ACADEMIA ROMÂNĂ
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ
,,SIMION STOILOW”

CONTRIBUŢII LA STUDIUL FUNCŢIILOR ARITMETICE

TEZĂ DE DOCTORAT
REZUMAT

Coordonator ştiinţific:
Prof. univ. dr. **TOMA ALBU**

Doctorand:
ADRIAN-BRĂDUŢ APOSTOL

Bucureşti
2014

Cuprins

Introducere

Tema acestei lucrări o constituie *întregii regulaţi modulo n*. Un număr $a \in \mathbb{Z}$ se numeşte *regulat modulo n* dacă există $x \in \mathbb{Z}$ astfel încât $a^2x \equiv a \pmod{n}$.

Astfel, studiem funcţia aritmetică $\varrho(n)$ care reprezintă numărul întregilor regulaţi $(\mathrm{mod}\ n)$ mai mici sau egali cu n:

$$\varrho(n) = \#\{a : 1 \leq a \leq n \text{ şi } a \text{ este regulat } (\mathrm{mod}\ n)\}.$$

De asemenea, studiem şi o formă generalizată a acesteia, $\varrho_s(n)$, unde $s \in \mathbb{R}$.

Deşi este multiplicativă, funcţia $\varrho(n)$ are o comportare neregulată. Scopul cercetării noastre este de a găsi proprietăţi care să ateste totuşi o anumită regularitate în comportarea asimptotică a acestei funcţii. În cele ce urmează vom nota cu $\mathbb{P}$ mulţimea numerelor prime strict pozitive.

Capitolul 1 are ca obiectiv tratarea întregilor regulaţi $(\mathrm{mod}\ n)$ şi a funcţiei $\varrho(n)$.

Studiem $\mathrm{S[reg]}_r(n)$, suma puterilor de exponent r a întregilor regulaţi $(\mathrm{mod}\ n)$, mai mici sau egali cu n. Ne referim apoi la identităţi în care apar sume şi produse de întregi regulaţi $(\mathrm{mod}\ n)$ în conexiune cu polinoame speciale şi anumite funcţii aritmetice.

Rezultatele din Capitolul 1 sunt preluate, în marea lor majoritate din Apostol şi Tóth [**6**], respectiv Apostol şi Petrescu [**5**].

Capitolul 2 se referă la ordine medii şi ordine extremale ale funcţiei $\varrho(n)$. Un ordin mediu al lui $\varrho(n)$ a fost studiat de Joshi [**11**] şi Finch [**8**]. Tóth [**28**] investighează ordine medii ale funcţiilor $\varrho(n)/\phi(n)$, $\phi(n)/\varrho(n)$, $1/\varrho(n)$.

Printre rezultatele obţinute în cadrul aceluiaşi tip de cercetare, enumerăm calcularea de ordine medii şi extremale pentru anumite produse şi rapoarte de funcţii aritmetice.

Compuneri de funcţii au fost studiate printre alţii de Mąkowski şi Schinzel [**15**], Luca şi Pomerance [**14**], De Koninck şi Luca [**12**]. Am continuat investigaţia, determinând ordine extremale pentru funcţiile $\varrho(\phi(n))$, $\varrho(\phi^*(n))$ şi altele.

Sándor şi Tóth [**23**] extind cercetarea ordinelor extremale pentru compuneri de funcţii aritmetice, făcând apel şi la funcţiile unitare analoage ale acestora. Am continuat acest studiu, luând în calcul funcţia $\varrho(n)$.

Cele mai multe rezultate din acest capitol sunt preluate din Apostol [**2**], Apostol şi Petrescu [**5**] respectiv Apostol şi Tóth [**6**].

Capitolul 3 este dedicat studiului altor comportări de tip asimptotic ale funcţiei $\varrho(n)$.

Sándor [**22**], arată că

$$\limsup_{n\to\infty}(\psi(n+1)-\psi(n))=\infty$$

şi

$$\liminf_{n\to\infty}(\psi(n+1)-\psi(n))=-\infty.$$

Ne-am pus aceeaşi problemă şi în cazul funcţiei $\varrho(n)$ şi am demonstrat un rezultat similar. Se ştie că

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\phi(n+1)}{\phi(n)}=0 \text{ şi} \limsup_{n\to\infty}\frac{\phi(n+1)}{\phi(n)}=\infty,$$

(vezi, de exemplu, Sivaramakrishnan[**24**]). Am obţinut astfel de evaluări şi pentru funcţia $\varrho(n)$, considerând raportul $\varrho(n+1)/\varrho(n)$.

