul n se numește *lungimea seriei*, iar modulele factor E_{i-1}/E_i , $1 \leq i \leq n$, poartă numele de *factori*.

O serie normală este numită *serie Jordan-Hölder* sau *șir de compoziție* pentru E dacă factorii săi sunt module simple (*i.e.* E_{i-1}/E_i nu are submodule proprii oricare ar fi i , $1 \leq i \leq n$). Echivalent, o serie

normală saturată (între ai cărei termeni nu mai pot fi introduse alte submodule).

Prin convenție, modulul nul admite un șir de compoziție de lungime zero.

PROPOZIȚIE 2.2. *Un modul E are un șir de compoziție dacă și numai dacă E este modul noetherian și artinian.*

DEMONSTRAȚIE. Să presupunem că E are un șir de compoziție de lungime n . Raționăm prin inducție după n . În cazul $n = 0$, E este modulul nul și nu avem nimic de demonstrat. Dacă $n = 1$, atunci E este un A -modul simplu, care evident este noetherian și artinian. Presupunem că orice A -modul care are un șir de compoziție de lungime cel mult n , $n \geq 1$, este noetherian și artinian, iar E admite un șir de compoziție $0 = E_{n+1} \subset E_n \subset \dots \subset E_1 \subset E_0 = E$ de lungime $n + 1$. Atunci E_1 are un șir de compoziție de lungime n , deci conform ipotezei de inducție, E_1 este modul noetherian și artinian. Cum E/E_1 este modul simplu, aplicând teorema 1.8 șirului exact

$$0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E \longrightarrow E/E_1 \longrightarrow 0$$

se obține că E este noetherian și artinian.

Demonstrăm reciproca. Mulțimea tuturor submodulelor nenule ale modulului artinian E are un element minimal E_1 . Se observă că E_1 este modul simplu, altfel s-ar contrazice minimalitatea sa. Dacă $E \neq E_1$, se raționează la fel pentru modulul artinian nenul E/E_1 , obținându-se existența unui submodule E_2 al lui E având proprietatea că E_2/E_1 este modul simplu. În acest mod se găsește un lanț ascendent $0 \subset E_1 \subset \subset E_2 \subset \dots$ de submodule ale modulului noetherian E . Acest lanț este staționar conform condiției (ACC). Pe de altă parte, din modul de alegere a submodulelor E_i rezultă că ultimul termen din lanț nu poate fi decât întreg modulul E . \square

LEMA 2.3. *Un A -modul nenul E este simplu dacă și numai dacă există un ideal maximal M astfel încât $E \simeq A/M$.*

DEMONSTRAȚIE. Corpul A/M neavând ideale diferite de zero și de el însuși, înseamnă că A -modulul A/M este simplu pentru orice ideal maximal M . Reciproc, să presupunem că E este un modul nenul și simplu. Pentru $x \in E$, $x \neq 0$, Ax este un submodule nenul al lui E . Prin urmare, $E = Ax$, deci există un morfism surjectiv $p : A \longrightarrow E$ definit prin asocierea $a \mapsto ax$. Din teorema fundamentală de izomorfism pentru module rezultă că nucleul $M := \ker p$ satisface $A/M \simeq E$. Dacă M nu ar fi ideal maximal, atunci A/M , deci și E , ar conține un submodule nenul, contradicție. \square

DEFINIȚIE 2.4. Se spune că A -modulul E are *lungime finită* dacă există majorare pentru lungimile tuturor seriilor normale.

TEOREMA 2.5. (*Jordan-Hölder*) Dacă există un șir de compoziție pentru E , atunci E are lungime finită și toate șirurile sale de compoziție au aceeași lungime.

DEMONSTRAȚIE. Fie

$$0 = E_n \subset E_{n-1} \subset \dots \subset E_1 \subset E_0 = E \quad (2)$$

un șir de compoziție de lungime minimă pentru E . Vom arăta prin inducție după n că orice serie normală a lui E are lungimea cel mult n . În particular, orice alt șir de compoziție are lungimea mai mică sau egală cu n . În virtutea alegerii șirului de compoziție (2), rezultă concluzia anunțată.

Teorema este evidentă pentru $n \leq 1$. Presupunem că $n > 1$ și că aserțiunea este valabilă pentru modulele care au un șir de compoziție de lungime mai mică decât n . Fie $0 = F_t \subset F_{t-1} \subset \dots \subset F_1 \subset F_0 = E$ o serie normală arbitrară a lui E . Dacă $F_1 \subseteq E_1$, aplicând ipoteza de inducție lui E_1 se obține $t-1 \leq n-1$. Dacă $F_1 \not\subseteq E_1$, atunci $E_1 + F_1 = E$ deoarece E/E_1 este modul simplu. Din teorema de izomorfism pentru module avem

$$\frac{E}{E_1} = \frac{E_1 + F_1}{E_1} \simeq \frac{F_1}{E_1 \cap F_1}.$$

Rezultă că $F_1/(E_1 \cap F_1)$ este modul simplu. Întrucât E_1 are o serie de compoziție de lungime $n-1$, din ipoteza de inducție se obține că în submodulul său propriu $E_1 \cap F_1$ toate seriile normale au lungimea cel mult $n-2$. Folosind faptul că $F_1/(E_1 \cap F_1)$ este simplu, se deduce că F_1 are o serie de compoziție de lungime $\leq n-1$. Așadar, și în acest caz avem $t-1 \leq n-1$. \square

În virtutea teoremei Jordan-Hölder, următoarea definiție are sens:

DEFINIȚIE 2.6. Maximul lungimilor seriilor normale dintr-un modul E în care există șir de compoziție poartă numele *lungimea modulului* E . Notăția consacrată este $l_A(E)$. Dacă nu există pericol de confuzie, se omite menționarea explicită a inelului.

Din demonstrația teoremei Jordan-Hölder se constată că $l_A(E)$ este egală cu lungimea oricărui șir de compoziție. Cunoștințele referitoare la modulele noetheriene și artiniene ne permit să arătăm că lungimea este o funcție aditivă pe mulțimea modulelor de lungime finită.

PROPOZIȚIE 2.7. Fie dată o serie normală (1) pentru E . Atunci E are lungime finită dacă și numai dacă E_{i-1}/E_i are lungime finită pentru $i = 1, 2, \dots, n$. Dacă $l(E) < \infty$, atunci $l(E) = \sum_{i=1}^n l(E_{i-1}/E_i)$.

DEMONSTRAȚIE. Este suficient să justificăm afirmațiile pentru $n = 2$, cazul general rezultând apoi ușor prin inducție. Așadar, presupunem că $l(E) < \infty$ și că $0 = E_2 \subset E_1 \subset E$ este o serie normală, pe care o rafinăm până la un șir de compoziție. Modulele din acest șir de compoziție situate între E_1 și E (resp. E_2 și E_1) induc un șir de compoziție pentru E/E_1 (resp. E_1). Evident are loc relația $l(E) = l(E/E_1) + l(E_1)$.

Pentru implicația reciprocă, presupunem că E/E_1 și E_1 sunt module de lungime finită. Obținem un șir de compoziție pentru E prelungind un șir de compoziție pentru E_1 cu preimaginile în E ale modulelor dintr-un șir de compoziție al lui E/E_1 . \square

COROLAR 2.8. a) Orice submodul și orice imagine omomorfă a unui modul de lungime finită are lungime finită.

b) O sumă directă finită de module de lungime finită are lungime finită și lungimea sa este suma lungimilor sumanzilor.

Rezultatul care urmează arată că noțiunea de modul de lungime finită este o generalizare a noțiunii de spațiu vectorial finit-dimensional.

PROPOZIȚIE 2.9. Fie V un spațiu vectorial peste un corp K . Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) $\dim_K(V) < \infty$,
- (ii) V este un K -modul de lungime finită,
- (iii) V este un K -modul noetherian,
- (iv) V este un K -modul artinian.

Dacă una dintre aceste condiții este îndeplinită, atunci are loc egalitatea $\dim_K(V) = l_K(V)$.

DEMONSTRAȚIE. Din propoziția 2.2 știm deja că (iii) și (iv) sunt consecințe ale condiției (ii). Pentru a arăta că (i) implică (ii), se consideră o bază e_1, e_2, \dots, e_n pentru V . Spațiile vectoriale $V_t := Ke_1 + \dots + Ke_t$, $1 \leq t \leq n$, constituie un șir de compoziție pentru V . Prin urmare, V este un K -modul de lungime finită. Implicațiile (iii) \implies (i) și (iv) \implies (i) au fost stabilite în exemplul 4. \square

EXERCITII.

1. Dacă E_1 și E_2 sunt submodule ale unui modul E de lungime finită, atunci $l(E_1 + E_2) + l(E_1 \cap E_2) = l(E_1) + l(E_2)$.

2. Fie E un modul de lungime finită n și f un endomorfism al lui E . Să se arate că E este suma directă internă dintre $\text{Im } f^n$ și $\ker f^n$.

3. Un modul nenul E se numește *indecompozabil* dacă singurii săi sumanzi direcți sunt modulele improprii 0 și E . Să se demonstreze că orice modul noetherian sau artinian se poate scrie ca o sumă directă finită de submodule indecompozabile.

4. Fie f un endomorfism al unui modul indecompozabil și de lungime finită. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) f este monomorfism,
- (ii) f este epimorfism,
- (iii) f este automorfism,
- (iv) $f^n \neq 0$ pentru orice număr natural n .

3. Descompunere primară în module noetheriene

Teoremele de descompunere a unui obiect în componente mai simple sau cu anumite proprietăți specificate ocupă un loc central în algebră. Posibilitatea de a clasifica obiectele sau de a le manipula mai ușor este întotdeauna atrăgătoare. În această secțiune se arată că fiecare submodule al unui modul noetherian este intersecția unei familii finite de submodule primare. În forma actuală, demonstrația este influențată de viziunea modernă, impusă de Bourbaki, și este susceptibilă de a fi parafrazată pentru inele necomutative, în categorii sau latici.

3.1. Radicalul unui submodule.

DEFINIȚIE 3.1. Fie A un inel, I un ideal al său, E un A -modul și F submodule al lui E . Mulțimea

$$(F : I)_E := \{ x \in E : ax \in F \text{ pentru orice } a \in I \} \quad (3)$$

este numită *transportorul lui I în F* . Mulțimea

$$(F : E)_A := \{ a \in A : aE \subseteq F \} \quad (4)$$

este numită *câțul lui F prin E* . În cazul particular al submodulului nul, $(0 : I)_E$ este numit *anulatorul lui I în E* și se notează $\text{Ann}_E I$.

Se verifică imediat că $(F : I)_E$ este submodule al lui E , iar $(F : E)_A$ este un ideal în A . Proprietățile de mai jos se justifică fără nici o dificultate:

PROPOZIȚIE 3.2. Fie A un inel, I, J ideale, E un A -modul și F submodule al lui E . Atunci:

- a) $F \subseteq (F : I)_E$,
- b) $I(F : I)_E \subseteq F$,
- c) $((F : I)_E : J)_E = (F : IJ)_E = ((F : J)_E : I)_E$,

d) pentru orice familie de submodule $(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ale lui E avem

$$\left(\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \right) : I \right)_E = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (F_\lambda : I)_E ,$$

e) pentru orice familie de ideale $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ale lui A avem

$$\left(F : \sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda \right)_E = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (F : I_\lambda)_E .$$

DEFINIȚIE 3.3. Numim *rădăcină* a lui F în E mulțimea

$$\text{Rad}_E(F) := \{ a \in A : \forall x \in E, \exists n \in \mathbb{N} \text{ astfel ca } a^n x \in F \}. \quad (5)$$

În particular, pentru orice ideal I notăm $\text{Rad}(I) = \text{Rad}_A(I)$. Se verifică imediat că $\text{Rad}_E(F)$ este ideal în A care conține câțul lui F prin E . Alte proprietăți sunt date în următoarea

PROPOZIȚIE 3.4. În notațiile și ipotezele din propoziția precedentă

a) $\text{Rad}_E(F) = A$ dacă și numai dacă $F = E$, dacă și numai dacă $(F : E)_A = A$.

b) Dacă $G \subseteq F' \subseteq F$ sunt submodule ale lui E , atunci

$$(G : F)_A \subseteq (G : F')_A, \text{Rad}_E(F') \subseteq \text{Rad}_E(F) \quad \text{și} \quad (F' : E)_A \subseteq (F : E)_A .$$

c) $\text{Rad}_E(F) = \text{Rad}_{E/F}(0)$.

d) $\text{Rad}_E(F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n) = \text{Rad}_E(F_1) \cap \dots \cap \text{Rad}_E(F_n)$.

