

UNIVERSITATEA BUCUREȘTI  
FACULTATEA DE MATEMATICĂ

# SISTEME DE LOGICĂ DINAMICĂ

Disertație

**Laurențiu LEUȘTEAN**

Coordonator științific  
Prof. **George GEORGESCU**

1997

# Cuprins

<b>1</b>	<b>Introducere</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Logica modală propozițională</b>	<b>3</b>
2.1	Sintaxa și Semantica . . . . .	3
2.1.1	Sintaxa . . . . .	3
2.1.2	Semantica . . . . .	5
2.2	Teorema de completitudine . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Logica propozițională trivalentă</b>	<b>10</b>
3.1	Sintaxa și Semantica . . . . .	10
3.1.1	Sintaxa . . . . .	10
3.1.2	Semantica . . . . .	13
3.2	Teorema de completitudine . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Logica dinamică propozițională</b>	<b>17</b>
4.1	Limbaajul, sintaxa și semantica . . . . .	17
4.1.1	Limbaajul . . . . .	17
4.1.2	Sintaxa . . . . .	18
4.1.3	Semantica . . . . .	20
4.2	Teorema de completitudine . . . . .	22
4.2.1	Demonstrația lui K. Segerberg . . . . .	22
4.2.2	Demonstrația lui D. Harel . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Logica dinamică trivalentă propozițională</b>	<b>43</b>
5.1	Limbaajul, sintaxa și semantica . . . . .	43
5.1.1	Limbaajul . . . . .	43
5.1.2	Sintaxa . . . . .	44
5.1.3	Semantica . . . . .	48
5.2	Modele canonice . . . . .	51
5.3	Filtrări . . . . .	53

# 1 Introducere

Primul sistem de logică dinamică propozițională a fost introdus de M.J. Fischer și R.E. Ladner în [FL], urmând idei ale lui V. Pratt din [P].

Scopul logicii dinamice este de a constitui o bază matematică pentru analiza programelor. Logica dinamică reprezintă o extensie a logicii modale, în care programele apar în enunțuri. Structurile corespunzătoare logicii dinamice sunt inspirate de modelele Kripke pentru logica modală. Programele sunt văzute ca relații binare pe stări. Intuitiv, o pereche de stări  $s$  și  $t$  sunt puse în relație printr-un program  $\alpha$  dacă execuția lui  $\alpha$  poate conduce din starea  $s$  în starea  $t$ . Operatorii specifici logicii dinamice sunt  $[\alpha]$  și  $\langle \alpha \rangle$ . Enunțul  $[\alpha]p$  este adevărat dacă orice execuție a lui  $\alpha$  conduce la o stare în care enunțul  $p$  este adevărat. Dual,  $\langle \alpha \rangle p$  este adevărat dacă există o execuție a lui  $\alpha$  care conduce la o stare în care  $p$  este adevărat. În prezent există numeroase sisteme de logică dinamică [H2]. În mod deosebit sunt studiate sistemele în care programele sunt expresii regulate peste o mulțime de programe atomice și teste.

Lucrarea de față își propune să prezinte câteva rezultate importante din logica dinamică propozițională, precum și realizarea unui sistem de logică dinamică bazat pe logica trivalentă a lui J. Lukasiewicz.

În capitolul al doilea sunt prezentate definiții și rezultate de bază din logica modală propozițională, având ca punct de plecare [C]. Este demonstrată teorema de completitudine a lui S. Kripke pentru sistemele  $K$ ,  $T$ ,  $S4$ ,  $B$ ,  $S5$ .

Capitolul al treilea studiază logica trivalentă definită de J. Lukasiewicz în 1920. Este prezentată axiomatizarea dată de M. Wajsberg și este demonstrată teorema de completitudine [GLW]. Pentru o prezentare mai detaliată se pot consulta [BFGR] și [WM].

Capitolul al patrulea este consacrat logicii dinamice propoziționale. Sunt unificate sistemele de logică dinamică propozițională definite de K. Segerberg în [S] și D. Harel în [H2]. Sunt prezentate două demonstrații ale teoremei de completitudine care sunt inspirate de demonstrațiile lui K. Segerberg și D. Harel. Demonstrația lui K. Segerberg este extinsă pentru a include operatorul  $?$ . Ea folosește o metodă standard în logica modală, și anume, tehnica bazată pe modele canonice și filtrare. Demonstrația lui D. Harel are un caracter constructiv și este deosebit de laborioasă. În lucrare sunt detaliate aceste rezultate. Am considerat necesară prezentarea am-

belor demonstrații deoarece cele două abordări sunt diferite și pot constitui surse de inspirație pentru cercetări ulterioare.

În ultimul capitol al lucrării propunem un sistem de logică dinamică trivalentă propozițională. Ideea elaborării unui astfel de sistem a fost inspirată de [B]. În lucrarea respectivă autorul prezintă o logică dinamică trivalentă care nu urmează linia sistemelor tradiționale de logică dinamică. Sistemul propus în lucrarea de față este abordat în maniera clasică prezentată în capitolul anterior. Definirea sa este o combinație a ideilor din logica dinamică, logica trivalentă, precum și din logica modală  $n$ -valentă definită de P. Ostermann în [O1], [O2]. După ce prezentăm limbajul, sintaxa și semantica acestui sistem, definim noțiunile de deductibilitate și consistență și demonstrăm proprietăți importante ale acestora. Sunt investigate modelele canonice și filtrările. Rezultatele principale ale acestui capitol sunt Lema adevărului și Teorema de filtrare, care reprezintă variante trivalente ale rezultatelor cunoscute din logicile modale și dinamice.

Aceste rezultate sunt pași spre demonstrarea unei teoreme de completitudine a sistemului propus, care constituie principalul obiectiv al unor investigații ulterioare.

O problemă de studiat în continuare este algebrizarea sistemului prin definirea unor algebre Lukasiewicz-Moisil trivalente dinamice. O altă abordare a teoremei de completitudine este constituită de demonstrarea unei teoreme de reprezentare pentru aceste structuri.

Definirea unor sisteme de logică dinamică bazate pe logicile  $n$ -valente și cu o infinitate de valori reprezintă o altă direcție de cercetare în acest domeniu.

## 2 Logica modală propozițională

În acest capitol este prezentată logica modală propozițională, având ca punct de plecare [C]. Sunt amintite sistemele  $K$ ,  $T$ ,  $S4$ ,  $B$ ,  $S5$  și este demonstrată teorema de completitudine pentru fiecare din aceste sisteme.

### 2.1 Sintaxa și Semantica

#### 2.1.1 Sintaxa

Limbajul logicii modale propoziționale este format din:

- (i) o mulțime numărabilă  $V$  de *variabile propoziționale*,
- (ii) conectorii calculului propozițional:  $\neg$ ,  $\rightarrow$ ,
- (iii) operatorul *necesitate*  $\Box$ ,
- (vii) parantezele:  $(, )$ ,  $[, ]$ .

Mulțimea  $E$  a *enunțurilor* este cea mai mică mulțime care satisface următoarele proprietăți:

- (i) dacă  $p$  este variabilă propozițională, atunci  $p \in E$ ,
- (ii) dacă  $p$  și  $q$  sunt în  $E$ , atunci  $\neg p, p \rightarrow q \in E$ ,
- (iii) dacă  $p \in E$ , atunci  $\Box p \in E$ .

Operatorul *posibilitate* se introduce prin următoarea abreviere:

$$\Diamond p := \neg \Box \neg p.$$

De asemenea, folosim abrevierile standard din calculul propozițional:

$$p \vee q := \neg p \rightarrow q,$$

$$p \wedge q := \neg(\neg p \vee \neg q),$$

$$p \leftrightarrow q := (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p).$$

Printr-o *logică* peste limbajul dat înțelegem orice mulțime  $\mathcal{L}$  de enunțuri care satisface următoarele condiții:

- (i)  $\mathcal{L}$  conține toate tautologiile calculului propozițional,
- (ii)  $\mathcal{L}$  este închisă la *modus ponens*,
- (iii)  $\mathcal{L}$  este închisă la *substituție*.

Printr-o *logică modală normală* înțelegem o logică  $\mathcal{L}$  care satisface următoarele condiții:

- (iv)  $\mathcal{L}$  conține orice enunț de forma

$$(A0) \quad \Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q),$$

(v)  $\mathcal{L}$  este închisă la *necesitate*: dacă  $p \in \mathcal{L}$ , atunci  $\Box p \in \mathcal{L}$ .

Spunem că un enunț  $p$  este *deductibil în logica  $\mathcal{L}$  dintr-o mulțime de enunțuri  $\Sigma$*  (și scriem  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} p$ ) dacă există un număr finit de enunțuri  $q_0, \dots, q_{n-1} \in \Sigma$  astfel încât

$$q_0 \wedge \dots \wedge q_{n-1} \rightarrow p \in \mathcal{L}.$$

Aplicând (A0) și închiderea la necesitate se demonstrează imediat că pentru orice logică modală normală  $\mathcal{L}$ :

$$(A1) \quad \Box(p \wedge q) \leftrightarrow (\Box p \wedge \Box q) \in \mathcal{L}.$$

Spunem că o mulțime de enunțuri  $\Sigma$  este  $\mathcal{L}$ -*consistentă* dacă există enunțuri care nu sunt deductibile în  $\mathcal{L}$  din  $\Sigma$ . O mulțime  $\mathcal{L}$ -consistentă  $\Sigma$  se numește *maximal  $\mathcal{L}$ -consistentă* dacă pentru orice enunț  $p$ ,

$$\Sigma \cup \{p\} \text{ este } \mathcal{L}\text{-consistentă implică } p \in \Sigma.$$

**Lema 2.1.1** Fie  $\Sigma$  o mulțime de enunțuri. Atunci  $\Sigma$  este  $\mathcal{L}$ -consistentă dacă și numai dacă orice submulțime finită a sa este  $\mathcal{L}$ -consistentă.

**Demonstrație:** Rezultă imediat din definiția deductibilității din  $\Sigma$ .  $\square$

**Lema 2.1.2** Dacă  $\Sigma$  este o mulțime de enunțuri  $\mathcal{L}$ -consistentă, atunci există  $w \in W_{\mathcal{L}}$  astfel încât  $\Sigma \subseteq w$ .

**Demonstrație:** Deoarece mulțimea  $V$  a variabilelor propoziționale este numărabilă, rezultă că mulțimea  $E$  a enunțurilor este numărabilă. Fie  $p_0, \dots, p_n, \dots$  o enumerare a enunțurilor. Definim inductiv următorul șir de mulțimi:

$$\Sigma_0 = \Sigma, \quad \Sigma_{n+1} = \begin{cases} \Sigma_n \cup \{p_n\} & \text{dacă } \Sigma_n \cup \{p_n\} \text{ este } \mathcal{L}\text{-consistentă} \\ \Sigma_n & \text{altfel} \end{cases}$$

Evident, pentru orice  $n \in \mathbf{N}$ ,  $\Sigma_n$  este  $\mathcal{L}$ -consistentă.

Fie  $w = \bigcup_{n \geq 0} \Sigma_n$ .

Demonstrăm că  $w$  este  $\mathcal{L}$ -consistentă. Presupunem că nu este. Atunci există  $p_{i_0}, p_{i_1}, \dots, p_{i_{k-1}} \in w$  astfel încât  $\{p_{i_0}, p_{i_1}, \dots, p_{i_{k-1}}\}$  este  $\mathcal{L}$ -inconsistentă. Fie  $n = \max\{i_0, i_1, \dots, i_{k-1}\}$ . Rezultă că  $\{p_{i_0}, p_{i_1}, \dots, p_{i_{k-1}}\} \in \Sigma_{n+1}$ . Obținem că  $\Sigma_{n+1}$  este  $\mathcal{L}$ -inconsistentă, ceea ce este o contradicție.

Demonstrăm că  $\Sigma$  este maximal  $\mathcal{L}$ -consistentă. Fie  $p_m \in E$  astfel încât  $p_m \notin w$ . Din

construcția lui  $w$  rezultă că  $\Sigma_m \cup \{p_m\}$  este  $\mathcal{L}$ -inconsistentă. Deoarece  $\Sigma_m \cup \{p_m\} \subseteq w \cup \{p_m\}$ , obținem că  $w \cup \{p_m\}$  este  $\mathcal{L}$ -inconsistentă.  $\square$

Prezentăm fără demonstrație câteva proprietăți generale ale mulțimilor  $\mathcal{L}$ -consistente și maximal  $\mathcal{L}$ -consistente:

- o mulțime maximal  $\mathcal{L}$ -consistentă  $\Sigma$  conține  $\mathcal{L}$ ,
- dacă  $\Sigma$  este o mulțime maximal  $\mathcal{L}$ -consistentă și  $p, q \in E$  atunci
  - (i)  $(p \rightarrow q) \in \Sigma$  dacă și numai dacă  $p \in \Sigma$  implică  $q \in \Sigma$ ,
  - (ii)  $p \in \Sigma$  dacă și numai dacă  $\neg p \notin \Sigma$ ,
  - (iii)  $p \vee q \in \Sigma$  dacă și numai dacă  $p \in \Sigma$  sau  $q \in \Sigma$ ,
  - (iv)  $p \wedge q \in \Sigma$  dacă și numai dacă  $p \in \Sigma$  și  $q \in \Sigma$ ,
  - (v)  $(p \leftrightarrow q) \in \Sigma$  dacă și numai dacă ( $p \in \Sigma$  dacă și numai dacă  $q \in \Sigma$ ).

Este evident că intersecția oricărei clase de logici modale normale este de asemenea o logică modală normală. Notăm cu  $K$  (de la Kripke) intersecția tuturor logicilor modale normale. Definim logicile modale  $T$ ,  $S4$ ,  $B$ ,  $S5$  ca fiind intersecțiile tuturor logicilor modale normale ce conțin logicile și enunțurile specificate mai jos:

$$T : \quad \Box p \rightarrow p,$$

$$S4 : \quad T, \Box p \rightarrow \Box \Box p,$$

$$B : \quad T, \neg p \rightarrow \Box \neg \Box p,$$

$$S5 : \quad T, \neg \Box p \rightarrow \Box \neg \Box p.$$

În cele ce urmează toate logicile sunt logici modale normale.

### 2.1.2 Semantica

Printr-o *structură modală* (Kripke) înțelegem o pereche  $\mathcal{D} = \langle W, R \rangle$ , unde  $W$  este o mulțime și  $R$  este o relație binară pe  $W$ . Elementele lui  $W$  se numesc *lumi posibile* sau *stări*. Relația  $R$  se numește relația de *accesibilitate*. Pentru  $s, t \in W$ , dacă  $sRt$  spunem că  $t$  este *accesibilă din*  $s$ .

Spunem că o structură modală  $\mathcal{D} = \langle W, R \rangle$  este reflexivă, simetrică, tranzitivă, de echivalență dacă și numai dacă  $R$  este, respectiv, relație reflexivă, simetrică, tranzitivă, de echivalență.

Printr-un *model*  $\mathcal{M}$  bazat pe o structură  $\mathcal{D}$  înțelegem un triplet  $\langle W, R, I \rangle$ , unde

$$(i) \quad \mathcal{D} = \langle W, R \rangle,$$

$$(ii) \quad I : E \times W \rightarrow L_2 = \{0, 1\} \text{ este o funcție care satisface:}$$

- (a)  $I(\neg p, s) = \neg I(p, s)$ ,
- (b)  $I(p \rightarrow q, s) = I(p, s) \rightarrow I(q, s)$ ,
- (c)  $I(\Box p, s) = \bigwedge \{I(p, t) \mid sRt\}$ ,

pentru orice  $p, q \in E$  și  $s \in W$ .

Funcția  $I$  se numește *interpretare* în structura modală  $\mathcal{D}$ . Există o corespondență bijectivă între mulțimea interpretărilor în  $\mathcal{D}$  și mulțimea funcțiilor definite pe  $V \times W$  cu valori în  $L_2$ . Prin urmare, pentru a da o interpretare  $I$  în  $\mathcal{D}$  este suficient să definim  $I$  pe  $V \times W$ .

Fie  $\mathcal{M} = \langle W, R, I \rangle$  un model și  $p$  un enunț. Definim:

- $p$  este *adevărat în starea*  $s \in W$  și scriem  $\mathcal{M}, s \models p$  dacă  $I(p, s) = 1$ ,
- $p$  este  $\mathcal{M}$ -*valid* sau *valid în*  $\mathcal{M}$  și scriem  $\mathcal{M} \models p$  dacă  $\mathcal{M}, s \models p$  pentru orice stare  $s \in W$ .

Dacă  $\mathcal{D} = \langle W, R \rangle$  este o structură modală, spunem că  $p$  este  $\mathcal{D}$ -*valid* sau *valid în*  $\mathcal{D}$  dacă  $p$  este  $\mathcal{M}$ -valid, pentru orice model  $\mathcal{M}$  bazat pe structura  $\mathcal{D}$ . Dacă  $\mathcal{K}$  este o clasă de structuri modale,  $p$  este  $\mathcal{K}$ -*valid* dacă este valid în orice structură modală din clasa  $\mathcal{K}$ . Spunem că un model (o structură modală) este model (structură modală) *pentru* un enunț (o mulțime de enunțuri) dacă enunțul (orice membru al mulțimii de enunțuri) este valid în model (structura modală).

O clasă  $\mathcal{K}$  de structuri modale *determină* sau *caracterizează* o logică  $\mathcal{L}$  dacă pentru orice enunț  $p$

- $p \in \mathcal{L}$  dacă și numai dacă  $p$  este  $\mathcal{K}$ -valid.

O logică caracterizată de o clasă de structuri modale se numește *completă*.

**Teorema 2.1.3** (i) Orice structură modală este structură modală pentru K.

(ii) Orice structură modală reflexivă este structură modală pentru T.

(iii) Orice structură modală reflexivă și tranzitivă este structură modală pentru S4.

(iv) Orice structură modală reflexivă și simetrică este structură modală pentru B.

(v) Orice structură modală de echivalență este structură modală pentru S5.

**Demonstrație:** Demonstrația lui (i) constă în a arăta că tautologiile calculului propozițional și  $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$  sunt valide în toate structurile și că *modus ponens*, substituția și necesitatea păstrează această validitate.

Pentru a demonstra (ii)-(v) trebuie să mai stabilim validitatea axiomelor particulare logicilor  $T$ ,  $S4$ ,  $B$ ,  $S5$ , ceea ce se verifică imediat.  $\square$

## 2.2 Teorema de completitudine

În acest paragraf se demonstrează teorema de completitudine pentru logicile  $K$ ,  $T$ ,  $S4$ ,  $B$ ,  $S5$ . În continuare demonstrăm câteva rezultate preliminare.

Fie  $\mathcal{L}$  o logică modală normală. Prin *model canonic* al lui  $\mathcal{L}$  înțelegem tripletul  $\mathcal{M}_{\mathcal{L}} = \langle W_{\mathcal{L}}, R_{\mathcal{L}}, I_{\mathcal{L}} \rangle$ , unde:

- (i)  $W_{\mathcal{L}}$  este mulțimea tuturor mulțimilor de enunțuri maximal  $\mathcal{L}$ -consistente,
- (ii) pentru orice  $u, v \in W_{\mathcal{L}}$ ,  
 $uR_{\mathcal{L}}(\alpha)v$  dacă și numai dacă pentru orice  $p \in E$ , dacă  $\Box p \in u$  atunci  $p \in v$ ,
- (iii) pentru orice variabilă propozițională  $p \in V$  și pentru orice  $u \in W_{\mathcal{L}}$ ,

$$I_{\mathcal{L}}(p, u) = 1 \Leftrightarrow p \in u.$$

Pentru orice mulțime de enunțuri  $\Sigma$  definim mulțimea  $I(\Sigma)$  astfel:

$$I(\Sigma) = \{p \mid \Box p \in \Sigma\}.$$

**Lema 2.2.1** Dacă  $\Sigma$  este  $\mathcal{L}$ -consistentă, atunci pentru orice enunț  $p$  astfel încât  $\neg\Box p \in \Sigma$ ,  $I(\Sigma) \cup \{\neg p\}$  este  $\mathcal{L}$ -consistentă.

**Demonstrație:** Presupunem că  $I(\Sigma) \cup \{\neg p\}$  nu este  $\mathcal{L}$ -consistentă. Rezultă că există  $p_0, \dots, p_{n-1} \in I(\Sigma)$  astfel încât

$$(p_0 \wedge \dots \wedge p_{n-1}) \rightarrow p \in \mathcal{L}.$$

Aplicând necesitatea și (A0) obținem

$$\Box(p_0 \wedge \dots \wedge p_{n-1}) \rightarrow \Box p \in \mathcal{L},$$

prin urmare, folosind (A1),

$$(\Box p_0 \wedge \dots \wedge \Box p_{n-1}) \rightarrow \Box p \in \mathcal{L}.$$

Rezultă

că  $\{\Box p_0, \dots, \Box p_{n-1}, \neg\Box p\}$  este  $\mathcal{L}$ -inconsistentă. Dar,  $\{\Box p_0, \dots, \Box p_{n-1}, \neg\Box p\} \subseteq \Sigma$ . Obținem că  $\Sigma$  este  $\mathcal{L}$ -inconsistentă, ceea ce contrazice ipoteza.  $\square$

În continuare demonstrăm unul din cele mai importante rezultate ale logicii modale propoziționale, cunoscut și sub numele de *Lema adevărului*.

**Lema 2.2.2** Dacă  $\mathcal{L}$  este o logică modală normală, atunci pentru orice  $u \in W_{\mathcal{L}}$  și orice enunț  $p$ ,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, u \models p \text{ dacă și numai dacă } p \in u.$$

**Demonstrație:** Prin inducție după enunțul  $p$ .

Cazurile în care  $p \in V$ ,  $p$  este  $\neg q$  sau  $p$  este  $q \rightarrow r$  sunt imediate. Demonstrăm numai cazul:

-  $p$  este  $\Box q$

( $\Rightarrow$ ) Presupunem că  $\Box q \notin u$ . Obținem  $\neg \Box q \in u$ . Aplicând lema precedentă rezultă că  $I(u) \cup \{\neg q\}$  este  $\mathcal{L}$ -consistentă. Din Lema 2.1.2 obținem că există  $w \in W_{\mathcal{L}}$  astfel încât

$$(1) \quad I(u) \cup \{\neg q\} \subseteq w.$$

Din (1) rezultă  $uR_{\mathcal{L}}w$  și  $q \notin w$ . Aplicând ipoteza de inducție obținem că  $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, w \not\models q$ . Deoarece  $uR_{\mathcal{L}}w$ , rezultă că  $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, u \not\models \Box q$ .

( $\Leftarrow$ ) A demonstra că  $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, u \models \Box q$  este echivalent cu a demonstra că pentru orice  $v \in W_{\mathcal{L}}$  dacă  $uR_{\mathcal{L}}v$  atunci  $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, v \models q$ . Folosind definiția lui  $R_{\mathcal{L}}$  și faptul că  $\Box q \in u$  obținem că pentru orice  $v \in W_{\mathcal{L}}$  dacă  $uR_{\mathcal{L}}v$ , atunci  $q \in v$ . Aplicând ipoteza de inducție obținem rezultatul dorit.  $\square$

**Lema 2.2.3** Dacă  $\mathcal{L}$  este o logică modală normală, atunci  $p \in \mathcal{L}$  dacă și numai dacă  $p$  este  $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ -valid.

**Demonstrație:** ( $\Rightarrow$ ) Dacă  $p \in \mathcal{L}$ , atunci  $p$  este element al oricărei mulțimi maximal  $\mathcal{L}$ -consistente, deci, din Lema adevărului, este  $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ -valid.

( $\Leftarrow$ ) Presupunem că  $p \notin \mathcal{L}$ . Atunci  $\{\neg p\}$  este  $\mathcal{L}$ -consistentă. Rezultă că există o mulțime maximal  $\mathcal{L}$ -consistentă  $w \in W_{\mathcal{L}}$  astfel încât  $\neg p \in w$ . Din Lema adevărului obținem că  $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, w \models \neg p$ , deci  $p$  nu este  $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ -valid.  $\square$

Suntem în măsură să demonstrăm teorema de completitudine.

**Teorema 2.2.4** (i)  $K$  este caracterizată de clasa tuturor structurilor modale.

(ii)  $T$  este caracterizată de clasa tuturor structurilor modale reflexive.

(iii)  $S4$  este caracterizată de clasa tuturor structurilor modale reflexive și tranzitive.

(iv)  $B$  este caracterizată de clasa tuturor structurilor modale reflexive și simetrice.

(v)  $S5$  este caracterizată de clasa tuturor structurilor modale de echivalență.

**Demonstrație:** (i) Conform Teoremei 2.1.3.(i) orice enunț din  $K$  este valid în orice structură modală. Reciproc, fie  $p$  un enunț valid. Presupunem că  $p \notin K$ . Din Lema 2.2.3 rezultă că  $p$  nu este  $\mathcal{M}_K$ -valid, ceea ce contrazice faptul că  $p$  este valid.