Capitolul 3 se bazează pe rezultatele din Apostol [**3**].

În **Capitolul 4** studiem funcţia aritmetică $\varrho_r(n)$, unde $r\in\mathbb{N}^*$. Această funcţie este o generalizare a funcţiei $\varrho(n)$. Obiectivul nostru este de a cerceta proprietăţile funcţiei $\varrho_r(n)$ prin comparaţie cu proprietăţi ale altor forme generalizate de funcţii aritmetice analizate în teză. Unele rezultate sunt date într-un cadru mai general, şi anume pentru funcţia $\varrho_s(n)$, unde $s\in\mathbb{R}$.

Demonstrăm formule de calcul pentru $\varrho_r(n)$, analoage formulelor deja cunoscute pentru funcţia aritmetică $\varrho(n)$.

Se cunoaşte un ordin mediu pentru $\varrho(n)$. Generalizăm acest rezultat, obţinând o formulă asimptotică şi pentru funcţia $\varrho_s(n)$.

Considerăm seria Dirichlet a funcţiei $\varrho_r(n)$ şi demonstrăm o formulă pentru aceasta.

Determinăm ordine extremale pentru $\varrho_s(n)\sigma_s(n)$, $\varrho_s(n)\psi_s(n)$, unde $\sigma_s(n)$ şi $\psi_s(n)$ cu $s\in\mathbb{R}$, sunt formele generalizate pentru funcţiile $\sigma(n)$ şi $\psi(n)$. De asemenea, am considerat rapoartele $\sigma_r(n)/\varrho_r(n)$ şi $\psi_r(n)/\varrho_r(n)$.

Studiem ordine extremale ale funcţiei $\varrho_r(n)$ în conexiune cu funcţiile $\sigma_r^*(n)$ şi $\psi_r^*(n)$, formele analoage unitare generalizate ale funcţiilor $\sigma_r(n)$ şi $\psi_r(n)$.

Problema găsirii unor astfel de ordine a fost aplicată şi la compuneri de funcţii generalizate, în finalul capitolului al patrulea.

Rezultatele acestui ultim capitol au la bază lucrările Apostol şi Petrescu [**4**], şi, de asemenea, Apostol şi Tóth [**6**].

CAPITOLUL 1

Întregi regulaţi modulo n şi funcţia $\varrho(n)$

Dacă R este un inel, un element a al acestui inel este numit *regulat* (în sens von Neumann) dacă există $x \in R$ astfel încât $a = axa$.

Dacă R este inelul $\mathbb{Z}_n$ claselor de resturi modulo un număr natural $n \geq 2$ atunci se poate da următoarea definiţie:

Definiţie. *Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Un număr $a \in \mathbb{Z}$ se numeşte regulat (mod n) dacă există un $x \in \mathbb{Z}$ astfel încât $a^2x \equiv a$ (mod n).*

Morgado [**18, 19**] a investigat aceşti întregi pe care i-a şi numit *întregi regulaţi modulo n*. Proprietăţile au fost redescoperite de Alkam şi Osba în [**1**], folosind consideraţii specifice teoriei inelelor.

Tóth [**28**] dă demonstraţii directe, ţinând cont că demonstraţiile din [**18**] şi [**19**] sunt mai lungi iar cele din [**1**] ţin strict de teoria inelelor.

Este justificat atunci să considerăm mulţimea

$$\mathrm{Reg}_n = \{a : 1 \leq a \leq n \text{ şi } a \text{ este regulat } (\mathrm{mod}\ n)\}$$

şi fie $\varrho(n) = \#\mathrm{Reg}_n$.