PROPOZIȚIE 3.5. Pentru J și I ideale ale lui A sunt îndeplinite proprietățile:

a) Dacă $I \subseteq J$, atunci $\text{Rad}(I) \subseteq \text{Rad}(J)$.

b) $\text{Rad}(\text{Rad}(I)) = \text{Rad}(I)$.

c) $\text{Rad}(I) = A$ dacă și numai dacă $I = A$.

d) $\text{Rad}(IJ) = \text{Rad}(I \cap J) = \text{Rad}(I) \cap \text{Rad}(J)$.

e) $\text{Rad}(I + J) = \text{Rad}(\text{Rad}(I) + \text{Rad}(J))$.

EXEMPLE 1. Fie n un număr întreg supraunitar. Atunci $\text{Rad}_{\mathbb{Z}}(n\mathbb{Z})$ este generat de produsul divizorilor primi ai lui n .

2. $\text{Rad}_{\mathbb{Z}}(0) = 0$, $\text{Rad}_{\mathbb{Q}}(0) = 0$, $\text{Rad}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Z}) = 0$.

3. $\text{Rad}_A(I) = \{ a \in A : \text{există } n \in \mathbb{N} \text{ astfel ca } a^n \in I \}$.

Rădăcina idealului nul este formată din acele elemente a ale inelului pentru care există un număr natural n astfel ca $a^n = 0$. Prin urmare, $\text{Rad}_A(0)$ coincide cu idealul format din elementele nilpotente din inel, ideal notat $N(A)$ și numit *nilradicalul* inelului.

DEFINIȚIE 3.6. Un ideal se numește *radical* dacă el coincide cu rădăcina sa. Un inel este *reductiv* dacă nu are elemente nilpotente nenule.

Orice ideal prim este ideal radical. Mai general, pentru orice ideal prim P și orice $n \geq 1$ avem $\text{Rad}(P^n) = P$. Pentru orice inel A , inelul $A/\text{N}(A)$ este redus.

PROPOZIȚIE 3.7. *Dacă S este un sistem multiplicativ închis în A , atunci $\text{N}(S^{-1}A) = S^{-1}\text{N}(A)$. În particular, orice inel de fracții al unui inel redus este inel redus.*

În repetate rânduri vom folosi un rezultat cunoscut sub numele de lema lui Krull:

PROPOZIȚIE 3.8. *(Lema lui Krull) Fie S un sistem multiplicativ închis ce nu conține 0 și I un ideal disjunct de S . Atunci există un ideal prim ce conține I și este disjunct de S . În particular, orice ideal $I \neq A$ este conținut într-un ideal maximal.*

DEMONSTRAȚIE. Vom folosi procedeul de zornificare. Notăm cu \mathcal{L} mulțimea idealelor din A care nu taie S și conțin I . Prin ipoteză \mathcal{L} este nevidă. Vom demonstra că \mathcal{L} ordonată cu relația de incluziune este mulțime inductivă. Fie $J_1 \subseteq J_2 \subseteq \dots$ un șir crescător de ideale din \mathcal{L} . Atunci $J := \cup \{J_n : n \geq 1\}$ este un ideal disjunct de S , conține I , deci $J \in \mathcal{L}$. Din lema lui Zorn rezultă că \mathcal{L} conține un element maximal P . Vom arăta că P este ideal prim al lui A .

Fie $b, c \in A \setminus P$ astfel încât $bc \in P$. Deoarece $P + Ab$ și $P + Ac$ conțin strict idealul P , din maximalitatea lui P ca element al lui \mathcal{L} decurge $(P + Ab) \cap S \neq \emptyset$ și $(P + Ac) \cap S \neq \emptyset$. Explicit, există $s = p + cx \in S$ și $t = q + by \in S$, cu $x, y \in A$ și $p, q \in P$. Prin calcul direct se găsește $st = (pq + bpy + cqx) + cbxy \in P$. Cum S este închisă la înmulțire, $st \in S$, ceea ce contrazice faptul că P și S nu au elemente în comun.

În cazul particular $I = 0$ și $S = \{1\}$, mulțimea \mathcal{L} definită mai sus constă din idealele distincte de întreg inelul. Prin urmare, elementele sale maximale sunt exact idealele maximale ale lui A . Ultima parte a concluziei propoziției rezultă folosind această observație pentru inelul A/I și corespondența dintre $\text{Spec } A/I$ și $\text{Spec } A$. \square

O altă proprietate utilă este consemnată în următoarea leamnă.

LEMA 3.9. *(Principiul local-global) Următoarele condiții sunt echivalente:*

- (i) $E = 0$,
- (ii) $E_P = 0$ pentru orice ideal prim P ,
- (iii) $E_M = 0$ pentru orice ideal maximal M .

DEMONSTRAȚIE. Singura implicație care necesită justificare este (iii) \implies (i). Presupunem că E este un modul nenul ce îndeplinește

condiția (iii). Se găsește $x \in E$, $x \neq 0$, deci anulatorul său $\text{Ann}_A x$ este diferit de A . Conform lemei lui Krull, idealul $\text{Ann}_A x$ este conținut într-un ideal maximal M . Întrucât $x/1 \in E_M = 0$, există $a \in A \setminus M$ cu $ax = 0$. Această relație arată $a \in \text{Ann}_A x \subseteq M$, absurd. \square

Rezultatul următor arată că proprietatea unui inel de a fi redus este o proprietate locală.

PROPOZIȚIE 3.10. *Următoarele afirmații sunt echivalente:*

- (i) A este inel redus,
- (ii) A_P este inel redus pentru orice $P \in \text{Spec } A$,
- (iii) A_M este inel redus pentru orice $M \in \text{Max } A$.

DEMONSTRAȚIE. La demonstrarea implicației (iii) \implies (i) se folosește comutarea localizării cu luarea nilradicalului și faptul că un modul este nul dacă și numai dacă toate localizatele sale în ideale maximale sunt nule. \square

PROPOZIȚIE 3.11. *Fie A un inel și I un ideal în A . Atunci $\text{Rad}_A(I)$ este intersecția idealelor prime din A care conțin pe I .*

DEMONSTRAȚIE. Ținând cont de relația c) din propoziția 3.4 și de bijecția dintre idealele lui A care conțin pe I și idealele inelului A/I , este suficient să arătăm că nilradicalul unui inel A coincide cu intersecția idealelor prime ale inelului.

Fie a un element nilpotent și n un număr natural astfel ca $a^n = 0$. Pentru orice ideal prim P avem $a^n \in P$, deci $a \in P$. Așadar,

$$N(A) \subseteq \bigcap \{ P : P \in \text{Spec } A \} .$$

Pentru a demonstra egalitatea în această incluziune, vom arăta că pentru $a \in A \setminus N(A)$ se găsește un ideal prim P care nu conține a . Considerăm sistemul multiplicativ S constând din elementul unitate al inelului A și din puterile lui a . În conformitate cu alegerea lui a , S nu conține elementul nul. Proprietatea dorită rezultă din lema lui Krull. \square

DEFINIȚIE 3.12. Un ideal prim P se numește *ideal prim minimal* dacă nici un ideal prim nu este conținut strict în P . Altfel spus, P este un element minimal în mulțimea $\text{Spec } A$ ordonată cu relația de incluziune. Vom nota cu $\text{Min } A$ mulțimea tuturor idealelor prime minimale ale lui A .

Arătăm că fiecare ideal prim conține cel puțin un ideal prim minimal.

LEMA 3.13. *Pentru orice $P \in \text{Spec } A$ există $Q \in \text{Min } A$ cu $Q \subseteq P$.*

DEMONSTRAȚIE. Vom arăta că mulțimea

$$\mathcal{L} := \{ Q \in \text{Spec } A : Q \subseteq P \}$$

ordonată de incluziune este inferior inductivă (altfel spus, \mathcal{L} cu ordinea duală este mulțime inductiv ordonată). Dacă $P_1 \supseteq P_2 \supseteq \dots$ este un lanț descrescător de ideale din \mathcal{L} , notăm $Q := \bigcap \{ P_n : n \geq 1 \}$. Evident Q este conținut în orice P_n , $n \geq 1$. Mai trebuie justificat faptul că idealul Q este prim. Fie $a, b \in A \setminus Q$. Atunci există numere naturale s și t pentru care $a \notin P_s$, $b \notin P_t$. Notând cu n cel mai mare dintre s și t , din relația $P_n = P_s \cap P_t$ rezultă că $a \notin P_n$ și $b \notin P_n$. Prin urmare $ab \notin P_n$, și cu atât mai mult $ab \notin Q$. \square

Cum vom vedea, în cele mai multe inele noetheriene există o infinitate de ideale prime, dar numai un număr finit dintre acestea sunt minimale. Prin urmare, corolarul următor are importanță atunci când se doresc calcule explicite.

COROLAR 3.14. a) *Radicalul unui ideal I este intersecția idealelor prime care conțin pe I și sunt minimale cu această proprietate.*

b) *Pentru orice modul E și F submodule al său, $\text{Rad}_E(F)$ este intersecție de ideale prime.*

PROPOZIȚIE 3.15. *Dacă I și J sunt două ideale astfel încât J este finit generat și conținut în $\text{Rad}(I)$, atunci I conține o putere a lui J .*

DEMONSTRAȚIE. Fie b_1, \dots, b_n un sistem de generatori ai lui J . Pentru fiecare indice $i = 1, \dots, n$ există un număr natural e_i astfel ca $b_i^{e_i} \in I$. Notăm s suma acestor exponenți și arătăm că $J^s \subseteq I$. Un element arbitrar $y \in J^s$ este o sumă finită de elemente de forma $x_1 \cdots x_s$, cu $x_j \in J$, iar fiecare x_j este o combinație liniară cu coeficienți din A de elementele b_1, \dots, b_n . Prin urmare $x_1 \cdots x_s$ este suma unor termeni de forma $cb_1^{u_1} \cdots b_n^{u_n}$, unde $c \in A$ și u_1, \dots, u_n sunt numere naturale cu suma s . Pentru cel puțin un indice j avem $u_j \geq e_j$, deci toate produsele ce apar în scrierea lui $x_1 \cdots x_s$ sunt din I . \square

Aplicând acest rezultat pentru I ideal arbitrar al unui inel noetherian și $J = \text{Rad}(I)$, se obține:

COROLAR 3.16. *Orice ideal al unui inel noetherian conține o putere a radicalului său.*

PROPOZIȚIE 3.17. *Fie $0 \longrightarrow E' \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} E'' \longrightarrow 0$ un șir exact de A -module, F un submodule al lui E , $F'' := g(F)$ și $F' := f^{-1}(F)$. Atunci*

$$\text{Rad}_E(F) = \text{Rad}_{E'}(F') \cap \text{Rad}_{E''}(F'') .$$

DEMONSTRAȚIE. Fie a un element arbitrar al intersecției de ideale din membrul drept. Rezultă că pentru orice $x \in E$ există numărul natural m astfel încât $g(a^m x) = a^m g(x) \in F''$. Așadar, există $y \in F$ pentru care $a^m x - y \in E'$. Pe de altă parte, există un număr natural t astfel ca $a^t(a^m x - y) \in F'$, deci $a^{m+t}x \in F$. Relația fiind valabilă pentru orice $x \in E$, conchidem că

$$\text{Rad}_{E'}(F') \cap \text{Rad}_{E''}(F'') \subseteq \text{Rad}_E(F) .$$

Incluziunea contrară se verifică asemănător. \square

PROPOZIȚIE 3.18. *Fie S un sistem multiplicativ închis în A , E un A -modul și $u : A \rightarrow S^{-1}A$, $v : E \rightarrow S^{-1}E$ morfismele canonice.*

a) *Dacă F este un A -submodul al lui E , atunci*

$$S^{-1}\text{Rad}_E(F) \subseteq \text{Rad}_{S^{-1}E}(S^{-1}F) .$$

b) *Dacă F' este un $S^{-1}A$ -submodul al lui $S^{-1}E$, atunci*

$$u^{-1}(\text{Rad}_{S^{-1}E}(F')) = \text{Rad}_E(v^{-1}(F')) .$$

DEMONSTRAȚIE. a) Fie $b \in S^{-1}\text{Rad}_E(F)$. Atunci $b = a/s$, cu $a \in \text{Rad}_E(F)$ și $s \in S$. Pentru un element arbitrar $y = e/t \in S^{-1}E$ cu $e \in E$ și $t \in S$, există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $a^n e \in F$. Prin urmare $b^n y = a^n e/s^n t \in S^{-1}F$.