(ii) Este suficient să arătăm că  $\mathcal{M}_T$  este structură modală reflexivă, deoarece conform Teoremei 2.1.3.(ii) orice structură modală reflexivă este structură modală pentru  $T$ . Fie  $u \in W_T$  și  $p$  un enunț astfel încât  $\Box p \in u$ . Folosind  $\Box p \rightarrow p \in T$  și faptul că  $u$  este mulțime maximal  $T$ -consistentă rezultă  $p \in u$ . Am obținut  $uR_T u$  pentru orice  $u \in W_T$ , deci  $R_T$  este reflexivă.

(iii) Din Teorema 2.1.3.(iii) rezultă că este suficient să arătăm că  $\mathcal{M}_{S4}$  este structură modală reflexivă și tranzitivă. Reflexivitatea se demonstrează ca la (ii). Fie  $u, v, w \in W_{S4}$  astfel încât  $uR_{S4}v$  și  $vR_{S4}w$ . Fie  $p$  un enunț astfel încât  $\Box p \in u$ . Din faptul că  $\Box p \rightarrow \Box \Box p \in S4$  rezultă  $\Box \Box p \in u$ . Din  $uR_{S4}v$  obținem  $\Box p \in v$  și din  $vR_{S4}w$  rezultă  $p \in w$ . Obținem  $uR_{S4}w$ , deci  $R_{S4}$  este tranzitivă.

(iv) Din Teorema 2.1.3.(iv) rezultă că este suficient să arătăm că  $\mathcal{M}_B$  este structură modală reflexivă și simetrică. Reflexivitatea se demonstrează ca la (ii). Fie  $u, v \in W_B$  astfel încât  $uR_B v$ . Fie  $p$  un enunț astfel încât  $\Box p \in v$ . Presupunem că  $p \notin u$ , prin urmare  $\neg p \in u$ . Folosind  $\neg p \rightarrow \Box \neg \Box p \in B$  rezultă  $\Box \neg \Box p \in u$ . Deoarece  $uR_B v$ , obținem  $\neg \Box p \in v$ , ceea ce contrazice faptul că  $v$  este  $B$ -consistentă. Prin urmare  $p \in u$ , de unde rezultă că  $vR_B u$ . Deci,  $R_B$  este simetrică.

(v) Rezultă imediat din (iii) și (iv) și Teorema 2.1.3.(v).  $\square$

Teorema de mai sus poate fi reformulată astfel:

**Teorema 2.2.5 (Teorema de completitudine)** Logicile  $K$ ,  $T$ ,  $S4$ ,  $B$ ,  $S5$  sunt complete.

### 3 Logica propozițională trivalentă

Primul sistem de logică propozițională trivalentă a fost definit de J. Lukasiewicz în 1920. În acest capitol prezentăm axiomatizarea logicii propoziționale trivalente dată de Wajsberg în 1931. Pentru o tratare mai detaliată se poate consulta [BFGR].

#### 3.1 Sintaxa și Semantica

##### 3.1.1 Sintaxa

Limbajul logicii propoziționale trivalente este format din:

- (i) o mulțime numărabilă  $V$  de *variabile propoziționale*,
- (ii) conectorii logici:  $\neg, \rightarrow$ ,
- (vii) parantezele:  $(, ), [, ]$ .

Mulțimea  $E$  a *enunțurilor* este cea mai mică mulțime care satisface următoarele proprietăți:

- (i) dacă  $p$  este variabilă propozițională, atunci  $p \in E$ ,
- (ii) dacă  $p$  și  $q$  sunt în  $E$ , atunci  $\neg p, p \rightarrow q \in E$ .

Definim următoarele abrevieri:

$$p \vee q := ((p \rightarrow q) \rightarrow q),$$

$$p \wedge q := \neg(\neg p \vee \neg q),$$

$$p \leftrightarrow q := (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p),$$

$$p + q := \neg p \rightarrow q,$$

$$p \cdot q := \neg(\neg p + \neg q),$$

$$\tilde{p} := p \rightarrow \neg p,$$

$$f = \neg(p_0 \rightarrow p_0), \text{ unde } p_0 \text{ este un enunț fixat.}$$

Scriem  $pq$  în loc de  $p \cdot q$  și  $p^2$  în loc de  $p \cdot p$ .

Printr-o *logică propozițională trivalentă* înțelegem orice mulțime  $\mathcal{L}$  de enunțuri care satisface următoarele condiții:

- (i)  $\mathcal{L}$  conține orice enunțuri de forma

$$(A0) \quad p \rightarrow (q \rightarrow p),$$

$$(A1) \quad (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)),$$

$$(A2) \quad ((p \rightarrow \neg p) \rightarrow p) \rightarrow p,$$

$$(A3) \quad (\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p),$$

(ii)  $\mathcal{L}$  este închisă la *modus ponens*,

(iii)  $\mathcal{L}$  este închisă la *substituție*.

Fie  $\Sigma$  o mulțime de enunțuri și  $p$  un enunț. O *demonstrație a lui  $p$  din  $\Sigma$*  este un șir finit de enunțuri  $p_0, \dots, p_{n-1} = p$  astfel încât pentru orice  $i \leq n - 1$  avem una din următoarele posibilități:

(a)  $p_i$  este o instanță a uneia din axiomele (A0) – (A3),

(b)  $p_i \in \Sigma$ ,

(c) există  $j, k < i$  astfel încât  $p_k$  este enunțul  $p_j \rightarrow p_i$ .

Spunem că un enunț  $p$  este *deductibil în logica  $\mathcal{L}$  din  $\Sigma$*  (și scriem  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} p$ ) dacă există o demonstrație a lui  $p$  din  $\Sigma$ . Dacă  $p, q$  sunt enunțuri astfel încât  $\{q\} \vdash_{\mathcal{L}} p$ , scriem simplu  $q \vdash_{\mathcal{L}} p$ .

Scriem  $\vdash_{\mathcal{L}} p$  pentru  $\emptyset \vdash_{\mathcal{L}} p$ . Un enunț  $p \in E$  se numește *teoremă a lui  $\mathcal{L}$*  dacă  $\vdash_{\mathcal{L}} p$ . Se observă imediat că  $p$  este teoremă a lui  $\mathcal{L}$  dacă și numai dacă  $p \in \mathcal{L}$ .

Spunem că o mulțime de enunțuri  $\Sigma$  este  *$\mathcal{L}$ -consistentă* dacă nu există nici un enunț  $p$  astfel încât  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} p$  și  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \neg p$ . Mulțimea  $\Sigma$  se numește  *$\mathcal{L}$ -inconsistentă* dacă nu este  $\mathcal{L}$ -consistentă. O mulțime  $\mathcal{L}$ -consistentă  $\Sigma$  se numește *maximal  $\mathcal{L}$ -consistentă* dacă pentru orice enunț  $p$ ,

$\Sigma \cup \{p\}$  este  $\mathcal{L}$ -consistentă implică  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} p$ .

Este evident că intersecția oricărei clase de logici propoziționale trivalente este de asemenea o logică propozițională trivalentă. Notăm cu  $\mathbf{W}$  intersecția tuturor logicilor propoziționale trivalente.

În continuare dăm câteva proprietăți sintactice ale lui  $\mathbf{W}$ .

**Lema 3.1.1** Următoarele enunțuri sunt teoreme ale lui  $\mathbf{W}$ :

(t1)  $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ ,

(t2)  $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$ ,

(t3)  $(\tilde{p} \rightarrow p) \rightarrow p$ ,

(t4)  $p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow p))$ ,

(t5)  $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$

(t6)  $(q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$ ,

(t7)  $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow r))$ ,

(t8)  $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$ ,

(t9)  $\neg\neg p \leftrightarrow p$ ,

- (t10)  $(\neg p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow (q \rightarrow p)$ ,
- (t11)  $p \rightarrow p$ ,
- (t12)  $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow p$ ,
- (t13)  $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg q$ ,
- (t14)  $p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg(p \rightarrow q))$ ,
- (t15)  $\tilde{p} \rightarrow p$ ,
- (t16)  $(p \rightarrow \tilde{p}) \rightarrow \tilde{p}$ ,
- (t17)  $\tilde{p} \rightarrow (\tilde{\neg}q \rightarrow (p \rightarrow q))$ ,
- (t18)  $(p \wedge (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \wedge r)$ ,
- (t19)  $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$ ,
- (t20)  $(p \wedge q) \rightarrow p$ ,
- (t21)  $(p \vee (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \vee r)$ ,
- (t22)  $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$ ,
- (t23)  $p \rightarrow (p \vee q)$ ,
- (t24)  $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r)$ ,
- (t25)  $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee r) \rightarrow (q \vee r)$ ,
- (t26)  $p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$ ,
- (t27)  $\neg(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$ ,
- (t28)  $q \rightarrow (\neg(p \wedge q) \rightarrow \neg p)$ ,
- (t29)  $(pq) \leftrightarrow (qp)$ ,
- (t30)  $((pq)r) \leftrightarrow (p(qr))$ ,
- (t31)  $(p \rightarrow q) \rightarrow (pr \rightarrow qr)$ ,
- (t32)  $pq \rightarrow p$ ,
- (t33)  $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \leftrightarrow (pq \rightarrow r)$ ,
- (t34)  $(p \vee q) \rightarrow (p + q)$ .

**Demonstrație:** [BFGR], lema 1.5, pag. 461, lema 1.6, pag. 465; [O2], pag. 371; [O1], pag. 346.  $\square$

**Lema 3.1.2** Fie  $\Sigma$  o mulțime de enunțuri și  $p, q \in E$ .

(i) Dacă  $\Sigma \vdash_{\mathbf{W}} p$ , atunci  $\Sigma' \vdash_{\mathbf{W}} p$  pentru orice mulțime de enunțuri  $\Sigma'$  care include  $\Sigma$ .

(ii) Dacă  $\Sigma \vdash_{\mathbf{W}} p$ , atunci există o submulțime finită  $\Sigma'$  a lui  $\Sigma$  astfel încât  $\Sigma' \vdash_{\mathbf{W}} p$ .

- (iii) Dacă  $\Sigma \vdash_{\mathbf{W}} p$  și  $\Sigma \vdash_{\mathbf{W}} p \rightarrow q$ , atunci  $\Sigma \vdash_{\mathbf{W}} q$ .
- (iv) Dacă  $\Sigma \cup \{p\} \vdash_{\mathbf{W}} q$ , atunci  $\Sigma \vdash_{\mathbf{W}} p \rightarrow (p \rightarrow q)$ .
- (v) Dacă  $\Sigma$  este  $\mathcal{L}$ -inconsistentă, atunci  $\Sigma \vdash_{\mathbf{W}} r$  pentru orice enunț  $r$ .
- (vi)  $\Sigma$  este  $\mathcal{L}$ -inconsistentă dacă și numai dacă  $\Sigma \vdash_{\mathbf{W}} f$ .
- (vii) Dacă  $\Sigma \cup \{p\}$  este  $\mathcal{L}$ -inconsistentă, atunci  $\Sigma \vdash_{\mathbf{W}} \tilde{p}$ .
- (viii) Dacă  $\Sigma \cup \{\tilde{p}\}$  este  $\mathcal{L}$ -inconsistentă, atunci  $\Sigma \vdash_{\mathbf{W}} p$ .

**Demonstrație:** [BFGR], lema 1.7, pag. 465.  $\square$

### 3.1.2 Semantica

Enunțurile logicii propoziționale trivalente sunt interpretate în  $L_3 = \langle \{0, \frac{1}{2}, 1\}, \neg, \rightarrow \rangle$ , unde  $\neg$  și  $\rightarrow$  sunt definite în modul următor:

$x \backslash y$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
1	0	$\frac{1}{2}$	1

$x$	$\neg x$
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0

$$x \rightarrow y$$

O *interpretare* a lui  $\mathbf{W}$  este o funcție  $v : E \rightarrow L_3$  care satisface:

- (a)  $v(\neg p) = \neg v(p)$ ,
- (b)  $v(p \rightarrow q) = v(p) \rightarrow v(q)$ ,

pentru orice  $p, q \in E$ .

Există o corespondență bijectivă între mulțimea interpretărilor lui  $\mathbf{W}$  și mulțimea funcțiilor definite pe  $V$  cu valori în  $L_3$ . Prin urmare, pentru a da o interpretare  $v$  este suficient să definim  $v$  pe  $V$ .

Fie  $\Sigma$  o mulțime de enunțuri și  $p$  un enunț. Definim:

- $p$  este *valid* și scriem  $\models p$  dacă  $v(p) = 1$  pentru orice interpretare  $v$ ,
- $\Sigma$  este *realizabilă* dacă există o interpretare  $v$  astfel încât  $v(p) = 1$  pentru orice  $p \in \Sigma$ .

Dacă  $v(p) = 1$  pentru orice interpretare  $v$  astfel încât  $v(\Sigma) = \{1\}$ , atunci scriem  $\Sigma \models p$ .

## 3.2 Teorema de completitudine

**Propoziția 3.2.1** Orice mulțime  $\mathbf{W}$ -consistentă  $\Sigma$  este realizabilă.

**Demonstrație:** Deoarece mulțimea  $V$  a variabilelor propoziționale este numărabilă, rezultă că mulțimea  $E$  a enunțurilor este numărabilă. Fie  $p_0, \dots, p_n, \dots$  o enumerare a enunțurilor. Definim inductiv următorul șir de mulțimi:

$$\Sigma_0 = \Sigma, \quad \Sigma_{n+1} = \begin{cases} \Sigma_n \cup \{p_n\} & \text{dacă } \Sigma_n \cup \{p_n\} \text{ este } \mathbf{W}\text{-consistentă} \\ \Sigma_n & \text{altfel} \end{cases}$$

Evident, pentru orice  $n \in \mathbf{N}$ ,  $\Sigma_n$  este  $\mathbf{W}$ -consistentă.

Fie  $\bar{\Sigma} = \bigcup_{n \geq 0} \Sigma_n$ .

Folosind Lema 3.1.2.(ii), obținem că  $\bar{\Sigma}$  este  $\mathbf{W}$ -consistentă: dacă există un enunț  $p$  astfel încât  $\bar{\Sigma} \vdash_{\mathbf{W}} p$  și  $\bar{\Sigma} \vdash_{\mathbf{W}} \neg p$ , atunci există un  $n \in \mathbf{N}$  suficient de mare astfel încât  $\Sigma_n \vdash_{\mathbf{W}} p$  și  $\Sigma_n \vdash_{\mathbf{W}} \neg p$ , ceea ce contrazice faptul că  $\Sigma_n$  este  $\mathbf{W}$ -consistentă. Demonstrăm că  $\bar{\Sigma}$  este maximal  $\mathbf{W}$ -consistentă. Presupunem că există un enunț  $p_i$  astfel încât  $\bar{\Sigma} \cup \{p_i\}$  este  $\mathbf{W}$ -consistentă și nu avem  $\bar{\Sigma} \vdash_{\mathbf{W}} p_i$ . Rezultă că  $p_i \notin \bar{\Sigma}$ , deci  $\Sigma_i \cup \{p_i\}$  este  $\mathbf{W}$ -inconsistentă. Deoarece  $\Sigma_i \cup \{p_i\} \subseteq \bar{\Sigma} \cup \{p_i\}$ , rezultă că  $\bar{\Sigma} \cup \{p_i\}$  este  $\mathbf{W}$ -inconsistentă, ceea ce este o contradicție. Prin urmare,  $\bar{\Sigma}$  este maximal  $\mathbf{W}$ -consistentă.

Fie  $v$  următoarea interpretare:

$$v(p) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } \bar{\Sigma} \vdash_{\mathbf{W}} p \\ 0, & \text{dacă } \bar{\Sigma} \vdash_{\mathbf{W}} \neg p \\ \frac{1}{2}, & \text{altfel} \end{cases}$$

pentru orice variabilă propozițională  $p$ .

Demonstrăm prin inducție că pentru orice enunț  $p$ :

- (i)  $\bar{\Sigma} \vdash_{\mathbf{W}} p$  implică  $v(p) = 1$ ,
- (ii)  $\bar{\Sigma} \vdash_{\mathbf{W}} \neg p$  implică  $v(p) = 0$ ,
- (iii) dacă nici  $\bar{\Sigma} \vdash_{\mathbf{W}} p$ , nici  $\bar{\Sigma} \vdash_{\mathbf{W}} \neg p$ , atunci  $v(p) = \frac{1}{2}$ .

$\neg p$  este variabilă propozițională

Rezultă imediat din definiția lui  $v$ .

$\neg p$  este  $\neg q$

- (i) Dacă  $\bar{\Sigma} \vdash_{\mathbf{W}} \neg q$ , atunci din ipoteza de inducție pentru  $q$  obținem  $v(q) = 0$ , deci

$v(p) = \neg v(q) = 1$ .

(ii) Dacă  $\bar{\Sigma} \vdash_{\mathbf{W}} \neg\neg q$ , atunci, din (t9) obținem  $\bar{\Sigma} \vdash_{\mathbf{W}} q$ , deci, din ipoteza de inducție  $v(q) = 1$ . Rezultă că  $v(p) = \neg v(q) = 0$ .

(iii) Dacă nu avem nici  $\bar{\Sigma} \vdash_{\mathbf{W}} \neg q$ , nici  $\bar{\Sigma} \vdash_{\mathbf{W}} \neg\neg q$ , atunci aplicăm (t9) pentru a obține că nu avem  $\bar{\Sigma} \vdash_{\mathbf{W}} q$ . Din ipoteza de inducție pentru  $q$  rezultă  $v(q) = \frac{1}{2}$ . Prin urmare,  $v(p) = \neg v(q) = \frac{1}{2}$ .

- $p$  este  $q \rightarrow r$

(i) Avem următoarele cazuri posibile:

(i1)  $\bar{\Sigma} \vdash_{\mathbf{W}} q$ . Din  $\bar{\Sigma} \vdash_{\mathbf{W}} q \rightarrow r$  obținem  $\bar{\Sigma} \vdash_{\mathbf{W}} r$ . Din ipoteza de inducție pentru  $q$  și  $r$  rezultă  $v(q) = 1$  și  $v(r) = 1$ . Obținem  $v(q \rightarrow r) = 1 \rightarrow 1 = 1$ ,

(i2)  $\bar{\Sigma} \vdash_{\mathbf{W}} \neg q$ . Din ipoteza de inducție pentru  $q$ , obținem  $v(q) = 0$ . Rezultă  $v(q \rightarrow r) = 0 \rightarrow v(r) = 1$ ,

(i3)  $\bar{\Sigma} \vdash_{\mathbf{W}} r$ . Din ipoteza de inducție pentru  $r$  rezultă că  $v(r) = 1$ , deci  $v(q \rightarrow r) = 1$ ,

(i4)  $\bar{\Sigma} \vdash_{\mathbf{W}} \neg r$ . Folosind  $\bar{\Sigma} \vdash_{\mathbf{W}} q \rightarrow r$  și (t10) rezultă că  $\bar{\Sigma} \vdash_{\mathbf{W}} \neg q$ . Obținem, din ipoteza de inducție, că  $v(q) = v(r) = 0$ . Prin urmare,  $v(q \rightarrow r) = 1$ ,

(i5) Nici unul din enunțurile  $q, \neg q, r, \neg r$  nu este deductibil din  $\bar{\Sigma}$ . Din ipoteza de inducție pentru  $q$  și  $r$  obținem  $v(q) = v(r) = \frac{1}{2}$ . Prin urmare,  $v(q \rightarrow r) = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} = 1$ .

(ii) Din  $\bar{\Sigma} \vdash_{\mathbf{W}} \neg(q \rightarrow r)$ , (t12) și (t13) rezultă  $\bar{\Sigma} \vdash_{\mathbf{W}} q$  și  $\bar{\Sigma} \vdash_{\mathbf{W}} \neg r$ . Din ipoteza de inducție, obținem  $v(q) = 1$  și  $v(r) = 0$ . Prin urmare,  $v(q \rightarrow r) = 1 \rightarrow 0 = 0$ .

(iii) Presupunem că nu avem nici  $\bar{\Sigma} \vdash_{\mathbf{W}} q \rightarrow r$ , nici  $\bar{\Sigma} \vdash_{\mathbf{W}} \neg(q \rightarrow r)$ . Observăm că  $v(q) \neq 0$ , deoarece  $v(q) = 0$  implică  $\bar{\Sigma} \vdash_{\mathbf{W}} \neg q$  și, folosind (t8), rezultă  $\bar{\Sigma} \vdash_{\mathbf{W}} q \rightarrow r$ . De asemenea,  $v(r) \neq 1$ , deoarece  $v(r) = 1$  implică  $\bar{\Sigma} \vdash_{\mathbf{W}} r$  și, din (t1),  $\bar{\Sigma} \vdash_{\mathbf{W}} q \rightarrow r$ . Avem următoarele cazuri:

(iii1)  $v(q) = 1$ . Prin urmare,  $\bar{\Sigma} \vdash_{\mathbf{W}} q$ . Atunci  $v(r) \neq 0$ , deoarece  $v(r) = 0$  implică  $\bar{\Sigma} \vdash_{\mathbf{W}} \neg r$ . Folosind (t14) rezultă  $\bar{\Sigma} \vdash_{\mathbf{W}} \neg(q \rightarrow r)$ . Deci,  $v(q) = 1$  și  $v(r) = \frac{1}{2}$ . Rezultă  $v(q \rightarrow r) = 1 \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ .

(iii2)  $v(q) = \frac{1}{2}$ . Rezultă că nu avem  $\bar{\Sigma} \vdash_{\mathbf{W}} q$ . Din faptul că  $\bar{\Sigma}$  este maximal  $\mathbf{W}$ -consistentă obținem că  $\bar{\Sigma} \cup \{q\}$  este  $\mathbf{W}$ -inconsistentă. Din Lema 3.1.2.(vii) rezultă că  $\bar{\Sigma} \vdash_{\mathbf{W}} \tilde{p}$ . Dacă  $v(r) = \frac{1}{2}$ , atunci nu avem  $\bar{\Sigma} \vdash_{\mathbf{W}} \neg r$ , deci,  $\bar{\Sigma} \vdash_{\mathbf{W}} \tilde{r}$ . Aplicând (t17) obținem  $\bar{\Sigma} \vdash_{\mathbf{W}} q \rightarrow r$ . Deci,  $v(r) \neq \frac{1}{2}$ . Din  $v(q) = \frac{1}{2}$  și  $v(r) = 0$  rezultă

$$v(q \rightarrow r) = \frac{1}{2} \rightarrow 0 = \frac{1}{2}.$$

Din (i) și  $\Sigma \subseteq \bar{\Sigma}$  rezultă că  $v(p) = 1$  pentru orice  $p \in \Sigma$ . Prin urmare,  $\Sigma$  este realizabilă.  $\square$

Această propoziție are două consecințe importante.

**Teorema 3.2.2 (Teorema de completitudine extinsă)[WM]** Pentru orice mulțime de enunțuri  $\Sigma$  și orice enunț  $p$ ,

$$\Sigma \vdash_{\mathbf{W}} p \text{ dacă și numai dacă } \Sigma \models p.$$

**Demonstrație:** ( $\Leftarrow$ ) Dacă  $\Sigma \models p$ , atunci  $\Sigma \cup \{\tilde{p}\}$  nu este realizabilă, deoarece  $v(\Sigma) = \{1\}$  implică  $v(p) = 1$ , deci  $v(\tilde{p}) = v(p) \rightarrow v(\neg p) = 1 \rightarrow 0 = 0$ . Din Propoziția 3.2.1 rezultă că  $\Sigma \cup \{\tilde{p}\}$  este  $\mathbf{W}$ -inconsistentă. Aplicând Lema 3.1.2.(viii) obținem  $\Sigma \vdash_{\mathbf{W}} p$ .

( $\Rightarrow$ ) Fie  $v$  o interpretare astfel încât  $v(\Sigma) = \{1\}$  și  $p_0, \dots, p_{n-1} = p$  o demonstrație a lui  $p$  din  $\Sigma$ . Demonstrăm prin inducție că  $v(p_i) = 1$  pentru orice  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ .

$\square$

**Teorema 3.2.3 (Teorema de completitudine a lui Wajsberg)** Pentru orice enunț  $p$ ,

$$\vdash_{\mathbf{W}} p \text{ dacă și numai dacă } \models p.$$

## 4 Logica dinamică propozițională

În acest capitol este prezentat sistemul logicii dinamice propoziționale (**PDL**), având ca punct de plecare [S], [H1], [H2]. După definirea sintaxei și semanticii **PDL** sunt detaliate demonstrațiile lui K. Segerberg și D. Harel pentru teorema de completitudine. Se observă că definirea structurilor corespunzătoare **PDL** este inspirată din modelele Kripke pentru logicile modale propoziționale. În demonstrația lui K. Segerberg este folosită o metodă standard în logica modală și anume, tehnica bazată pe modele canonice și filtrare. Demonstrația lui D. Harel are un caracter constructiv.