Sumele Ramanujan sunt definite prin

$$c_n(t) := \sum_{\substack{1 \leq k \leq n, \\ \gcd(k,n)=1}} \exp(2\pi ikt/n), \text{unde } (n \in \mathbb{N}^*, t \in \mathbb{Z}).$$

Funcţia $n \mapsto c_n(t)$ este multiplicativă spre deosebire de $t \mapsto c_n(t)$, care nu este multiplicativă, în general.
Pentru $t = 0$, $c_n(0) = \phi(n)$ iar pentru $t = 1$, $c_n(1) = \mu(n)$.
Funcţia

$$\overline{c}_n(t) := \sum_{k \in \mathrm{Reg}_n} \exp(2\pi ikt/n) \quad (n \in \mathbb{N}^*, t \in \mathbb{Z}),$$

reprezentând o formă analoagă sumei Ramanujan $c_n(t)$ a fost cercetată în [**9**]. Avem

$$\overline{c}_n(t) = \sum_{d \,||\, n} c_d(t)$$

Astfel, pentru fiecare t fixat, funcţia $n \mapsto \overline{c}_n(t)$ este multiplicativă, $\overline{c}_n(0) = \varrho(n)$ şi $\overline{c}_n(1) = \overline{\mu}(n)$, unde $\overline{\mu}(n) = \sum_{d \,||\, n} \mu(d)$ este funcţia caracteristică a numerelor întregi n care sunt *powerful*.

Funcţia care dă suma celor mai mari divizori comuni este definită prin $P(n) := \sum_{k=1}^{n} \gcd(k,n) = \sum_{d \,|\, n} d\,\phi(n/d)$, vezi [**26**]. O formă analoagă a acestei funcţii a fost introdusă în articolul [**25**]:

$$\widetilde{P}(n) := \sum_{k \in \mathrm{Reg}_n} \gcd(k,n).$$

Avem

$$\widetilde{P}(n) = \sum_{d \,||\, n} d\, \phi(n/d) = n \prod_{\substack{p \,|\, n \\ p \in \mathbb{P}}} \left(2 - \frac{1}{p}\right) \quad (n \in \mathbb{N}^*),$$

proprietăţile asimptotice ale lui $\widetilde{P}(n)$ fiind investigate în [**13, 26, 31, 30**].

Pentru $r \in \mathbb{N}^*$, considerăm $\mathrm{S[reg]}_r(n)$, suma puterilor r pentru întregii regulaţi (mod n) aparţinând mulţimii Reg_n. Deducem o formulă exactă pentru $\mathrm{S[reg]}_r(n)$ cu ajutorul numerelor B_m ale lui Bernoulli. Pentru un număr real pozitiv s demonstrăm o formulă asimptotică pentru $\mathrm{S[reg]}_s(n,x)$, suma puterilor s a întregilor regulaţi (mod n) mai mici sau egali cu x, unde $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$.

Combinăm funcţiile $\overline{c}_n(t)$ şi $\widetilde{P}(n)$ definite mai sus şi stabilim identităţi cu sume, respectiv produse peste întregi din Reg_n cu referire la polinoamele lui Bernoulli $B_m(X)$, funcţia Gamma a lui Euler, polinoamele ciclotomice $\Phi_m(X)$ şi anumite funcţii trigonometrice. Să observăm că pentru n liber de pătrate aceste identităţi se reduc la cele corespunzătoare peste mulţimea $\{1, 2, \ldots, n\}$. De asemenea, deducem o formă analoagă a identităţii lui Menon.

Suma $\mathrm{S[reg]}_r(n)$

Pentru $r \in \mathbb{N}^*$ considerăm $\mathrm{S[reg]}_r(n) := \sum_{k \in \mathrm{Reg}_n} k^r$, suma puterilor de exponent r a întregilor regulaţi (mod n), mai mici sau egali cu n. În continuare investigăm suma puterilor r ($r \in \mathbb{N}^*$) a întregilor regulaţi (mod n). Vom face apel şi la B_m ($m \in \mathbb{N}$), numerele Bernoulli.

Pentru un număr real s, considerăm funcţia $\varrho_s(n)$, generalizarea funcţiei $\varrho(n)$, care va fi studiată în Capitolul 4. Avem pentru $m \in \mathbb{N}$,

$$\varrho_{1-2m}(n) = n^{1-2m} \prod_{\substack{p^\alpha \,||\, n \\ p \in \mathbb{P}}} \left(p^{(2m-1)\alpha} - p^{2m-1} + 1\right).$$

În următoarea propoziţie dăm o formulă pentru suma puterilor întregilor regulaţi (mod n).

