Raport ştiinţific sintetic

privind implementarea proiectului TE 0492 (mai 2013 - septembrie 2016

1 Rezultate

1.1 Articole publicate sau acceptate spre publicare

A1 Andrei Moroianu, **Sergiu Moroianu**, *Ricci surfaces*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze **14**, no. 4 (2015), 1093-1118

A2 Daniela Anca Măcinic, Ştefan Papadima, **Clement Radu Popescu**, Alexander I. Suciu, *Flat connections and resonance varieties: from rank one to higher ranks*, acceptat (2015) în revista Transactions of the American Mathematical Society

A3 Colin Guillarmou, **Sergiu Moroianu Sergiu**, Frédéric Rochon, *Renormalized volume on the Teichmüller space of punctured surfaces*, acceptat (2015) de Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze

A4 **Sergiu Moroianu**, *The Cotton tensor and Chern-Simons invariants in dimension 3: an introduction*, Buletinul Academiei de Stiinte a Republicii Moldova. Matematica **78**, no. 2 (2015), 3-20

A6 Barbu Berceanu, Daniela Anca Măcinic, Ştefan Papadima, **Clement Radu Popescu**, *On the geometry and topology of partial configuration spaces of Riemann surfaces*, preprint arXiv:1504.04733, acceptat (2016) în revista Algebraic and Geometric Topology

A7 **Sergiu Moroianu**, *Boundaries of locally conformally flat manifolds in dimensions* $4k$, preprint arXiv:1506.05968, acceptat (2016) de Indiana University Mathematics Journal

A11 Andrei Moroianu, **Sergiu Moroianu**, *On pluricanonical locally conformally Kähler manifolds*, acceptat de International Mathematics Research Notices, doi: 10.1093/imrn/rnw151 (2016)

1.2 Articole trimise spre publicare

A5 Daniela Anca Măcinic, Ştefan Papadima, **Clement Radu Popescu**, *Modular equalities for complex reflection arrangements*, preprint arXiv:1406.7137, trimis la publicare

A8 **Sergiu Moroianu**, *Convexity of the renormalized volume of hyperbolic 3-manifolds*, preprint arXiv:1503.07981, trimis la publicare

A9 **Gabriel Bădiţoiu**, Steven Rosenberg, *Integrable systems and Connes-Kreimer renormaliation*, trimis la publicare

A10 **Dorin Cheptea**, *Jacobi diagrams on surfaces and quantum invariants*, trimis la publicare

1.3 Cărţi

C1 Jean-Pierre Bourguignon, Oussama Hijazi, Jean-Louis Milhorat, Andrei Moroianu, **Sergiu Moroianu**, *A Spinorial Approach to Riemannian and Conformal Geometry* (458 pages), EMS Monographs in Mathematics (2015), ISBN: 978-3-03719-136-1

Versiunile revistă vor fi accesibile pe pagina grantului: http://www.imar.ro/~dcheptea/grantul_0492.html

2 Rezumatul unor rezultate si probleme cercetate

În cadrul proiectului PN-II-RU-TE-2012-3-0492 au fost investigate o serie de probleme şi obţinute următoarele rezultate.

2.1 Suprafeţe Ricci

În articolul [**A1**], s-au studiat suprafeţele Ricci, mai precis suprafeţele cu metrică Riemanniană a caror curbură Gaussiană satisface ecuaţia $K\Delta K + g(dK, dK) + 4K^3 = 0$. Ricci-Curbastro (1890) a aratat că orice suprafaţă minimală în $\mathbb{R}^3$ satisface această constrângere; reciproc, dacă $K \neq 0$ atunci suprafaţa se poate scufunda izometric (local) în $\mathbb{R}^3$. Rezultatul din [**A1**] arată că acelaşi lucru ramâne valabil lângă punctele unde K se anulează. Metoda de investigare se bazează pe descrierea scufundărilor locale prin existenţa unui spinor armonic nenul de normă constantă. Găsirea lui se reduce la o problemă de analiză: în ce condiţii o funcţie reală pe discul unitate este pătratul normei unei funcţii olomorfe? O conditie necesară este log-armonicitatea funcţiei. Rezultatul nostru tehnic, bazat pe idei din teoria potenţialului, arată că această condiţie este şi suficientă. Problema considerată în acest articol este strâns legată de existenţa suprafeţelor minimale în varietăţi de curbură constantă negativă, studiată de exemplu de C. H. Taubes [1]. Astfel de varietăţi hiperbolice de dimensiune 3, complete dar de volum infinit, sunt studiate deoarece geometrizează cobordismele hiperbolice între componentele lor de frontieră ideală la infinit.

2.2 Volumul renormalizat al varietăţilor hiperbolice

Volumul renormalizat este o functională pe spaţiul varietatilor hiperbolice de geometrie finită, care furnizează un potential Kähler pe spatiul Teichmüller. În articolul [**A8**] arătăm că lângă o metrică cu bordul ideal de tip produs, volumul renormalizat al varietăţii 3-dimensionale are Hessiana pozitivă.