### 4.1 Limbajul, sintaxa și semantica

#### 4.1.1 Limbajul

Limbajul logicii dinamice propoziționale este format din:

- (i) o mulțime numărabilă  $\Phi_0$  de *variabile propoziționale*,
- (ii) o mulțime numărabilă  $\Pi_0$  de *programe atomice*,
- (iii) conectorii calculului propozițional:  $\neg, \rightarrow$ ,
- (iv) operatorul  $[ ]$ ,
- (v) operatorii program:  $\cup, \cdot, *$ ,
- (vi) operatorul  $?$ ,
- (vii) parantezele:  $(, ), [, ]$ .

Notăm cu  $p, q, r, \dots$  elementele lui  $\Phi_0$  și cu  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  elementele lui  $\Pi_0$ . Din  $\Phi_0$  și  $\Pi_0$  construim recursiv mulțimea  $\Phi$  a *enunțurilor* și mulțimea  $\Pi$  a *programelor compuse*:

- (i)  $\Phi_0 \subseteq \Phi$ ,
- (ii) dacă  $p \in \Phi$  și  $q \in \Phi$ , atunci  $\neg p$  și  $(p \rightarrow q) \in \Phi$ ,
- (iii) dacă  $p \in \Phi$  și  $\alpha \in \Pi$ , atunci  $[\alpha]p \in \Phi$ ,
- (iv)  $\Pi_0 \subseteq \Pi$ ,
- (v) dacă  $\alpha \in \Pi$  și  $\beta \in \Pi$ , atunci  $\alpha \cup \beta, \alpha \cdot \beta$  și  $\alpha^* \in \Pi$ ,
- (vi) dacă  $p \in \Phi$ , atunci  $p? \in \Pi$ .

Deci, pentru fiecare program compus  $\alpha$  există un operator propozițional unar  $[\alpha]$ . Operatorul propozițional unar  $\langle \alpha \rangle$  se introduce prin următoarea abreviere:

$$\langle \alpha \rangle p := \neg[\alpha]\neg p.$$

În cele ce urmează folosim abrevierile standard din calculul propozițional:  $\vee, \wedge$  și  $\leftrightarrow$ .

De asemenea, scriem  $\alpha\beta$  în loc de  $\alpha \cdot \beta$ .

Definim

$$\begin{aligned} [\alpha]^0 p &:= p, \\ [\alpha]^{n+1} p &:= [\alpha]([\alpha]^n p). \end{aligned}$$

#### 4.1.2 Sintaxa

Printr-o *logică* peste limbajul dat înțelegem orice mulțime  $\mathcal{L}$  de enunțuri care satisface următoarele condiții:

- (i)  $\mathcal{L}$  conține toate tautologiile calculului propozițional,
- (ii)  $\mathcal{L}$  este închisă la *modus ponens*,
- (iii)  $\mathcal{L}$  este închisă la *substituție*.

Printr-o *logică normală* înțelegem o logică  $\mathcal{L}$  care satisface următoarele condiții:

- (iv)  $\mathcal{L}$  conține orice enunț de forma
- (A0)  $[\alpha](p \rightarrow q) \rightarrow ([\alpha]p \rightarrow [\alpha]q)$ ,
- (v)  $\mathcal{L}$  este închisă la  $\alpha$ -necesitate, pentru orice  $\alpha \in \Pi$ : dacă  $p \in \mathcal{L}$ , atunci  $[\alpha]p \in \mathcal{L}$ .

Printr-o *logică dinamică* înțelegem o logică normală care conține toate enunțurile de următoarea formă:

- (A1a)  $[\alpha \cup \beta]p \rightarrow [\alpha]p$ ,
- (A1b)  $[\alpha \cup \beta]p \rightarrow [\beta]p$ ,
- (A1c)  $[\alpha]p \rightarrow ([\beta]p \rightarrow [\alpha \cup \beta]p)$ ,
- (A2a)  $[\alpha\beta]p \rightarrow [\alpha][\beta]p$ ,
- (A2b)  $[\alpha][\beta]p \rightarrow [\alpha\beta]p$ ,
- (A3a)  $[\alpha^*]p \rightarrow p$ ,
- (A3b)  $[\alpha^*]p \rightarrow [\alpha]p$ ,
- (A3c)  $[\alpha^*]p \rightarrow [\alpha^*][\alpha^*]p$ ,
- (A4)  $[p?]q \leftrightarrow (p \rightarrow q)$ ,
- (A5)  $p \rightarrow ([\alpha^*](p \rightarrow [\alpha]p) \rightarrow [\alpha^*]p)$ .

Se observă că  $[\alpha^*]$  este o modalitate *S4*.

Dacă folosim conectorii derivați, atunci (A1a - c) pot fi înlocuite printr-o singură schemă

$$(A1) \quad [\alpha \cup \beta]p \leftrightarrow ([\alpha]p \wedge [\beta]p),$$

(A2a, b) prin schema

$$(A2) \quad [\alpha\beta]p \leftrightarrow [\alpha][\beta]p$$

și (A3a - c) prin schema

$$(A3) \quad [\alpha^*]p \leftrightarrow (p \wedge [\alpha][\alpha^*]p).$$

O importanță deosebită are schema (A5), care se numește și *schema inducției*.

Spunem că un enunț  $p$  este *deductibil în logica  $\mathcal{L}$  dintr-o mulțime de enunțuri  $\Sigma$*  (și scriem  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} p$ ) dacă există un număr finit de enunțuri  $q_0, \dots, q_{n-1} \in \Sigma$  astfel încât

$$(q_0 \wedge \dots \wedge q_{n-1}) \rightarrow p \in \mathcal{L}.$$

Scriem  $\vdash_{\mathcal{L}} p$  pentru  $\emptyset \vdash_{\mathcal{L}} p$ . Un enunț  $p \in \Phi$  se numește *teoremă a lui  $\mathcal{L}$*  dacă  $\vdash_{\mathcal{L}} p$ .

Se observă imediat că  $p$  este teoremă a lui  $\mathcal{L}$  dacă și numai dacă  $p \in \mathcal{L}$ .

Spunem că o mulțime de enunțuri  $\Sigma$  este  *$\mathcal{L}$ -consistentă* dacă există enunțuri care nu sunt deductibile în  $\mathcal{L}$  din  $\Sigma$ . O mulțime  $\mathcal{L}$ -consistentă  $\Sigma$  se numește *maximal  $\mathcal{L}$ -consistentă* dacă pentru orice enunț  $p$ ,

$$\Sigma \cup \{p\} \text{ este } \mathcal{L}\text{-consistentă implică } p \in \Sigma.$$

Proprietățile mulțimilor  $\mathcal{L}$ -consistente și maximal  $\mathcal{L}$ -consistente prezentate în primul capitol pentru logica modală propozițională sunt valabile și în orice logică normală.

Demonstrațiile acestor proprietăți sunt imediate.

În continuare prezentăm alte proprietăți sintactice.

**Lema 4.1.1** Dacă  $\mathcal{L}$  este o logică normală, atunci pentru orice program compus  $\alpha$  și orice enunțuri  $p, q \in \Phi$

$$(A6) \quad \vdash_{\mathcal{L}} [\alpha](p \wedge q) \leftrightarrow ([\alpha]p \wedge [\alpha]q),$$

$$(A7) \quad \vdash_{\mathcal{L}} \langle \alpha \rangle (p \vee q) \leftrightarrow (\langle \alpha \rangle p \vee \langle \alpha \rangle q).$$

**Demonstrație:** Din  $\vdash_{\mathcal{L}} p \wedge q \rightarrow p$  și  $\vdash_{\mathcal{L}} p \wedge q \rightarrow q$ , aplicând  $\alpha$ -necesitatea și (A0) obținem  $\vdash_{\mathcal{L}} [\alpha](p \wedge q) \rightarrow [\alpha]p$  și  $\vdash_{\mathcal{L}} [\alpha](p \wedge q) \rightarrow [\alpha]q$ . Prin urmare,

$$(1) \quad \vdash_{\mathcal{L}} [\alpha](p \wedge q) \rightarrow ([\alpha]p \wedge [\alpha]q).$$

Din  $\vdash_{\mathcal{L}} p \rightarrow (q \rightarrow p \wedge q)$ , aplicând  $\alpha$ -necesitatea și (A0) obținem

$$(2) \quad \vdash_{\mathcal{L}} [\alpha]p \rightarrow [\alpha](q \rightarrow p \wedge q).$$

Folosind (A0) rezultă

$$(3) \quad \vdash_{\mathcal{L}} [\alpha](q \rightarrow p \wedge q) \rightarrow ([\alpha]q \rightarrow [\alpha](p \wedge q)).$$

Din (2), (3) și  $\vdash_{\mathcal{L}} (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$  obținem

$$(4) \quad \vdash_{\mathcal{L}} [\alpha]p \rightarrow ([\alpha]q \rightarrow [\alpha]p \wedge q).$$

Din (4) și  $\vdash_{\mathcal{L}} (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \leftrightarrow (p \wedge q \rightarrow r)$  rezultă

$$(5) \quad \vdash_{\mathcal{L}} [\alpha]p \wedge [\alpha]q \rightarrow [\alpha](p \wedge q).$$

Din (1) și (5) obținem (A6).

(A7) se demonstrează imediat din (A6).  $\square$

**Lema 4.1.2** Dacă  $\mathcal{L}$  este o logică dinamică, atunci pentru orice program compus  $\alpha$  și orice enunțuri  $p, q \in \Phi$

$$(A8) \quad \vdash_{\mathcal{L}} \langle \alpha \cup \beta \rangle p \leftrightarrow (\langle \alpha \rangle p \vee \langle \beta \rangle p),$$

$$(A9) \quad \vdash_{\mathcal{L}} \langle \alpha \beta \rangle p \leftrightarrow \langle \alpha \rangle \langle \beta \rangle p,$$

$$(A10) \quad \vdash_{\mathcal{L}} \langle \alpha^* \rangle p \leftrightarrow (p \vee \langle \alpha \rangle \langle \alpha^* \rangle p),$$

$$(A11) \quad \vdash_{\mathcal{L}} \langle p? \rangle q \leftrightarrow (p \wedge q),$$

$$(A12) \quad \vdash_{\mathcal{L}} [\alpha^*](p \rightarrow [\alpha]p) \rightarrow (p \rightarrow [\alpha^*]p),$$

$$(I) \quad \text{Dacă } \vdash_{\mathcal{L}} p \rightarrow [\alpha]p, \text{ atunci } \vdash_{\mathcal{L}} p \rightarrow [\alpha^*]p,$$

$$(D) \quad \text{Dacă } \vdash_{\mathcal{L}} p \rightarrow q, \text{ atunci } \vdash_{\mathcal{L}} [\alpha]p \rightarrow [\alpha]q,$$

$$(D') \quad \text{Dacă } \vdash_{\mathcal{L}} p \rightarrow q, \text{ atunci } \vdash_{\mathcal{L}} \langle \alpha \rangle p \rightarrow \langle \alpha \rangle q.$$

**Demonstrație:** Schemele (A8) – (A10) rezultă imediat din (A1) – (A3). Din (A4) obținem  $\vdash_{\mathcal{L}} [p?]\neg q \leftrightarrow (p \rightarrow \neg q)$ , deci  $\vdash_{\mathcal{L}} \langle p? \rangle q \leftrightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)$ , de unde rezultă (A11). Pentru a obține (A12), folosim (A5) și  $\vdash_{\mathcal{L}} (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$ . Pentru a demonstra (D) se aplică (A0). Din (D) rezultă imediat (D'). Demonstrăm în continuare (I). Din  $\vdash_{\mathcal{L}} p \rightarrow [\alpha]p$ , aplicând  $\alpha^*$ -necesitatea și (A12), obținem  $\vdash_{\mathcal{L}} p \rightarrow [\alpha^*]p$ .  $\square$

Este evident că intersecția oricărei clase de logici dinamice este o logică dinamică. Notăm cu **PDL** intersecția tuturor logicilor dinamice.

### 4.1.3 Semantica

Printr-o *structură* înțelegem un triplet  $\mathcal{D} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{V} \rangle$ , unde:

(i)  $\mathcal{W}$  este o mulțime,

(ii)  $\mathcal{R} = \{R(\alpha)\}_{\alpha \in \Pi}$  este o familie de relații binare pe  $\mathcal{W}$ , adică  $R(\alpha) \subseteq \mathcal{W} \times \mathcal{W}$

pentru orice program compus  $\alpha$ ,

(iii)  $V : \Phi \times \mathcal{W} \rightarrow L_2 = \{0, 1\}$  este o funcție care satisface:

$$(a) \quad V(\neg p, s) = \neg V(p, s),$$

$$(b) \quad V(p \rightarrow q, s) = V(p, s) \rightarrow V(q, s),$$

$$(c) \quad V([\alpha]p, s) = \bigwedge \{V(p, t) \mid sR(\alpha)t\},$$

pentru orice  $p, q \in \Phi, s \in \mathcal{W}$  și  $\alpha \in \Pi$ .

Mulțimea  $W$  se numește *domeniul* structurii, iar elementele sale se numesc *stări*. Pentru orice  $\alpha \in \Pi$ ,  $R(\alpha)$  se numește *relația de accesibilitate* corespunzătoare lui  $\alpha$ . Faptul că  $sR(\alpha)t$  poate fi interpretat în modul următor: execuția lui  $\alpha$  poate conduce de la starea  $s$  la starea  $t$ . Funcția  $V$  se numește *valuarea* structurii.

În definiția valuării  $V$  trebuie să se facă distincție între enunțul  $\neg p$  și  $\neg V(p, s)$ , care este element al algebrei Boole  $L_2$ .

Următoarele proprietăți ale unei valuări  $V$  sunt consecințe imediate ale definiției:

- (d)  $V(p \vee q, s) = V(p, s) \vee V(q, s)$ ,
- (e)  $V(p \wedge q, s) = V(p, s) \wedge V(q, s)$ ,
- (f)  $V(p \leftrightarrow q, s) = V(p, s) \leftrightarrow V(q, s)$ ,
- (g)  $V(\langle \alpha \rangle p, s) = \bigvee \{V(p, t) \mid sR(\alpha)t\}$ ,

pentru orice  $p, q \in \Phi$ ,  $s \in W$  și  $\alpha \in \Pi$ .

În continuare punem în evidență modul în care se construiesc valuările. Dacă  $v : \Phi_0 \times W \rightarrow L_2$  este o funcție oarecare, atunci există și este unică o funcție  $V : \Phi \times W \rightarrow L_2$  cu proprietățile:

- $V(p, s) = v(p, s)$  pentru orice  $p \in \Phi_0$  și  $s \in W$ ,
- $V(\neg p, s) = \neg V(p, s)$ ,
- $V(p \rightarrow q, s) = V(p, s) \rightarrow V(q, s)$ ,
- $V([\alpha]p, s) = \bigwedge \{V(p, t) \mid sR(\alpha)t\}$ .

Aceste relații arată modul recursiv în care este definită  $V$ .

Se numește *structură dinamică* o structură  $\mathcal{D} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{V} \rangle$  care satisface următoarele:

- (i)  $R(p?) = \{(s, s) \mid V(p, s) = 1\}$ ,
- (ii)  $R(\alpha \cup \beta) = R(\alpha) \cup R(\beta)$ ,
- (iii)  $R(\alpha\beta) = R(\alpha) \circ R(\beta)$ ,
- (iv)  $R(\alpha^*) = (R(\alpha))^*$ .

În (iii)  $(R(\alpha))^*$  reprezintă închiderea reflexivă și tranzitivă a relației  $R(\alpha)$ .

Observăm că în cazul unei structuri dinamice este suficient să definim  $R(\alpha)$  pentru orice  $\alpha \in \Pi_0$ .

Fie  $\mathcal{D} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{V} \rangle$  o structură și  $p$  un enunț. Definim:

- $p$  este *adevărat în starea*  $s \in W$  și scriem  $\mathcal{D}, s \models p$  dacă  $V(p, s) = 1$ ,
- $p$  este  *$\mathcal{D}$ -valid* și scriem  $\mathcal{D} \models p$  dacă  $\mathcal{D}, s \models p$  pentru orice stare  $s \in W$ ,
- $p$  este  *$\mathcal{D}$ -realizabil* dacă există  $s \in W$  astfel încât  $\mathcal{D}, s \models p$ .

Dacă  $p$  este  $\mathcal{D}$ -valid pentru orice structură dinamică  $\mathcal{D}$  spunem că  $p$  este *valid* și

scriem  $\models p$ . Enunțul  $p$  este *realizabil* dacă există o structură dinamică  $\mathcal{D}$  astfel încât  $p$  este  $\mathcal{D}$ -realizabil. Evident,  $p$  este valid dacă și numai dacă  $\neg p$  nu este realizabil.

## 4.2 Teorema de completitudine

În acest paragraf se demonstrează teorema de completitudine pentru logica **PDL**.

**Teorema 4.2.1** Pentru orice enunț  $p$ ,

$$\vdash_{\mathbf{PDL}} p \text{ dacă și numai dacă } \models p.$$

O implicație a acestui rezultat este ușor de stabilit: faptul că orice teoremă a lui **PDL** este validă se demonstrează arătând că toate tautologiile și toate instanțele schemelor ( $A0 - A5$ ) au această proprietate și că *modus ponens* și  $\alpha$ -necesitatea o păstrează.

În cele ce urmează demonstrăm implicația inversă: orice enunț valid este teoremă a lui **PDL**.

### 4.2.1 Demonstrația lui K. Segerberg

Demonstrația prezentată în continuare extinde demonstrația teoremei de completitudine dată de K. Segerberg ([S]) prin includerea operatorului  $?$ . Teorema de filtrare este rezultatul principal pe care se bazează demonstrația teoremei de completitudine.

**Modele canonice.** Fie  $\mathcal{L}$  o logică normală. Prin *model canonic* al lui  $\mathcal{L}$  înțelegem tripletul  $\mathcal{M}_{\mathcal{L}} = \langle W_{\mathcal{L}}, R_{\mathcal{L}}, V_{\mathcal{L}} \rangle$ , unde:

- (i)  $W_{\mathcal{L}}$  este mulțimea tuturor mulțimilor de enunțuri maximal  $\mathcal{L}$ -consistente,
- (ii) pentru orice program compus  $\alpha$  și orice  $u, v \in W_{\mathcal{L}}$ ,  
 $uR_{\mathcal{L}}(\alpha)v$  dacă și numai dacă pentru orice  $p \in \Phi$ , dacă  $[\alpha]p \in u$  atunci  $p \in v$ ,
- (iii) pentru orice variabilă propozițională  $p \in \Phi_0$  și pentru orice  $u \in W_{\mathcal{L}}$ ,

$$V_{\mathcal{L}}(p, u) = 1 \text{ dacă și numai dacă } p \in u.$$

Pentru orice mulțime de enunțuri  $\Sigma$  și orice program compus  $\alpha$  definim mulțimea  $I(\Sigma, \alpha)$  astfel:

$$I(\Sigma, \alpha) = \{p \mid [\alpha]p \in \Sigma\}.$$

**Lema 4.2.2** Dacă  $\Sigma$  este  $\mathcal{L}$ -consistentă și  $\alpha \in \Pi$ , atunci pentru orice enunț  $p$  astfel încât  $\neg[\alpha]p \in \Sigma$ ,  $I(\Sigma, \alpha) \cup \{\neg p\}$  este  $\mathcal{L}$ -consistentă.

**Demonstrație:** Presupunem că  $I(\Sigma, \alpha) \cup \{-p\}$  nu este  $\mathcal{L}$ -consistentă. Rezultă că există  $p_0, \dots, p_{n-1} \in I(\Sigma, \alpha)$  astfel încât

$$\vdash_{\mathcal{L}} (p_0 \wedge \dots \wedge p_{n-1}) \rightarrow p.$$

Aplicând  $\alpha$ -necesitatea și (A0) obținem

$$\vdash_{\mathcal{L}} [\alpha](p_0 \wedge \dots \wedge p_{n-1}) \rightarrow [\alpha]p,$$

prin urmare, folosind (A6),

$$\vdash_{\mathcal{L}} ([\alpha]p_0 \wedge \dots \wedge [\alpha]p_{n-1}) \rightarrow [\alpha]p.$$

Rezultă că  $\{[\alpha]p_0, \dots, [\alpha]p_{n-1}, \neg[\alpha]p\}$  este  $\mathcal{L}$ -inconsistentă.

Dar,  $\{[\alpha]p_0, \dots, [\alpha]p_{n-1}, \neg[\alpha]p\} \subseteq \Sigma$ . Obținem că  $\Sigma$  este  $\mathcal{L}$ -inconsistentă, ceea ce contrazice ipoteza.  $\square$

Următorul rezultat generalizează Lema 2.2.2, de la logica modală propozițională.

**Lema 4.2.3 (Lema adevărului)** Dacă  $\mathcal{L}$  este o logică normală, atunci pentru orice  $u \in W_{\mathcal{L}}$  și orice enunț  $p$ ,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, u \models p \text{ dacă și numai dacă } p \in u.$$

**Demonstrație:** Prin inducție după enunțul  $p$

-  $p$  este variabilă propozițională

Din definiție, obținem:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, u \models p \Leftrightarrow V_{\mathcal{L}}(p, u) = 1 \Leftrightarrow p \in u.$$

-  $p$  este  $\neg q$

Obținem:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, u \models p \Leftrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{L}}, u \not\models q \Leftrightarrow q \notin u \Leftrightarrow \neg q \in u$$

-  $p$  este  $q \rightarrow r$

Obținem:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, u \models q \rightarrow r \Leftrightarrow (\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, u \models q \Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{L}}, u \models r) \Leftrightarrow (q \in u \Rightarrow r \in u \Leftrightarrow q \rightarrow r \in u.$$

-  $p$  este  $[\alpha]q$

( $\Rightarrow$ ) Presupunem că  $[\alpha]q \notin u$ . Obținem  $\neg[\alpha]q \in u$ . Aplicând Lema 4.2.2 obținem  $I(u, \alpha) \cup \{\neg q\}$  este  $\mathcal{L}$ -consistentă. Rezultă că există  $w \in W_{\mathcal{L}}$  astfel încât

$$(1) \quad I(u, \alpha) \cup \{\neg q\} \subseteq w.$$

Din (1) rezultă  $uR_{\mathcal{L}}(\alpha)w$  și  $q \notin w$ . Aplicând ipoteza de inducție obținem că  $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, w \models \neg q$ . Deoarece  $uR_{\mathcal{L}}(\alpha)w$ , rezultă că  $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, u \not\models [\alpha]q$ .

( $\Leftarrow$ ) A demonstra că  $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, u \models \Box q$  este echivalent cu a demonstra că pentru orice

$v \in W_{\mathcal{L}}$  dacă  $uR_{\mathcal{L}}(\alpha)v$  atunci  $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, v \models q$ . Folosind definiția lui  $R_{\mathcal{L}}(\alpha)$  și faptul că  $\Box q \in u$  obținem că pentru orice  $v \in W_{\mathcal{L}}$  dacă  $uR_{\mathcal{L}}(\alpha)v$  atunci  $q \in v$ . Aplicând ipoteza de inducție obținem rezultatul dorit.  $\square$

**Teorema 4.2.4** Dacă  $\mathcal{L}$  este o logică normală, atunci  $p$  este teoremă a lui  $\mathcal{L}$  dacă și numai dacă  $p$  este  $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ -valid.

**Demonstrație:**  $(\Rightarrow)$  Dacă  $\vdash_{\mathcal{L}} p$  atunci  $p$  este element al oricărei mulțimi maximal  $\mathcal{L}$ -consistente, deci, din Lema adevărului, este  $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ -valid.

$(\Leftarrow)$  Dacă  $p$  nu este teoremă a lui  $\mathcal{L}$ , atunci  $\{\neg p\}$  este  $\mathcal{L}$ -consistentă. Rezultă că există o mulțime maximal  $\mathcal{L}$ -consistentă  $x \in W_{\mathcal{L}}$  astfel încât  $\neg p \in x$ . Din Lema adevărului obținem că  $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, x \models \neg p$ , deci  $p$  nu este  $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ -valid.  $\square$

Modelul canonic există și Lema adevărului este satisfăcută de orice logică normală, în particular și de **PDL**. Din teorema anterioară rezultă că dacă  $\mathcal{M}_{\mathbf{PDL}}$  ar fi o structură dinamică, problema completitudinii lui **PDL** ar fi rezolvată.

**Lema 4.2.5** Dacă  $\mathcal{L}$  este o logică dinamică, atunci pentru orice  $\alpha, \beta \in \Pi$ ,

$$R_{\mathcal{L}}(\alpha \cup \beta) = R_{\mathcal{L}}(\alpha) \cup R_{\mathcal{L}}(\beta).$$

**Demonstrație:**  $(\supseteq)$  Presupunem că  $uR_{\mathcal{L}}(\alpha)v$ . Dacă  $[\alpha \cup \beta]p \in u$ , aplicând (A1a) obținem  $[\alpha]p \in u$ . Deoarece  $uR_{\mathcal{L}}(\alpha)v$ , rezultă că  $p \in v$ . Am obținut astfel  $R_{\mathcal{L}}(\alpha \cup \beta) \supseteq R_{\mathcal{L}}(\alpha)$ . Folosind (A1b) se demonstrează analog că  $R_{\mathcal{L}}(\alpha \cup \beta) \supseteq R_{\mathcal{L}}(\beta)$ .