Propoziţia 1.3.3 (Apostol şi Tóth[**6**, Proposition 4]). *Pentru orice $n, r \in \mathbb{N}^*$,*

$$\mathrm{S[reg]}_r(n) = \frac{n^r}{2} + \frac{n^r}{r+1} \sum_{m=0}^{\lfloor r/2 \rfloor} \binom{r+1}{2m} B_{2m}\, \varrho_{1-2m}(n). \tag{1.1}$$

O formulă asimptotică pentru $\mathrm{S[reg]}_r(n)$

Pentru un număr real s să considerăm suma

$$\mathrm{S[reg]}_s(n,x) := \sum_{\substack{k\le x\\ k\in \mathrm{Reg}_n}} k^s.$$

O evaluare asimptotică a acestei sume este dată de

Propoziţia 1.4.1 (Apostol şi Tóth[**6**, Proposition 5]). *Fie $s\ge 0$ un număr real fixat. Atunci pentru $x\in\mathbb{R}$, $x>1$ şi $n\in\mathbb{N}^*$,*

$$\mathrm{S[reg]}_s(n,x) = \frac{x^{s+1}}{s+1}\cdot\frac{\varrho(n)}{n} + O\left(x^s 3^{\omega(n)}\right).$$

Sume în care apar polinoamele Bernoulli

Dacă $B_m(x)$ ($m\in\mathbb{N}$) sunt polinoamele Bernoulli, avem:

Propoziţia 1.5.1 (Apostol şi Tóth[**6**, Proposition 6]). *Pentru orice $n,m\in\mathbb{N}^*$, $m\ge 2$,*

$$\mathrm{T[reg]}_m(n) := \sum_{k\in\mathrm{Reg}_n} B_m(k/n) = B_m\varrho_{1-m}(n), \tag{1.2}$$

unde $\varrho_{1-m}(n) = n^{1-m}\prod_{p^\alpha\,||\,n,\ p\in\mathbb{P}}\left(p^{(m-1)\alpha}-p^{m-1}+1\right)$.

Sume în care apar funcţii care depind de cel mai mare divizor comun şi funcţia exponenţială

Considerăm în cele ce urmează funcţia

$$\mathrm{P[reg]}_{f,t}(n) := \sum_{k\in\mathrm{Reg}_n} f(\gcd(k,n))\exp(2\pi ikt/n) \quad (n\in\mathbb{N}^*, t\in\mathbb{Z}),$$

unde f este o funcţie aritmetică arbitrară. Pentru $t=0$ şi $f=\mathrm{id}$ (unde $\mathrm{id}(n)=n$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$), reobţinem funcţia $\widetilde{P}(n)$ şi pentru $f=\mathbf{1}$ ($\mathbf{1}(n)=1$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$) obţinem $\overline{c}_n(t)$, cea din urmă analoagă cu sumele Ramanujan şi ambele definite în introducerea acestui capitol.

În cazul în care $f=\mathrm{id}$ obţinem o generalizare a funcţiei

$$\widetilde{P}(n) = \sum_{k\in\mathrm{Reg}_n}\gcd(k,n) = n\prod_{p\,|\,n}\left(2-\frac{1}{p}\right).$$

Astfel,

$$\mathrm{P[reg]}_{\mathrm{id},t}(n) = \sum_{d\,||\,n} d c_{n/d}(t),$$

pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ şi orice $t\in\mathbb{Z}$. Din această reprezentare rezultă imediat că $\mathrm{P[reg]}_{\mathrm{id},t}(n)$ este o funcţie aritmetică cu valori întregi şi multiplicativă. Un rezultat mai general este dat de

Propoziţia 1.5.3 (Apostol şi Tóth[**6**, Proposition 7]). *Pentru orice f şi pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ şi $t\in\mathbb{Z}$,*

$$\mathrm{P[reg]}_{f,t}(n) = \sum_{d\,||\,n} f(d)c_{n/d}(t).$$

Dacă f este o funcţie cu valori întregi şi multiplicativă (caz particular când $f = \mathrm{id}$), atunci $n \mapsto \mathrm{P[reg]}_{f,t}(n)$ are de asemenea aceste proprietăţi.

