CURBE ALGEBRICE
TEST 2

1) Pentru $1 < m < n$, cu m si n prime intre ele, aratati ca $C = \{x_1^m x_0^{n-m} = x_2^n\} \subset \mathbb{P}^2$ este o curba autoduala, adica curba duala C^* este proiectiv echivalenta cu C.

2) Aratati ca nu exista o curba $C \subset \mathbb{P}^2$ ireductibila de grad $d = 5$ astfel incat: a) C are $\kappa = 6$ cusp-uri. b) C are $\kappa = 5$ cusp-uri si $\delta = 1$ nod.

3) Un punct singular care este equisingular cu unul definit de ecuatia $xy^2 = x^{k-1}$ pentru $k \geq 4$ se spune ca este de tip D_k. Deasemenea urmatoarele singularitati se numesc de tip E_k pentru $k = 6, 7, 8$: $E_6 : y^3 = x^4$, $E_7 : y^3 = x^3 y$, $E_8 : y^3 = x^5$.

Aratati ca numarul Milnor al singularitatilor de tip D_k si E_k este $\mu = k$.

4) Fie C curba in $\mathbb{C}^2$ data de $C = V(y - x^k) \cup V(y + x^l)$ cu $2 \leq k \leq l$. Calculati invariantul Gorenstein-Roselicht $\delta_p = \frac{1}{2} c_p$ la punctul singular $p = O$ originea lui $\mathbb{C}^2$.

Ce puteti spune despre δ_p in cazul general al unui germene C de curba la O cu doua branse netede C_1 si C_2 avand tangenta comuna, de exemplu $T = V(y)$?

5) Determinati pentru curba $C = V(F)$ curba Hessiana $H(C)$ si numerele de intersectie $\mathrm{Int}_p(C, H(C))$ pentru $p \in C \cap H(C)$: a) $F = x_1^3 - x_0 x_2^2$, b) $F = x_1^3 + x_2^3 - x_0 x_1 x_2$.

6) Fie C o curba de grad $d = 6$ avand ca puncte singulare 3 singularitati de tip E_6. Aratati ca C este ireductibila si calculati genul g al lui C. Presupunand ca C este o curba Plücker, determinati numarul de puncte de inflexiune f si numarul de bitangente b ale lui C.