$(\subseteq)$  Să presupunem că  $uR_{\mathcal{L}}(\alpha \cup \beta)v$  și că nu avem nici  $uR_{\mathcal{L}}(\alpha)v$ , nici  $uR_{\mathcal{L}}(\beta)v$ . Atunci există enunțurile  $p$  și  $q$  astfel încât

$$[\alpha]p \in u \text{ și } p \notin v,$$

$$[\beta]q \in u \text{ și } q \notin v.$$

Rezultă că  $[\alpha](p \vee q) \in u$  și  $[\beta](p \vee q) \in u$ . Aplicând (A1c) obținem  $[\alpha \cup \beta](p \vee q) \in u$ . Pe de altă parte,  $p \notin v$  și  $q \notin v$  implică  $p \vee q \notin v$ . Prin urmare, nu avem  $uR_{\mathcal{L}}(\alpha \cup \beta)v$ . Am obținut o contradicție. Rezultă că  $R_{\mathcal{L}}(\alpha \cup \beta) \subseteq R_{\mathcal{L}}(\alpha) \cup R_{\mathcal{L}}(\beta)$ .  $\square$

**Lema 4.2.6** Dacă  $\mathcal{L}$  este o logică dinamică, atunci pentru orice  $\alpha, \beta \in \Pi$ ,

$$R_{\mathcal{L}}(\alpha\beta) = R_{\mathcal{L}}(\alpha) \circ R_{\mathcal{L}}(\beta).$$

**Demonstrație:**  $(\supseteq)$  Presupunem că  $uR_{\mathcal{L}}(\alpha) \circ R_{\mathcal{L}}(\beta)v$ . Atunci există  $z \in W_{\mathcal{L}}$  astfel încât  $uR_{\mathcal{L}}(\alpha)z$  și  $zR_{\mathcal{L}}(\beta)v$ . Fie  $p$  un enunț astfel încât  $[\alpha\beta]p \in u$ . Aplicând (A2a)

obținem  $[\alpha][\beta]p \in u$ . Din  $uR_{\mathcal{L}}(\alpha)z$  și  $[\alpha][\beta]p \in u$  rezultă că  $[\beta]p \in z$ . Din  $zR_{\mathcal{L}}(\beta)v$  și  $[\beta]p \in z$  obținem  $p \in v$ . Prin urmare,  $uR_{\mathcal{L}}(\alpha\beta)v$ .

( $\subseteq$ ) Presupunem că  $uR_{\mathcal{L}}(\alpha\beta)v$ . Fie  $r_0, r_1, \dots, r_n, \dots$  o enumerare a enunțurilor din  $v$ . Definim un nou șir de enunțuri astfel:

$$q_0 = r_0, \quad q_{n+1} = q_n \wedge r_{n+1}.$$

Prin inducție după  $n$  se demonstrează imediat că

$$(1) \quad q_n \in v, \text{ pentru orice } n \in \mathbf{N}.$$

De asemenea, folosind  $\vdash_{\mathcal{L}} a \wedge b \rightarrow a$ , obținem

$$(2) \quad \{q_{n+p}\} \vdash_{\mathcal{L}} q_n, \text{ pentru orice } n, p \in \mathbf{N}.$$

Considerăm mulțimea

$$\Delta = \{p \mid [\alpha]p \in u\} \cup \{\neg[\beta]\neg q_n \mid n \in \mathbf{N}\}.$$

Afirmăm că  $\Delta$  este  $\mathcal{L}$ -consistentă. Presupunem că  $\Delta$  nu este  $\mathcal{L}$ -consistentă. Atunci există o submulțime finită a lui  $\Delta$  care este  $\mathcal{L}$ -inconsistentă, deci există enunțurile  $p_0, \dots, p_{m-1}$  și numerele naturale  $i_0, \dots, i_{n-1}$  astfel încât

$$(3) \quad [\alpha]p_0, \dots, [\alpha]p_{m-1} \in u,$$

$$(4) \quad \{p_0, \dots, p_{m-1}, \neg[\beta]\neg q_{i_0}, \dots, \neg[\beta]\neg q_{i_{n-1}}\} \text{ este } \mathcal{L}\text{-inconsistentă.}$$

Fie  $k = \max\{i_0, \dots, i_{n-1}\}$ . Atunci din (2) și (4) rezultă că  $\{p_0, \dots, p_{m-1}, \neg[\beta]\neg q_k\}$  este  $\mathcal{L}$ -inconsistentă. Obținem că

$$\vdash_{\mathcal{L}} (p_0 \wedge \dots \wedge p_{m-1}) \rightarrow [\beta]\neg q_k.$$

Aplicând  $\alpha$ -necesitatea, (A0) și (A6) obținem

$$\vdash_{\mathcal{L}} ([\alpha]p_0 \wedge \dots \wedge [\alpha]p_{m-1}) \rightarrow [\alpha][\beta]\neg q_k.$$

Aceasta, împreună cu (3), conduce la  $[\alpha][\beta]\neg q_k \in u$ . Prin urmare, din (A2b),  $[\alpha\beta]\neg q_k \in u$ . Deoarece  $uR_{\mathcal{L}}(\alpha\beta)v$ , obținem  $\neg q_k \in v$ . Din  $\mathcal{L}$ -inconsistența lui  $v$  rezultă că  $q_k \notin v$ , ceea ce contrazice (1). Deci  $\Delta$  este  $\mathcal{L}$ -consistentă.

Rezultă că există o mulțime maximal  $\mathcal{L}$ -consistentă  $x \in W_{\mathcal{L}}$  astfel încât  $\Delta \subseteq x$ . Demonstrăm în continuare că

$$(5) \quad uR_{\mathcal{L}}(\alpha)x \text{ și } xR_{\mathcal{L}}(\beta)v.$$

Fie  $p$  un enunț astfel încât  $[\alpha]p \in u$ . Rezultă din definiția lui  $\Delta$  că  $p \in \Delta \subseteq x$ , deci  $p \in x$ . Prin urmare,  $uR_{\mathcal{L}}(\alpha)x$ . Presupunem că  $[\beta]p \in x$ . Dacă  $p \notin v$ , atunci  $\neg p \in v$ , deci există  $i \in \mathbf{N}$  astfel încât  $\neg p = r_i$ . Din  $\neg[\beta]\neg q_i \in \Delta$ , obținem  $\neg[\beta]\neg(q_{i-1} \wedge \neg p) \in \Delta$ , deci  $\neg[\beta](q_{i-1} \rightarrow p) \in \Delta$ . Folosind  $\alpha$ -necesitatea, (A0) și tautologiile calculului propozițional rezultă  $\neg[\beta]p \in \Delta \subseteq x$ . Am obținut  $\neg[\beta]p \in x$  și  $[\beta]p \in x$ , ceea ce contrazice faptul că  $x$  este  $\mathcal{L}$ -consistentă. Deci  $p \in v$ . Am demonstrat astfel că

$xR_{\mathcal{L}}(\beta)v$ .

Din (5) rezultă că  $uR_{\mathcal{L}}(\alpha) \circ R_{\mathcal{L}}(\beta)v$ .  $\square$

**Lema 4.2.7** Dacă  $\mathcal{L}$  este o logică dinamică, atunci pentru orice  $\alpha, \beta \in \Pi$ ,

$$R_{\mathcal{L}}(\alpha^*) \supseteq (R_{\mathcal{L}}(\alpha))^*.$$

**Demonstrație:** Presupunem că  $u(R_{\mathcal{L}}(\alpha))^*v$ . Atunci există  $k \in \mathbf{N}$  și  $x_0 = u, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k = v$  astfel încât  $x_i R_{\mathcal{L}}(\alpha) x_{i+1}$  pentru orice  $0 \leq i \leq k-1$ .

Fie  $p$  un enunț astfel încât  $[\alpha^*]p \in u$ . Prin inducție după  $n$  se demonstrează, folosind (A3a - c), că

$$(1) \quad \vdash_{\mathcal{L}} [\alpha^*]p \rightarrow [\alpha]^n p, \text{ pentru orice } n \in \mathbf{N}.$$

Din (1) și faptul că  $[\alpha^*]p \in u$  obținem că  $[\alpha]^k p \in u$ . Deoarece  $uR_{\mathcal{L}}(\alpha)x_1$ , rezultă că  $[\alpha]^{k-1}p \in x_1$ . Aplicînd acest procedeu de  $k-1$  ori obținem  $[\alpha]p \in x_{k-1}$  și  $x_{k-1}R_{\mathcal{L}}(\alpha)v$ , prin urmare  $p \in v$ . Am obținut astfel că  $uR_{\mathcal{L}}(\alpha^*)v$ .  $\square$

Arătăm în continuare că reciproca lemei anterioare nu este adevărată. Fie  $p$  o variabilă propozițională și  $\pi$  un program atomic. Considerăm mulțimea

$$\Gamma = \{[\pi]^n p \mid n \in \mathbf{N}\} \cup \{\neg[\pi^*]p\}.$$

Pentru orice  $n \in \mathbf{N}$  fie  $\mathcal{D}_n = \langle \mathbf{N}, R, V_n \rangle$  o structură dinamică, unde  $\mathbf{N}$  este mulțimea numerelor naturale,  $R(\pi)$  este funcția succesori și

$$V_n(p, i) = 1 \text{ dacă și numai dacă } i \leq n.$$

Dacă  $\Gamma'$  este o submulțime finită a lui  $\Gamma$ , atunci există  $j \in \mathbf{N}$  astfel încât  $[\pi]^j p \in \Gamma'$  și, pentru orice  $k$ ,  $[\pi]^{j+k} p \notin \Gamma'$ . Se demonstrează ușor că pentru orice  $q \in \Gamma'$ ,  $\mathcal{D}_j, 0 \models q$ . Prin urmare,  $\Gamma'$  este realizabilă, deci L-consistentă. Deoarece orice submulțime finită a lui  $\Gamma$  este L-consistentă, rezultă că  $\Gamma$  este L-consistentă. Atunci  $\Gamma$  poate fi extinsă la o mulțime maximal L-consistentă  $x \in W_{\mathcal{L}}$ . Din faptul că  $\neg[\pi^*]p \in x$  rezultă, aplicând Lema adevărului, că există  $y \in W_{\mathcal{L}}$  astfel încât  $xR_{\mathcal{L}}(\pi^*)y$  și  $p \notin y$ . Pe de altă parte, nu avem  $x(R_{\mathcal{L}}(\pi))^*y$  (dacă există  $n \in \mathbf{N}$  astfel încât  $x(R_{\mathcal{L}}(\pi))^n y$ , din faptul că  $[\pi^n]p \in x$  obținem  $p \in y$ ). Prin urmare, reciproca Lemei 4.2.7 nu este adevărată.

**Filtrări.** Mulțimea *subenunțurilor* unui enunț dat  $p$  este cea mai mică mulțime de enunțuri  $\Sigma$  care satisface următoarele condiții:

- (i)  $p \in \Sigma$ ,
- (ii) dacă  $\neg q \in \Sigma$ , atunci  $q \in \Sigma$ ,

(iii) dacă  $q \rightarrow r \in \Sigma$ , atunci  $q, r \in \Sigma$ ,

(iv) dacă  $[\alpha]q \in \Sigma$ , atunci  $q \in \Sigma$ .

Se observă imediat că condiția (iv) din definiția precedentă este echivalentă cu

(v) dacă  $\langle \alpha \rangle q \in \Sigma$ , atunci  $q \in \Sigma$ .

Fie  $\mathcal{L}$  o logică normală. Orice mulțime de enunțuri  $\Psi$  induce o relație de echivalență pe  $W_{\mathcal{L}}$  astfel:

$$u \equiv v \Leftrightarrow u \cap \Psi = v \cap \Psi.$$

Notăm cu  $|u|$  clasa de echivalență a lui  $u$ . Se observă că  $\equiv$  și, prin urmare,  $|u|$  depind de  $\Psi$  chiar dacă scrierea noastră nu reflectă acest lucru.

Fie  $\Psi$  o mulțime de enunțuri închisă la subenunțuri. Spunem că un model  $\overline{\mathcal{M}} = \langle \overline{W}, \overline{R}, \overline{V} \rangle$  este o *filtrare prin  $\Psi$*  a modelului canonic  $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$  dacă:

(i)  $\overline{W} = \{|u| \mid u \in W_{\mathcal{L}}\}$ ,

(ii) pentru orice program compus  $\alpha$  care apare în  $\Psi$ , dacă  $uR_{\mathcal{L}}(\alpha)v$ , atunci

$$|u| \overline{R}(\alpha) |v|,$$

(iii) pentru orice program compus  $\alpha$  care apare în  $\Psi$ , dacă  $|u| \overline{R}(\alpha) |v|$ , atunci pentru orice enunț  $p$ ,

$$[\alpha]p \in u \cap \Psi \text{ implică } p \in v,$$

(iv) pentru orice variabilă propozițională  $p$  care apare în  $\Psi$ ,

$$\overline{V}(p, |u|) = 1 \text{ dacă și numai dacă } V_{\mathcal{L}}(p, u) = 1.$$

Următoarea teoremă este o generalizare a unui rezultat cunoscut din logica modală.

**Teorema 4.2.8 (Teorema de filtrare)** Pentru orice  $u \in W_{\mathcal{L}}$  și orice enunț  $p \in \Psi$ ,

$$\overline{\mathcal{M}}, |u| \models p \text{ dacă și numai dacă } p \in u.$$

**Demonstrație:** Prin inducție după enunțul  $p$ .

-  $p$  este variabilă propozițională

Din definiție, obținem:

$$\overline{\mathcal{M}}, |u| \models p \Leftrightarrow \overline{V}(p, |u|) = 1 \Leftrightarrow V_{\mathcal{L}}(p, u) = 1 \Leftrightarrow p \in u.$$

-  $p$  este  $\neg q$

Deoarece  $\Psi$  este închisă la subenunțuri și  $\neg q \in \Psi$  rezultă că  $q \in \Psi$ , deci putem aplica ipoteza de inducție pentru  $q$ . Obținem:

$$\overline{\mathcal{M}}, |u| \models \neg q \Leftrightarrow \overline{\mathcal{M}}, |u| \not\models q \Leftrightarrow q \notin u \Leftrightarrow \neg q \in u.$$

-  $p$  este  $q \rightarrow r$

Deoarece  $\Psi$  este închisă la subenunțuri și  $q \rightarrow r \in \Psi$  rezultă că  $q, r \in \Psi$ , deci putem aplica ipoteza de inducție pentru  $q$  și  $r$ . Obținem:

$$\overline{\mathcal{M}}, |u| \models q \rightarrow r \Leftrightarrow (\overline{\mathcal{M}}, |u| \models q \Rightarrow \overline{\mathcal{M}}, |u| \models r) \Leftrightarrow (q \in u \Rightarrow r \in u) \Leftrightarrow (q \rightarrow r) \in u.$$

-  $p$  este  $[\alpha]q$

Deoarece  $\Psi$  este închisă la subenunțuri și  $[\alpha]q \in \Psi$  rezultă că  $q \in \Psi$ , deci putem aplica ipoteza de inducție pentru  $q$ .

( $\Rightarrow$ ) Demonstrăm că  $\overline{\mathcal{M}}, |u| \models [\alpha]q$  implică  $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, u \models [\alpha]q$ . Fie  $v \in W_{\mathcal{L}}$  astfel încât  $uR_{\mathcal{L}}(\alpha)v$ . Din (ii) rezultă că  $|u| \overline{R}(\alpha) |v|$ . Din  $\overline{\mathcal{M}}, |u| \models [\alpha]q$  și  $|u| \overline{R}(\alpha) |v|$  obținem  $\overline{\mathcal{M}}, |v| \models q$ . Aplicând ipoteza de inducție rezultă  $q \in v$ , ceea ce este echivalent, conform Lemei adevărului, cu  $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, v \models q$ . Deci  $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, u \models [\alpha]q$ . Aplicând din nou Lema adevărului obținem  $[\alpha]q \in u$ .

( $\Leftarrow$ ) Fie  $v \in W_{\mathcal{L}}$  astfel încât  $|u| \overline{R}(\alpha) |v|$ . Deoarece  $[\alpha]q \in u \cap \Psi$ , aplicând (iii) obținem  $q \in v$ . Din ipoteza de inducție rezultă  $\overline{\mathcal{M}}, |v| \models q$ . Deci,  $\overline{\mathcal{M}}, |u| \models [\alpha]q$ .  $\square$

În Teorema de filtrare nu s-a presupus nimic despre cardinalul lui  $\Psi$ . Totuși, dacă  $\Psi$  este finită, atunci  $\overline{W}$  este finită. De fapt, dacă  $\text{card}\Psi = n$ , atunci  $\text{card}\overline{W} \leq 2^n$ .

**Demonstrația completitudinii.** Prin închiderea Fischer-Ladner a unei mulțimi de enunțuri  $\Psi$  înțelegem cea mai mică mulțime de enunțuri  $\Sigma$  care satisface următoarele condiții:

- (i)  $\Psi \subseteq \Sigma$ ,
- (ii)  $\Sigma$  este închisă la subenunțuri,
- (iii) dacă  $[\alpha \cup \beta]p \in \Sigma$ , atunci  $[\alpha]p, [\beta]p \in \Sigma$ ,
- (iv) dacă  $[\alpha\beta]p \in \Sigma$ , atunci  $[\alpha][\beta]p \in \Sigma$ ,
- (v) dacă  $[\alpha^*]p \in \Sigma$ , atunci  $[\alpha][\alpha^*]p \in \Sigma$ ,
- (vi) dacă  $[p?]q \in \Sigma$ , atunci  $p \in \Sigma$ .

Se observă imediat că condițiile (iii)-(v) din definiția de mai sus sunt echivalente cu:

- (vii) dacă  $\langle \alpha \cup \beta \rangle p \in \Sigma$ , atunci  $\langle \alpha \rangle p, \langle \beta \rangle p \in \Sigma$ ,
- (viii) dacă  $\langle \alpha\beta \rangle p \in \Sigma$ , atunci  $\langle \alpha \rangle \langle \beta \rangle p \in \Sigma$ ,
- (ix) dacă  $\langle \alpha^* \rangle p \in \Sigma$ , atunci  $\langle \alpha \rangle \langle \alpha^* \rangle p \in \Sigma$ ,
- (x) dacă  $\langle p? \rangle q \in \Sigma$ , atunci  $p \in \Sigma$ .

Notăm cu  $FL(\Psi)$  închiderea Fischer-Ladner a mulțimii  $\Psi$ . Spunem că o mulțime de

enunțuri este *închisă la condițiile Fischer-Ladner* dacă coincide cu propria închidere Fischer-Ladner.

**Lema 4.2.9** Pentru orice enunț  $p$ ,  $FL(\{p\})$  este finită.

**Demonstrație:** Se demonstrează imediat prin inducție după enunțul  $p$ .  $\square$

O consecință imediată a acestei leme este următorul rezultat.

**Lema 4.2.10 (Lema Fischer-Ladner)** Dacă  $\Psi$  este o mulțime finită de enunțuri, atunci  $FL(\Psi)$  este finită.

Fie  $\Psi$  o mulțime închisă la subenunțuri. Fie  $\mathcal{M}^\dagger = \langle \overline{W}, R^\dagger, \overline{V} \rangle$  o structură dinamică astfel încât pentru orice program atomic  $\pi$  care apare în  $\Psi$ ,

$|u| R^\dagger(\pi) |v|$  dacă și numai dacă există  $u_0 \equiv u$  și  $v_0 \equiv v$  astfel încât  $u_0 R_{\mathcal{L}}(\pi) v_0$ .

În cele ce urmează considerăm  $\Psi$  o mulțime de enunțuri finită, închisă la condițiile Fischer-Ladner și  $\mathcal{L}$  o logică dinamică.

**Lema 4.2.11** Pentru orice program compus  $\alpha$  care apare în  $\Psi$ , dacă  $u R_{\mathcal{L}}(\alpha) v$ , atunci

$$|u| R^\dagger(\alpha) |v|.$$

**Demonstrație:** Prin inducție după programul compus  $\alpha$ .

-  $\alpha$  este program atomic

Alegem  $u_0 = u$  și  $v_0 = v$  în definiția lui  $R^\dagger$ .

-  $\alpha$  este  $p$ ?

Din  $u R_{\mathcal{L}}(p) v$  obținem  $u = v$  și  $V_{\mathcal{L}}(p, u) = 1$ . Rezultă  $|u| = |v|$  și, din definiția lui  $\overline{V}$ ,  $\overline{V}(p, |u|) = 1$ . Prin urmare,  $|u| R^\dagger(p) |v|$ .

-  $\alpha$  este  $\beta \cup \gamma$

Din  $u R_{\mathcal{L}}(\beta \cup \gamma) v$  obținem aplicând Lema 4.2.5  $u R_{\mathcal{L}}(\beta) v$  sau  $u R_{\mathcal{L}}(\gamma) v$ . Din ipoteza de inducție rezultă  $|u| R^\dagger(\beta) |v|$  sau  $|u| R^\dagger(\gamma) |v|$ . Deoarece  $\mathcal{M}^\dagger$  este structură dinamică obținem  $|u| R^\dagger(\beta \cup \gamma) |v|$ .

-  $\alpha$  este  $\beta\gamma$

Din  $u R_{\mathcal{L}}(\beta\gamma) v$  obținem aplicând Lema 4.2.6  $u R_{\mathcal{L}}(\beta) \circ R_{\mathcal{L}}(\gamma) v$ . Deci, există  $x \in W_{\mathcal{L}}$  astfel încât  $u R_{\mathcal{L}}(\beta) x$  și  $x R_{\mathcal{L}}(\gamma) v$ . Din ipoteza de inducție rezultă  $|u| R^\dagger(\beta) |x|$  și  $|x| R^\dagger(\gamma) |v|$ , deci  $|u| R^\dagger(\beta) \circ R^\dagger(\gamma) |v|$ . Deoarece  $\mathcal{M}^\dagger$  este structură dinamică obținem  $|u| R^\dagger(\beta\gamma) |v|$ .

-  $\alpha$  este  $\beta^*$

Presupunem că  $uR_{\mathcal{L}}(\beta^*)v$  și că nu avem  $|u| R^\dagger(\beta^*) |v|$ . Conform [S], deoarece  $\overline{W}$  este finită este posibil să găsim o combinație Booleană  $B$  de enunțuri din  $\Psi$  astfel încât

(1) pentru orice  $w \in W_{\mathcal{L}}$ ,  $B \in w$  dacă și numai dacă  $|u| R^\dagger(\beta^*) |v|$ .

Deoarece  $\mathcal{M}^\dagger$  este logică dinamică,  $R^\dagger(\beta^*)$  este reflexivă. Din (1) rezultă că  $B \in u$ . Mai mult, din faptul că nu avem  $|u| R^\dagger(\beta^*) |v|$  și (1) obținem că  $B \notin v$ . Deoarece  $uR_{\mathcal{L}}(\beta^*)v$  rezultă că

(2)  $[\beta^*]B \notin u$ .

Cum  $\mathcal{L}$  este o logică dinamică putem aplica (A5) pentru a deduce din  $B \in u$  și (2) că

(3)  $[\beta^*](B \rightarrow [\beta]B) \notin u$ .

Din (3), aplicând Lema adevărului, rezultă că există  $x, y \in W_{\mathcal{L}}$  astfel încât

(4)  $B \in x$ ,

(5)  $xR_{\mathcal{L}}(\beta)y$ ,

(6)  $B \notin y$ .

Din (1) și (4) obținem

(7)  $|u| R^\dagger(\beta^*) |y|$ .

Aplicând ipoteza de inducție pentru  $\beta$ , din (5) rezultă că

(8)  $|x| R^\dagger(\beta) |y|$ .

Deoarece  $\mathcal{M}^\dagger$  este structură dinamică, (7) și (8) implică  $|u| R^\dagger(\beta) |y|$ . Aplicând (1), obținem  $B \in y$ , ceea ce contrazice (6). Prin urmare,  $|u| R^\dagger(\beta^*) |v|$ .  $\square$

**Lema 4.2.12** Pentru orice program compus  $\alpha$  care apare în  $\Psi$ , dacă  $|u| R^\dagger(\alpha) |v|$ , atunci pentru orice enunț  $p$ ,

$$[\alpha]p \in u \cap \Psi \text{ implică } p \in v.$$

**Demonstrație:** Prin inducție după programul compus  $\alpha$ .

- $\alpha$  este program atomic

Fie  $p$  astfel încât  $[\alpha]p \in u \cap \Psi$ . Deoarece  $|u| R^\dagger(\alpha) |v|$ , rezultă că există  $u_0 \equiv u$  și  $v_0 \equiv v$  astfel încât  $u_0R_{\mathcal{L}}(\alpha)v_0$ . Din  $[\alpha]p \in u \cap \Psi$  și  $u_0 \cap \Psi = u \cap \Psi$  obținem  $[\alpha]p \in u_0 \cap \Psi$ . Din faptul că  $u_0R_{\mathcal{L}}(\alpha)v_0$  rezultă că  $p \in v_0$ . Mulțimea  $\Psi$  este închisă la condițiile Fischer-Ladner și  $[\alpha]p \in \Psi$ , prin urmare  $p \in \Psi$ . Am obținut  $p \in v_0 \cap \Psi = v \cap \Psi$ , de unde rezultă că  $p \in v$ .