În articolul [**A3**] studiem acest volum renormalizat pentru grupuri care degenereaza spre grupuri cu subgrupuri parabolice de rang 1. Arătăm ca volumul renormalizat este continuu la frontiera spatiului Teichmüller, cu condiţia să controlăm parametrii de degenerare astfel ca unghiul de rotatie Dehn sa fie mărginit superior de lungimea geodezicei simple închise care este strânsă spre un punct.

2.3 Frontierele varietăţilor local conforme plate de dimensiune $4k$

În articolul [**A7**] arătăm că invariantul eta al operatorului signaturii pe o varietate Riemanienă compactă orientată M de dimensiune $4k-1$ este o obstrucţie la existenţa unei metrici local conform plate pe o varietate compactă orientată X care bordează pe M.

2.4 Varietăţi local conform Kähler plurcanicice

În articolul [**A11**] am dat o demonstratie scurtă a faptului ca o varietate local conform Kähler compactă pluricanonică este Vaisman, adică are forma Lee paralelă.

2.5 Conexiuni plate şi varietăţi de rezonanţă

Un grup finit generat π (exemple fiind grupurile fundamentale ale complementelor de linkuri, grupurile fundamentale ale complementelor de hiperplane sau grupurile Torelli pentru gen $g \geqslant 3$) poate fi studiat prin studierea varietatilor de reprezentări $\mathrm{Hom}(\pi, G)$ unde G este un grup liniar algebric. Aceste varietăţi sunt complicate (teorema de universalitate Kapovich-Millson), dar un analog algebric este mulţimea conexiunilor plate $\mathscr{F}(A, \mathfrak{g}) = \{\omega \in A^1 \otimes g \mid \partial\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0\}$, unde pentru o algebră diferenţială graduată comutativă (cdga) $A = (A^\bullet, d)$ şi o algebră Lie $\mathfrak{g}$, produsul tensorial $A \otimes \mathfrak{g}$ are o structură de algebră Lie diferenţială graduatču croşetul $[\alpha \otimes x, \beta \otimes y] = \alpha\beta \otimes [x, y]$ şi diferenţiala $\partial(\alpha \otimes x) = d\alpha \otimes x$. Dacă A este conexă (i.e. $A^0 = \mathbb{C} \cdot 1$) şi $\mathfrak{g} = \mathbb{C}$, atunci $\mathscr{F}(A, \mathbb{C}) = H^1(A)$.

Dată o cdga conexă A de tip $q-$finit ($A^{\leqslant q}$ este finit dimensională) şi o reprezentare $\theta\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, $A \otimes V$ are o structură de complex de colanţuri cu diferenţiala $d_\omega = d \otimes \mathrm{id}_V + \mathrm{ad}_\omega$, ce depinde de ω şi θ. Dacă $\mathfrak{g}$ şi V sunt finit dimensionale atunci mulţimile

$$\mathscr{R}^i_r(A, \theta) = \{\omega \in \mathscr{F}(A, \mathfrak{g}) \mid \dim_{\mathbb{C}} H^i(A \otimes V, d_\omega) \geqslant r\}$$

sunt Zariski închise în $\mathscr{F}(A, \mathfrak{g})$ şi formează o filtrare a mulţimii conexiunilor plate.

Fie A 1-finită şi $\mathfrak{g}$ finit dimensională. Considerăm $\mathscr{F}^1(A, \mathfrak{g}) \subseteq \mathscr{F}(A, \mathfrak{g})$, constând din tensori $\eta \otimes g$ pentru care $d\eta = 0$. Pentru o reprezentare $\theta\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ considerăm $\Pi(A, \theta) \subseteq \mathscr{F}^1(A, \mathfrak{g})$ subvarietatea tensorilor care satisfac şi egalitatea $\det(\theta(g)) = 0$. În articolul [**A2**] Radu Popescu si coautorii sai au demonstrat:

Teorema 1. *Fie $\omega = \eta \otimes g$ un element arbitrar a lui $\mathscr{F}^1(A, \mathfrak{g})$. Atunci ω aparţine mulţimii $\mathscr{R}^k_1(A, \theta)$ dacă şi numai dacă există λ o valoare proprie a lui $\theta(g)$ astfel încât $\lambda\eta$ aparţine mulţimii $\mathscr{R}^k_1(A)$. Mai mult,*

$$\Pi(A, \theta) \subseteq \bigcap_{k : H^k(A) \neq 0} \mathscr{R}^k_1(A, \theta).$$

Fie π un grup nilpotent finit-generat şi G un grup semisimplu de rang 1, sau unul dintre subgrupurile sale Borel. Dată o reprezentare raţională $\iota\colon G \to \mathrm{GL}(V)$, cu aplicaţia tangentă θ, arătăm că $\mathscr{F}(A, \mathfrak{g}) = \mathscr{F}^1(A, \mathfrak{g})$, unde $A = \mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{n})$ este algebra de colanţuri Chevalley-Eilenberg a algebrei Malcev-Lie $\mathfrak{n}$ asocită lui π. Mai mult, $\mathscr{R}^k_1(\mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{n}), \theta) = \Pi(\mathcal{C}^\bullet(\mathfrak{n}), \theta)$ dacă $k \leqslant \dim \mathfrak{n}$ şi este vidă altfel.