b) Pentru $a \in u^{-1}(\text{Rad}_{S^{-1}E}(F'))$ și $e \in E$ se găsește $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $v(a^n e) = u(a^n) \cdot v(e) \in F'$, astfel că $a^n e \in v^{-1}(F')$. Cum e este arbitrar în E , se obține $a \in \text{Rad}_E(v^{-1}(F'))$. Fie acum a din $\text{Rad}_E(v^{-1}(F'))$ și $e/s \in S^{-1}E$. Conform definiției, avem $a^n e \in v^{-1}(F')$ pentru un număr natural n convenabil. Atunci $v(a^n e) = u(a^n)v(e) = u(a^n) \cdot e/s \cdot s/1 \in F'$, ceea ce înseamnă $a \in u^{-1}(\text{Rad}_{S^{-1}E}(F'))$. \square

EXEMPLU. Incluziunea demonstrată la punctul a) poate fi strictă. De pildă, pentru $A = \mathbb{Z}$, $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $E = \mathbb{Q}$ și $F = \mathbb{Z}$ avem $S^{-1}\text{Rad}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Z}) = S^{-1}0 = 0$, $\text{Rad}_{\mathbb{Q}}(S^{-1}\mathbb{Z}) = \text{Rad}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

Condiții suficiente pentru realizarea egalității sunt puse în evidență în următoarea

PROPOZIȚIE 3.19. *Fie S un sistem multiplicativ închis din inelul A , E un A -modul și F un submodul al său. Atunci*

$$S^{-1}\text{Rad}_E(F) = \text{Rad}_{S^{-1}E}(S^{-1}F)$$

dacă una dintre următoarele condiții este îndeplinită:

- $\alpha)$ *E este un A -modul de tip finit,*
- $\beta)$ *din $s \in S$, $e \in E$ și $se \in F$ rezultă $e \in F$.*

DEMONSTRAȚIE. În notațiile din propoziția 3.18, pentru a/s element arbitrar din $\text{Rad}_{S^{-1}E}(S^{-1}F)$ și orice e din E există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $(a/s)^n \cdot (e/1) \in S^{-1}F$, deci $ta^n e \in F$ pentru $t \in S$ convenabil. În cazul β) rezultă imediat $a^n e \in F$, de unde $a/s \in S^{-1}\text{Rad}_E(F)$.

Presupunem în continuare îndeplinită condiția α). Considerăm e_1, \dots, e_r un sistem finit de generatori pentru E . Pentru fiecare indice i , $i = 1, \dots, r$, există $n_i \in \mathbb{N}$ și $t_i \in S$ astfel încât $t_i a^{n_i} e_i \in F$. Luând $n := \max\{n_i : i = 1, \dots, r\}$ și $t := \prod_{i=1}^r t_i$, se obține $ta^n E \subseteq F$ și deci $ta \in \text{Rad}_E(F)$. Așadar, $a/s = at/st \in S^{-1}\text{Rad}_E(F)$. \square

În continuare arătăm că mulțimea idealelor prime ale unui inel are în mod natural o structură de spațiu topologic. Această topologie este folosită intens în geometria algebrică.

Pentru orice ideal I al inelului comutativ și unitar A se notează

$$V(I) := \{P \in \text{Spec } A : I \subseteq P\}.$$

PROPOZIȚIE 3.20. *Aplicația de la mulțimea idealelor lui A la mulțimea părților lui $\text{Spec } (A)$ definită prin asocierea $I \mapsto V(I)$ are următoarele proprietăți:*

- a) $V(0) = \text{Spec } A$, $V(A) = \emptyset$;
- b) dacă $I \subseteq J$, atunci $V(J) \subseteq V(I)$;
- c) pentru orice familie de ideale $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ avem

$$V\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda\right) = V\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} V(I_\lambda);$$

- d) $V(I \cap J) = V(IJ) = V(I) \cup V(J)$;
- e) $V(I) = \emptyset$ dacă și numai dacă $I = A$;
- f) $V(I) = V(\text{Rad}(I))$.

Proprietățile a), c) și d) permit să se definească o topologie pe mulțimea $\text{Spec } A$ în care mulțimile închise sunt exact mulțimile de forma $V(I)$, pentru I un ideal în A . Această topologie este numită *topologia spectrală* sau *topologia lui Zariski* pe spațiul $\text{Spec } A$. În continuare vom considera întotdeauna această topologie pe mulțimea idealelor prime ale inelului A .

Dacă X este o submulțime a lui $\text{Spec } (A)$, notăm

$$I(X) := \bigcap \{P : P \in X\}.$$

Evident $I(X)$ este un ideal în A , $I(\emptyset) = A$, iar

$$I\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} I(X_\lambda)$$

pentru orice familie $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de submulțimi ale lui $\text{Spec } A$. În particular, dacă $X \subseteq Y$, atunci $I(Y) \subseteq I(X)$.

PROPOZIȚIE 3.21. *Fie I ideal în A și $X \subseteq \text{Spec } A$. Atunci:*

- a) $V(I)$ este o mulțime închisă în spațiul topologic $\text{Spec } (A)$, iar $I(X)$ este un ideal radical al lui A .
- b) $I(V(I)) = \text{Rad}(I)$, $V(I(X)) = \bar{X}$, închiderea mulțimii X în topologia spectrală.
- c) Aplicațiile I și V definesc bijecții descrescătoare, inverse una alteia, între mulțimea mulțimilor închise ale lui $\text{Spec } (A)$ și mulțimea idealelor radicale ale lui A .

DEMONSTRAȚIE. a) $V(I)$ este mulțime închisă în $\text{Spec } A$ conform definiției topologiei spectrale. Am văzut că pentru orice ideal I avem

$$\text{Rad}(I) = \cap \{ P : P \in V(I) \} ,$$

deci

$$\text{Rad}(I(X)) = \cap \{ P : I(X) \subseteq P \} .$$

Cum pentru orice $Q \in X$ avem $I(X) \subseteq Q$, rezultă că toate idealele din X apar printre idealele prime prin intersectarea cărora se obține $\text{Rad}(I(X))$. Altfel spus, $\text{Rad}(I(X)) \subseteq I(X)$.

b) Din definiții și din propoziția 3.11 rezultă

$$I(V(I)) = \cap \{ P : P \in V(I) \} = \text{Rad}(I) .$$

Fie J un ideal al lui A astfel încât $X \subseteq V(J)$, adică $J \subseteq P$ pentru orice $P \in X$. Atunci $J \subseteq I(X)$ și din monotonia aplicației V rezultă $V(I(X)) \subseteq V(J)$. Pe de altă parte, $X \subseteq V(I(X))$. Conchidem că $V(I(X))$ este cea mai mică parte închisă a spațiului $\text{Spec } A$ care conține X , adică $V(I(X)) = \bar{X}$.

c) Consecință directă a celor demonstrate anterior. □

EXERCITII.

1. Determinați nilradicalul inelului de polinoame (respectiv, serii formale) într-o nedeterminată cu coeficienți într-un inel comutativ.

2. Caracterizați inelele în care nilradicalul este un ideal maximal (respectiv minimal).

3. Pentru orice ideale I, J, K ale unui inel A au loc egalitățile:

$$\text{Rad}(I + JK) = \text{Rad}(I + (J \cap K)) = \text{Rad}(I + J) \cap \text{Rad}(I + K) .$$

4. Dacă $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ este o familie de mulțimi închise ale spațiului topologic $\text{Spec } A$, atunci

$$I\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda\right) = \text{Rad}\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} I(X_\lambda)\right) .$$

5. Dacă I și J sunt ideale în A , arătați că $V(I) \subseteq V(J) \iff J \subseteq \text{Rad}(I) \iff \text{Rad}(J) \subseteq \text{Rad}(I)$.

6. Să se arate că următoarele condiții sunt echivalente pentru un spațiu topologic X :

- (i) orice două mulțimi deschise nevide au intersecția nevidă,
- (ii) orice mulțime deschisă nevidă a lui X este densă în X ,
- (iii) orice mulțime deschisă a lui X este conexă,
- (iv) orice două mulțimi închise ale lui X , ambele diferite de X , au reuniunea diferită de X .

Un spațiu topologic X care îndeplinește aceste condiții este numit *irreductibil*.

7. Considerăm spațiul $\text{Spec } A$ înzestrat cu topologia spectrală.

a) Să se arate că o submulțime $Y \subseteq \text{Spec } A$ este ireductibilă dacă și numai dacă $I(Y) \in \text{Spec } A$.

b) $\text{Spec } A$ este un spațiu ireductibil dacă și numai dacă singurele elemente $e \in A$ cu $e^2 = e$ sunt $e = 0$ și $e = 1$.

3.2. Suportul unui modul. O noțiune importantă în algebra comutativă este aceea de suport al unui modul.

DEFINIȚIE 3.22. Fie E un A -modul. Mulțimea

$$\text{Supp}_A E := \{ P \in \text{Spec } A : E_P \neq 0 \}$$

se numește *suportul lui E*.

Întrucât $\text{Supp}_A A = \text{Spec } A$, noțiunea are semnificație doar pentru module. Cu ajutorul suportului se pot distinge modulele nule. Principiul local-global poate fi reformulat astfel:

LEMA 3.23. *Un modul este nul dacă și numai dacă suportul său este mulțimea vidă.*

EXEMPLU. $\text{Supp}_A (A/I) = V(I)$ pentru orice ideal I al lui A .

Într-adevăr, pentru $P \in \text{Spec } A$ avem echivalențele $P \in \text{Supp}_A (A/I) \iff (A/I)_P \neq 0 \iff A_P/IA_P \neq 0 \iff IA_P \neq A_P \iff I \cap (A \setminus P) = \emptyset \iff I \subseteq P \iff P \in V(I)$.

PROPOZIȚIE 3.24. *Dacă $0 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 0$ este un șir exact de A -module, atunci $\text{Supp}_A F = \text{Supp}_A E \cup \text{Supp}_A G$.*

DEMONSTRAȚIE. Pentru orice ideal prim P avem șirul exact de A_P -module $0 \longrightarrow E_P \longrightarrow F_P \longrightarrow G_P \longrightarrow 0$, deci $F_P = 0$ dacă și numai dacă $E_P = 0$ și $G_P = 0$. \square

PROPOZIȚIE 3.25. *Dacă $(E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ este o familie de submodule ale unui modul E , atunci*

$$\text{Supp} \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda \right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \text{Supp} (E_\lambda) .$$

DEMONSTRAȚIE. Cum localizarea comută cu sumele arbitrare de submodule, pentru orice ideal prim P avem $(\sum_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda)_P = 0$ dacă și numai dacă $(E_\lambda)_P = 0$ pentru orice $\lambda \in \Lambda$. \square

COROLAR 3.26. *Dacă $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ este o familie de generatori pentru A -modulul E , atunci*

$$\text{Supp} E = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V(\text{Ann}_A(x_\lambda)) .$$

În particular, dacă E este A -modul finit generat, atunci $\text{Supp} E = V(\text{Ann}_A(E))$ este o mulțime închisă în topologia Zariski.

DEMONSTRAȚIE. Pentru orice element x al unui modul E , aplicația $A \rightarrow E$ care asociază unui element $a \in A$ produsul său cu x este un morfism de A -module, a cărui imagine este submodulul Ax generat de x și al cărui nucleu este $\text{Ann}_A(x)$. Conform teoremei fundamentale de izomorfism, se obține $A/\text{Ann}_A(x) \simeq Ax$.

Prima afirmație a concluziei dorite rezultă din această observație, din faptul că $E = \sum Ax_\lambda$, din propoziția 3.25 și din exemplul ce o precede. Pentru ultima parte se folosesc egalitățile $\text{Ann}_A E = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \text{Ann}_A(x_\lambda)$ și $V(I \cap J) = V(I) \cup V(J)$ pentru orice ideale I, J ale lui A . \square

LEMA 3.27. (*Lema de evitare a lui McCoy*) *Fie $I \leq A$ și P_1, \dots, P_n ($n \geq 2$) o familie de ideale dintre care cel mult două nu sunt prime. Dacă I este conținut în reuniunea idealelor P_1, \dots, P_n , atunci I este conținut într-unul din aceste ideale.*

DEMONSTRAȚIE. Raționăm prin inducție după n . Dacă $n = 2$ și există $x_j \in I \setminus P_{3-j}$, $j = 1, 2$, atunci $x_j \in P_j$, deci $y := x_1 + x_2 \in I \subseteq P_1 \cup P_2$. Rezultă că y este un element al lui P_1 , să spunem, încât $x_2 = y - x_1 \in P_1$, contradicție.