- $\alpha$  este  $q?$

Fie  $p$  astfel încât  $[q?]p \in u \cup \Psi$ . Deoarece  $|u| R^\dagger(q?) |v|$ , rezultă că  $|u|=|v|$  și  $\overline{V}(q, |u|$

) = 1. Din Teorema de filtrare obținem  $q \in u$ . Mulțimea  $\Psi$  este închisă la condițiile Fischer-Ladner și  $[q?]p \in \Psi$ , prin urmare  $q \in \Psi$ . Am obținut  $q, [q?]p \in u \cup \Psi = v \cup \Psi$ , deci  $q, [q?]p \in v$ . Folosind (A4) obținem  $p \in v$ .

- $\alpha$  este  $\beta \cup \gamma$

Fie  $p$  astfel încât  $[\beta \cup \gamma]p \in u \cap \Psi$ . Deoarece  $[\beta \cup \gamma]p \in \Psi$  și  $\Psi$  este închisă la condițiile Fischer-Ladner, obținem  $[\beta]p, [\gamma]p \in \Psi$ . Folosind (A1a, b), obținem  $[\beta]p, [\gamma]p \in u$ . Deci,  $[\beta]p, [\gamma]p \in u \cap \Psi$ , de unde rezultă că putem aplica ipoteza de inducție pentru  $\beta$  și  $\gamma$ .

Deoarece  $\mathcal{M}^\dagger$  este logică dinamică și  $|u| R^\dagger(\beta \cup \gamma) |v|$ , rezultă că fie  $|u| R^\dagger(\beta) |v|$  fie  $|u| R^\dagger(\gamma) |v|$ . Aplicând ipoteza de inducție obținem  $p \in v$ .

- $\alpha$  este  $\beta\gamma$

Fie  $p$  astfel încât  $[\beta\gamma]p \in u \cap \Psi$ . Folosind (A2a) și faptul că  $\Psi$  este închisă la condițiile Fischer-Ladner obținem  $[\beta][\gamma]p \in u \cap \Psi$ . Deoarece  $\mathcal{M}^\dagger$  este logică dinamică și  $|u| R^\dagger(\beta\gamma) |v|$ , rezultă că există  $x \in W_{\mathcal{L}}$  astfel încât  $|u| R^\dagger(\beta) |x|$  și  $|x| R^\dagger(\gamma) |v|$ . Aplicând ipoteza de inducție pentru  $\beta$ , din  $|u| R^\dagger(\beta) |x|$  și  $[\beta][\gamma]p \in u \cap \Psi$  obținem  $[\gamma]p \in x$ . Din  $[\beta][\gamma]p \in \Psi$ , folosind din nou faptul că  $\Psi$  este închisă la condițiile Fischer-Ladner rezultă că  $[\gamma]p \in \Psi$ . Prin urmare,  $|x| R^\dagger(\gamma) |v|$  și  $[\gamma]p \in \Psi$ . Aplicând ipoteza de inducție pentru  $\gamma$  obținem  $p \in v$ .

- $\alpha$  este  $\beta^*$

Fie  $p$  astfel încât  $[\beta^*]p \in u \cap \Psi$ . Afirmăm că pentru orice  $x, y \in W_{\mathcal{L}}$ :

(1) pentru orice  $n \in \mathbf{N}$ , dacă  $|x| (R^\dagger(\beta))^n |y|$ , atunci  $[\beta^*]p \in x$  implică  $[\beta^*]p \in y$ .

Demonstrăm această afirmație prin inducție după  $n$ . Dacă  $n = 0$ , atunci  $|x| (R^\dagger(\beta))^0 |y|$  este echivalent cu  $|x|=|y|$ , deci cu  $x \cap \Psi = y \cap \Psi$ . Deoarece  $[\beta^*]p \in \Psi$ , din  $[\beta^*]p \in x$  obținem  $[\beta^*]p \in x \cap \Psi = y \cap \Psi$ , deci  $[\beta^*]p \in y$ . Presupunem că afirmația este adevărată pentru  $n$  și că

(2)  $|x| (R^\dagger(\beta))^{n+1} |y|$ .

Presupunem  $[\beta^*]p \in x$ . Folosind (A3b, c) obținem  $\vdash_{\mathcal{L}} [\beta^*]p \rightarrow [\beta][\beta^*]p$ . Obținem  $[\beta][\beta^*]p \in x$ . Din  $[\beta^*]p \in \Psi$  și faptul că  $\Psi$  este închisă la condițiile Fischer-Ladner rezultă că  $[\beta][\beta^*]p \in \Psi$ . Prin urmare,

(3)  $[\beta][\beta^*]p \in x \cap \Psi$ .

Din (2) rezultă că există  $z \in W_{\mathcal{L}}$  astfel încât

(4)  $|x| R^\dagger(\beta) |z|$ ,

(5)  $|z| (R^\dagger(\beta))^n |y|$ .

Folosind ipoteza de inducție pentru  $\beta$ , din (3) și (4) obținem  $[\beta^*]p \in z$ . Prin urmare, din (5) și ipoteza de inducție pentru  $n$  rezultă că  $[\beta^*]p \in y$ . Demonstrația afirmației (1) este încheiată.

Deoarece  $\mathcal{M}^\dagger$  este logică dinamică și  $|u| R^\dagger(\beta^*) |v|$  rezultă că există  $i \in \mathbf{N}$  astfel încât  $|x| (R^\dagger(\beta))^i |y|$ . Din (1) și  $[\beta^*]p \in u$  obținem  $[\beta^*]p \in v$ . Aplicând (A3a) rezultă că  $p \in v$ .  $\square$

**Teorema 4.2.13** Fie  $\mathcal{L}$  o logică dinamică și  $\Psi$  o mulțime finită de enunțuri închisă la condițiile Fischer-Ladner. Atunci  $\mathcal{M}^\dagger$  este o filtrare prin  $\Psi$  a lui  $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ .

**Demonstrație:** Din cele două leme anterioare rezultă că  $R^\dagger$  satisface condițiile (ii) și (iii) din definiția filtrării.  $\square$

Acum putem încheia demonstrația completitudinii **PDL**.

**Teorema 4.2.14** Pentru orice enunț  $p$ , dacă  $\models p$ , atunci  $\vdash_{\mathbf{PDL}} p$ .

**Demonstrație:** Presupunem că  $p$  nu este teoremă a lui **PDL**. Atunci, din Teorema 4.2.4 rezultă că există  $x \in W_{\mathcal{L}}$  astfel încât  $p \notin x$ . Conform Lemei 4.2.10, închiderea Fischer-Ladner  $\Psi$  a mulțimii  $\{p\}$  este finită. Fie  $\mathcal{M}^\dagger$  structura dinamică corespunzătoare lui  $\Psi$ , construită ca mai sus. Din Teorema 4.2.13 rezultă că  $\mathcal{M}^\dagger$  este o filtrare. Aplicând Teorema de filtrare obținem că  $\mathcal{M}^\dagger, |x| \not\models p$ , deci  $p$  nu este  $\mathcal{M}^\dagger$ -valid. Acest fapt contrazice ipoteza că  $p$  este valid.  $\square$

## 4.2.2 Demonstrația lui D. Harel

În acest paragraf prezentăm demonstrația teoremei de completitudine dată de D. Harel ([H2]) pentru **PDL**.

Fie  $p \in \Phi$  un enunț fixat și  $FL(\{p\})$  închiderea Fischer-Ladner a mulțimii  $\{p\}$ . Definim  $\neg FL(\{p\})$  astfel:

$$\neg FL(\{p\}) = \{q \mid \neg q \in FL(\{p\})\} \cup \{\neg q \mid q \in FL(\{p\}) \text{ și } q \text{ nu este de forma } \neg r\}.$$

Notăm  $\neg FL(\{p\}) \cup FL(\{p\})$  cu  $Z$ . Conform Lemei 4.2.9,  $FL(\{p\})$  este finită. Se observă că  $|\neg FL(\{p\})| \leq |FL(\{p\})|$ , prin urmare  $Z$  este finită.

Un *atom* este o submulțime  $A$  a lui  $Z$  care satisface următoarele condiții:

- (i) dacă  $\neg q \in Z$ , atunci  $q \in A$  dacă și numai dacă  $\neg q \notin A$ ,
- (ii) dacă  $q \rightarrow r \in Z$ , atunci  $q \rightarrow r \in A$  dacă și numai dacă  $q \in A$  implică  $r \in A$ ,

- (iii) dacă  $[\alpha\beta]q \in Z$ , atunci  $[\alpha\beta]q \in A$  dacă și numai dacă  $[\alpha][\beta]q \in A$ ,
  - (iv) dacă  $[\alpha \cup \beta]q \in Z$ , atunci  $[\alpha \cup \beta]q \in A$  dacă și numai dacă  $[\alpha]q \in A$  și  $[\beta]q \in A$ ,
  - (v) dacă  $[\alpha^*]q \in Z$ , atunci  $[\alpha^*]q \in A$  dacă și numai dacă  $q \in A$  și  $[\alpha][\alpha^*]q \in A$ ,
  - (vi) dacă  $[q?]r \in Z$ , atunci  $[q?]r \in A$  dacă și numai dacă  $q \in A$  implică  $r \in A$ .
- Se observă imediat că condițiile (iii)-(vi) din definiția de mai sus sunt echivalente cu:
- (vii) dacă  $\langle \alpha\beta \rangle q \in Z$ , atunci  $\langle \alpha\beta \rangle q \in A$  dacă și numai dacă  $\langle \alpha \rangle \langle \beta \rangle q \in A$ ,
  - (viii) dacă  $\langle \alpha \cup \beta \rangle q \in Z$ , atunci  $\langle \alpha \cup \beta \rangle q \in A$  dacă și numai dacă  $\langle \alpha \rangle q \in A$  sau  $\langle \beta \rangle q \in A$ ,
  - (ix) dacă  $\langle \alpha^* \rangle q \in Z$ , atunci  $\langle \alpha^* \rangle q \in A$  dacă și numai dacă  $q \in A$  sau  $\langle \alpha \rangle \langle \alpha^* \rangle q \in A$ ,
  - (x) dacă  $\langle q? \rangle r \in Z$ , atunci  $\langle q? \rangle r \in A$  dacă și numai dacă  $q \in A$  și  $r \in A$ .

Notăm mulțimea atomilor pentru  $p$  cu  $At(p)$ .

Deoarece, în continuare, suntem interesați numai de enunțurile legate direct de  $p$ , putem presupune fără a restrânge generalitatea că  $\Phi_0$  și  $\Pi_0$  sunt alcătuite numai din variabilele propoziționale și enunțurile atomice care apar în  $p$ . Construim următorul șir de structuri dinamice:

$\mathcal{D}_0 = \langle W_0, R_0, V_0 \rangle$  este definită prin:

- $W_0 = At(p)$ ,
- pentru orice variabilă propozițională  $q$  și orice atom  $A$ 

$$V_0(q, A) = 1 \text{ dacă și numai dacă } q \in A,$$
- pentru orice program atomic  $\alpha$  și pentru orice  $A, B \in At(p)$ ,  $(A, B) \in R_0(\alpha)$  dacă și numai dacă

(i) există  $\langle \alpha \rangle q \in A$  cu  $q \in B$ ,

(ii) dacă  $[\alpha]q \in A$ , atunci  $q \in B$ .

Pentru orice  $n > 0$ ,  $\mathcal{D}_{n+1} = \langle W_{n+1}, R_{n+1}, V_{n+1} \rangle$  este definită prin:

- $W_{n+1} = \{A \mid A \in W_n \text{ și pentru orice } \langle \alpha \rangle q \in A \text{ există } B \in W_n \text{ astfel încât } (A, B) \in R_n'(\alpha) \text{ și } q \in B\}$ , unde  $R_n'(\alpha)$  coincide cu  $R_n(\alpha)$ , cu excepția cazului când  $\alpha = q?$ , cu  $q \in Z$  ( în acest caz,  $R_n'(q?) = \{(A, A) \mid q \in A\}$ ),
- pentru orice variabilă propozițională  $q$  și orice  $A \in W_{n+1}$

$$V_{n+1}(q, A) = V_n(q, A),$$

- pentru orice program atomic  $\alpha$

$$R_{n+1}(\alpha) = R_n(\alpha) \cup (W_{n+1} \times W_{n+1}).$$

Din faptul că  $Z$  este finită rezultă că  $At(p)$  este finită. Observând că  $\{\mathcal{D}_i\}_{i \geq 0}$  este un șir descrescător de submulțimi ale lui  $At(p)$  rezultă că există  $i_0 \in \mathbf{N}$  astfel încât  $\mathcal{D}_j = \mathcal{D}_{i_0}$  pentru orice  $j > i_0$ . Notăm  $\mathcal{D} = \langle W, R, V \rangle = \mathcal{D}_{i_0} = \langle W_{i_0}, R_{i_0}, V_{i_0} \rangle$ .

**Lema 4.2.15** Pentru orice  $A \in W$ ,  $\alpha \in \Pi$  și  $q \in \Phi$ ,

(i) dacă  $[\alpha]q \in FL\{p\}$ , atunci

$[\alpha]q \in A$  dacă și numai dacă pentru orice  $B \in W$ ,  $(A, B) \in R(\alpha)$  implică  $q \in B$ ,

(ii) dacă  $q \in FL\{p\}$ , atunci

$q \in A$  dacă și numai dacă  $\mathcal{D}, A \models q$ .

**Demonstrație:** Prin inducție simultană după enunțul  $q$  și programul compus  $\alpha$ .

- $q$  este variabilă propozițională

$\mathcal{D}, A \models q \Leftrightarrow V(q, A) = 1 \Leftrightarrow q \in A$ .

- $q$  este  $\neg r$

Deoarece  $\neg r \in FL\{p\}$ , rezultă că  $r \in FL\{p\}$ , deci putem aplica ipoteza de inducție pentru  $r$ . Obținem:

$\mathcal{D}, A \models \neg r \Leftrightarrow V(\neg r, A) = 1 \Leftrightarrow V(r, A) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{D}, A \not\models r \Leftrightarrow r \notin A \Leftrightarrow \neg r \in A$ .

- $q$  este  $r \rightarrow t$

Deoarece  $r \rightarrow t \in FL\{p\}$ , rezultă că  $r, t \in FL\{p\}$ , deci putem aplica ipoteza de inducție pentru  $r$  și  $t$ . Obținem:

$\mathcal{D}, A \models r \rightarrow t \Leftrightarrow V(r \rightarrow t, A) = 1 \Leftrightarrow (V(r, A) = 1 \Rightarrow V(t, A) = 1) \Leftrightarrow (\mathcal{D}, A \models r \Rightarrow \mathcal{D}, A \models t) \Leftrightarrow (r \in A \Rightarrow t \in A) \Leftrightarrow r \rightarrow t \in A$ .

- $q$  este  $[\alpha]r$

Deoarece  $[\alpha]r \in FL\{p\}$ , rezultă că  $r \in FL\{p\}$ , deci putem aplica ipoteza de inducție pentru  $r$ . Aplicând și ipoteza de inducție pentru  $\alpha$  obținem:

$\mathcal{D}, A \models [\alpha]r \Leftrightarrow$  pentru orice  $B \in W$ ,  $(A, B) \in R(\alpha)$  implică  $V(r, B) = 1 \Leftrightarrow$  pentru orice  $B \in W$ ,  $(A, B) \in R(\alpha)$  implică  $\mathcal{D}, A \models r \stackrel{(ii)}{\Leftrightarrow}$  pentru orice  $B \in W$ ,  $(A, B) \in R(\alpha)$  implică  $r \in A \stackrel{(i)}{\Leftrightarrow} [\alpha]r \in A$ .

- $\alpha$  este program atomic

( $\Rightarrow$ ) Fie  $B \in W$  astfel încât  $(A, B) \in R(\alpha)$ . Deoarece  $R(\alpha) = R_0(\alpha)$  și  $[\alpha]q \in A$  rezultă din definiția lui  $R_0$  că  $q \in B$ .

( $\Leftarrow$ ) Presupunem că  $[\alpha]q \notin A$ . Deoarece  $\neg[\alpha]q \in Z$ , rezultă din definiția atomilor că  $\neg[\alpha]q \in A$ , deci  $\langle \alpha \rangle \neg q \in A$ . Din construcția lui  $W$  rezultă că există  $B \in W$  astfel încât  $(A, B) \in R'(\alpha)$  și  $\neg q \in B$ . Obținem că există  $B \in W$  astfel încât  $(A, B) \in R(\alpha)$  și  $q \notin B$ , ceea ce contrazice ipoteza.

$-\alpha$  este  $\beta \cup \gamma$

( $\Rightarrow$ ) Fie  $B \in W$  astfel încât  $(A, B) \in R(\beta \cup \gamma)$ . Deoarece  $R(\beta \cup \gamma) = R(\beta) \cup R(\gamma)$  rezultă că  $(A, B) \in R(\beta)$  sau  $(A, B) \in R(\gamma)$ . Din  $[\beta \cup \gamma]q \in A$  obținem  $[\beta]q \in A$  și  $[\gamma]q \in A$ . Aplicând ipoteza de inducție pentru  $\beta$  și  $\gamma$  obținem  $q \in B$ .

( $\Leftarrow$ ) Presupunem că  $[\beta \cup \gamma]q \notin A$ . Deoarece  $\neg[\beta \cup \gamma]q \in Z$ , rezultă din definiția atomilor că  $\neg[\beta \cup \gamma]q \in A$ , deci  $\langle \beta \cup \gamma \rangle \neg q \in A$ . Din construcția lui  $W$  rezultă că există  $B \in W$  astfel încât  $(A, B) \in R'(\beta \cup \gamma)$  și  $\neg q \in B$ . Obținem că există  $B \in W$  astfel încât  $(A, B) \in R(\beta \cup \gamma)$  și  $q \notin B$ , ceea ce contrazice ipoteza.

$-\alpha$  este  $\beta\gamma$

( $\Rightarrow$ ) Fie  $B \in W$  astfel încât  $(A, B) \in R(\beta\gamma)$ . Deoarece  $R(\beta\gamma) = R(\beta) \circ R(\gamma)$  rezultă că există  $C \in W$  astfel încât  $(A, C) \in R(\beta)$  și  $(C, B) \in R(\gamma)$ . Din  $[\beta\gamma]q \in A$  obținem  $[\beta][\gamma]q \in A$ . Aplicând ipoteza de inducție pentru  $\beta$  obținem  $[\gamma]q \in C$ . Aplicând ipoteza de inducție pentru  $\gamma$  obținem  $q \in B$ .

( $\Leftarrow$ ) Presupunem că  $[\beta\gamma]q \notin A$ . Deoarece  $\neg[\beta\gamma]q \in Z$ , rezultă din definiția atomilor că  $\neg[\beta\gamma]q \in A$ , deci  $\langle \beta\gamma \rangle \neg q \in A$ . Din construcția lui  $W$  rezultă că există  $B \in W$  astfel încât  $(A, B) \in R'(\beta\gamma)$  și  $\neg q \in B$ . Obținem că există  $B \in W$  astfel încât  $(A, B) \in R(\beta\gamma)$  și  $q \notin B$ , ceea ce contrazice ipoteza.

$-\alpha$  este  $\beta^*$

( $\Rightarrow$ ) Fie  $B \in W$  astfel încât  $(A, B) \in R(\beta^*)$ . Deoarece  $R(\beta^*) = (R(\beta))^*$ , rezultă că există  $k \geq 0$  astfel încât  $(A, B) \in (R(\beta))^k$ . Din  $[\beta^*]q \in A$  obținem  $q \in A$  și  $[\beta][\beta^*]q \in A$ . Dacă  $k = 0$ , atunci  $B = A$  și  $q \in A$ . Dacă  $k > 0$ , atunci există  $A = B_0, B_1, \dots, B_{k-1}, B_k = B$  astfel încât  $(B_i, B_{i+1}) \in R(\beta)$  pentru orice  $0 \leq i \leq k - 1$ . Aplicând ipoteza de inducție pentru  $\beta$  obținem  $[\beta^*]q \in B_1$ , deci  $q \in B_1$  și  $[\beta][\beta^*]q \in B_1$ . Repetând acest procedeu de  $k$  ori obținem  $q \in B$ .

( $\Leftarrow$ ) Presupunem că  $[\beta^*]q \notin A$ . Deoarece  $\neg[\beta^*]q \in Z$ , rezultă din definiția atomilor că  $\neg[\beta^*]q \in A$ , deci  $\langle \beta^* \rangle \neg q \in A$ . Din construcția lui  $W$  rezultă că există  $B \in W$  astfel încât  $(A, B) \in R'(\beta^*)$  și  $\neg q \in B$ . Obținem că există  $B \in W$  astfel încât  $(A, B) \in R(\beta^*)$  și  $q \notin B$ , ceea ce contrazice ipoteza.

$-\alpha$  este  $r?$

( $\Rightarrow$ ) Fie  $B \in W$  astfel încât  $(A, B) \in R(r?)$ . Rezultă că  $B = A$  și  $\mathcal{D}, A \models r$ . Aplicând ipoteza de inducție pentru  $r$  obținem  $r \in A$ . Deoarece  $[r?]q \in A$  și  $r \in A$  rezultă  $q \in A$ .

( $\Leftarrow$ ) Presupunem că  $[r?]q \notin A$ . Deoarece  $\neg[r?]q \in Z$ , rezultă din definiția atomilor că  $\neg[r?]q \in A$ , deci  $\langle r? \rangle \neg q \in A$ . Din construcția lui  $W$  rezultă că există  $B \in W$  astfel încât  $(A, B) \in R'(r?)$  și  $\neg q \in B$ . Folosind ipoteza de inducție pentru  $r$  obținem  $R(r?) = \{(C, C) \mid V(r, C) = 1\} = \{(C, C) \mid \mathcal{D}, C \models r\} = \{(C, C) \mid r \in C\} = R'(r?)$ . Am obținut că  $(A, B) \in R(r?)$  și  $q \notin B$ , ceea ce contrazice ipoteza.  $\square$

**Corolar 4.2.16** Pentru orice  $A \in W$ , și orice  $\langle \alpha \rangle q \in FL\{p\}$ ,

$\langle \alpha \rangle q \in A$  dacă și numai dacă există  $B \in W$  astfel încât  $(A, B) \in R(\alpha)$  și  $q \in B$ .

Pentru orice mulțime finită de enunțuri  $A$  definim enunțul  $\hat{A} = \bigwedge\{q \mid q \in A\}$ .

**Lema 4.2.17** Fie  $A \subseteq Z$  astfel încât pentru orice  $q \in Z$ ,  $q \in A$  dacă și numai dacă  $\neg q \notin A$ . Dacă  $A \notin At(p)$ , atunci  $\vdash_{\mathbf{PDL}} \neg \hat{A}$ .

**Lema 4.2.18** Pentru orice  $q \in Z$  și  $E \subseteq At(p)$ ,

- (i)  $\vdash_{\mathbf{PDL}} q \leftrightarrow \bigvee\{\hat{A} \mid A \in At(p), q \in A\}$ ,
- (ii)  $\vdash_{\mathbf{PDL}} \bigvee\{\hat{A} \mid A \in E\} \leftrightarrow \bigwedge\{\neg \hat{B} \mid B \in At(p) - E\}$ .