Fie A o cdga conexă şi 1-finită pentru care varietatea $\mathscr{R}^1_1(A)$ se descompune ca o reuniune finită de subspaţii liniare, şi fie θ o reprezentare finit dimensională a unei algebre Lie de dimensiune finită. Am obţinut [**A2**] următorul rezultat:

Teorema 2. *Presupunem $\mathscr{R}^1_1(A) = \bigcup_{C \in \mathscr{C}} C$, o reuniune finită de subspaţii liniare. Pentru fiecare $C \in \mathscr{C}$, fie A_C sub-*cdga *a trunchierii $A^{\leqslant 2}$ definită prin $A^1_C = C$ şi $A^2_C = A^2$. Atunci, pentru orice algebră Lie $\mathfrak{g}$,*

$$\mathscr{F}(A, \mathfrak{g}) \supseteq \mathscr{F}^1(A, \mathfrak{g}) \cup \bigcup_{0 \neq C \in \mathscr{C}} \mathscr{F}(A_C, \mathfrak{g}), \tag{1}$$

unde fiecare $\mathscr{F}(A_C, \mathfrak{g})$ este Zariski-închisă în $\mathscr{F}(A, \mathfrak{g})$. Mai mult, dacă A are diferenţială zero, A^1 este nenulă, şi $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ sau $\mathfrak{sol}_2$, atunci (1) are loc ca egalitate, şi, pentru orice θ,

$$\mathscr{R}_1^1(A, \theta) = \Pi(A, \theta) \cup \bigcup_{0 \neq C \in \mathscr{C}} \mathscr{F}(A_C, \mathfrak{g}). \tag{2}$$

Pentru un spaţiu 1-finit 1-formal X şi $A = H^\bullet(X, \mathbb{C})$ cu diferenţiala $d = 0$ se ştie că varietatea de rezonanţă în rang 1, $\mathscr{R}_1^1(A)$ este liniară. Un alt exemplu de spaţiu cu proprietăţile sus amintite este spaţiul clasifiant X_Γ al unui grup Artin π_Γ. Pentru calculul varietăţii de rezonanţă în rang 1, modelul spaţiului este cdga $A_\Gamma = (H^\bullet(\pi_\Gamma, \mathbb{C}), d = 0)$, căreia i se poate aplica Teorema 2. Pentru π_Γ un grup Artin în unghiuri drepte avem următoarea descompunere în componente ireductibile:

$$\mathscr{F}(A_\Gamma, \mathfrak{sl}_2) = \bigcup_{\mathsf{W} \subseteq \mathsf{V}} S_{\mathsf{W}}$$

unde W variază după submulţimile de vârfuri din Γ, maximale în raport cu ordinea $\preccurlyeq$ definită după componentele conexe ale subgrafurilor induse Γ_{W}. S_{W} este o anumită subvarietate închisă, combinatorial definită a $\mathbb{C}^{\mathsf{W}} \otimes \mathfrak{sl}_2$.

2.6 Egalităţi modulare pentru aranjamente de reflecţii complexe

În articolul [**A5**] Radu Popescu împreună cu A. Măcinic şi Ş. Papadima au calculat numerele Aomoto-Betti combinatoriale $\beta_p(\mathcal{A})$ pentru aranjamentele de reflecţii complexe.

Pentru $\mathcal{A}$ un aranjament de hiperplane, complementul $M_\mathcal{A}$ are tipul de omotopie al unui CW complex finit cu omologia fără torsiune şi în particular $H_1(M_\mathcal{A}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^n$. Varietăţile de rezonanţă (în grad i şi adâncime q) peste un corp $\Bbbk$ sunt definite:

$$\mathscr{R}_q^i(M_\mathcal{A}, \Bbbk) = \{\sigma \in H^i(M_\mathcal{A}, \Bbbk) \mid \dim_\Bbbk H^i(H^\bullet(M_\mathcal{A}, \Bbbk), \sigma \cdot) \geqslant q\}$$

unde $\sigma \cdot$ reprezintă multiplicarea la stânga cu σ în inelul de coomologie. Pentru $M = M_\mathcal{A}$ şi $\Bbbk = \mathbb{F}_p$ (p prim), notăm cu $\sigma_p \in H^1(M, \mathbb{F}_p)$ clasa de coomologie diagonală, egală cu 1 în raport cu baza naturală dată de meridianele în jurul hiperplanelor. Numărul Aomoto-Betti modulo p este

$$\beta_p(M) \coloneqq \dim_{\mathbb{F}_p} H^1(H^\bullet(M, \mathbb{F}_p), \sigma_p \cdot)$$

Teorema 3. *Pentru un aranjament de reflecţii complexe $\mathcal{A}$ de rang cel puţin 3, au loc următoarele.*