Presupunem acum că $n \geq 3$ și că afirmația a fost stabilită pentru orice familie cu proprietățile din enunț și de cardinal strict mai mic decât n . În plus, putem presupune $I \not\subseteq \bigcup \{P_j : 1 \leq j \neq k \leq n\}$ pentru orice $k = 1, \dots, n$ (în caz contrar concluzia dorită decurge din ipoteza inductivă). Alegând $x_k \in I \setminus \bigcup \{P_j : 1 \leq j \neq k \leq n\}$, avem $x_k \in P_k$ pentru orice $k = 1, \dots, n$. Cum $n \geq 3$, există cel puțin un ideal prim în familia considerată, să spunem P_1 . Elementul $x_1 + x_2x_3 \cdots x_n$ este din I , dar nu din P_1 (întrucât $x_1 \in P_1$, dar $x_2x_3 \cdots x_n \notin P_1$), și nici din P_k , $k \geq 2$ (deoarece $x_1 \notin P_k$ și $x_2x_3 \cdots x_n \in P_k$). \square

DEFINIȚIE 3.28. Pentru A inel comutativ și unitar, intersecția tuturor idealelor sale maximale se notează $J(A)$ și este numită *radicalul Jacobson*. Un inel este *local* (respectiv *semilocal*) dacă acest inel are un singur ideal maximal (respectiv un număr finit de ideale maximale).

Folosind lema de evitare și corespondența dintre idealele S -saturate ale inelului A și idealele din $S^{-1}A$, se obține următoarea clasă de exemple de inele semilocale:

LEMA 3.29. *Dacă P_1, \dots, P_n ($n \geq 1$) sunt ideale prime incomparabile două câte două față de incluziune și $S := \bigcap \{ A \setminus P_i : i = 1, \dots, n \}$, atunci $\text{Max } S^{-1}A = \{ S^{-1}P_i : i = 1, \dots, n \}$.*

Elementele din radicalul Jacobson se pot identifica grație următoarei caracterizări:

LEMA 3.30. *Fie $x \in A$. Atunci $x \in J(A)$ dacă și numai dacă $1 - ax$ este inversabil în A pentru orice $a \in A$.*

DEMONSTRAȚIE. Dacă $x \in J(A)$ și există $a \in A$ astfel încât $y := 1 - ax$ este neinversabil, rezultă că idealul Ay este diferit de A . Conform lemei lui Krull, există un ideal maximal M ce conține Ay . Din $x \in M$ și $1 - ax \in M$ decurge contradicția $1 \in M$.

Reciproc, dacă $x \notin J(A)$, înseamnă că există un ideal maximal M astfel ca $x \notin M$. Deci $M \subset M + Ax$ și maximalitatea lui M implică $M + Ax = A$. Prin urmare, se găsesc $a \in A$ și $b \in M$ astfel încât $1 = b + ax$, relație din care conchidem că $1 - ax$ este neinversabil, în contradicție cu condiția din enunț. \square

LEMA 3.31. (*Lema lui Nakayama*) *Dacă E este un A -modul finit generat și I un ideal conținut în radicalul Jacobson astfel încât $IE = E$, atunci E este modulul nul.*

DEMONSTRAȚIE. Raționăm prin reducere la absurd. Presupunem că modulul E este nenul și considerăm un sistem de generatori x_1, \dots, x_n ($n \geq 1$) pentru E . Întrucât mulțimea numerelor naturale este bine ordonată (*i.e.* orice submulțime nevidă are un cel mai mic element), putem presupune că E nu poate fi generat de mai puțin de n elemente.

Din $x_n \in E = IE$ se obține o reprezentare $x_n = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$ cu $a_i \in I$ ($1 \leq i \leq n$). Atunci $(1 - a_n)x_n = a_1x_1 + \dots + a_{n-1}x_{n-1}$ și cum $1 - a_n$ este inversabil (a_n fiind din $J(A)$), înseamnă că generatorul x_n este superfluu. Cum sistemul de generatori a fost ales minimal, s-a ajuns la o contradicție. \square

Acest rezultat joacă un rol important în studiul inelelor locale, dar are aplicații surprinzătoare și în alte contexte. Menționăm câteva consecințe ale sale.

COROLAR 3.32. Fie E un A -modul și F un submodul cu E/F finit generat. Dacă $I \subseteq J(A)$ și $E = IE + F$, atunci $E = F$.

DEMONSTRAȚIE. Se folosește lema lui Nakayama pentru A -modulul finit generat E/F . \square

COROLAR 3.33. Fie (A, M, K) un inel local și E un modul de tip finit. Pentru $x_1, \dots, x_n \in E$, următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) x_1, \dots, x_n generează A -modulul E ,
- (ii) clasele $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ în E/ME generează K -spațiul vectorial E/ME .

DEMONSTRAȚIE. Implicația (i) \implies (ii) este clară. Pentru reciprocă se observă că din condiția (ii) rezultă $E = ME + Ax_1 + \dots + Ax_n$ și se aplică rezultatul precedent. \square

LEMA 3.34. (Lema chineză a resturilor) Fie I_1, \dots, I_n ($n \geq 2$) ideale astfel încât $I_j + I_k = A$ pentru $1 \leq j < k \leq n$. Atunci:

$$a) \bigcap_{j=1}^n I_j = \prod_{j=1}^n I_j,$$

b) morfismul $\pi : A \longrightarrow \prod_{j=1}^n A/I_j$, $a \mapsto (a + I_1, \dots, a + I_n)$, este surjectiv și induce un izomorfism

$$A / \prod_{j=1}^n I_j \simeq \prod_{j=1}^n (A/I_j).$$

DEMONSTRAȚIE. a) Evident, intersecția idealelor conține produsul lor. Incluziunea inversă se obține prin inducție după n . Dacă $n = 2$, atunci

$$I_1 \cap I_2 = (I_1 + I_2)(I_1 \cap I_2) \subseteq I_1(I_1 \cap I_2) + I_2(I_1 \cap I_2) \subseteq I_1 I_2.$$

Presupunem acum $n > 2$ și că relația este adevărată pentru cel mult $n - 1$ ideale comaximale două câte două. Observăm că $I_n + L = A$, unde $L := I_1 \cdots I_{n-1} = I_1 \cap \dots \cap I_{n-1}$. Într-adevăr, din $I_n + L \neq A$ rezultă existența unui ideal maximal M ce conține $I_n + L$, în particular avem $I_1 \cdots I_{n-1} \subseteq M$. Atunci M conține un ideal I_j , $1 \leq j < n$. Cum $I_n \subseteq M$, se ajunge la contradicția $A = I_j + I_n \subseteq M$. Conform cazului $n = 2$, avem

$$\prod_{j=1}^n I_j = I_n \prod_{j=1}^{n-1} I_j = I_n L = I_n \cap L = I_n \cap \left(\bigcap_{j=1}^{n-1} I_j \right) = \bigcap_{j=1}^n I_j.$$

b) Acum arătăm că pentru orice k , $1 \leq k \leq n$, există $a_k \in \bigcap_{j \neq k} I_j$ astfel încât $a_k - 1 \in I_k$. Pentru $j \neq k$ există $b_j \in I_k$ și $c_j \in I_j$

cu suma 1. Atunci elementul $a_k := \prod_{j \neq k} c_j$ are proprietățile dorite: evident a_k aparține tuturor idealelor de indice diferit de k , iar $a_k - 1 = \prod_{j \neq k} (1 - b_j) - 1 \in I_k$.

Pentru $(x_1, \dots, x_n) \in \prod_{j=1}^n (A/I_j)$ considerăm câte un reprezentant b_j pentru x_j ($1 \leq j \leq n$) și punem $x := a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$. Pentru fiecare $k = 1, \dots, n$ avem $b_k(a_k - 1) \in I_k$ și $a_j b_j \in I_k$ pentru $1 \leq j \neq k \leq n$, deci $x - b_k \in I_k$. Altfel spus, morfismul π este surjectiv. Din definiția produsului direct rezultă că nucleul lui π coincide cu intersecția idealelor I_k , care nu este altceva decât produsul lor conform punctului *a*). Demonstrația se încheie aplicând teorema fundamentală de izomorfism pentru inele. \square

PROPOZIȚIE 3.35. *Dacă E și F sunt module finit generate peste un inel noetherian A , atunci $\text{Supp}(E \otimes_A F) = \text{Supp } E \cap \text{Supp } F$.*

DEMONSTRAȚIE. Primul pas constă în reducerea la cazul local. Aici este simplu datorită comutării localizării cu tensorizarea:

$$(E \otimes_A F)_P \simeq E_P \otimes_{A_P} F_P \quad \text{pentru orice } P \in \text{Spec } A.$$

Apoi se aplică următorul rezultat. \square

LEMA 3.36. *Dacă E și F sunt module nenule de tip finit peste un inel local noetherian (A, M, K) , atunci $E \otimes_A F \neq 0$.*

DEMONSTRAȚIE. Pornim de la o prezentare $F \simeq A^n/G$ cu n un număr natural și cu G un submodul al lui A^n . Imaginile lui G prin proiecțiile canonice ale lui A^n pe sumanzii săi direcți sunt submodulele ale lui A , adică ideale. Nu se poate ca toate aceste ideale să coincidă cu A , pentru că atunci ar rezulta $F = 0$. Obținem prin urmare un morfism surjectiv $F \rightarrow A/I$ cu I ideal diferit de întreg inelul. Morfismul $E \otimes_A F \rightarrow E/IE$ indus prin tensorizare cu E este încă surjectiv. Dacă sursa sa ar fi modulul nul, atunci ar rezulta $E = IE$, ceea ce, conform lemei lui Nakayama, ar conduce la concluzia $E = 0$, în contradicție cu ipoteza. \square

3.3. Ideale prime asociate unui modul.

DEFINIȚIE 3.37. Fie A un inel și E un A -modul. Un ideal prim P din A se numește *asociat lui E* dacă există $x \in E$ astfel încât $P = \text{Ann}_A x$. Mulțimea idealelor prime asociate lui E se notează $\text{Ass}_A E$. O denumire alternativă, ușor macabră și paradoxală, este *asasin* al modulului E . Dacă F este un submodul al lui E , un element din $\text{Ass}_A(E/F)$ se numește *ideal prim asociat lui F în E* sau *divizor prim al lui F în E* .

Observăm că orice ideal prim asociat unui modul conține anulatorul acelui modul, iar $\text{Ass } E$ coincide cu mulțimea formată din $P \in \text{Spec } A$ pentru care există un submodul al lui E izomorf cu A/P .

LEMA 3.38. *Pentru orice $P \in \text{Spec } A$ și $x \in A/P$, $x \neq 0$, avem $\text{Ann } x = P$, deci $\text{Ass}_A(A/P) = \{P\}$.*

DEMONSTRAȚIE. Dacă $x = a + P$, cu $a \in A \setminus P$, atunci $bx = 0$ dacă și numai dacă $ab \in P$. Cum a nu aparține idealului prim P , această relație este echivalentă cu $b \in P$. \square

EXEMPLU. Pentru A inelul de polinoame în variabilele X și Y peste un corp K și $I := (X^2, XY)$, avem $P := (X, Y) \in \text{Ass}_A(A/I)$, $Q := (X) \in \text{Ass}_A(A/I)$ și $Q \subset P$. Într-adevăr, se verifică ușor relațiile $P = (I : (X))_A$ și $Q = (I : (Y))_A$.

LEMA 3.39. *Pentru orice A -modul E avem*

$$\cap \{P : P \in \text{Ass}_A E\} \supseteq \text{Rad}_E(0) \cup \text{Rad}_A(\text{Ann}_A E) .$$

DEMONSTRAȚIE. Fie P un ideal prim asociat lui E și $x \in E$ astfel încât $P = \text{Ann } x$. Pentru orice $a \in \text{Rad}_E(0)$ există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $a^n x = 0$, adică $a^n \in \text{Ann } x = P$. Rezultă $\text{Rad}_E(0) \subseteq P$ pentru orice $P \in \text{Ass } E$.

Deoarece orice ideal prim este radical, relația

$$\text{Ann } E = \cap \{ \text{Ann } y : y \in E \} \subseteq \text{Ann } x$$

implică $\text{Rad}(\text{Ann } E) \subseteq \text{Rad}(\text{Ann } x) = P$. \square

Problema existenței unor ideale prime asociate unui modul dat are un răspuns clar în cazul inelelor noetheriene.