**Demonstrație:** Fie  $V = \{A \mid A \subseteq Z, \text{ pentru orice } q \in Z, q \in A \text{ dacă și numai dacă } \neg q \notin A\}$ . Atunci rezultă imediat  $\vdash_{\mathbf{PDL}} q \leftrightarrow \bigvee\{\hat{A} \mid A \in V, q \in A\}$ . Conform lemei anterioare, dacă  $A \in V - At(p)$ , atunci  $\vdash_{\mathbf{PDL}} \neg \hat{A}$ . Prin urmare,  $\vdash_{\mathbf{PDL}} q \leftrightarrow \bigvee\{\hat{A} \mid A \in At(p), q \in A\}$ . Demonstrația lui (ii) este similară.  $\square$

**Lema 4.2.19** Fie  $A \in At(p)$  și  $\langle \alpha \rangle q \in A$ . Atunci

$$\vdash_{\mathbf{PDL}} \hat{A} \rightarrow [\alpha](\bigvee\{\hat{B} \mid B \in At(p), q \notin B\} \vee \bigvee\{\hat{C} \mid C \in At(p), q \in C, (A, C) \in R'_0(\alpha)\}).$$

**Demonstrație:** Prin inducție după programul compus  $\alpha$ .

- $\alpha$  este  $r?$

Din  $\langle r? \rangle q \in A$  obținem  $q, r \in A$ . Din definiția lui  $R'_0(r?)$  obținem  $\{C \mid C \in At(p), q \in C, (A, C) \in R'_0(r?)\} = \{A\}$ . Prin urmare,  $\bigvee\{\hat{C} \mid C \in At(p), q \in C, (A, C) \in R'_0(\alpha)\} = \hat{A}$ . Deoarece  $\vdash_{\mathbf{PDL}} \hat{A} \rightarrow r$  și  $\vdash_{\mathbf{PDL}} \hat{A} \rightarrow (\bigvee\{\hat{B} \mid B \in At(p), q \notin B\} \vee \hat{A})$ ,

rezultă

$$(1) \vdash_{\mathbf{PDL}} \hat{A} \rightarrow (r \rightarrow \bigvee \{\hat{B} \mid B \in At(p), q \notin B\} \vee \hat{A}).$$

Folosind (A4) obținem teorema dorită.

$$-\alpha \text{ este } \beta \cup \gamma$$

Din  $\langle \beta \cup \gamma \rangle q \in A$  obținem  $\langle \beta \rangle q \in A$  sau  $\langle \gamma \rangle q \in A$ . Presupunem că  $\langle \beta \rangle q \in A$ .

Aplicând ipoteza de inducție pentru  $\beta$  rezultă

$$(2) \vdash_{\mathbf{PDL}} (\hat{A} \rightarrow [\beta](\bigvee \{\hat{B} \mid B \in At(p), q \notin B\} \vee \bigvee \{\hat{C} \mid C \in At(p), q \in C, (A, C) \in R'_0(\beta)\})).$$

Deoarece  $R'_0(\beta) \subseteq R'_0(\beta \cup \gamma)$ , rezultă

$$(3) \vdash_{\mathbf{PDL}} \bigvee \{\hat{C} \mid C \in At(p), q \in C, (A, C) \in R'_0(\beta)\} \rightarrow \bigvee \{\hat{C} \mid C \in At(p), q \in C, (A, C) \in R'_0(\beta \cup \gamma)\}.$$

Prin urmare, obținem

$$(4) \vdash_{\mathbf{PDL}} [\beta](\bigvee \{\hat{B} \mid B \in At(p), q \notin B\} \vee \bigvee \{\hat{C} \mid C \in At(p), q \in C, (A, C) \in R'_0(\beta)\}) \rightarrow [\beta](\bigvee \{\hat{B} \mid B \in At(p), q \notin B\} \vee \bigvee \{\hat{C} \mid C \in At(p), q \in C, (A, C) \in R'_0(\beta \cup \gamma)\}).$$

Din (1) și (4) obținem

$$(5) \vdash_{\mathbf{PDL}} \hat{A} \rightarrow [\beta](\bigvee \{\hat{B} \mid B \in At(p), q \notin B\} \vee \bigvee \{\hat{C} \mid C \in At(p), q \in C, (A, C) \in R'_0(\beta \cup \gamma)\}).$$

Dacă  $\langle \gamma \rangle q \in A$ , se obține analog

$$(6) \vdash_{\mathbf{PDL}} \hat{A} \rightarrow [\gamma](\bigvee \{\hat{B} \mid B \in At(p), q \notin B\} \vee \bigvee \{\hat{C} \mid C \in At(p), q \in C, (A, C) \in R'_0(\beta \cup \gamma)\}).$$

Din (5), (6) și (A1c) obținem rezultatul dorit.

Dacă  $\langle \gamma \rangle q \notin A$ , atunci  $\neg \langle \gamma \rangle q \in A$ , deci  $[\gamma] \neg q \in A$ . Prin urmare,

$$(7) \vdash_{\mathbf{PDL}} \hat{A} \rightarrow [\gamma] \neg q.$$

Din Lema 4.2.18 obținem

$$(8) \vdash_{\mathbf{PDL}} \neg q \rightarrow \bigvee \{\hat{B} \mid B \in At(p), q \notin B\}.$$

Din (7) și (8) rezultă

$$(9) \vdash_{\mathbf{PDL}} \hat{A} \rightarrow \bigvee \{\hat{B} \mid B \in At(p), q \notin B\}.$$

Folosind (D) obținem (6). În continuare se procedează ca mai sus.

$$-\alpha \text{ este } \beta\gamma$$

Din  $\langle \beta\gamma \rangle q \in A$  obținem  $\langle \beta \rangle \langle \gamma \rangle q \in A$ . Aplicând ipoteza de inducție pentru  $\beta$  rezultă

$$(10) \vdash_{\mathbf{PDL}} \hat{A} \rightarrow [\beta](\bigvee \{\hat{B} \mid B \in At(p), \langle \gamma \rangle q \notin B\} \vee \bigvee \{\hat{C} \mid C \in At(p), \langle \gamma \rangle q \in C, (A, C) \in R'_0(\beta)\}).$$

Notăm cu  $r$  enunțul

$$\bigvee\{\hat{B} \mid B \in At(p), \langle \gamma \rangle q \notin B\} \vee \bigvee\{\hat{C} \mid C \in At(p), \langle \gamma \rangle q \in C, (A, C) \in R'_0(\beta)\}$$

și cu  $t$  enunțul

$$\bigvee\{\hat{B} \mid B \in At(p), q \notin B\} \vee \bigvee\{\hat{C} \mid C \in At(p), q \in C, (A, C) \in R'_0(\beta\gamma)\}.$$

Demonstrăm în continuare

$$(*) \vdash_{\mathbf{PDL}} r \rightarrow [\gamma]t.$$

Pentru aceasta, arătăm că

$$(11) \vdash_{\mathbf{PDL}} \hat{B} \rightarrow [\gamma]t \text{ și}$$

$$(12) \vdash_{\mathbf{PDL}} \hat{C} \rightarrow [\gamma]t,$$

pentru atomii  $B$  și  $C$  din disjuncțiile lui  $r$ .

Din  $\langle \gamma \rangle q \notin B$  rezultă că  $\neg \langle \gamma \rangle q \in B$ , deci  $[\gamma]\neg q \in B$ . Prin urmare,

$$(13) \vdash_{\mathbf{PDL}} \hat{B} \rightarrow [\gamma]\neg q.$$

Aplicând Lema 4.2.18.(i) obținem

$$(14) \vdash_{\mathbf{PDL}} \neg q \leftrightarrow \bigvee\{\hat{D} \mid D \in At(p), q \notin D\}.$$

Din (13) și (14) rezultă

$$(15) \vdash_{\mathbf{PDL}} \hat{B} \rightarrow \bigvee\{\hat{D} \mid D \in At(p), q \notin D\}.$$

Din (15), folosind (D) rezultă (11).

Din  $\langle \gamma \rangle q \in C$  și  $(A, C) \in R'_0(\beta)$  obținem, aplicând ipoteza de inducție pentru  $\gamma$ ,

$$(16) \vdash_{\mathbf{PDL}} \hat{C} \rightarrow [\gamma](\bigvee\{\hat{B} \mid B \in At(p), q \notin B\} \vee \bigvee\{\hat{D} \mid D \in At(p), q \in D, (C, D) \in R'_0(\gamma)\}).$$

Deoarece  $(A, C) \in R'_0(\beta)$  și  $(C, D) \in R'_0(\gamma)$  rezultă  $(A, D) \in R'_0(\beta\gamma)$ . Prin urmare  $(C, D) \in R'_0(\gamma)$  de mai sus poate fi înlocuit cu  $(A, D) \in R'_0(\beta\gamma)$ , care doar slăbește disjuncția. Obținem astfel (12).

Din (11) și (12) rezultă imediat (\*). Din (\*) și (10), folosind (D) rezultă

$$(17) \vdash_{\mathbf{PDL}} \hat{A} \rightarrow [\beta][\gamma]t.$$

Aplicând (A2b), din (17) se obține rezultatul dorit.

$$-\alpha \text{ este } \beta^*$$

Notăm cu  $r$  enunțul

$$\bigvee\{\hat{B} \mid B \in At(p), \langle \beta^* \rangle q \notin B\} \vee \bigvee\{\hat{C} \mid C \in At(p), \langle \beta^* \rangle q \in C, (A, C) \in R'_0(\beta^*\beta)\}$$

și cu  $t$  enunțul

$$\bigvee\{\hat{B} \mid B \in At(p), q \notin B\} \vee \bigvee\{\hat{C} \mid C \in At(p), q \in C, (A, C) \in R'_0(\beta^*)\}$$

Demonstrăm

$$(**) \vdash_{\mathbf{PDL}} \hat{A} \rightarrow [\beta]r.$$

Din  $\langle \beta^* \rangle q \in A$  rezultă  $q \in A$  sau  $\langle \beta \rangle \langle \beta^* \rangle q \in A$ . Deci,

$$(18) \hat{A} \rightarrow (q \vee \langle \beta \rangle \langle \beta^* \rangle q).$$

Avem două cazuri:

(i)  $\langle \beta \rangle \langle \beta^* \rangle q \in A$ . Din ipoteza de inducție pentru  $\beta$  obținem

$$(19) \vdash_{\mathbf{PDL}} (\hat{A} \rightarrow [\beta](\bigvee\{\hat{B} \mid B \in At(p), \langle \beta^* \rangle q \notin B\} \vee \bigvee\{\hat{C} \mid C \in At(p), \langle \beta^* \rangle q \in C, (A, C) \in R'_0(\beta)\})).$$

Deoarece  $R'_0(\beta) \subseteq R'_0(\beta^*\beta)$ , rezultă

$$(20) \bigvee\{\hat{C} \mid C \in At(p), \langle \beta^* \rangle q \in C, (A, C) \in R'_0(\beta)\} \rightarrow \bigvee\{\hat{C} \mid C \in At(p), \langle \beta^* \rangle q \in C, (A, C) \in R'_0(\beta^*\beta)\}.$$

Din (20) rezultă

$$(21) (\bigvee\{\hat{B} \mid B \in At(p), \langle \beta^* \rangle q \notin B\} \vee \bigvee\{\hat{C} \mid C \in At(p), \langle \beta^* \rangle q \in C, (A, C) \in R'_0(\beta^*\beta)\}) \rightarrow (\bigvee\{\hat{B} \mid B \in At(p), \langle \beta^* \rangle q \notin B\} \vee \bigvee\{\hat{C} \mid C \in At(p), \langle \beta^* \rangle q \in C, (A, C) \in R'_0(\beta^*\beta)\}).$$

Aplicând (D) obținem (\*\*).

(ii)  $\langle \beta \rangle \langle \beta^* \rangle q \notin A$ . Deoarece  $\neg \langle \beta \rangle \langle \beta^* \rangle q \in A$ , rezultă că  $\neg \langle \beta \rangle \langle \beta^* \rangle q \in A$ , deci  $[\beta]\neg \langle \beta^* \rangle q \in A$ . Obținem

$$(22) \vdash_{\mathbf{PDL}} \hat{A} \rightarrow [\beta]\neg \langle \beta^* \rangle q.$$

Din Lema 4.2.18.(i) rezultă

$$(23) \vdash_{\mathbf{PDL}} \neg \langle \beta^* \rangle q \leftrightarrow \bigvee\{\hat{B} \mid B \in At(p), \langle \beta^* \rangle q \notin B\}. \text{ Deoarece } \vdash_{\mathbf{PDL}} \bigvee\{\hat{B} \mid B \in At(p), \langle \beta^* \rangle q \notin B\} \rightarrow r, \text{ rezultă}$$

$$(24) \vdash_{\mathbf{PDL}} \neg \langle \beta^* \rangle q \rightarrow r. \text{ Folosind (D), din (24) obținem}$$

$$(25) \vdash_{\mathbf{PDL}} [\beta^*]\neg \langle \beta^* \rangle q \rightarrow [\beta^*]q.$$

Din (22) și (25) rezultă (\*\*).

În continuare, demonstrăm

$$(***) \vdash_{\mathbf{PDL}} r \rightarrow [\beta]t.$$

Arătăm că

$$(26) \vdash_{\mathbf{PDL}} \hat{B} \rightarrow [\beta]t \text{ și}$$

$$(27) \vdash_{\mathbf{PDL}} \hat{C} \rightarrow [\beta]t,$$

pentru atomii  $B$  și  $C$  din disjuncțiile lui  $t$ .

Din  $\langle \beta^* \rangle q \notin B$  rezultă că  $\langle \beta \rangle \langle \beta^* \rangle q \notin B$ , deci  $[\beta]\neg \langle \beta^* \rangle q \in B$ . Obținem ca mai sus că

$$(28) \vdash_{\mathbf{PDL}} \hat{B} \rightarrow [\beta]\bigvee\{\hat{D} \mid D \in At(p), \langle \beta^* \rangle q \notin D\}.$$

Adăugând disjuncții la (28) rezultă (26).

Din  $\langle \beta^* \rangle q \in C$  și  $(A, C) \in R'_0(\beta^* \beta)$  obținem ca în cazul (i) al demonstrației lui (\*\*)  
(29)  $\vdash_{\mathbf{PDL}} \hat{C} \rightarrow [\beta](\bigvee\{\hat{B} \mid B \in At(p), \langle \beta^* \rangle q \notin B\} \vee \bigvee\{\hat{D} \mid D \in At(p), \langle \beta^* \rangle q \in D, (C, D) \in R'_0(\beta^* \beta)\})$ .

Folosind faptul că  $(A, C) \in R'_0(\beta^* \beta)$ ,  $(C, D) \in R'_0(\beta^* \beta)$  de mai sus poate fi înlocuit cu  $(A, D) \in R'_0(\beta^* \beta)$ , care doar slăbește disjuncția. Rezultă astfel (27). Din (26) și (27) obținem (\*\*\*)

Am demonstrat astfel (\*\*) și (\*\*\*). Din (\*\*\*), folosind (I) și (D) obținem

$$(30) \vdash_{\mathbf{PDL}} [\beta]t \rightarrow [\beta][\beta^*]r.$$

Din (\*\*) și (30) rezultă

$$(31) \vdash_{\mathbf{PDL}} \hat{A} \rightarrow [\beta][\beta^*]r.$$

Deoarece  $\langle \beta^* \rangle q \notin B$  implică  $q \notin B$  și  $\bigvee\{\hat{C} \mid C \in At(p), \langle \beta^* \rangle q \in C, (A, C) \in R'_0(\beta^* \beta)\} \subseteq \bigvee\{\hat{C} \mid C \in At(p), q \in C, (A, C) \in R'_0(\beta^*)\}$ , rezultă

$$(32) \vdash_{\mathbf{PDL}} r \rightarrow t.$$

Aplicând (D), din (32) obținem

$$(33) \vdash_{\mathbf{PDL}} [\beta][\beta^*]r \rightarrow [\beta][\beta^*]t.$$

Din (31) și (33) rezultă

$$(34) \vdash_{\mathbf{PDL}} \hat{A} \rightarrow [\beta][\beta^*]t.$$

Deoarece  $(A, A) \in R'_0(\beta^*)$ , rezultă imediat, din faptul că  $\langle \beta^* \rangle q \in A$ ,

$$(35) \vdash_{\mathbf{PDL}} \hat{A} \rightarrow t.$$

Din (34), (35) și (A3) obținem  $\vdash_{\mathbf{PDL}} \hat{A} \rightarrow [\beta^*]t$ .  $\square$

**Lema 4.2.20** Pentru orice  $A \in At(p)$ , dacă  $A \notin W$  atunci  $\vdash_{\mathbf{PDL}} \neg \hat{A}$ .

**Demonstrație:** Prin inducție după pasul la care  $A$  a fost eliminat din  $W_0 = At(p)$ .

Dacă  $A$  a fost eliminat la primul pas, atunci  $A \in W_0$  și  $A \notin W_1$ . Prin urmare, există  $\langle \alpha \rangle q \in A$  astfel încât pentru orice  $B \in At(p)$ ,  $q \notin B$  sau  $(A, B) \notin R'_0(\alpha)$ .

Rezultă că

$$(1) \{C \mid C \in At(p), q \in C \text{ și } (A, C) \in R'_0(\alpha)\} = \emptyset.$$

Deoarece  $\langle \alpha \rangle q \in A$ , putem aplica Lema 4.2.19 și din (1) obținem

$$(2) \vdash_{\mathbf{PDL}} \neg \hat{A} \rightarrow [\alpha] \bigvee\{\hat{B} \mid B \in At(p), q \notin B\}.$$

Deoarece  $B$  este atom,  $q \notin B$  dacă și numai dacă  $\neg q \in B$ . Din Lema 4.2.18.(i) și (D) rezultă

$$(3) \vdash_{\mathbf{PDL}} [\alpha] \neg q \leftrightarrow [\alpha] \bigvee\{\hat{B} \mid B \in At(p), \neg q \in B\}.$$

Din (2) și (3) obținem

$$(4) \vdash_{\mathbf{PDL}} \langle \alpha \rangle q \rightarrow \neg \hat{A}.$$

Deoarece  $\langle \alpha \rangle q \in A$ ,

$$(5) \vdash_{\mathbf{PDL}} \hat{A} \rightarrow \langle \alpha \rangle q.$$

Din (4) și (5) obținem  $\vdash_{\mathbf{PDL}} \hat{A} \rightarrow \neg \hat{A}$ . Folosind  $\vdash_{\mathbf{PDL}} (\hat{A} \rightarrow \neg \hat{A}) \rightarrow \neg \hat{A}$ , rezultă  $\vdash_{\mathbf{PDL}} \neg \hat{A}$ .

Presupunem că pentru orice atom  $C$  care a fost eliminat la un pas  $\leq n$ ,

$$(6) \vdash_{\mathbf{PDL}} \neg \hat{C}.$$

Fie  $A$  un atom eliminat la pasul  $n+1$ . Rezultă că  $A \in W_n$  și  $A \notin W_{n+1}$ . Prin urmare, există  $\langle \alpha \rangle q \in A$  astfel încât

$$(7) \text{ pentru orice } C \in W_n \text{ avem } q \notin C \text{ sau } (A, C) \notin R'_0(\alpha).$$

Deoarece  $\langle \alpha \rangle q \in A$ , putem aplica Lema 4.2.19. Obținem

$$(8) \vdash_{\mathbf{PDL}} \hat{A} \rightarrow [\alpha](\bigvee \{\hat{B} \mid B \in At(p), q \notin B\} \vee \bigvee \{\hat{C} \mid C \in At(p), q \in C, (A, C) \in R'_0(\alpha)\}).$$

Din (8), folosind  $\neg[\alpha]r = \langle \alpha \rangle \neg r$  și tautologiile calculului propozițional, rezultă

$$(9) \vdash_{\mathbf{PDL}} \langle \alpha \rangle (\bigwedge \{\neg \hat{B} \mid B \in At(p), q \notin B\} \wedge \bigwedge \{\neg \hat{C} \mid C \in At(p), q \in C, (A, C) \in R'_0(\alpha)\}) \rightarrow \neg \hat{A}.$$

Dacă  $C \in At(p)$  astfel încât  $q \in C$  și  $(A, C) \in R'_0(\alpha)$ , atunci  $C \notin W_n$ . Într-adevăr, în caz contrar, rezultă că  $q \in C$  și  $(A, C) \in R'_0(\alpha) = R'_n(\alpha)$ , ceea ce contrazice (7). Prin urmare,  $C$  a fost eliminat la un pas  $\leq n$ . Rezultă, conform (6),

$$(10) \vdash_{\mathbf{PDL}} \bigwedge \{\neg \hat{C} \mid C \in At(p), q \in C, (A, C) \in R'_0(\alpha)\}.$$

Aplicând Lema 4.2.18.(i) obținem

$$(11) \vdash_{\mathbf{PDL}} q \leftrightarrow \bigvee \{\hat{B} \mid B \in At(p), q \in B\}.$$

Din (11) și Lema 4.2.18.(ii) rezultă

$$(12) \vdash_{\mathbf{PDL}} q \leftrightarrow \bigwedge \{\neg \hat{B} \mid B \in At(p), q \notin B\}.$$

Folosind  $(D')$ , din (10) și (12) obținem

$$(13) \vdash_{\mathbf{PDL}} \langle \alpha \rangle q \rightarrow \langle \alpha \rangle (\bigwedge \{\neg \hat{B} \mid B \in At(p), q \notin B\} \wedge \bigwedge \{\neg \hat{C} \mid C \in At(p), q \in C, (A, C) \in R'_0(\alpha)\}).$$

Din  $\vdash_{\mathbf{PDL}} (\hat{A} \rightarrow \langle \alpha \rangle q)$ , (10) și (13) rezultă  $\vdash_{\mathbf{PDL}} \hat{A} \rightarrow \neg \hat{A}$ . Rezultă ca mai sus  $\vdash_{\mathbf{PDL}} \neg \hat{A}$ .  $\square$

**Lema 4.2.21** Enunțul  $p$  este realizabil dacă și numai dacă există  $A \in W$  astfel încât  $p \in A$ .

**Demonstrație:**  $(\Leftarrow)$  Dacă există  $A \in W$  astfel încât  $p \in A$ , atunci din Lema 4.2.15

obținem  $\mathcal{D}, A \models p$ , deci  $p$  este realizabil.

( $\Rightarrow$ ) Reciproc, presupunem că  $A \notin W$  pentru orice atom  $A$  astfel încât  $p \in A$ . Aplicând Lema 4.2.20, obținem  $\vdash_{\mathbf{PDL}} \neg \hat{A}$  pentru orice atom  $A$  astfel încât  $p \in A$ . Rezultă  $\vdash_{\mathbf{PDL}} \bigwedge \{\neg \hat{A} \mid A \in At(p), p \in A\}$ , deci  $\vdash_{\mathbf{PDL}} \bigvee \{\hat{A} \mid A \in At(p), p \in A\}$ . Din Lema 4.2.18 obținem  $\vdash_{\mathbf{PDL}} \neg p$ , deci  $\models \neg p$ , ceea ce contrazice faptul că  $p$  este realizabil.  $\square$

Acum putem încheia demonstrația completitudinii **PDL**.

**Teorema 4.2.22** Pentru orice enunț  $p$ , dacă  $\models p$ , atunci  $\vdash_{\mathbf{PDL}} p$ .

**Demonstrație:** Dacă  $\models p$ , atunci  $\neg p$  nu este realizabil. Aplicând lema anterioară rezultă că pentru orice  $A \in W$ ,  $\neg p \notin A$ . Din Lema 4.2.18.(i) obținem

$$\vdash_{\mathbf{PDL}} \neg p \leftrightarrow \bigvee \{\hat{A} \mid A \in (At(p) - W), \neg p \in A\}.$$

Prin urmare,

$$\vdash_{\mathbf{PDL}} p \leftrightarrow \bigwedge \{\neg \hat{A} \mid A \in (At(p) - W), \neg p \in A\}.$$

Aplicând Lema 4.2.20, obținem  $\vdash_{\mathbf{PDL}} p$ .  $\square$

## 5 Logica dinamică trivalentă propozițională

În acest capitol propunem un sistem de logică dinamică trivalentă propozițională **3PDL**. Prezentăm limbajul, sintaxa și semantica acestui sistem. Definim noțiunile de deductibilitate și consistență și demonstrăm proprietăți importante ale acestora. Sunt investigate modelele canonice și filtrările. Rezultatele principale ale acestui capitol sunt Lema adevărului și Teorema de filtrare. Aceste rezultate sunt pași spre demonstrarea unei teoreme de completitudine a sistemului propus.

### 5.1 Limbajul, sintaxa și semantica

#### 5.1.1 Limbajul

Limbajul logicii dinamice trivalente propoziționale este format din:

- (i) o mulțime numărabilă  $\Phi_0$  de *variabile propoziționale*,
- (ii) o mulțime numărabilă  $\Pi_0$  de *programe atomice*,
- (iii) conectorii calculului propozițional trivalent:  $\neg, \rightarrow$ ,
- (iv) operatorul  $[ ]$ ,
- (v) operatorii program:  $\cup, \cdot, *$ ,
- (vii) parantezele:  $(, ), [, ]$ .

Notăm cu  $p, q, r, \dots$  elementele lui  $\Phi_0$  și cu  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  elementele lui  $\Pi_0$ . Din  $\Phi_0$  și  $\Pi_0$  construim recursiv mulțimea  $\Phi$  a *enunțurilor* și mulțimea  $\Pi$  a *programelor compuse*:

- (i)  $\Phi_0 \subseteq \Phi$ ,
- (ii) dacă  $p \in \Phi$  și  $q \in \Phi$ , atunci  $\neg p \in \Phi$  și  $p \rightarrow q \in \Phi$ ,
- (iii) dacă  $p \in \Phi$  și  $\alpha \in \Pi$ , atunci  $[\alpha]p \in \Phi$ ,
- (iv)  $\Pi_0 \subseteq \Pi$ ,
- (v) dacă  $\alpha \in \Pi$  și  $\beta \in \Pi$ , atunci  $\alpha \cup \beta, \alpha \cdot \beta$  și  $\alpha^* \in \Pi$ .