1. *Dacă $p > 3$, atunci $\beta_p(\mathcal{A}) = 0$.*
2. *$\beta_2(\mathcal{A}) \neq 0 \Leftrightarrow \beta_2(\mathcal{A}) = 2 \Leftrightarrow \mathcal{A}$ are structură de 4-net $\Leftrightarrow \mathcal{A}$ este arangementul Hesse.*
3. *Singurele cazuri pentru care $\beta_3(\mathcal{A}) \neq 0$ sunt: $\mathcal{A}(m, 1, 3)$ cu $m \equiv 1$ (mod 3), unde $\beta_3 = 1$; $\mathcal{A}(m, m, 3)$ cu $m \geqslant 2$, unde $\beta_3 = 1$ dacă $m \not\equiv 0$ (mod 3) şi altfel $\beta_3 = 2$; $\mathcal{A}(m, m, 4)$, unde $\beta_3 = 1$.*
4. *În particular, $\beta_p(\mathcal{A}) \leqslant 2$, pentru toate primele p.*

2.7 Spaţii parţiale de configuraţii ale suprafeţelor Riemann

Studiul proprietăţilor topologice ale unui CW- complex X, q-finit cu $q \geqslant 1$, se poate face via varietatea de reprezentări $\mathrm{Hom}(\pi, G)$, unde $\pi = \pi_1(X)$ şi G este un grup liniar algebric. Varianta algebrică a varietăţilor de reprezentări, introdusă de Dimca-Papadima-Suciu [2009] este mulţimea conexiunilor plate, care are o filtrare dată de varietăţile de rezonanţă (a se vedea mai sus).

Conceptele şi rezultatele obţinute în [**A2**] privind varietatea conexiunilor plate şi subvarietăţile de rezonanţă de rang mai mare ca 1, au fost aplicate în [**A6**] (2015):

Fie Γ un graf simplu finit cu mulţimea de vârfuri V şi mulţimea de muchii E şi Σ un spaţiu. *Spaţiul parţial de configuraţii* de tip Γ pe spaţiul Σ este dat de

$$F(\Sigma, \Gamma) = \{z \in \Sigma^{\mathsf{V}} \mid z_i \neq z_j, \quad \text{for all} \quad ij \in \mathsf{E}\}.$$

Pentru cazul când $\Gamma = K_n$, graful complet cu n vârfuri, $F(\Sigma, \Gamma)$ este clasicul spaţiu de configuraţii de puncte ordonate în Σ. Dacă $\Sigma = \Sigma_g$, o suprafaţă Riemann compactă de gen g, notăm spaţiul $F(\Sigma, \Gamma)$ cu $F(g, \Gamma)$ şi cu $P(g, \Gamma) = \pi_1(F(g, \Gamma))$, grupul fundamental al spaţiului configuraţiilor parţiale. Vedem că acesta reprezintă generalizarea naturală a cazului grupului braidurilor pure ce corespunde grafului $\Gamma = K_n$ şi $\Sigma = \mathbb{C}$.

În cazul general, atunci când $\Gamma \neq K_n$, **nu** există o teoremă de fibrare Fadell-Neuwirth aşa cum se întâmplă pentru grupul braidurilor pure. Cu toate acestea, în acest articol calculăm invarianţi ai spaţiului configuraţiilor parţiale.

Privind Σ_g ca o curbă complexă netedă de gen g, $F(g, \Gamma)$ devine o varietate quasi-proiectivă (în accepţiunea de mai sus - varietate quasi-proiectivă complexă netedă ireductibilă).

Pentru fiecare gen g putem construi uşor anumite aplicaţii admisibile de tip general pe $F(g, \Gamma)$. Aceste aplicaţii sunt asociate scufundărilor de grafuri complete în Γ.

Pentru $g \geqslant 2$ avem scufundări $K_1 \hookrightarrow \Gamma$ care dau aplicaţiile $f_i : F(g, \Gamma) \to \Sigma_g$ induse de proiecţia specificată de vârful corepunzător $i \in \mathsf{V}$.

Pentru $g = 1$ avem scufundări $K_2 \hookrightarrow \Gamma$ care dau aplicaţiile $f_{ij} : F(1, \Gamma) \to \Sigma_1 \backslash \{0\}$ date de proiecţia corespunzătoare muchiei $ij \in \mathsf{E}$, urmată de aplicaţia diferenţă pe curba eliptică Σ_1.

Pentru $g = 0$ avem scufundări $K_4 \hookrightarrow \Gamma$ şi $f_{ijkl} : F(0, \Gamma) \to \mathbb{P}^1 \backslash \{0, 1, \infty\}$ este compunerea dintre raportul anarmonic şi proiecţia asociată mulţimii de vârfuri din Γ date prin scufundarea $K_4 \hookrightarrow \Gamma$.

Am obţinut [**A6**]:

Teorema 4. *O mulţime completă de reprezentanţi pentru $\mathscr{E}_{F(g,\Gamma)}$ este dată de aplicaţiile admisibile de tip general descrise mai sus.*

Deci toate aplicaţiile admisibile de tip general pe $F(g, \Gamma)$ sunt cele descrise mai sus.