LEMA 3.40. *Fie E un modul peste un inel noetherian A . Atunci E este modulul nul dacă și numai dacă $\text{Ass}_A E$ este mulțimea vidă.*

DEMONSTRAȚIE. Dacă modulul E este nenul, atunci mulțimea de ideale $\{ \text{Ann } x : x \in E, x \neq 0 \}$ este nevidă. În conformitate cu condiția (MAX), această mulțime are un element maximal P . Vom arăta că P este ideal prim.

Fie $x \in E$, $x \neq 0$, astfel încât $P = \text{Ann } x$ și $a, b \in A$ cu $b \notin P$, dar $ab \in P$. Relațiile $abx = 0$, $bx \neq 0$ arată că $a \in \text{Ann}(bx)$. Considerând a un element arbitrar al idealului P , conchidem că P este conținut în anulatorul elementului nenul bx al lui E . Datorită maximalității lui P rezultă $P = \text{Ann}(bx)$. Acum este limpede că din $cbx = 0$ și $bx \neq 0$ rezultă $c \in P$. \square

EXEMPLU. Ipoteza noetherianității inelului este esențială. Să considerăm, de pildă, idealul I generat în inelul $A := \mathbb{Q}[X_1, X_2, \dots, X_n, \dots]$ de pătratele variabilelor și $E := A/I$. Atunci $\text{Ass}_A E = \emptyset$. Într-adevăr, se verifică ușor că singurul ideal prim ce conține I este idealul generat de variabile. Pentru orice $f \in A/I$ se găsește un reprezentant dintr-un inel de polinoame într-un număr finit de nedeterminate. Anulatorul acestui reprezentant este conținut în același subinel.

Elementele conținute în idealele asociate unui modul au o proprietate introdusă în următoarea definiție.

DEFINIȚIE 3.41. Un element $a \in A$ se numește *divizor al lui zero* în E dacă există $x \in E$, $x \neq 0$, astfel încât $ax = 0$. Un element este *regulat pe E* dacă nu este divizor al lui zero pe E .

Mulțimea formată din toți divizorii lui zero pe un modul E este notată $Z(E)$.

PROPOZIȚIE 3.42. *Dacă A este inel noetherian, atunci reuniunea primelor asociate unui modul E coincide cu mulțimea divizorilor lui zero pe E .*

DEMONSTRAȚIE. Este evident că elementele din orice ideal prim asociat lui E sunt divizori ai lui zero pe E . Reciproc, fie $ax = 0$, unde $a \in A$ și $x \in E$, $x \neq 0$. Din lema precedentă știm $\text{Ass}_A(Ax) \neq \emptyset$, deci există $b \in A$ și $P \in \text{Spec } A$ astfel încât $P = \text{Ann}(bx)$. Cum $abx = 0$, deducem $a \in P$. \square

PROPOZIȚIE 3.43. *Fie A inel noetherian. Pentru orice module E și F cu $F \subseteq E$ avem*

$$\text{Ass}(F) \subseteq \text{Ass}(E) \subseteq \text{Ass}(F) \cup \text{Ass}(E/F) .$$

DEMONSTRAȚIE. Incluziunea din stânga este evidentă: anulatorul unui element x din F nu se modifică dacă vom considera x ca element al lui E . Fie $P \in \text{Ass}(E) \setminus \text{Ass}(F)$ și $x \in E$ astfel ca $P = \text{Ann } x$. Cum $Ax \simeq A/P$, din lema 3.38 rezultă $\text{Ass}(Ax) = \{P\}$. Conform alegerii lui P avem $Ax \cap F = 0$. Atunci imaginea lui Ax prin morfismul canonic $E \rightarrow E/F$ este un submodul al lui E/F izomorf cu A/P . În virtutea primei incluziuni, $\{P\} = \text{Ass}_A(A/P) \subseteq \text{Ass}_A(E/F)$. \square

EXEMPLU. Incluziunile nu sunt totdeauna egalități.

Fie K un corp, $A := K[X, Y]$ și șirul exact de A -module

$$0 \longrightarrow (X)/(X^2, XY) \longrightarrow A/(X^2, XY) \longrightarrow A/(X) \longrightarrow 0 .$$

Din lema 3.38 și faptul că A -modulul $(X)/(X^2, XY)$ este izomorf cu $A/(X, Y) \simeq K$ rezultă

$$\begin{aligned} \text{Ass}_A((X)/(X^2, XY)) &= \{(X, Y)\} \subseteq \text{Ass}_A(A/(X^2, XY)) \subseteq \\ &\subseteq \{(X, Y)\} \cup \{(X)\} . \end{aligned}$$

În acest caz prima dintre incluziunile de la propoziția 3.43 este strictă. Pentru a ne convinge că este posibil ca a doua incluziune să nu fie egalitate, este suficient să considerăm șirul exact de grupuri abeliene $0 \longrightarrow 9\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \longrightarrow 0$. În acest caz este simplu de văzut $\text{Ass}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}) = \text{Ass}_{\mathbb{Z}}(9\mathbb{Z}) = \{0\}$, $\text{Ass}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}) = \{3\mathbb{Z}\}$.

Alte proprietăți ale asasinului unui modul sunt date în următoarea

PROPOZIȚIE 3.44. *a) Dacă $(E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ este o familie de submodule ale lui E a căror reuniune este E , atunci*

$$\text{Ass}(E) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \text{Ass}(E_\lambda) .$$

b) Două module izomorfe au aceleași prime asociate.

c) Dacă $(E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ este o familie de submodule ale lui E , atunci

$$\text{Ass}\left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \text{Ass}(E_\lambda) .$$

d) Dacă E_1, \dots, E_n ($n \geq 1$) sunt submodule ale lui E a căror intersecție este modulul nul, atunci

$$\text{Ass}(E) \subseteq \bigcup_{i=1}^n \text{Ass}(E/E_i) .$$

DEMONSTRAȚIE. *a) Consecință directă a definițiilor.*

b) Rezultă din faptul că anulatorul oricărui element dintr-un modul coincide cu anulatorul elementului corespunzător din celălalt modul.

c) Cu ajutorul relației de la punctul a) ne reducem la cazul în care Λ este o mulțime finită, când se raționează prin inducție. Pasul inițial al raționamentului inductiv (Λ are doar două elemente) este consecință a propoziției precedente:

$$\text{Ass}(E_i) \subseteq \text{Ass}(E_1 \oplus E_2) \subseteq \text{Ass}(E_1) \cup \text{Ass}(E_2) , \quad i = 1, 2 .$$

Când sunt $n \geq 3$ submodule, se raționează asemănător.

d) Ipoteza asigură injectivitatea compunerii aplicațiilor canonice

$$E \longrightarrow \prod_{i=1}^n (E/E_i) \simeq \bigoplus_{i=1}^n (E/E_i) .$$

Se aplică proprietatea de la punctul c) și propoziția 3.43. □

EXEMPLU. Incluziunea de la punctul d) nu este valabilă pentru o familie infinită de submodule: când p parcurge numerele naturale prime avem $\bigcap_p p\mathbb{Z} = 0$, $\text{Ass}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}) = \{0\}$, în vreme ce

$$\text{Ass}_{\mathbb{Z}}\left(\bigoplus_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right) = \bigcup_p \text{Ass}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \text{Spec } \mathbb{Z} \setminus \{0\} .$$

În continuare vom studia comportarea asasinului la luarea fracțiilor.

PROPOZIȚIE 3.45. *Fie E un modul peste un inel noetherian A și S un sistem multiplicativ închis din A . Atunci*

$$\text{Ass}_{S^{-1}A}(S^{-1}E) = \{S^{-1}P : P \in \text{Ass}_A(E), P \cap S = \emptyset\} .$$

DEMONSTRAȚIE. Pentru $P \in \text{Ass}_A(E)$ disjunct de S există $e \in E$, $e \neq 0$, astfel încât $P = \text{Ann}_A e$. Observăm că $e/1$ este element nenul în $S^{-1}E$ întrucât $S \cap P = \emptyset$. Cum $S^{-1}P$ rămâne ideal prim în inelul de fracții și $S^{-1}P = \text{Ann}_{S^{-1}A}(e/1)$, avem $S^{-1}P \in \text{Ass}_{S^{-1}A}(S^{-1}E)$.

Reciproc, fie $P \in \text{Spec } A$ astfel ca P să fie disjunct de S și $S^{-1}P \in \text{Ass}_{S^{-1}A}(S^{-1}E)$. Să presupunem $S^{-1}P = \text{Ann}_{S^{-1}A}(e/t)$ pentru e în E și t în S . Fie a_1, \dots, a_n un sistem de generatori ai lui P . Din relațiile $a_i/1 \cdot e/t = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, rezultă că există $s_i \in S$ astfel încât $a_i s_i e = 0$. Atunci $s := s_1 s_2 \cdots s_n \in S$ și $P \subseteq \text{Ann}_A(se)$. Pentru $b \in \text{Ann}_A(se)$ arbitrar, din $bse/t = 0$ rezultă $bs/1 \in \text{Ann}_{S^{-1}A}(e/t) = S^{-1}P$. Cum s nu aparține lui P , se deduce $b \in P$. Avem, așadar, $P = \text{Ann}_A(se) \subseteq \text{Ass}_A(E)$. \square

Există o strânsă legătură între asasinul și suportul unui modul.

PROPOZIȚIE 3.46. *Dacă E este modul peste un inel noetherian A , atunci $\text{Supp } E = \cup\{V(P) : P \in \text{Ass}(E)\}$. În particular, $\text{Ass}(E) \subseteq \text{Supp } E$ și cele două mulțimi au aceleași elemente minimale. Așadar, $\text{Min } E \subseteq \text{Ass}(E)$.*

DEMONSTRAȚIE. Fie $P \in \text{Ass}(E)$ și $Q \in V(P)$, adică Q este un ideal prim din A și $Q \supseteq P$. Din relația $P \cap (A \setminus Q) = \emptyset$ și din propoziția precedentă rezultă $PA_Q \in \text{Ass}_{A_Q}(E_Q)$. Lema 3.40 implică E_Q este modul nenul, ceea ce înseamnă că idealul prim Q aparține suportului lui E .

Fie acum $Q \in \text{Supp}(E)$. Cum E_Q este modul nenul peste inelul noetherian A_Q , din lema 3.40 se deduce $\text{Ass}_{A_Q}(E_Q) \neq \emptyset$. Din propoziția precedentă rezultă existența unui ideal prim P asociat lui E disjunct de $A \setminus Q$, ceea ce înseamnă $Q \in V(P)$. \square

PROPOZIȚIE 3.47. *Fie E un modul nenul și finit generat peste un inel noetherian A . Atunci există un lanț de submodule*

$$E = E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset \dots \supset E_n = 0$$

astfel încât $E_{i-1}/E_i \simeq A/P_i$ cu $P_i \in \text{Spec } A$ pentru $i = 1, 2, \dots, n$. În plus $\text{Ass}(E) \subseteq \{P_1, P_2, \dots, P_n\} \subseteq \text{Supp } E$, iar cele trei mulțimi au aceleași elemente minimale, care coincid cu elementele minimale din $V(\text{Ann}_A(E))$.

DEMONSTRAȚIE. Conform lemei 3.40, E conține un submodul izomorf cu A/P , unde P este un ideal prim asociat lui E . Aceasta înseamnă că mulțimea \mathcal{L} a submodulelor nenule ale lui E care îndeplinesc concluzia propoziției este nevidă. Cum E este modul noetherian, mulțimea \mathcal{L} are un element F maximal față de incluziune.

Dacă $F \neq E$, atunci E/F conține un submodul de forma A/P , cu $P \in \text{Spec } A$. Preimaginea sa F' în E prin morfismul canonic de la E la E/F este un element din \mathcal{L} care conține strict F , ceea ce contrazică maximalitatea lui F . S-a obținut $E \in \mathcal{L}$.

Prin aplicarea repetată a propoziției 3.43 se găsește că $\text{Ass}(E)$ este conținut în mulțimea $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$. Pentru orice i , $1 \leq i \leq n$, avem $P_i \in \text{Supp}_A(A/P_i) = \text{Supp}_A(E_{i-1}/E_i) \subseteq \text{Supp}_A(E) = V(\text{Ann}_A(E))$.