Definim următoarele abrevieri:

$$\begin{aligned} p \vee q &:= ((p \rightarrow q) \rightarrow q), \\ p \wedge q &:= \neg(\neg p \vee \neg q), \\ p \leftrightarrow q &:= (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p), \\ p + q &:= \neg p \rightarrow q, \\ p \cdot q &:= \neg(\neg p + \neg q), \end{aligned}$$

$$\tilde{p} := p \rightarrow \neg p,$$

$f = \neg(p_0 \rightarrow p_0)$ , unde  $p_0$  este un enunț fixat,

$$\langle \alpha \rangle p := \neg[\alpha]\neg p.$$

Scriem  $pq$  în loc de  $p \cdot q$  și  $p^2$  în loc de  $p \cdot p$ . De asemenea, scriem  $\alpha\beta$  în loc de  $\alpha \cdot \beta$ .

### 5.1.2 Sintaxa

Printr-o *logică* peste limbajul dat înțelegem orice mulțime  $\mathcal{L}$  de enunțuri care satisface următoarele condiții:

- (i)  $\mathcal{L}$  conține toate tautologiile calculului propozițional trivalent,
- (ii)  $\mathcal{L}$  este închisă la *modus ponens*,
- (iii)  $\mathcal{L}$  este închisă la *substituție*.

Printr-o *logică normală trivalentă* înțelegem o logică  $\mathcal{L}$  care satisface următoarele condiții:

- (iv)  $\mathcal{L}$  conține orice enunțuri de forma

$$(A0) \quad [\alpha](p \rightarrow q) \rightarrow ([\alpha]p \rightarrow [\alpha]q),$$

$$(A1) \quad ([\alpha]p + [\alpha]q) \rightarrow [\alpha](p + q),$$

$$(A2) \quad [\alpha](p + p) \rightarrow ([\alpha]p + [\alpha]p),$$

$$(A3) \quad (\langle \alpha \rangle p + \langle \alpha \rangle p) \rightarrow \langle \alpha \rangle (p + p),$$

- (v)  $\mathcal{L}$  este închisă la  $\alpha$ -necesitate, pentru orice  $\alpha \in \Pi$ : dacă  $p \in \mathcal{L}$ , atunci  $[\alpha]p \in \mathcal{L}$ .

Printr-o *logică dinamică trivalentă* înțelegem o logică normală trivalentă care conține toate enunțurile de următoarea formă:

$$(A4) \quad [\alpha \cup \beta]p \leftrightarrow [\alpha]p \wedge [\beta]p,$$

$$(A5) \quad [\alpha\beta]p \leftrightarrow [\alpha][\beta]p,$$

$$(A6) \quad [\alpha^*]p \leftrightarrow p \wedge [\alpha][\alpha^*]p.$$

Spunem că un enunț  $p$  este *deductibil în logica  $\mathcal{L}$  dintr-o mulțime  $\Sigma$  de enunțuri* (și scriem  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} p$ ) dacă există un număr finit de enunțuri  $q_0, \dots, q_{n-1} \in \Sigma$  astfel încât

$$(q_0^2 q_1^2 \dots q_{n-1}^2) \rightarrow p \in \mathcal{L}.$$

Definirea noțiunii de deductibilitate folosind conectorul  $\wedge$  (ca în logica dinamică propozițională) nu conduce la rezultate consistente.

Scriem  $\vdash_{\mathcal{L}} p$  pentru  $\emptyset \vdash_{\mathcal{L}} p$ . Un enunț  $p \in \Phi$  se numește *teoremă* a lui  $\mathcal{L}$  dacă  $\vdash_{\mathcal{L}} p$ .

Se observă imediat că  $p$  este teoremă a lui  $\mathcal{L}$  dacă și numai dacă  $p \in \mathcal{L}$ .

Spunem că o mulțime de enunțuri  $\Sigma$  este  *$\mathcal{L}$ -consistentă* dacă nu există nici un enunț  $p$

astfel încât  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} p$  și  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \neg p$ . Mulțimea  $\Sigma$  se numește  $\mathcal{L}$ -inconsistentă dacă nu este  $\mathcal{L}$ -consistentă. O mulțime  $\mathcal{L}$ -consistentă  $\Sigma$  se numește *maximal  $\mathcal{L}$ -consistentă* dacă pentru orice enunț  $p$ ,

$\Sigma \cup \{p\}$  este  $\mathcal{L}$ -consistentă implică  $p \in \Sigma$ .

În continuare prezentăm câteva proprietăți sintactice ale unei logici normale trivalente  $\mathcal{L}$ . În demonstrația următoarelor leme folosim tautologiile calculului propozițional trivalent, amintite în Propoziția 3.1.1.

**Lema 5.1.1** Fie  $\Sigma$  o mulțime de enunțuri,  $\alpha \in \Pi$  și  $p, q \in \Phi$ .

- (i) Dacă  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} p$ , atunci  $\Sigma' \vdash_{\mathcal{L}} p$  pentru orice mulțime de enunțuri  $\Sigma'$  care include  $\Sigma$ .
- (ii) Dacă  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} p$ , atunci există o submulțime finită  $\Sigma'$  a lui  $\Sigma$  astfel încât  $\Sigma' \vdash_{\mathcal{L}} p$ .
- (iii) Dacă  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} p$  și  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} p \rightarrow q$ , atunci  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} q$ .
- (iv) Dacă  $\Sigma \cup \{p\} \vdash_{\mathcal{L}} q$ , atunci  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} p \rightarrow (p \rightarrow q)$ .
- (v) Dacă  $\Sigma$  este  $\mathcal{L}$ -inconsistentă, atunci  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} r$  pentru orice enunț  $r$ .
- (vi)  $\Sigma$  este  $\mathcal{L}$ -inconsistentă dacă și numai dacă  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} f$ .
- (vii) Dacă  $\Sigma \cup \{p\}$  este  $\mathcal{L}$ -inconsistentă, atunci  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \bar{p}$ .
- (viii) Dacă  $\Sigma \cup \{\bar{p}\}$  este  $\mathcal{L}$ -inconsistentă, atunci  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} p$ .

**Demonstrație:** (i) și (ii) se demonstrează imediat din definiția deductibilității în logica  $\mathcal{L}$  din  $\Sigma$ .

(iii) Există  $\Psi_1 = \{r_0, \dots, r_{n-1}\}, \Psi_2 = \{t_0, \dots, t_{m-1}\} \subseteq \Sigma$  astfel încât

- (1)  $\vdash_{\mathcal{L}} (r_0^2 \cdots r_{n-1}^2) \rightarrow p$ ,
- (2)  $\vdash_{\mathcal{L}} (t_0^2 \cdots t_{m-1}^2) \rightarrow (p \rightarrow q)$ .

Din (2) și (t33) obținem

- (3)  $\vdash_{\mathcal{L}} (t_0^2 \cdots t_{m-1}^2 p) \rightarrow q$ .

Din (1) și (t34) rezultă

- (4)  $\vdash_{\mathcal{L}} (r_0^2 \cdots r_{n-1}^2 t_0^2 \cdots t_{m-1}^2) \rightarrow p t_0^2 \cdots t_{m-1}^2$ .

Folosind comutativitatea lui  $\cdot$  și (t2) obținem

- (5)  $\vdash_{\mathcal{L}} (r_0^2 \cdots r_{n-1}^2 t_0^2 \cdots t_{m-1}^2) \rightarrow q$ .

Prin urmare,  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} q$ .

(iv) Există  $\Psi = \{r_0, \dots, r_{n-1}\} \subseteq \Sigma \cup \{p\}$  astfel încât  $\vdash_{\mathcal{L}} (r_0^2 \cdots r_{n-1}^2) \rightarrow q$ . Avem două cazuri:

$-p \notin \Psi$

Rezultă că  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} q$ . Folosind faptul că  $\vdash_{\mathcal{L}} q \rightarrow (pp \rightarrow q)$  și (iii), obținem  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} pp \rightarrow q$ . Din (t33) și (iii) rezultă  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} p \rightarrow (p \rightarrow q)$ .

$-p \in \Psi$

Deoarece, conform (t29)  $\cdot$  este comutativă, putem presupune că  $p = r_0$ . Aplicând (t33) obținem

$$(6) \quad \vdash_{\mathcal{L}} (r_1^2 \cdots r_{n-1}^2) \rightarrow (p^2 \rightarrow q).$$

Din (6), folosind din nou (t33) și (t2), rezultă

$$(7) \quad \vdash_{\mathcal{L}} (r_1^2 \cdots r_{n-1}^2) \rightarrow (p \rightarrow (p \rightarrow q)).$$

Prin urmare,  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} p \rightarrow (p \rightarrow q)$ .

(v) Dacă există  $p \in \Phi$  astfel încât  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} p$  și  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \neg p$ , atunci folosind (t8) rezultă că  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \neg p \rightarrow (p \rightarrow r)$ . Aplicând de două ori (iii) obținem  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} r$ .

(vi) Dacă  $\Sigma$  este  $\mathcal{L}$ -inconsistentă, atunci din (v) rezultă că  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} f$ . Reciproc, dacă  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} f$ , atunci din (t11) obținem și  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} p_0 \rightarrow p_0$ . Deci,  $\Sigma$  este  $\mathcal{L}$ -inconsistentă.

(vii) Dacă  $\Sigma \cup \{p\}$  este  $\mathcal{L}$ -inconsistentă, atunci rezultă din (v) că  $\Sigma \cup \{p\} \vdash_{\mathcal{L}} \neg p$ . Din (iv) obținem  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} p \rightarrow \tilde{p}$ . Aplicând (t16) și (iii), rezultă  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \tilde{p}$ .

(viii) Dacă  $\Sigma \cup \{\tilde{p}\}$  este  $\mathcal{L}$ -inconsistentă, atunci folosind (vii) obținem  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \tilde{\tilde{p}}$ . Din (t15) și (iii) rezultă  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} p$ .  $\square$

**Lema 5.1.2**  $\Sigma$  este  $\mathcal{L}$ -consistentă dacă și numai dacă orice submulțime finită a sa este  $\mathcal{L}$ -consistentă.

**Demonstrație:** ( $\Rightarrow$ ) Dacă există o submulțime finită  $\Psi$  a lui  $\Sigma$  care este  $\mathcal{L}$ -inconsistentă, atunci folosind Lema 5.1.1. (vi) rezultă că  $\Psi \vdash_{\mathcal{L}} f$ . Din Lema 5.1.1.(i) obținem  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} f$ , deci  $\Sigma$  este  $\mathcal{L}$ -inconsistentă.

( $\Leftarrow$ ) Presupunem că  $\Sigma$  este  $\mathcal{L}$ -inconsistentă. Rezultă că  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} f$ . Aplicând Lema 5.1.1.(ii), există  $\Psi \subseteq \Sigma$ , finită astfel încât  $\Psi \vdash_{\mathcal{L}} f$ . Din Lema 5.1.1.(vi) obținem că  $\Psi$  este  $\mathcal{L}$ -inconsistentă, ceea ce contrazice ipoteza.  $\square$

**Lema 5.1.3** Orice mulțime  $\mathcal{L}$ -consistentă  $\Sigma$  se extinde la o mulțime maximal  $\mathcal{L}$ -consistentă.

**Demonstrație:** Deoarece mulțimea  $\Phi_0$  a variabilelor propoziționale este numărabilă, rezultă că mulțimea  $\Phi$  a enunțurilor este numărabilă. Fie  $p_0, \dots, p_n, \dots$  o enumerare a enunțurilor. Definim inductiv următorul șir de mulțimi:

$$\Sigma_0 = \Sigma, \quad \Sigma_{n+1} = \begin{cases} \Sigma_n \cup \{p_n\} & \text{dacă } \Sigma_n \cup \{p_n\} \text{ este } \mathcal{L}\text{-consistentă} \\ \Sigma_n & \text{altfel} \end{cases}$$

Evident, pentru orice  $n \in \mathbf{N}$ ,  $\Sigma_n$  este  $\mathcal{L}$ -consistentă.

Fie  $w = \bigcup_{n \geq 0} \Sigma_n$ .

Demonstrăm că  $w$  este  $\mathcal{L}$ -consistentă. Presupunem că nu este. Atunci, folosind Lema 5.1.1.(ii), rezultă că există  $p_{i_0}, p_{i_1}, \dots, p_{i_{k-1}} \in w$  astfel încât  $\{p_{i_0}, p_{i_1}, \dots, p_{i_{k-1}}\}$  este  $\mathcal{L}$ -inconsistentă. Fie  $n = \max\{i_0, i_1, \dots, i_{k-1}\}$ . Rezultă că  $\{p_{i_0}, p_{i_1}, \dots, p_{i_{k-1}}\} \in \Sigma_{n+1}$ . Obținem că  $\Sigma_{n+1}$  este  $\mathcal{L}$ -inconsistentă, ceea ce este o contradicție.

Demonstrăm că  $\Sigma$  este maximal  $\mathcal{L}$ -consistentă. Fie  $p_m \in \Phi$  astfel încât  $p_m \notin w$ . Din construcția lui  $w$  rezultă că  $\Sigma_m \cup \{p_m\}$  este  $\mathcal{L}$ -inconsistentă. Deoarece  $\Sigma_m \cup \{p_m\} \subseteq w \cup \{p_m\}$ , obținem că  $w \cup \{p_m\}$  este  $\mathcal{L}$ -inconsistentă.  $\square$

**Lema 5.1.4** Fie  $\Sigma$  o mulțime maximal  $\mathcal{L}$ -consistentă și  $p \in \Phi$ . Dacă  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} p$ , atunci  $p \in \Sigma$ .

**Demonstrație:** Presupunem că  $p \notin \Sigma$ . Rezultă că  $\Sigma \cup \{p\}$  este  $\mathcal{L}$ -inconsistentă, prin urmare, folosind Lema 5.1.1.(vii),  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \tilde{p}$ . Din  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} p$  și  $\sigma \vdash_{\mathcal{L}} \tilde{p}$  obținem  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \neg p$ . Am obținut că  $\Sigma$  este  $\mathcal{L}$ -inconsistentă, ceea ce este o contradicție.  $\square$

**Corolar 5.1.5** Dacă  $\Sigma$  este maximal  $\mathcal{L}$ -consistentă, atunci  $\mathcal{L} \subseteq \Sigma$ .

**Lema 5.1.6** Fie  $\Sigma$  o mulțime maximal  $\mathcal{L}$ -consistentă și  $p, q \in \Phi$ .

- (i) Dacă  $(p \rightarrow q) \in \Sigma$ , atunci  $p \in \Sigma$  implică  $q \in \Sigma$ ,
- (ii)  $p \in \Sigma$  dacă și numai dacă  $\tilde{p} \notin \Sigma$ .
- (iii)  $p \vee q \in \Sigma$  dacă și numai dacă  $p \in \Sigma$  sau  $q \in \Sigma$ ,
- (iv)  $p \wedge q \in \Sigma$  dacă și numai dacă  $p \in \Sigma$  și  $q \in \Sigma$ .
- (v) Dacă  $(p \leftrightarrow q) \in \Sigma$ , atunci  $p \in \Sigma$  dacă și numai dacă  $q \in \Sigma$ .
- (vi)  $pq \in \Sigma$  dacă și numai dacă  $p \in \Sigma$  și  $q \in \Sigma$ .

**Demonstrație:** (i) Presupunem  $p \rightarrow q \in \Sigma$  și  $p \in \Sigma$ . Rezultă că  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} p \rightarrow q$  și  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} p$ . Folosind Lema 5.1.1.(iii) obținem  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} q$ . Din Lema 5.1.4 rezultă  $q \in \Sigma$ .

(ii) Dacă  $p, \tilde{p} \in \Sigma$ , atunci  $p, p \rightarrow \neg p \in \Sigma$ . Din (i) rezultă că  $p, \neg p \in \Sigma$ . Prin urmare,

$\Sigma$  este  $\mathcal{L}$ -inconsistentă, ceea ce contrazice ipoteza. Dacă  $p \notin \Sigma$ , atunci  $\Sigma \cup \{p\}$  este  $\mathcal{L}$ -inconsistentă. Din Lema 5.1.1.(vii) rezultă că  $\Sigma \vdash_{\mathcal{L}} \tilde{p}$ . Aplicând Lema 5.1.4 obținem  $\tilde{p} \in \Sigma$ . Analog se demonstrează că dacă  $\tilde{p} \notin \Sigma$ , atunci  $p \in \Sigma$ .

(iii) ( $\Leftarrow$ ) Presupunem că  $p \in \Sigma$ . Conform (t23),  $\vdash_{\mathcal{L}} p \rightarrow (p \vee q)$  și aplicând (i) obținem  $p \vee q \in \Sigma$ .

( $\Rightarrow$ ) Presupunem că  $p \notin \Sigma$ . Din (ii) rezultă că  $\tilde{p} \in \Sigma$ , deci  $p \rightarrow \neg p \in \Sigma$ . Deoarece  $\vdash_{\mathcal{L}} (p \vee q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$  (conform (t34)) și  $p \vee q \in \Sigma$ , rezultă aplicând (i) că  $\neg p \rightarrow q \in \Sigma$ . Folosind (t1), din  $p \rightarrow \neg p \in \Sigma$  și  $\neg p \rightarrow q \in \Sigma$  obținem  $p \rightarrow q \in \Sigma$ . Din  $p \vee q = (p \rightarrow q) \rightarrow q \in \Sigma$ , aplicând din nou (i), rezultă  $q \in \Sigma$ .

(iv) ( $\Rightarrow$ ) Din (t20) rezultă  $\vdash_{\mathcal{L}} p \wedge q \rightarrow p$  și  $\vdash_{\mathcal{L}} p \wedge q \rightarrow q$ . Aplicând (i), obținem  $p \in \Sigma$  și  $q \in \Sigma$ .

( $\Leftarrow$ ) Conform (t26),  $\vdash_{\mathcal{L}} p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$ . Aplicăm (i) de două ori pentru a obține  $p \wedge q \in \Sigma$ .

(v) Rezultă imediat din (i) și (iv).

(vi)( $\Rightarrow$ ) Din (t36) rezultă  $\vdash_{\mathcal{L}} pq \rightarrow p$  și  $\vdash_{\mathcal{L}} pq \rightarrow q$ . Aplicând (i), obținem  $p \in \Sigma$  și  $q \in \Sigma$ .

( $\Leftarrow$ ) Din (t33) obținem  $\vdash_{\mathcal{L}} p \rightarrow (q \rightarrow (pq))$ . Aplicăm (i) de două ori pentru a obține  $pq \in \Sigma$ .  $\square$

Este evident că intersecția oricărei clase de logici dinamice trivalente este o logică dinamică trivalentă. Notăm cu **3PDL** intersecția tuturor logicilor dinamice trivalente.

### 5.1.3 Semantica

Printr-o *structură trivalentă* înțelegem un triplet  $\mathcal{D} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{V} \rangle$ , unde:

(i)  $W$  este o mulțime, ale cărei elemente se numesc *stări*,

(ii)  $R = \{R(\alpha)\}_{\alpha \in \Pi}$  este o familie de relații binare pe  $W$ , adică  $R(\alpha) \subseteq W \times W$  pentru orice program compus  $\alpha$ ,

(iii)  $V : \Phi \times W \rightarrow L_3 = \{0, 1\}$  este o funcție numită *valuare*, care satisface:

(a)  $V(\neg p, s) = 1 - V(p, s)$ ,

(b)  $V(p \rightarrow q, s) = \min\{1, 1 - V(p, s) + V(q, s)\}$ ,

(c)  $V([\alpha]p, s) = \min\{V(p, t) \mid sR(\alpha)t\}$ ,

pentru orice  $p, q \in \Phi$ ,  $s \in W$  și  $\alpha \in \Pi$ .

Următoarele proprietăți ale unei valuări  $V$  sunt consecințe imediate ale definiției:

- (d)  $V(p \vee q, s) = \max\{V(p, s), V(q, s)\}$ ,
- (e)  $V(p \wedge q, s) = \min\{V(p, s), V(q, s)\}$ ,
- (f)  $V(p \leftrightarrow q, s) = \min\{1 - V(p, s) + V(q, s), 1 - V(q, s) + V(p, s)\}$ ,
- (g)  $V(p + q, s) = \min\{1, V(p, s) + V(q, s)\}$ ,
- (h)  $V(pq, s) = \max\{0, V(p, s) + V(q, s) - 1\}$ ,
- (i)  $V(\tilde{p}, s) = \min\{1, 2 - 2V(p, s)\}$ ,
- (j)  $V(\sim p) = \min\{1, 2V(p, s)\}$ ,
- (k)  $V(\langle \alpha \rangle p, s) = \max\{V(p, t) \mid sR(\alpha)t\}$ ,

pentru orice  $p, q \in \Phi$ ,  $s \in W$  și  $\alpha \in \Pi$ .

Punem în evidență următoarele echivalențe, care vor fi folosite în continuare:

- (e1)  $V(p, \neg s) = 1 \Leftrightarrow V(p, s) = 0$ ,
- (e2)  $V(p \rightarrow q, s) = 1 \Leftrightarrow V(p, s) \leq V(q, s)$ ,
- (e3)  $V(p \vee q, s) = 1 \Leftrightarrow V(p, s) = 1$  sau  $V(q, s) = 1$ ,
- (e4)  $V(p \wedge q, s) = 1 \Leftrightarrow V(p, s) = V(q, s) = 1$ ,
- (e5)  $V(p \leftrightarrow q, s) = 1 \Leftrightarrow V(p, s) = V(q, s)$ ,
- (e6)  $V(p + q, s) = 1 \Leftrightarrow V(p, s) + V(q, s) \geq 1$ ,
- (e7)  $V(pq, s) = 1 \Leftrightarrow V(p, s) = V(q, s) = 1$ ,
- (e8)  $V(\tilde{p}, s) = 1 \Leftrightarrow V(p, s) \leq \frac{1}{2}$ ,
- (e9)  $V(\sim p, s) = 1 \Leftrightarrow V(p, s) \geq \frac{1}{2}$ ,
- (e9)  $V([\alpha]p, s) = 1 \Leftrightarrow V(p, t) = 1$  pentru orice  $t$  astfel încât  $sR(\alpha)t$ ,
- (e10)  $V(\langle \alpha \rangle p, s) = 1 \Leftrightarrow$  există  $t$  astfel încât  $sR(\alpha)t$  și  $V(p, t) = 1$ .

Se numește *structură dinamică trivalentă* o structură trivalentă  $\mathcal{D} = \langle W, R, V \rangle$  care satisface următoarele condiții:

- (i)  $R(\alpha \cup \beta) = R(\alpha) \cup R(\beta)$ ,
- (ii)  $R(\alpha\beta) = R(\alpha) \circ R(\beta)$ ,
- (iii)  $R(\alpha^*) = (R(\alpha))^*$ .

Observăm că în cazul unei structuri dinamice trivalente este suficient să definim  $R(\alpha)$  pentru orice  $\alpha \in \Pi_0$ .

Fie  $\mathcal{D} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{V} \rangle$  o structură trivalentă și  $p$  un enunț. Definim:

- $p$  este *adevărat în starea*  $s \in W$  și scriem  $\mathcal{D}, s \models p$  dacă  $V(p, s) = 1$ ,
- $p$  este  *$\mathcal{D}$ -valid* și scriem  $\mathcal{D} \models p$  dacă  $\mathcal{D}, s \models p$  pentru orice stare  $s \in W$ ,

-  $p$  este  $\mathcal{D}$ -realizabil dacă există  $s \in W$  astfel încât  $\mathcal{D}, s \models p$ .

Dacă  $p$  este  $\mathcal{D}$ -valid pentru orice structură dinamică trivalentă  $\mathcal{D}$  spunem că  $p$  este *valid* și scriem  $\models p$ . Enunțul  $p$  este *realizabil* dacă există o structură dinamică trivalentă  $\mathcal{D}$  astfel încât  $p$  este  $\mathcal{D}$ -realizabil. Evident,  $p$  este valid dacă și numai dacă  $\neg p$  nu este realizabil.

**Lema 5.1.7** Pentru orice  $p, q \in \Phi$  și orice  $\alpha \in \Pi$ , următoarele enunțuri sunt valide:

- (i)  $[\alpha](p \rightarrow q) \rightarrow ([\alpha]p \rightarrow [\alpha]q)$ ,
- (ii)  $([\alpha]p + [\alpha]q) \rightarrow [\alpha](p + q)$ ,
- (iii)  $[\alpha](p + p) \rightarrow ([\alpha]p + [\alpha]p)$ ,
- (iv)  $(\langle \alpha \rangle p + \langle \alpha \rangle p) \rightarrow \langle \alpha \rangle (p + p)$ ,
- (v)  $[\alpha \cup \beta]p \leftrightarrow [\alpha]p \wedge [\beta]p$ ,
- (vi)  $[\alpha\beta]p \leftrightarrow [\alpha][\beta]p$ ,
- (vii)  $[\alpha^*]p \leftrightarrow p \wedge [\alpha][\alpha^*]p$ .