Fie X o varietate quasi-proiectivă $X = \overline{X} \backslash D$, unde $\overline{X}$ este o compactificare netedă construită de Dupont, obţinută prin adăugarea la infinit a unui aranjament de hipersuprafeţe D în $\overline{X}$. Dupont a construit un model Gysin $A^{\bullet}(\overline{X}, D)$, asociat perechii $(\overline{X}, D)$ care este finit şi are proprietăţi de naturalitate. Dintr-o teoremă Dimca-Papdima [2014] rezultă faptul că modelul $A^{\bullet}$ determină $\mathscr{E}_X$, care este în bijecţie cu componentele ireductibile pozitiv dimensionale prin origine pentru $\mathscr{R}_1^1(A)$. Pentru $X = F(g, \Gamma)$ vom lua $\overline{X} = \Sigma_g^{\mathsf{V}}$ şi $D_\Gamma = \bigcup_{ij \in \mathsf{E}} \Delta_{ij}$ reuniunea tuturor diagonalelor asociate cu muchiilor grafului. Fie $f : F(g, \Gamma) \to S = \overline{S} \backslash F$ aplicaţiile admisibile din teorema 4, unde $\overline{S} = \Sigma_g$ şi $F \subseteq \overline{S}$ este o submulţime finită (în particular, un aranjament de hipersuprafeţe în $\overline{S}$). În [**A6**] am obţinut:

Teorema 5. *În contextul de mai sus există o extensie regulată a lui f, $\overline{f} : (\overline{X}, D) \to (\overline{S}, F)$, pentru toate $f \in \mathscr{E} := \mathscr{E}_{F(g,\Gamma)}$, unde D este un aranjament de hipersuprafeţe în $\overline{X}$ cu complementul $F(g, \Gamma)$, care induce aplicaţii de* cdga *între modele Gysin, $f^* : A^\bullet(\overline{S}, F) \to A^\bullet(\overline{X}, D)$, cu proprietatea că*

$$\mathscr{F}(A^\bullet(\overline{X}, D), \mathfrak{g}) = \mathscr{F}^1(A^\bullet(\overline{X}, D), \mathfrak{g}) \cup \bigcup_{f \in \mathscr{E}} f^* \mathscr{F}(A^\bullet(\overline{S}, F), \mathfrak{g}) \quad \text{pentru } \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2 \text{ or } \mathfrak{sol}_2 , \tag{3}$$

şi

$$\mathscr{R}^1_1(A^\bullet(\overline{X}, D), \theta) = \Pi(A^\bullet(\overline{X}, D), \theta) \cup \bigcup_{f \in \mathscr{E}} f^* \mathscr{F}(A^\bullet(\overline{S}, F), \mathfrak{g}) , \tag{4}$$

pentru orice reprezentare finit dimensională $\theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$.

2.8 Functorialitatea şi integrabilitatea ecuaţiilor de tip Lax in contextul renormalizarii Connes-Kreimer [A9]

În [6], anterior acestui grant, Gabriel Bădiţoiu şi Steven Rosenberg au construit o ecuatie de tip Lax $\frac{dL}{dt} = [L, M]$ asociată factorizarii Connes-Kreimer-Birkhoff a unei algebre Hopf comutative, conexe si graduate, au aratat ca fluxul acestei ecuatii păstrează proprietatea de localitate a contratermenilor si au făcut legatura cu fluxul grupului de renormalizare. Sunt 2 abordari: (i) se considera algebra Lie dubla $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ asociata unei truncheri finit dimensionale $\mathfrak{g}$ a algebrei Lie de caractere infinitezimale a unei algebre Hopf graduate (paranteza Lie pe subalgebra Lie $\mathfrak{g}^*$ este cea abeliana) si se studiaza integrabilitatea fluxului ecuatiei Lax in cazuri particulare; şi (ii) se construieşte ecuaţia Lax pe intreaga algebra Lie (infinit-dimensionala) de caractere infinitezimale şi se obtine si o ecuatie de tip Lax pentru functia beta a teoriei de camp cuantic.

Integrabilitatea ecuatiilor de tip Lax asociate prin intermediul teoremei Adler-Kostant-Symes algebrelor Lie semi-simple este bine inteleasa (cf. Reyman si Semenov-Tian-Shansky [8]), insa cazul nilpotent este putin studiat.

În cadrul grantului, extinzand rezultate din [6], Gabriel Baditoiu a construit exemple de algebre Lie (de caractere infinitezinale asociate unor algebre Hopf finit dimensionale de radacini) nilpotente in 2 si 3-pasi sau 4-pasi care au ecuatiile de tip Lax asociate integrabile, respectiv Hamiltoniene. Pentru a demonstra integrabilitatea s-au calculat explicit integralele de miscare. Folosind conjectura Mishchenko-Fomenko, obtinem ca truncarile finit-dimensionale ale ecuatiei Lax a functiei beta este complet integrabila in anumite conditii. Aceste rezultate au fost incluse in [**A9**].