Ultima afirmație rezultă din faptul că $\text{Ass}(E)$ și $\text{Supp } E$ au aceleași elemente minimale. \square

EXERCITII.

1. Fie A un inel și $a \in A$. Să se arate că a este nilpotent dacă și numai dacă este divizor al lui zero pe orice A -modul.

2. Să se decidă dacă următoarele proprietăți sunt sau nu echivalente pentru orice modul E de tip finit peste un inel noetherian A :

- (i) E este modul de lungime finită,
- (ii) $\text{Ass } E = \text{Supp } E$.

3. Fie A inel noetherian, E un A -modul, F submodul și P un divizor prim al lui F în E . Să se arate că dacă P nu conține $\text{Ann}_A(F)$, atunci P este asociat lui E .

4. Fie E modul finit generat peste un inel noetherian A . Să se arate că pentru orice A -modul F avem

$$\text{Ass}_A(\text{Hom}_A(E, F)) = \text{Ass}_A(F) \cap \text{Supp}_A(E) .$$

5. Fie E modul finit generat peste un inel noetherian A . Dacă un ideal I constă numai din divizori ai lui zero pe E , atunci există $x \in E$, $x \neq 0$, astfel ca $I \subseteq \text{Ann } x$.

6. Dacă un ideal al unui inel noetherian conține un element regulat, acel ideal este generat de elementele regulate pe care le conține. Este această proprietate îndeplinită în orice inel?

3.4. Submodule primare. În restul subsecțiunii A va fi un inel noetherian.

DEFINIȚIE 3.48. Fie E un A -modul și F un submodule. Se spune că F este *submodul primar al lui E* dacă $\text{Ass}_A(E/F)$ constă dintr-un singur element. Dacă $\text{Ass}_A(E/F) = \{P\}$, se spune că F este P -primar.

Proprietatea consemnată în lema următoare va fi frecvent invocată în raționamente referitoare la submodulele primare.

LEMA 3.49. *Fie A un inel noetherian, E un modul finit generat și F un submodule P -primar. Atunci $\text{Rad}_A(\text{Ann}_A(E/F)) = P$.*

DEMONSTRAȚIE. Idealele prime asociate unui modul sunt conținute în suportul modului. În plus, $\text{Ass}_A(E/F)$ și $\text{Supp}_A(E/F)$ au aceleași elemente minimale. Pentru că F este submodule P -primar al lui E , avem $\text{Ass}_A(E/F) = \{P\}$, iar $\text{Supp}_A(E/F) = V(\text{Ann}_A(E/F))$ pentru că E/F este modul de tip finit. Concluzia rezultă din faptul că radicalul unui ideal coincide cu intersecția primelor sale minimale. \square

Următorul rezultat dă o caracterizare a submodulelor primare.

PROPOZIȚIE 3.50. *Fie A un inel noetherian, E un modul finit generat și F un submodule. Următoarele afirmații sunt echivalente:*

- (i) F este submodule primar al lui E ,
- (ii) orice divizor al lui zero pe E/F este nilpotent,
- (iii) dacă $a \in A$ și $x \in E$ sunt astfel încât $ax \in F$, rezultă că $a \in \text{Rad}_E(F)$ sau $x \in F$.

DEMONSTRAȚIE. Este evidentă echivalența condițiilor (ii) și (iii). Dacă F este P -primar, atunci $Z(E/F) = P$ și $\text{Rad}_A(\text{Ann}_A(E/F)) = P$, conform lemei precedente. Astfel se obține că (i) implică (ii).

Să presupunem că afirmația (ii) este îndeplinită. De aici și din propozițiile 3.11 și 3.42 rezultă

$$\cup\{P : P \in \text{Ass}(E/F)\} = Z(E/F) = N(E/F) = \cap\{P : P \in \text{Ass}(E/F)\}.$$

Egalitatea termenilor extremi în acest șir de egalități poate avea loc doar dacă $\text{Ass}(E/F)$ constă dintr-un singur element. Conform definiției, aceasta înseamnă că F este submodule primar al lui E . \square

LEMA 3.51. *Intersecția unei familii finite de submodule P -primare ale lui E este un submodule P -primar.*

DEMONSTRAȚIE. Este suficient să stabilim această proprietate pentru două submodule P -primare, să spunem F și G . Considerăm șirul exact de A -module

$$0 \longrightarrow F/(F \cap G) \longrightarrow E/(F \cap G) \longrightarrow E/F \longrightarrow 0$$

în care $F/(F \cap G) \simeq (F + G)/G$. Concluzia dorită rezultă din faptul că $\text{Ass}(E/(F \cap G))$ este o submulțime nevidă a mulțimii

$$\text{Ass}(F/(F \cap G)) \cup \text{Ass}(E/F) \subseteq \text{Ass}(E/G) \cup \text{Ass}(E/F) = \{P\}.$$

□

DEFINIȚIE 3.52. Un submodul $F \subset E$ se numește *ireductibil în E* dacă satisface condiția: pentru orice submodule E_1, E_2 ale lui E astfel încât $F = E_1 \cap E_2$, avem $F = E_1$ sau $F = E_2$.

Este evident că F este ireductibil în E dacă și numai dacă submodulul nul este ireductibil în E/F .

LEMA 3.53. *Dacă F este un submodul ireductibil în E , atunci F este submodul primar al lui E .*

DEMONSTRAȚIE. Dacă $\text{Ass}(E/F)$ ar conține două ideale prime distincte P_1 și P_2 , atunci E/F ar conține submodulele nenule $U_1 \simeq A/P_1$ și $U_2 \simeq A/P_2$. Observăm că $U_1 \cap U_2 = 0$ întrucât orice element nenul al lui U_i are anulatorul P_i . Cum submodulul nul al lui E/F este ireductibil, rezultă $U_1 = 0$ sau $U_2 = 0$, ceea ce este imposibil. Așadar, $\text{Ass}(E/F)$ constă dintr-un singur ideal prim. □

EXEMPLE. 1. Orice ideal prim P al unui inel noetherian este ideal P -primar (conform lemei 3.38).

2. Dacă F este un submodul al lui E cu $M := \text{Rad}_E(F)$ ideal maximal, atunci F este submodul M -primar al lui E . În particular, orice putere a unui ideal maximal este ideal primar. De asemenea, dacă în A există un singur ideal prim, atunci orice submodul propriu al unui A -modul arbitrar este primar.

Într-adevăr, să considerăm $a \in A$ și $x \in E$ astfel încât $ax \in F$. Dacă $a \notin \text{Rad}_E(F) = M \in \text{Max } A$, atunci $M + aA = A$. Prin urmare există $b \in M$ și $c \in A$ astfel ca $1 = b + ac$. Fie $n \in \mathbb{N}$ pentru care $b^n x \in F$. Ridicând la puterea n relația $1 = b + ac$, se obține $1 = b^n + ad$, unde $d \in A$. Înmulțind această relație cu x , rezultă $x = b^n x + d(ax) \in F$.

3. Într-un inel principal, idealele primare sunt 0 și idealele generate de puteri de elemente prime.

Dacă p este un element prim în inelul principal A și $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $p^n A$ este ideal primar întrucât $\text{Rad}_A(p^n A) = pA$ și din $ab \in p^n A$ cu $a, b \in A$ rezultă $a \in pA$ sau $b \in p^n A$ pentru că A este inel factorial. Reciproc, fie aA un ideal nenul și $a = p_1^{e_1} \cdots p_t^{e_t}$ descompunerea în factori primi distincți a generatorului său. Dacă $t > 1$, relațiile $p_1^{e_1} (p_2^{e_2} \cdots p_t^{e_t}) \in aA$, $p_1^{e_1} \notin \text{Rad}_A(aA) = p_1 p_2 \cdots p_t A$ și $p_2^{e_2} \cdots p_t^{e_t} \notin aA$ arată că aA nu este ideal primar.

4. Nu orice ideal primar este putere de ideal prim.

Fie K un corp, $A := K[X, Y]$ și $I := (X^2, Y)A \leq A$. Avem

$$\begin{aligned} \text{Rad}_A(I) &= \text{Rad}_A(X^2A + YA) = \text{Rad}_A(\text{Rad}_A(X^2A) + \text{Rad}_A(YA)) = \\ &= \text{Rad}_A(XA + YA) = (X, Y)A =: M \in \text{Max } A, \end{aligned}$$

deci I este M -primar. Cum $Y \in I \setminus M^2$, $X \in M \setminus I$, există incluziuni stricte $M^2 \subset I \subset M$.

5. O putere a unui ideal prim nu este neapărat ideal primar.

Fie K un corp, $A := K[X, Y, Z]/(XY - Z^2) = K[x, y, z]$ și idealul $P := (x, z)A$. Deoarece $A/P \simeq K[Y]$, avem $P \in \text{Spec } A$. Relațiile $xy = z^2 \in P^2$, $x \notin P^2$ și $y \notin \text{Rad}_A(P^2) = P$ arată că P^2 nu este ideal primar. Să dovedim $x \notin P^2$. În caz contrar am avea

$$X \in (X^2, XZ, Z^2, XY - Z^2)K[X, Y, Z] = (X^2, XZ, XY, Z^2)K[X, Y, Z],$$

adică ar exista polinoame $f_1, f_2, f_3, f_4 \in K[X, Y, Z]$ astfel încât $X = X^2f_1 + XYf_2 + f_3XZ + f_4Z^2$. Înlocuind în această relație Y și Z cu 0, se obține $X = X^2f_1(X, 0, 0)$, egalitate ce nu poate avea loc (considerați gradele polinoamelor din cei doi membri). Analog se justifică relația $y \notin P$.

În continuare studiem comportarea submodulelor primare la operațiile uzuale din algebra comutativă.

LEMA 3.54. *Fie F un submodule P -primar în modulul finit generat E . Pentru orice ideal I din A astfel încât $(F : I)_E \neq E$, submodulele $(F : I)_E$ este P -primar în E .*

DEMONSTRAȚIE. Fie $x \in E$ și $b \in A \setminus \text{Rad}_E((F : I)_E)$ astfel ca $bx \in (F : I)_E$. Atunci $abx \in F$ pentru orice $a \in I$ și cum $\text{Rad}_E(F) \subseteq \text{Rad}_E((F : I)_E)$, rezultă $ax \in F$, adică $x \in (F : I)_E$. \square

LEMA 3.55. *Fie E un modul de tip finit și F un submodule P -primar al lui E . Atunci $(F : E)_A$ este ideal P -primar.*

DEMONSTRAȚIE. Conform lemei 3.49, $\text{Rad}_A((F : E)_A) = P$. Fie $a, b \in A$ astfel încât $ab \in (F : E)_A$. Dacă $a \notin P$, atunci $abx \in F$ pentru orice $x \in E$ și, întrucât F este P -primar, rezultă $bx \in F$. Conchidem $b \in (F : E)_A$. \square

PROPOZIȚIE 3.56. *Fie $g : E \rightarrow E''$ un morfism surjectiv de A -module. Un submodule F al lui E care conține nucleul lui g este submodulele P -primar al lui E dacă și numai dacă $F'' := g(F)$ este submodulele P -primar în E'' .*

DEMONSTRAȚIE. Se observă că $\text{Rad}_E(F) = \text{Rad}_{E''}(F'')$. Apoi se stabilește că pentru orice $a \in A$ și $x \in E$, apartenența $ax \in F$ este echivalentă cu $ag(x) \in F''$, iar $x \in F$ dacă și numai dacă $g(x) \in F''$. \square

PROPOZIȚIE 3.57. Fie S un sistem multiplicativ închis în inelul A și $v : E \longrightarrow S^{-1}E$ morfismul canonic.

a) Dacă F este submodul P -primar în E și $P \cap S = \emptyset$, atunci $S^{-1}F$ este submodul $S^{-1}P$ -primar al lui $S^{-1}E$, iar $v^{-1}(S^{-1}F) = F$.

b) Dacă F este submodul P -primar în E și $P \cap S \neq \emptyset$, atunci $S^{-1}F = S^{-1}E$.

c) Dacă F' este submodul primar al $S^{-1}A$ -modulului $S^{-1}E$, atunci $v^{-1}(F')$ este submodul primar al A -modulului E .