**Demonstrație:** Fie  $\mathcal{D} = \langle W, R, V \rangle$  o structură dinamică trivalentă și  $s \in W$ .

$$(i) V([\alpha](p \rightarrow q), s) = \min\{V(p \rightarrow q, t) \mid sR(\alpha)t\} = \min\{\min\{1, 1 - V(p, t) + V(q, t)\} \mid sR(\alpha)t\} \leq \min\{1, 1 - V([\alpha]p, s) + V([\alpha]q, s)\} = V([\alpha]p \rightarrow [\alpha]q, s).$$

$$(ii) V([\alpha]p + [\alpha]q, s) = \min\{1, V([\alpha]p, s) + V([\alpha]q, s)\} = \min\{1, \min\{V(p, t) \mid sR(\alpha)t\} + \min\{V(q, t) \mid sR(\alpha)t\}\} \leq \min\{1, \min\{V(p, t) + V(q, t) \mid sR(\alpha)t\}\} = \min\{\min\{1, V(p, t) + V(q, t)\} \mid sR(\alpha)t\} = \min\{V(p + q, t) \mid sR(\alpha)t\} = V([\alpha](p + q), s)$$

$$(iii) V([\alpha](p + p), s) = \min\{V(p + p, t) \mid sR(\alpha)t\} = \min\{\min\{1, 2V(p, t)\} \mid sR(\alpha)t\} = \min\{1, \min\{2V(p, t) \mid sR(\alpha)t\}\} = \min\{1, 2V([\alpha]p, s)\} = V([\alpha]p + [\alpha]p, s).$$

$$(iv) V(\langle \alpha \rangle p + \langle \alpha \rangle p, s) = \min\{1, 2V(\langle \alpha \rangle p, s)\} = \min\{1, 2\max\{V(p, t) \mid sR(\alpha)t\}\} \leq \max\{\min\{1, 2V(p, t)\} \mid sR(\alpha)t\} = \max\{V(p + p, t) \mid sR(\alpha)t\} = V(\langle \alpha \rangle (p + p), s).$$

$$(v) V([\alpha \cup \beta]p, s) = \min\{V(p, t) \mid sR(\alpha \cup \beta)t\} = \min\{\{V(p, t) \mid sR(\alpha)t\} \cup \{V(p, t) \mid sR(\beta)t\}\} = \min\{\min\{V(p, t) \mid sR(\alpha)t\}, \min\{V(p, t) \mid sR(\beta)t\}\} = \min\{V([\alpha]p, s), V([\beta]p, s)\} = V([\alpha]p \wedge [\beta]p, s).$$

$$(vi) V([\alpha\beta]p, s) = \min\{V(p, t) \mid sR(\alpha\beta)t\} = \min\{\cup\{V(p, t) \mid uR(\beta)t\} \mid sR(\alpha)u\} = \min\{\min\{V(p, t) \mid uR(\beta)t\} \mid sR(\alpha)u\} = \min\{V([\beta]p, u) \mid sR(\alpha)u\} = V([\alpha\beta]p, s).$$

$$(vii) V([\alpha^*]p, s) = \min\{V(p, t) \mid sR(\alpha^*)t\} = \min\{V(p, s), \min\{V(p, t) \mid sR(\alpha) \circ (R(\alpha))^*t\}\} = \min\{V(p, s), \min\{\min\{V(p, t) \mid u(R(\alpha))^*t\} \mid sR(\alpha)u\}\} = \min\{V(p, s), V([\alpha][\alpha^*]p, s)\} = V(p \wedge [\alpha][\alpha^*]p, s). \quad \square$$

**Lema 5.1.8** Pentru orice enunț  $p$ , dacă  $\vdash_{\mathbf{3PDL}} p$ , atunci  $\models p$ .

**Demonstrație:** Evident, tautologiile calculului propozițional trivalent sunt valide. Conform lemei anterioare, instanțele schemelor (A0) – (A6) sunt valide. Se arată imediat că *modus ponens* și  $\alpha$ -necesitatea păstrează această validitate.

Fie  $\mathcal{D} = \langle W, R, V \rangle$  o structură dinamică trivalentă și  $s \in W$ . Dacă  $\models p$  și  $\models p \rightarrow q$ , atunci  $V(p, s) = 1$  și  $\min\{1, 1 - V(p, s) + V(q, s)\} = 1$ , de unde rezultă  $V(q, s) = 1$ . Deci  $\models q$ .

Dacă  $\models p$ , atunci  $V([\alpha]p, s) = \min\{V(p, t) \mid sR(\alpha)t\} = 1$ , deoarece  $V(p, t) = 1$  pentru orice  $t \in W$ . Prin urmare,  $\models [\alpha]p$ .  $\square$

## 5.2 Modele canonice

Fie  $\mathcal{L}$  o logică normală trivalentă. Prin *model canonic* al lui  $\mathcal{L}$  înțelegem tripletul  $\mathcal{M}_{\mathcal{L}} = \langle W_{\mathcal{L}}, R_{\mathcal{L}}, V_{\mathcal{L}} \rangle$ , unde:

(i)  $W_{\mathcal{L}}$  este mulțimea tuturor mulțimilor de enunțuri maximal  $\mathcal{L}$ -consistente,

(ii) pentru orice program compus  $\alpha$  și orice  $u, v \in W_{\mathcal{L}}$ ,

$uR_{\mathcal{L}}(\alpha)v$  dacă și numai dacă pentru orice  $p \in \Phi$ , sunt satisfăcute:

-dacă  $[\alpha]p \in u$ , atunci  $p \in v$ ,

-dacă  $\neg[\alpha]p \in u$ , atunci  $\neg p \in v$ ,

-dacă  $[\alpha]p, \neg[\alpha]p \notin u$ , atunci  $p, \neg p \notin v$ .

(iii) pentru orice variabilă propozițională  $p \in \Phi_0$  și pentru orice  $u \in W_{\mathcal{L}}$ ,

$$V_{\mathcal{L}}(p, u) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } p \in u \\ 0, & \text{dacă } \neg p \in u \\ \frac{1}{2}, & \text{altfel} \end{cases}$$

**Lema 5.2.1** Dacă  $\mathcal{L}$  este o logică normală trivalentă, atunci pentru orice  $u \in W_{\mathcal{L}}$  și orice enunț  $p$ ,

(i)  $p \in u$  implică  $V_{\mathcal{L}}(p, u) = 1$ ,

(ii)  $\neg p \in u$  implică  $V_{\mathcal{L}}(p, u) = 0$ ,

(iii)  $p, \neg p \notin u$  implică  $V_{\mathcal{L}}(p, u) = \frac{1}{2}$ .

**Demonstrație:** Prin inducție după enunțul  $p$ .

- $p$  este variabilă propozițională

Rezultă imediat din definiția lui  $V_{\mathcal{L}}$ .

- $p$  este  $\neg q$

(i) Dacă  $\neg q \in u$ , atunci din ipoteza de inducție pentru  $q$  obținem  $V_{\mathcal{L}}(q, u) = 0$ , deci  $V_{\mathcal{L}}(p, u) = 1 - V_{\mathcal{L}}(q, u) = 1$ .

(ii) Dacă  $\neg\neg q \in u$ , atunci, din (t9) și Lema 5.1.6.(v), obținem  $q \in u$ , deci, din ipoteza de inducție  $V_{\mathcal{L}}(q, u) = 1$ . Rezultă că  $V_{\mathcal{L}}(p, u) = 0$ .

(iii) Dacă  $\neg q, \neg\neg q \notin u$ , atunci aplicăm (t9) și Lema 5.1.6.(v) pentru a obține  $q, \neg q \notin u$ . Din ipoteza de inducție pentru  $q$  rezultă  $V_{\mathcal{L}}(q, u) = \frac{1}{2}$ . Prin urmare,  $V_{\mathcal{L}}(p, u) = \frac{1}{2}$ .

- $p$  este  $q \rightarrow r$

(i) Avem următoarele cazuri posibile:

(i1)  $q \in u$ . Din  $q \rightarrow r \in u$  obținem  $r \in u$ . Din ipoteza de inducție pentru  $q$  și  $r$  rezultă  $V_{\mathcal{L}}(q, u) = 1$  și  $V_{\mathcal{L}}(r, u) = 1$ . Obținem  $V_{\mathcal{L}}(q \rightarrow r, u) = \min\{1, 1 - V_{\mathcal{L}}(q, u) + V_{\mathcal{L}}(r, u)\} = 1$ ,

(i2)  $\neg q \in u$ . Din ipoteza de inducție pentru  $q$ , obținem  $V_{\mathcal{L}}(q, u) = 0$ . Deoarece  $V_{\mathcal{L}}(q, u) \leq V_{\mathcal{L}}(r, u)$ , rezultă  $V_{\mathcal{L}}(q \rightarrow r, u) = 1$ ,

(i3)  $r \in u$ . Din ipoteza de inducție pentru  $r$  rezultă că  $V_{\mathcal{L}}(r, u) = 1$ , deci  $V_{\mathcal{L}}(q, u) \leq V_{\mathcal{L}}(r, u)$ . Prin urmare,  $V_{\mathcal{L}}(q \rightarrow r, u) = 1$ ,

(i4)  $\neg r \in u$ . Folosind  $q \rightarrow r \in u$  și (t10) rezultă că  $\neg q \in u$ . Obținem, din ipoteza de inducție, că  $V_{\mathcal{L}}(q, u) = V_{\mathcal{L}}(r, u) = 0$ . Prin urmare,  $V_{\mathcal{L}}(q \rightarrow r, u) = 1$ ,

(i5)  $q, \neg q, r, \neg r \notin u$ . Din ipoteza de inducție pentru  $q$  și  $r$  obținem  $V_{\mathcal{L}}(q, u) = V_{\mathcal{L}}(r, u) = \frac{1}{2}$ . Prin urmare,  $V_{\mathcal{L}}(q \rightarrow r, u) = 1$ .

(ii) Din  $\neg(q \rightarrow r) \in u$ , (t12) și (t13) rezultă  $q, \neg r \in u$ . Din ipoteza de inducție, obținem  $V_{\mathcal{L}}(q, u) = 1$  și  $V_{\mathcal{L}}(r, u) = 0$ . Prin urmare,  $V_{\mathcal{L}}(q \rightarrow r, u) = 0$ .

(iii) Presupunem că  $q \rightarrow r, \neg(q \rightarrow r) \notin u$ . Observăm că  $V_{\mathcal{L}}(q, u) \neq 0$ , deoarece  $V_{\mathcal{L}}(q, u) = 0$  implică  $\neg q \in u$  și, folosind (t8), rezultă  $q \rightarrow r \in u$ . De asemenea,  $V_{\mathcal{L}}(r, u) \neq 1$ , deoarece  $V_{\mathcal{L}}(r, u) = 1$  implică  $r \in u$  și, din (t1),  $q \rightarrow r \in u$ . Avem următoarele cazuri:

(iii1)  $V_{\mathcal{L}}(q, u) = 1$ . Prin urmare,  $q \in u$ . Atunci  $V_{\mathcal{L}}(r, u) \neq 0$ , deoarece  $V_{\mathcal{L}}(r, u) = 0$  implică  $\neg r \in u$ . Folosind (t14) rezultă  $\neg(q \rightarrow r) \in u$ . Deci,  $V_{\mathcal{L}}(q, u) = 1$  și  $V_{\mathcal{L}}(r, u) = \frac{1}{2}$ . Rezultă  $V_{\mathcal{L}}(q \rightarrow r, u) = \frac{1}{2}$ .

(iii2)  $V_{\mathcal{L}}(q, u) = \frac{1}{2}$ . Rezultă că  $q \notin u$ . Din Lema 5.1.6.(ii) obținem  $\tilde{p} \in u$ . Dacă  $V_{\mathcal{L}}(r, u) = \frac{1}{2}$ , atunci  $\neg r \notin u$ , deci,  $\neg r \in u$ . Aplicând (t17) obținem  $q \rightarrow r \in u$ . Deci,  $V_{\mathcal{L}}(r, u) \neq \frac{1}{2}$ . Din  $V_{\mathcal{L}}(q, u) = \frac{1}{2}$  și  $V_{\mathcal{L}}(r, u) = 0$  rezultă  $V_{\mathcal{L}}(q \rightarrow r, u) = \frac{1}{2}$ .

- $p$  este  $[\alpha]q$ ,

(i) Fie  $v \in W_{\mathcal{L}}$  astfel încât  $uR_{\mathcal{L}}(\alpha)v$ . Deoarece  $[\alpha]q \in u$ , rezultă  $q \in v$ . Din ipoteza de inducție obținem  $V_{\mathcal{L}}(q, v) = 1$ . Prin urmare, pentru orice  $v \in W_{\mathcal{L}}$  astfel încât  $uR_{\mathcal{L}}(\alpha)v$ ,  $V_{\mathcal{L}}(q, v) = 1$ . Rezultă că  $V_{\mathcal{L}}([\alpha]q, u) = 1$ .

(ii) Fie  $v \in W_{\mathcal{L}}$  astfel încât  $uR_{\mathcal{L}}(\alpha)v$ . Deoarece  $\neg[\alpha]q \in u$ , rezultă  $\neg q \in v$ . Din ipoteza de inducție obținem  $V_{\mathcal{L}}(q, v) = 0$ . Deci,  $V_{\mathcal{L}}([\alpha]q, u) = \min\{V_{\mathcal{L}}(p, v) \mid uR_{\mathcal{L}}(\alpha)v\} = 0$ .

(iii) Fie  $v \in W_{\mathcal{L}}$  astfel încât  $uR_{\mathcal{L}}(\alpha)v$ . Deoarece  $[\alpha]q, \neg[\alpha]q \notin u$ , rezultă  $q, \neg q \notin v$ . Din ipoteza de inducție obținem  $V_{\mathcal{L}}(q, v) = \frac{1}{2}$ . Deci,  $V_{\mathcal{L}}([\alpha]q, u) = \min\{V_{\mathcal{L}}(p, v) \mid uR_{\mathcal{L}}(\alpha)v\} = \frac{1}{2}$ .  $\square$

Următorul rezultat este o consecință imediată a lemei anterioare.

**Lema 5.2.2 (Lema adevărului)** Dacă  $\mathcal{L}$  este o logică normală, atunci pentru orice  $u \in W_{\mathcal{L}}$  și orice enunț  $p$ ,

- (i)  $V_{\mathcal{L}}(p, u) = 1$  dacă și numai dacă  $p \in u$ ,
- (ii)  $V_{\mathcal{L}}(p, u) = 0$  dacă și numai dacă  $\neg p \in u$ ,
- (iii)  $V_{\mathcal{L}}(p, u) = \frac{1}{2}$  dacă și numai dacă  $p, \neg p \notin u$ .

**Teorema 5.2.3** Dacă  $\mathcal{L}$  este o logică normală trivalentă, atunci  $p$  este teoremă a lui  $\mathcal{L}$  dacă și numai dacă  $p$  este  $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ -valid.

**Demonstrație:** ( $\Rightarrow$ ) Dacă  $\vdash_{\mathcal{L}} p$  atunci  $p$  este element al oricărei mulțimi maximal  $\mathcal{L}$ -consistente, conform Corolarului 5.1.5. Deci, din Lema adevărului,  $V_{\mathcal{L}}(p, u) = 1$  pentru orice  $u \in W_{\mathcal{L}}$ . Prin urmare,  $p$  este  $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ -valid.

( $\Leftarrow$ ) Dacă  $p$  nu este teoremă a lui  $\mathcal{L}$ , atunci  $\{\tilde{p}\}$  este  $\mathcal{L}$ -consistentă, conform Lemei 5.1.1.(viii). Rezultă din Lema 5.1.3 că există o mulțime maximal  $\mathcal{L}$ -consistentă  $x \in W_{\mathcal{L}}$  astfel încât  $\tilde{p} \in x$ . Din Lema adevărului obținem că  $V_{\mathcal{L}}(\tilde{p}, x) = 1$ , deci  $V_{\mathcal{L}}(p, x) \leq \frac{1}{2}$ . Prin urmare,  $V_{\mathcal{L}}(p, x) \neq 1$ , de unde rezultă că  $p$  nu este  $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ -valid.  $\square$

### 5.3 Filtrări

Mulțimea *subenunțurilor* unui enunț dat  $p$  este cea mai mică mulțime de enunțuri  $\Sigma$  care satisface următoarele condiții:

- (i)  $p \in \Sigma$ ,
- (ii) dacă  $\neg q \in \Sigma$ , atunci  $q \in \Sigma$ ,
- (iii) dacă  $q \rightarrow r \in \Sigma$ , atunci  $q, r \in \Sigma$ ,
- (iv) dacă  $[\alpha]q \in \Sigma$ , atunci  $q \in \Sigma$ .

Fie  $\mathcal{L}$  o logică normală trivalentă. Orice mulțime de enunțuri  $\Psi$  induce o relație de echivalență pe  $W_{\mathcal{L}}$  astfel:

$$u \equiv v \Leftrightarrow u \cap \Psi = v \cap \Psi.$$

Notăm cu  $|u|$  clasa de echivalență a lui  $u$ . Se observă că  $\equiv$  și, prin urmare,  $|u|$  depind de  $\Psi$  chiar dacă scrierea noastră nu reflectă acest lucru.

Fie  $\Psi$  o mulțime de enunțuri închisă la subenunțuri. Spunem că o structură trivalentă  $\overline{\mathcal{M}} = \langle \overline{W}, \overline{R}, \overline{V} \rangle$  este o *filtrare prin  $\Psi$*  a modelului canonic  $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$  dacă:

- (i)  $\overline{W} = \{|u| \mid u \in W_{\mathcal{L}}\}$ ,
- (ii) pentru orice program compus  $\alpha$  care apare în  $\Psi$ , dacă  $|u| \overline{R}(\alpha) |v|$ , atunci pentru orice enunț  $p$  cu proprietatea că  $[\alpha]p \in \Psi$ ,

$$\begin{aligned} [\alpha]p \in u &\text{ implică } p \in v, \\ \neg[\alpha]p \in u &\text{ implică } \neg p \in v, \\ [\alpha]p, \neg[\alpha]p \notin u &\text{ implică } p, \neg p \notin v, \end{aligned}$$

- (iii) pentru orice variabilă propozițională  $p$  care apare în  $\Psi$ ,

$$\overline{V}(p, |u|) = V_{\mathcal{L}}(p, u).$$

**Teorema 5.3.1 (Teorema de filtrare)** Pentru orice  $u \in W_{\mathcal{L}}$  și orice enunț  $p \in \Psi$ ,

$$\overline{V}(p, |u|) = V_{\mathcal{L}}(p, u).$$

**Demonstrație:** Prin inducție după enunțul  $p$ .

$\neg p$  este variabilă propozițională

Rezultă din definiție.

$\neg p$  este  $\neg q$

Deoarece  $\Psi$  este închisă la subenunțuri și  $\neg q \in \Psi$  rezultă că  $q \in \Psi$ , deci putem aplica ipoteza de inducție pentru  $q$ . Obținem:

$$\overline{V}(\neg q, |u|) = 1 - \overline{V}(q, |u|) = 1 - V_{\mathcal{L}}(q, u) = V_{\mathcal{L}}(\neg q, u).$$

$\neg p$  este  $q \rightarrow r$

Deoarece  $\Psi$  este închisă la subenunțuri și  $q \rightarrow r \in \Psi$  rezultă că  $q, r \in \Psi$ , deci putem aplica ipoteza de inducție pentru  $q$  și  $r$ . Obținem:

$$\bar{V}(q \rightarrow, |u|) = \min\{1, 1 - \bar{V}(q, |u|) + \bar{V}(r, |u|)\} = \min\{1, 1 - V_{\mathcal{L}}(q, u) + V_{\mathcal{L}}(r, u)\} = V_{\mathcal{L}}(q \rightarrow r, u).$$

- $p$  este  $[\alpha]q$

Deoarece  $\Psi$  este închisă la subenunțuri și  $[\alpha]q \in \Psi$  rezultă că  $q \in \Psi$ , deci putem aplica ipoteza de inducție pentru  $q$ .

Sunt posibile următoarele cazuri:

$-V_{\mathcal{L}}([\alpha]q, u) = 1$ . Din Lema adevărului obținem  $[\alpha]q \in u$ . Fie  $|v| \in \bar{W}$  astfel încât  $|u| \bar{R}(\alpha) |v|$ . Din (ii) rezultă  $q \in v$ , deci, aplicând din nou Lema adevărului,  $V_{\mathcal{L}}(q, u) = 1$ . Din ipoteza de inducție pentru  $q$  obținem  $\bar{V}(\alpha q, |v|) = 1$ . Prin urmare, pentru orice  $|v| \in \bar{W}$  astfel încât  $|u| \bar{R}(\alpha) |v|$ ,  $\bar{V}(q, |v|) = 1$ . Rezultă că  $\bar{V}([\alpha]q, |u|) = 1$ .

$-V_{\mathcal{L}}([\alpha]q, u) = 0$ . Din Lema adevărului obținem  $\neg[\alpha]q \in u$ . Fie  $|v| \in \bar{W}$  astfel încât  $|u| \bar{R}(\alpha) |v|$ . Din (ii) rezultă  $\neg q \in v$ , deci, aplicând din nou Lema adevărului,  $V_{\mathcal{L}}(q, u) = 0$ . Din ipoteza de inducție pentru  $q$  obținem  $\bar{V}(\alpha q, |v|) = 0$ . Deci,  $\bar{V}([\alpha]q, |u|) = \min\{\bar{V}(p, |v|) \mid |u| \bar{R}(\alpha) |v|\} = 0$ .

$-V_{\mathcal{L}}([\alpha]q, u) = \frac{1}{2}$ . Din Lema adevărului obținem  $[\alpha]q, \neg[\alpha]q \notin u$ . Fie  $|v| \in \bar{W}$  astfel încât  $|u| \bar{R}(\alpha) |v|$ . Din (ii) rezultă  $q, \neg q \notin v$ , deci, aplicând din nou Lema adevărului,  $V_{\mathcal{L}}(q, u) = \frac{1}{2}$ . Din ipoteza de inducție pentru  $q$  obținem  $\bar{V}(\alpha q, |v|) = \frac{1}{2}$ . Deci,  $\bar{V}([\alpha]q, |u|) = \min\{\bar{V}(p, |v|) \mid |u| \bar{R}(\alpha) |v|\} = \frac{1}{2}$ .

Am demonstrat astfel că  $\bar{V}([\alpha]q, |u|) = V_{\mathcal{L}}([\alpha]q, u)$ .  $\square$

## Bibliografie

- [B] M. H. van den Berg, The internal structure of discourse, ILLC Dissertation Series, 3, 1996.
- [BS] R. A. Bull, K. Segerberg, Basic Modal logic. În D. Gabbay și F. Guentner (editori), Handbook of Philosophical Logic, II, Springer Verlag, 1984, 1-89.
- [BFGR] V. Boicescu, A. Filipoiu, G. Georgescu, S. Rudeanu, Lukasiewicz-Moisil algebras, North-Holland, 1991.
- [C] M. J. Cresswell, Frames and models in modal logic, Lecture Notes in Mathematics, 450, Springer Verlag, 1975, 63-86.
- [FL] M. J. Fischer, R. E. Ladner, Propositional logic of programs, Proceedings of the 9th ACM Symposium on Theory of Computing, 1977, 286-294.
- [GLW] H. Goldberg, H. Leblanc, G. Weaver, A strong completeness theorem for 3-valued logic, Notre Dame Journal of Formal Logic, 15, 325-332.
- [H1] D. Harel, First-order dynamic logic, Lectures Notes in Computer Science, 68, Springer Verlag, 1979.
- [H2] D. Harel, Dynamic logic. În D. Gabbay și F. Guentner (editori), Handbook of Philosophical Logic, II, Springer Verlag, 1984, 497-604.
- [MM] M. Malița, M. Malița, Bazele inteligenței artificiale, Ed. Tehnică, București, 1982.
- [O1] P. Ostermann, Many-valued propositional calculi, Zeitscr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math., 34, 1988, 345-354.
- [O2] P. Ostermann, Many-valued modal logics: uses and predicate calculus, Zeitscr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math., 36, 1990, 367-376.
- [P] V. Pratt, Dynamic algebras as a well-behaved fragment of relation algebras, Lecture Notes in Computer Science, 425, Springer Verlag, 1990.

- [S] K. Segerberg, A completeness theorem in the modal logic of programs. In: Universal Algebra and Applications, Banach Center Publications, 9, Warsaw, 1982, 31-46.
- [WM] R. Wójcicki, G. Malinowski (editori), Selected papers on Lukasiewicz sentential calculi, Ossolineum, Wrocław, Warsaw, 1977.