Gabriel Baditoiu si Steven Rosenberg studiaza 'functorialitatea' ecuatiei Lax la schimbarea algebrei Hopf (teoria de camp cuantic in contextul renormarmalizarii Connes-Kreimer). In cazul mai simplu (i) al truncherii finit dimesionale folosim functorul Etingof-Kazhdan de la categoria bialgebrelor Lie la categoria algebrelor anvelopante cuantizate[7]. Pentru un morfism de bialgebre Lie $\alpha : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ obtinem un morfism de algebrele Hopf intre anvelopantele universale cuantizate ale algebrelor Lie double $\tilde{\alpha} : \mathscr{U}(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*)[[h]] \to \mathscr{U}(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*)[[h]]$, care va induce un morfism de algebre Lie intre algebrele Lie de caractere infinitezimale ale dualelor acestor algebre Hopf $\partial\alpha^* : \partial(Char(\mathscr{U}(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*)^*[[h]])) \to \partial(Char(\mathscr{U}(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*)^*[[h]]))$. Identificand $\partial(Char(\mathscr{U}(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*)^*[[h]])) = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^* \oplus \mathbb{C}$ si $\partial(Char(\mathscr{U}(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*)^*[[h]])) = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^* \oplus \mathbb{C}$ obtinem un morfism de algebre Lie $\partial\alpha^* : \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^* \oplus \mathbb{C} \to \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^* \oplus \mathbb{C}$, care va trimite un flux $L(t)$ al unei ecuatii Lax pe $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^* \oplus \mathbb{C}$ intr-un flux $\partial\alpha^*(L(t))$ al unei alte ecuatii Lax asociate pe $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^* \oplus \mathbb{C}$.

2.9 Diagrame Jacobi pe suprafeţe şi invarianţi cuantici [A10]

W. M. Goldman (1986) a definit o structură de algrebră Poisson-Lie pe algebra simetrică a K-modulului generat de mulţimea $\hat{\pi}$ a claselor de omotorie liberă de bucle $S^1 \to \Sigma$ pe o suprafaţă Σ, precum şi deformări ale ei în categoria algebrelor Poisson-Lie. În 1988 si 1991, V. Turaev a construit cunatizări skein ale acestor algebre Poisson. În 1996 si 1998, J.E. Andersen, J. Mattes şi N. Reshetikhin [2, 3], generalizand lucrarile lui Turaev asupra parantezei Goldman, au construit algebra Poisson de diagrame de corzi pe o suprafaţă arbitrara, si, cu ajutorul unui invariant de tip finit universal (abstract) pentru linkuri în $\Sigma \times [0, 1]$ (Σ este compactă cu grup fundamental liber), au construit o cunatizare de deformare a algebrei Poisson.

În [**A10**], introducem si studiem noţiunea de diagrame Jacobi pe suprafeţe arbitrare, care generalizeaza notiunea de diagrame de corzi pe suprafete. Aceasta generalizare in cazul $\Sigma = \mathbb{R}^2$ este obiectul algebro-combinatorial central in teoria functorului Le-Murakami-Ohtsuki (LMO), una din cele 2 manifestari ale invariantilor cuantici (Witten-Reshetikhin-Turaev) ale linkurilor, 3-varietatilor si (2+1)-cobordismelor. (De exemplu, a se vedea [4, 5].) Utilizand diagrame Jacobi in locul diagramelor de corzi, si functorul LMO in locul invariantului ad-hoc al lui Andersen-Mattes-Reshetikhin, obtinem constructiile din Andersen-Mattes-Reshetikhin intr-un mod mai sistematic si mai general, precum si consecinte noi.

2.10 Conjectura volumului, invarianţii Geer-Patureau si $6j$-simbolurile Turaev-Viro

Cristina Anghel a fost angajata pe grant prin concurs in perioada octombrie 2013-septembrie 2016. In septembrie - mijlocul lui decembrie 2014, ianuarie-iunie, septembrie-noiembrie 2015 si ianuarie-mijocul lui iunie 2016 s-a aflat la Universitatea Paris 7 ; in perioadele indicate nu a fost sustinuta material de pe grant, dar am colaborat matematic prin email. In timp ce a fost angajata pe grant, Cristina Anghel a finalizat 3 programe de master: la Universitatea Bucuresti (lucrarea de master "Volume conjecture for knots and links" a fost co-coordonata de Dorin Cheptea), la Scoala Normala Superioara Bucuresti si la Universitatea Paris 7. Inceptand cu septembrie 2015 este doctoranda.

Pe 6 mai 2015 si pe 24 iunie 2016 a sustinut expuneri la seminarul de topologie al IMAR ("Omologie Heegard-Floer: definitii, exemple, rezultate de baza", respectiv "Volume conjecture for knots and links"). De asemenea a sustinut expuneri in cadrul Groupe de travail "Topologie Algbrique et TQFT" la Universitatea Paris 7, precum si la conferinta "ECSTATIC", Imperial College of London.

Cunoaste destul de bine topologie diferentiala, topologia varietatilor mici, geometrie complexa si hiperbolica, teorie Hodge, suprafete Riemann, teoria reprezentarilor. A sudiat cartile si articolele de baza legate de invarianti Reshetikhin-Turaev, omologie Heegaard-Floer si conjectura volumului, urmatorul pas natural fiind abordarea directa a problemelor de cercetare (2015-).