DEMONSTRAȚIE. a) Prima afirmație rezultă din comportarea asasinului la localizare. Pentru ultima parte, reamintim că

$$v^{-1}(S^{-1}F) = \{x \in E : \text{există } s \in S \text{ astfel încât } sx \in F\}$$

și că P este mulțimea divizorilor lui zero pe E/F .

b) Fie $s \in S \cap P$. Pentru orice $x \in E$ există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $s^n x \in F$, deci $s^n v(x) \in v(F)$, încât $v(x) \in S^{-1}F$.

c) Notăm $F := v^{-1}(F')$ și $u : A \longrightarrow S^{-1}A$ morfismul canonic. Deoarece F' este modul primar, $\text{Rad}_{S^{-1}E}(F')$ este un ideal prim în $S^{-1}A$. Din ipoteza că elementele lui S sunt nondivizori ai lui zero pe E/F și din propoziția 3.19 rezultă $\text{Rad}_{S^{-1}E}(F') = S^{-1}\text{Rad}_E(F)$ și $u^{-1}(\text{Rad}_{S^{-1}E}(F')) = \text{Rad}_E(F)$. Fie $a \in A \setminus \text{Rad}_E(F)$ și $x \in E$ astfel încât $ax \in F$. Atunci $u(a)v(x) \in F'$ și $u(a) \notin \text{Rad}_{S^{-1}E}(F')$, deci $v(x)$ aparține lui F' . Prin urmare $x \in v^{-1}(F') = F$. \square

DEFINIȚIE 3.58. Un submodul F al lui E are o *descompunere primară* dacă există submodulele primare F_1, \dots, F_n ($n \geq 1$) ale lui E astfel încât $F = F_1 \cap \dots \cap F_n$. O astfel de descompunere primară este numită *redușă* dacă următoarele condiții sunt îndeplinite:

- a) Dacă F_i este P_i -primar, atunci $P_i \neq P_j$ pentru $1 \leq i < j \leq n$.
- b) $\cap\{F_j : j \neq i\} \not\subseteq F_i$ pentru $i = 1, \dots, n$.

Submodulele F_i ce apar într-o descompunere primară redusă a lui F se numesc *componentele primare ale lui F* .

Cum inelul A este presupus noetherian, din orice descompunere primară a lui F se obține o descompunere primară redusă astfel: înlocuind toate submodulele primare F_i care au același radical prin intersecția lor se asigură satisfacerea condiției a) (cf. lema 3.51), iar pentru a obține b) se omit modulele superflue (care conțin intersecția celorlalte).

Existența descompunerilor primare este asigurată în condiții destul de generale:

TEOREMA 3.59. Orice submodul al unui modul E de tip finit peste un inel noetherian A are o descompunere primară.

DEMONSTRAȚIE. Conform lemei 3.53, este suficient să arătăm că F este intersecția unei familii finite de submodule ireductibile în E . În caz contrar, din condiția maximală pe modulul noetherian E rezultă că există un submodule F , maximal cu proprietatea că nu este intersecția unui număr finit de submodule ireductibile. În particular, acest F nu este ireductibil, deci coincide cu intersecția a două submodule F_1 și F_2 ale lui E care conțin strict F . Din alegerea lui F rezultă că fiecare F_i este intersecția unei familii finite de submodule ireductibile. Aceeași proprietate o are și $F_1 \cap F_2 = F$, contradicție. \square

Folosind un alt raționament, se poate arăta că rezultatul se menține pentru module noetheriene peste inele arbitrare.

După ce am tranșat chestiunea existenței unei descompuneri primare, se pune problema unicității sale.

TEOREMA 3.60. *Fie A inel noetherian, E un A -modul și $F \subset E$ un submodule ce admite o descompunere primară redusă $F = F_1 \cap \dots \cap F_n$, $n > 1$, cu F_i submodule P_i -primar în E . Atunci:*

a) $\text{Ass}(E/F) = \{P_1, \dots, P_n\}$.

b) Dacă P_i ($1 \leq i \leq n$) este minimal în $\text{Ass}(E/F)$, $S = A \setminus P_i$ și $v : E \rightarrow S^{-1}E$ este morfismul canonic, atunci $F_i = v^{-1}(v(F))$.

Așadar, componenta primară a lui F corespunzătoare unui prim asociat minimal este unic determinată de E și F .

DEMONSTRAȚIE. a) Notăm $Q_i := \cap\{F_j : j \neq i\}$ pentru $i = 1, \dots, n$. Atunci $F = F_i \cap Q_i$ și $F \neq Q_i$. Din $Q_i/F \simeq (Q_i + F_i)/F_i \subseteq E/F_i$ rezultă

$$\emptyset \neq \text{Ass}(Q_i/F) \subseteq \text{Ass}(E/F_i) = \{P_i\},$$

ceea ce împreună cu $\text{Ass}(Q_i/F) \subseteq \text{Ass}(E/F)$ implică $\{P_1, \dots, P_n\} \subseteq \text{Ass}(E/F)$.

Pentru a demonstra incluziunea reciprocă folosim un raționament prin inducție după n . Cazul $n = 1$ nu necesită justificare. Fie $n > 1$ și presupunem că egalitatea a) este valabilă pentru toate submodulele lui E cu cel mult $n - 1$ componente primare. Cum Q_i are o astfel de descompunere primară redusă, din ipoteza de inducție rezultă $\text{Ass}(E/Q_i) = \{P_j : 1 \leq j \neq i \leq n\}$. Izomorfismul existent între E/Q_i și $(E/F)/(Q_i/F)$ implică

$$\text{Ass}(E/F) \subseteq \text{Ass}(E/Q_i) \cup \text{Ass}(Q_i/F) = \{P_1, \dots, P_n\}.$$

b) Din minimalitatea lui P_i în $\text{Ass}(E/F)$ rezultă $S \cap P_j \neq \emptyset$ pentru $j \neq i$. Propoziția 3.57 asigură $v(F) = S^{-1}F = S^{-1}F_i = v(F_i)$ și prin urmare $F_i = v^{-1}(v(F_i)) = v^{-1}(v(F))$. \square

Dacă F_i este o componentă primară a lui F al cărei radical nu este element minimal în $\text{Ass}(E/F)$, se spune că F_i este *componentă primară scufundată* a lui F . În general, componentele primare scufundate nu sunt unic determinate.

EXEMPLU. În inelul de polinoame $K[X, Y]$ peste un corp K avem $I := (X^2, XY) = (X) \cap (X^2, Y)$. Cum (X) este ideal prim, iar (X^2, Y) este primar (având radicalul $M := (X, Y)$ ideal maximal), s-a găsit o descompunere primară redusă. Raționând analog, se vede că $(X^2, XY) = (X) \cap (X^2, X + Y)$ este o altă descompunere primară redusă a lui I . Idealul M -primar $(X^2, X + Y)$ nu coincide cu (X^2, Y) întrucât ultimul ideal nu conține $X + Y$.

Ca aplicație a descompunerii primare, prezentăm un rezultat celebru al lui Krull, pentru a cărui demonstrație avem nevoie de următorul rezultat:

LEMA 3.61. *Fie I un ideal al unui inel noetherian și $J := \bigcap_{n \geq 1} I^n$. Atunci $I \cdot J = J$.*

DEMONSTRAȚIE. Dacă $I = A$, nu avem nimic de demonstrat. Fie deci $I \neq A$. Din $I \cdot J \subseteq I \subset A$ rezultă că idealul $I \cdot J$ are o descompunere primară de forma

$$I \cdot J = \bigcap_{i=1}^r Q_i, \quad Q_i \text{ ideal } P_i\text{-primar}.$$

Pentru acei indici i , $1 \leq i \leq r$, pentru care $I \subseteq P_i$ se consideră $e_i \in \mathbb{N}$ astfel încât $P_i^{e_i} \subseteq Q_i$ și se deduce $J \subseteq I^{e_i} \subseteq P_i^{e_i} \subseteq Q_i$. Pentru ceilalți indici i există $a_i \in I \setminus P_i$ și cum idealul $a_i J$ este conținut în idealul P_i -primar Q_i , rezultă $J \subseteq Q_i$. Așadar, $J \subseteq \bigcap_{i=1}^r Q_i = I \cdot J$. Pe de altă parte, întotdeauna produsul unor ideale este conținut în intersecția lor. \square

TEOREMA 3.62. (*Teorema de intersecție a lui Krull*) *Fie A un inel noetherian, I un ideal și E un A -modul noetherian. Atunci $\bigcap_{n \geq 1} I^n E$ coincide cu mulțimea elementelor din E al căror anulador conține un element de forma $1 - a$, cu $a \in I$. În cazul în care I este conținut în radicalul Jacobson al inelului, avem $\bigcap_{n \geq 1} I^n E = 0$.*

DEMONSTRAȚIE. Este clar că pentru $x \in E$ și $a \in I$ cu $(1 - a)x = 0$ avem $x = ax = xa^2 = xa^n$, pentru orice număr natural $n \geq 1$, deci $x \in \bigcap_{n \geq 1} I^n E$. Incluziunea reciprocă este consecința rezultatului următor, aplicat pentru $F = xA$. Din $x \in xA \cap I^s E \subseteq Ix$ pentru un anumit $s \in \mathbb{N}$ rezultă $x = ax$, unde a este un element din I . \square

PROPOZIȚIE 3.63. *Fie A un inel, E un modul noetherian și F un submodul. Pentru orice ideal I din A există un submodul G al lui E cu $\text{Rad}_E(G) \supseteq I$ și $G \cap F = IF$. Dacă în plus A este inel noetherian, atunci există un număr întreg $n \geq 1$ astfel încât $I^n E \cap F \subseteq IF$.*

DEMONSTRAȚIE. Mulțimea \mathcal{L} a submodulelor lui E a căror urmă pe F coincide cu IF este nevidă (conține IF) și inductiv ordonată cu relația de incluziune. Vom arăta că un element maximal $G \in \mathcal{L}$ are proprietățile cerute. Rămâne să verificăm incluziunea $I \subseteq \text{Rad}_E(G)$. Dacă această relație nu are loc, se găsește $a \in I \setminus \text{Rad}_E(G)$. Lanțul crescător de submodule ale modului noetherian E

$$G \subseteq (G : Aa)_E \subseteq (G : Aa^2)_E \subseteq \dots$$

este staționar. Fie r un număr natural nenul la care lanțul considerat staționează: $(G : Aa^r)_E = (G : Aa^{r+1})_E$. Este suficient să arătăm că are loc egalitatea

$$G = (G + a^r E) \cap (G : Aa^r)_E . \quad (6)$$

Într-adevăr, avem $F \subseteq (G : I)_E \subseteq (G : Aa^r)_E$ întrucât $IF \subseteq G$, prin urmare $F \cap (G + a^r E) \subseteq (G : Aa^r)_E \cap (G + a^r E) = G$. De aici rezultă $F \cap (G + a^r E) \subseteq G \cap F = IF$. Din $IF \subseteq G$ se obține $IF \subseteq F \cap (G + a^r E)$, încât $G + a^r E \in \mathcal{L}$. Relația $a \notin \text{Rad}_E(G)$ arată că G este conținut strict în $G + a^r E$. S-a contrazis astfel maximalitatea lui G în \mathcal{L} .

Trecând la demonstrarea relației (6), notăm că G este conținut în fiecare dintre modulele din membrul drept al acestei relații. Dacă $x = y + a^r z$, cu $y \in G$, $z \in E$, și dacă $x \in (G : Aa^r)_E$, atunci $a^r x = a^r y + a^{2r} z \in G$, deci $z \in (G : Aa^{2r})_E = (G : Aa^r)_E$. Prin urmare $a^r z \in G$ și în consecință $x = y + a^r z \in G$.

Ultima afirmație rezultă din faptul că pentru ideal I finit generat conținut în $\text{Rad}_E(G)$ există un număr natural n astfel ca $I^n E \subseteq G$ și prin urmare $I^n E \cap F \subseteq G \cap F = IF$. \square

EXERCITII.

1. Un inel noetherian este redus dacă și numai dacă toate componentele primare ale idealului nul sunt ideale prime.

2. Fie $F = \bigcap_{i=1}^n F_i$ o descompunere primară redusă a submodulului F al lui E , $S \subset A$ un sistem multiplicativ închis și $v : E \rightarrow S^{-1}E$ morfismul canonic. Dacă F_1, \dots, F_s , $s \leq n$, sunt toate componentele primare ale lui F cu proprietatea $\text{Rad}_E(F_i) \cap S = \emptyset$, atunci $v^{-1}(v(F)) = \bigcap_{i=1}^s F_i$.

3. Dacă $F = \bigcap_{i=1}^n F_i$ este o descompunere primară redusă a submodulului F al lui E cu F_i submodul P_i -primar, $i = 1, \dots, n$, atunci $\text{Ass}(F_i/F) = \text{Ass}(E/F) \setminus \{P_i\}$ pentru orice i , $1 \leq i \leq n$.