In 2006 si 2007, N. Geer si B. Patureau-Mirand au introdus o clasa de invariantii pentru linkuri, in mai multe variabile, renormalizati ce provin din superalgebre Lie de tip I, sau din $sl(2|1)$, iar ulterior (2013) impreuna cu Turaev au facut o constructie in cazul general pentru orice categorie ribbon, nu neaparat venind dintr-o algebra. De asemenea Geer si Patureau au aratat ca invariantii lor pentru o familie de $sl(m|n)$ super-module contin invariantii lui Kashaev. Invatiantii lui Kashaev (1995) au fost introdusi impreuna cu primul enunt al conjecturii volumului. In 2001, H. Murakami si J. Murakami au demonstrat ca invariantii lui Kashaev nu sunt altceva decat o specificatie a polinomului Jones colorat, astfel conjectura volumului a fost reformulata in versiunea sa moderna.

Ea leagă polinomul Jones colorat al unui link K de volumul complementului linkului $S^3\backslash K$, adică un obiect din topologia cuantică cu un obiect din geometria hiperbolică:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\log |J_N(K, e^{2\pi i/N})|}{N} = \frac{1}{2\pi} vol(S^3\backslash K)$$

Activitatea de cercetare a Cristinei Anghel se axeaza pe urmatoarele 3 probleme legate intre ele:

- Cristina Anghel si Dorin Cheptea studiaza o posibila noua abordare a conjecturii volumului bazata pe tehnica algebrelor cluster care a inceput sa fie aplicata recent in geometria hiperbolica de Fomin-Shapiro-D. Thurston (2008) si Nagao-Terashima-Yamazaki (2011)
- In 2015 in Paris Cristina Anghel a facut cunostinta cu Nathan Geer (Utah State University, USA) aflat in vizita acolo, ca urmare ei lucreaza la o posibila extindere a invariantilor Geer-Patureau pentru varietati 3-dimensionale
- Cristina Anghel si Christian Blanchet (Universite Paris 7) abordeaza problema $6j$-simbolurilor modificate pentru cazul super-algebrei $sl(2|1)$, cu scopul de a construi pe aceasta cale invarianti pentru 3-varietati de tipul Turaev-Viro

3 Activităţi

3.1 Invitaţi

- Frederic Rochon (Universite du Quebec a Montreal), 2-5 iulie 2013
- Colin Guillarmou (Ecole Normale Superieure, Paris), 4-9 noiembrie 2013
- Michel Pocchiola (Institut de Mathematiques de Jussieu, Paris), 18-22 noiembrie 2013
- Gwenael Massuyeau (Universite de Starsbourg & CNRS), 18-22 noiembrie 2013
- Florin Damian (Universitatea de Stat din Moldova, Chişinău), 25-27 noiembrie 2013
- Dan Burghelea (Ohio State University, Columbus, OH), 6-14 septembrie 2014
- Andrei Moroianu (CNRS & Universite de Versailles-St Quentin, France), 12-20 aprilie 2015
- Jean-Stephane Dhersin (Universite Paris 13), 24 octombrie - 2 noiembrie 2015
- Mylene Maïda (Universite Lille 1), 29 octombrie - 2 noiembrie 2015
- Jin-ichi Itoh (Kumamoto University, Japan) 26-30 noiembrie 2015
- Andrei Moroianu (CNRS & Universite de Versailles-St Quentin, France), 25 noiembrie - 6 decembrie 2015
- Colin Guillarmou (Ecole Normale Superieure, Paris), 17-22 aprilie 2016
- Andrei Moroianu (CNRS & Universite de Versailles-St Quentin, France), 23-31 martie 2016

Invitaţii au colaborat stiintific şi au facut expuneri. Mai multe detalii sunt prezente pe pagina web a grantului.

3.2 Participări

- Cristina Anghel a participat în perioada 6-12 octombrie 2013 la scoala de toamna ”Second Erlangen Fall School on Quantum Geometry”, Erlangen, Germania
- Cristina Anghel a participat în perioada 21-23 mai 2014 la ”Fourth Workshop for Young Researchers in Mathematics”, Constanta, Romania
- Cristina Anghel a participat în perioada 29 iunie - 7 iulie 2014 la ”Young Topologists Meeting”, Copenhaga, Danemarca
- Clement Radu Popescu a participat în perioada 13-17 octombrie 2014 la conferinta ”Tresses et Arithmetique”, CIRM, Luminy, Franta
- Gabriel Băditoiu a participat în perioada 30 iunie- 25 iulie 2014 la ”Clay Mathematics Institute Summer School 2014 Periods and Motives: Feynman amplitudes in the 21st century”, ICMAT, Madrid, Spania
- Clement Radu Popescu a participat în perioada 20-24 mai 2015 la ”Workshop for Young Researchers in Mathematics”, Constanta, Romania (prelegere cu titlul ”Resonance varieties and nilpotent Lie algebras”)
- Clement Radu Popescu a participat în perioada 26 iunie - 1 iulie 2015 la ”The Eighth Congress of Romanian Mathematicians”, Iasi, Romania (prelegere cu titlul ”Flat connections and resonance varieties of rank larger than 1”)
- Clement Radu Popescu a participat în perioada 26 iulie - 1 august 2015 la scoala de vara si conferinta ”Mapping class groups, 3- and 4-manifolds”, Cluj-Mapoca, Romania (prelegere)
- Sergiu Moroianu a participat în perioada 1-5 iulie 2015 la conferinta ”MITRE 2015”, Chisinau, Moldova (expunere cu titlul ”Boundaries of locally conformally flat $4k$ manifolds”)
- Cristina Anghel a participat în perioada 4-11 iulie 2015 la ”Young Topologists' Meeting”, Lausanne, Elvetia (prezentare cu titlul ”Renormalized quantum dimension and Multivariable invariants for links”)
- Cristina Anghel a participat în perioada 26 iulie - 2 august 2105 la scoala de vara si conferinta ”Mapping class groups, 3- and 4-manifolds”, Cluj-Mapoca, Romania
- Radu Popescu a participat în perioada 18-21 mai 2016 la ”Workshop for Young Researchers in Mathematics”, Constanta, Romania (expunere cu titlul ”Flat connections and quasi-projective varieties”)
- Dorin Cheptea a participat în perioada 18-21 mai 2016 la ”Workshop for Young Researchers in Mathematics”, Constanta, Romania (expunere cu titlul ”Jacobi diagrams on surfaces and quantum invariants”)
- Sergiu Moroianu a participat în perioada 18-21 mai 2016 la ”Workshop for Young Researchers in Mathematics”, Constanta, Romania, unde a fost organizator al unei sesiuni speciale pentru aniversarea Academiei Române

- Sergiu Moroianu a fost invitat în perioada 8-13 mai 2016 la Universitatea Fribourg, Elveţia pentru colaborare stiinţifică; la 10 mai 2016 a ţinut o expunere cu titlul ”Renormalized volume in hyperbolic geometry” in cadrul Colloquium al Universităţii Fribourg
- Sergiu Moroianu a participat în perioada 10-11 iunie 2016 la ”Geometry and PDEs Workshop”, Universitatea de Vest din Timişoara, Romania, (expunere pe 10 iunie 2016)

De asemenea, finantata din alte surse dar legata de temele de cercetare de pe grant:

- Gabriel Baditoiu a participat in perioada 1-14 martie 2015 la conferinta ”The interrelation between mathematical physics, number theory and noncommutative geometry”, Erwin Schrödinger International Institute for Mathematical Physics, Viena (unde Gabriel Baditoiu a lucrat impreuna cu Steven Rosenberg asupra proprietatii de naturalitate a ecuatii de tip Lax, studiul focalizandu-ne asupra studiului algebrelor Rota-Baxter)

Mai multe detalii pe pagina web a grantului.

3.3 Seminar IMAR initiat in cadrul grantului

”Two- and three-dimensional manifolds” `http://www.imar.ro/~dcheptea/seminar23dim.html`

References

[1] C. H. Taubes, *Minimal surfaces in germs of hyperbolic 3-manifolds*, Proceedings of the Casson Fest, 69-100, Geom. Topol. Monogr. 7, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2004 2.1

[2] J. E. Andersen, J. Mattes, N. Reshetikhin, *The Poisson structure on the moduli space of flat connections and chord diagrams*, Topology **35** (1996), 1069–1083 2.9

[3] J. E. Andersen, J. Mattes, N. Reshetikhin, *Quantization of the algebra of chord diagrams*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **124** (1998), 451–467 2.9

[4] K. Habiro, G. Massuyeau, *From mapping class groups to monoids of homology cobordisms: a survey*, in ”Handbook of Teichmuller theory, vol. III” (editor: A. Papadopoulos), IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics **17** (2012) 2.9

[5] D. Cheptea, K. Habiro, G. Massuyeau, *A functorial LMO invariant for Lagrangian cobordisms*, Geom. Topol. **12** (2008), 1091–1170 2.9

[6] G. Baditoiu, S. Rosenberg *Lax pair equations and Connes-Kreimer renormalization*, Commun. Math. Phys. **296** (2010), no. 3, 655-680, DOI: 10.1007/s00220-010-1034-7 2.8

[7] P. Etingof and D. Kazhdan, *Quantization of Lie bialgebras, II*, Sel. Math New Ser. 4 (1998), 213–231. 2.8

[8] A.G. Reyman and M.A. Semenov-Tian-Shansky, *Integrable Systems II: Group-Theoretical Methods in the Theory of Finite-Dimensional Integrable Systems, Dynamical systems. VII*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 16, Springer-Verlag, Berlin, 1994 2.8

[9] A. Thimm *Integrable geodesic flows on homogeneous spaces*, Erg. Th. and Dynam. Sys. 1(1981), 495–517.

Director de proiect,
Dorin Cheptea