4. Structura inelelor artiniene

Inelele artiniene, apărute ca urmare a unui exercițiu de logică formală — dualizarea relației de incluziune, s-au dovedit a fi în multe circumstanțe un substitut pentru corpuri. Proprietățile lor intervin decisiv în construirea unei teorii a dimensiunii pentru inele comutative. În încheierea acestui capitol prezentăm structura inelelor artiniene.

LEMA 4.1. *Orice nondivizor al lui zero dintr-un inel artinian este inversabil. În particular, un inel artinian care este domeniu de integritate este de fapt corp.*

DEMONSTRAȚIE. Pentru un astfel de element a , șirul $aA \supseteq a^2A \supseteq a^3A \supseteq \dots$ este staționar. Dacă $a^n A = a^{n+1}A$, atunci $a^n = a^{n+1}b$ pentru un anumit $b \in A$. Cum a este nondivizor al lui zero, se poate simplifica cu a^n în ultima egalitate, rezultând $ab = 1$. \square

LEMA 4.2. *Într-un inel artinian există doar un număr finit de ideale prime.*

DEMONSTRAȚIE. Observăm mai întâi că din lema precedentă și din faptul că o imagine omomorfă a unui inel artinian este încă inel artinian rezultă că orice ideal prim al unui astfel de inel este maximal. Să presupunem că spectrul inelului artinian A nu este finit. Atunci există o mulțime infinită de ideale prime $(P_n)_{n \geq 1}$. Lanțul descendent $P_1 \supset P_1 \cap P_2 \supset P_1 \cap P_2 \cap P_3 \supset \dots$ nu este staționar întrucât orice ideal prim este maximal. Contradicția la care s-a ajuns provine din presupunerea că $\text{Spec } A$ este mulțime infinită. \square

LEMA 4.3. *Radicalul Jacobson J al unui inel artinian este nilpotent, i.e. există $t \in \mathbb{N}$ astfel încât $J^t = 0$.*

DEMONSTRAȚIE. Folosind lema 4.1, se deduce

$$J = \cap \{ P : P \in \text{Max } A \} = \cap \{ P : P \in \text{Spec } A \},$$

adică orice element al radicalului este nilpotent. Cum nu știm că J este finit generat, nu putem conchide că exponenții începând de la care se anulează puterile elementelor lui J sunt majorați de aceeași constantă. Din faptul că A este inel artinian rezultă că există un număr natural t astfel ca $J^t = J^{t+1} =: I$. Vom arăta că I este idealul nul.

Observăm că $J I = J J^t = J^{t+1} = I$. Presupunând $I \neq 0$, din $J I = I \neq 0$ rezultă că mulțimea \mathcal{L} constituită din idealele neconținute în anulatorul lui I este nevidă. Fie L un element minimal al lui \mathcal{L} . Din $I L \neq 0$ rezultă că există $a \in L$ astfel ca $a I \neq 0$. Din alegerea lui L se deduce $L = aA$. Cum $a I J = a I \neq 0$, rezultă $a J = aA = L$. Prin urmare $a = ab$, cu $b \in J$, și atunci $a = ab = ab^n$ pentru orice $n \geq 1$.

Dar știm deja că b , ca orice alt element al lui J , este nilpotent. Am ajuns astfel la contradicția $a = 0$. \square

PROPOZIȚIE 4.4. *Pentru un modul de tip finit E peste un inel noetherian A , următoarele afirmații sunt echivalente:*

- (i) E este modul de lungime finită,
- (ii) $\text{Ass}_A(E) \subseteq \text{Max } A$,
- (iii) $\text{Supp}_A(E) \subseteq \text{Max } A$.

DEMONSTRAȚIE. Conform propoziției 3.47, există o filtrare

$$0 = E_n \subset E_{n-1} \subset \dots \subset E_1 \subset E_0 = E \quad (7)$$

ai cărei factori E_{i-1}/E_i sunt module izomorfe cu imagini omomorfe integrale A/P_i ($i = 1, 2, \dots, n$) ale inelului A , iar

$$\text{Ass}_A(E) \subseteq \{P_1, P_2, \dots, P_n\} \subseteq \text{Supp}_A(E). \quad (8)$$

(i) \implies (ii) Factorii E_{i-1}/E_i ($1 \leq i \leq n$) sunt module de lungime finită, deci $l_A(A/P_i) < \infty$. Prin urmare A/P_i este inel artinian. Fiind domeniu de integritate, el este corp, deci $P_i \in \text{Max } A$ ($1 \leq i \leq n$). Din relația (8) rezultă că toate primele asociate lui E sunt ideale maximale.

Condiția (ii) implică (iii) pentru că $\text{Ass } E \subseteq \text{Supp } E$ și cele două mulțimi au aceleași elemente minimale. Presupunând îndeplinită condiția (iii), din relația (8) rezultă că factorii filtrării (7) sunt A -module simple, deci (7) este un șir de compoziție pentru E . Condiția (i) este îndeplinită conform teoremei Jordan-Hölder. \square

Putem acum caracteriza inelele artiniene comutative:

TEOREMA 4.5. *Pentru un inel A , următoarele afirmații sunt echivalente:*

- (i) A este inel artinian,
- (ii) A este inel noetherian și orice ideal prim al lui A este maximal,
- (iii) A este inel noetherian și orice ideal prim asociat lui A este maximal.

Dacă aceste condiții sunt satisfăcute, atunci A este un inel semilocal, cu radicalul Jacobson nilpotent.

DEMONSTRAȚIE. (i) \implies (ii) Singura proprietate a cărei existență nu a fost încă dovedită este noetherianitatea. Vom arăta faptul echivalent că un inel artinian are lungimea finită.

Fie $I \leq A$ un ideal minimal cu proprietatea că $l_A(A/I) < \infty$. Dacă I este nenul, atunci suportul A -modulului I este nevid, cf. lema 3.23. Pentru $P \in \text{Supp}(I)$ avem $I_P \neq 0$. Arătăm că I_P/PI_P este un spațiu vectorial nenul peste corpul rezidual $A_P/PA_P \simeq A/P$ (aici se folosește

maximalitatea idealului P). Presupunând contrariul, se găsește $I_P = PI_P = P^2I_P = \dots = 0$, pentru că PA_P este ideal nilpotent în inelul artinian A_P conform lemei 4.3. Contradicția obținută provine din presupunerea că $I_P/PI_P = 0$. Cum orice spațiu vectorial nenul este sursa unui morfism a cărui imagine este corpul peste care se lucrează, rezultă existența unui morfism surjectiv de A -module $I_P/PI_P \longrightarrow A/P$. Prin compunere cu morfismele canonice $I \longrightarrow I_P \longrightarrow I_P/PI_P$ se obține un morfism surjectiv de A -module $v : I \longrightarrow A/P$. Nucleul $J := \ker v$ este un ideal al inelului A conținut strict în I și care are proprietatea că A/J este A -modul de lungime finită, conform propoziției 2.7 aplicate seriei normale $0 \subset I/J \simeq A/P \subset A/J$. S-a ajuns la o contradicție cu alegerea lui I .

Clar (iii) este consecință a condiției (ii), iar implicația (iii) \implies (i) decurge din propoziția 4.4. \square

Se poate arăta că orice inel necomutativ artinian la stânga este noetherian la sângea.

LEMA 4.6. *Fie A un inel artinian cu $\text{Max } A = \{M_1, \dots, M_n\}$, $J = M_1 \cap \dots \cap M_n$ și $J^k = 0$ ($k \in \mathbb{N}$). Atunci $0 = M_1^k \cap \dots \cap M_n^k$ este unica descompunere primară redusă a idealului nul din A .*

DEMONSTRAȚIE. Evident $\prod_{i=1}^k M_i^k \subseteq J^k = 0$. Deoarece M_i și M_j sunt comaximale pentru $1 \leq i < j \leq n$, rezultă că și $M_i^k + M_j^k = A$. Conform lemei chineze a resturilor avem $0 = M_1^k \cap \dots \cap M_n^k$, relație ce este o descompunere primară a idealului nul pentru că $\text{Rad}(M^k) = M$ pentru orice $M \in \text{Max } A$ și un modul este primar dacă radicalul său este ideal maximal. Observăm că această descompunere primară este redusă întrucât o relație $M_i^k \supseteq \bigcap_{j \neq i} M_j^k$ implică

$$\prod_{j \neq i} M_j^k \subseteq \bigcap_{j \neq i} M_j^k = 0 \subseteq M_i,$$

deci $M_j \subseteq M_i$ pentru un indice $j \neq i$. Unicitatea rezultă din teorema 3.60 și din faptul că M_1, \dots, M_n este ideal prim minimal în A conform teoremei 4.5. \square

TEOREMA 4.7. *Orice inel artinian este izomorf cu produsul direct al localizatorilor sale în idealele maximale.*

DEMONSTRAȚIE. Fie J radicalul Jacobson al inelului artinian A și M_1, \dots, M_n idealele maximale, iar $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $J^k = 0$. Conform rezultatului precedent și lemei chineze a resturilor, există un izomorfism canonic $A \simeq \prod_{i=1}^n A/M_i^k$. Vom arăta că pentru $M \in \text{Max } A$, morfismul de localizare $u : A \longrightarrow A_M$ este surjectiv și are nucleul M^k .

Fie $p : A \longrightarrow A/M^k$ surjecția canonică. Deoarece A/M^k este inel local de ideal maximal M/M^k , se obține că $p(a)$ este inversabil pentru orice $a \in A \setminus M$. Din proprietatea de universalitate a inelelor de fracții rezultă că există un morfism de inele $f : A_M \longrightarrow A/M^k$ astfel încât $p = fu$. Evident f este surjectiv. Rămâne să arătăm injectivitatea lui f . Dacă $a/s \in \ker f$, atunci $u(a) = a/1 \in \ker f$, încât $p(a) = f(u(a)) = 0$. Prin urmare $a \in M^k$ și

$$a/s \in M^k A_M = \bigcap_{i=1}^n M_i^k A_M = \left(\bigcap_{i=1}^n M_i^k \right) A_M = 0 .$$

□

Bibliografie

- [1] T. Albu, Ș. Raianu, *Lecții de algebră comutativă*, Univ. București, București, 1982.
- [2] N. Bourbaki, *Algèbre Commutative*, Herrman, Paris, 1961–1991.
- [3] A. Brezuleanu, N. Radu, *Lecții de algebră III. Algebra locală*, Univ. București, București, 1982.
- [4] A. Brezuleanu, N. Radu, *Algebre locale*, Ed. Academiei Române, București, 1998.
- [5] W. Bruns, J. Herzog, *Cohen-Macaulay Rings*, second ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.
- [6] I. Bucur, *Algebră omologică*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1965.
- [7] H. Cartan, S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1956.
- [8] S. Dăncescu, C. Năstăsescu, *Capitole speciale de algebră*, Univ. București, București, 1982.
- [9] T. Dumitrescu, A remark on going down, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie (N. S.)*, **30(78)**(1986), 213–216.
- [10] D. Eisenbud, Subrings of Artinian and Noetherian rings, *Math. Ann.*, **185**(3)(1970), 244–247.
- [11] M. Hochster, Pathological maximal R -sequences in quasilocal domains, *Portugalia Math.*, **38**(1979), 33–36.
- [12] I. Kaplanski, *Fields and Rings*, Univ of Chicago Press, 1969.
- [13] I. Kaplanski, *Commutative Rings*, Allyn & Bacon, Boston, 1970.
- [14] E. Kunz, *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry*, Birkhäuser, Boston, 1985.
- [15] H. Matsumura, *Commutative Algebra*, second ed., Benjamin, New York, 1980.
- [16] M. Nagata, *Local Rings*, Wiley, New York, 1962.
- [17] C. Năstăsescu, *Inele, module, categorii*, Ed. Academiei, București, 1976.
- [18] V. Nica, D. Popescu, *Inele henseliene și proprietatea de aproximare*, Univ. București, București, 1979.
- [19] N. Radu, *Inele locale*, vol. I, Ed. Academiei, București, 1968.
- [20] N. Radu, *Lecții de algebră III. Descompunere primară în inele comutative*, Univ. București, București, 1981.
- [21] J.-P. Serre, *Algèbre Locale, Multiplicités*, Springer Lect. Notes in Math., **11**(1965).
- [22] O. Zariski, P. Samuel, *Commutative Algebra*, 2 vol., Van Nostrand, Princeton, 1958 și 1960.