Următorul rezultat stabileşte o formulă asimptotică pentru funcţia $\mathrm{P[reg]}_{\mathrm{id},1}$:

Propoziţia 1.5.4 (Apostol şi Tóth[**6**, Proposition 8]). *Avem*

$$\sum_{n\le x} \mathrm{P[reg]}_{\mathrm{id},1}(n) = \frac{x^2}{2}\prod_{p\in\mathbb{P}}\left(1-\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}\right) + O(x\log^2 x).$$

O identitate analoagă cu cea a lui Menon

În următoarea propoziţie demonstrăm o identitate analoagă celei a lui Menon ([**17**], [**27**])

$$\sum_{\substack{k=1\\ \gcd(k,n)=1}}^{n} \gcd(k-1,n) = \phi(n)\tau(n) \quad (n\in\mathbb{N}^*). \tag{1.3}$$

Propoziţia 1.5.5 (Apostol, Tóth[**6**, Proposition 9]). *Pentru orice* $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k\in\mathrm{Reg}_n}\gcd(k-1,n) = \sum_{d\,||\,n}\phi(d)\tau(d) = \prod_{\substack{p^\alpha\,||\,n\\ p\in\mathbb{P}}}\left(p^{\alpha-1}(p-1)(\alpha+1)+1\right).$$

Sume trigonometrice

Pornind de la identităţi trigonometrice cunoscute am descoperit forme analoage ale acestora, peste mulţimea Reg_n. De exemplu, avem

Propoziţia 1.5.6 (Apostol şi Tóth[**6**, Proposition 10]). *Pentru orice* $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k\in\mathrm{Reg}_n}\cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\varrho(n)+\overline{\mu}(n)}{2},$$

unde $\overline{\mu}(n)$ *este funcţia caracteristică a întregilor powerful.*

Propoziţia 1.5.7 (Apostol şi Tóth[**6**, Proposition 11]).*Pentru orice* $n\in\mathbb{N}^*$ *număr impar,*

$$\sum_{k\in\mathrm{Reg}_n}\tan^2\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \varrho_2(n)-\varrho(n),$$

$$\sum_{k\in\mathrm{Reg}_n}\tan^4\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{3}(\varrho_4(n)-4\varrho_2(n)+3\varrho(n)).$$

Produse de numere din Reg_n

Este cunoscut (vezi de exemplu [**20**, p. 197, Ex. 24]), că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{Q[relpr]}(n) := \prod_{\substack{k=1\\ \gcd(k,n)=1}}^{n} k = n^{\phi(n)} A(n), \tag{1.4}$$

unde

$$A(n) = \prod_{d\,|\,n} (d!/d^d)^{\mu(n/d)}.$$

Am demonstrat

Propoziţia 1.5.8 (Apostol şi Tóth[**6**, Proposition 12]). *Pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{Q[reg]}(n) := \prod_{k\in \mathrm{Reg}_n} k = n^{\varrho(n)} \prod_{d\,||\,n} A(d).$$

Produse în care apare funcţia Gamma

Fie Γ funcţia Gamma a lui Euler, definită pentru $x > 0$ prin

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt.$$

Este binecunoscut faptul că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$,

$$R(n) := \prod_{k=1}^{n} \Gamma(k/n) = \frac{(2\pi)^{(n-1)/2}}{\sqrt{n}}, \tag{1.5}$$

Propoziţia 1.5.9 (Apostol şi Tóth[**6**, Proposition 13]). *Pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{R[reg]}(n) := \prod_{k\in \mathrm{Reg}_n} \Gamma(k/n) = \frac{(2\pi)^{(\varrho(n)-1)/2}}{\sqrt{\gamma(n)}}. \tag{1.6}$$

Să observăm că pentru n liber de pătrate, (1.6) se reduce la relaţia (1.5).

Identităţi care conţin polinoame ciclotomice

Considerăm $\Phi_n(X)$ ($n \in \mathbb{N}^*$), al n–lea polinom ciclotomic (vezi, de exemplu, [**10**, Ch. 13]) definit prin

$$\Phi_n(X) = \prod_{\substack{k=1\\ \gcd(k,n)=1}}^{n} (X - \exp(2\pi i k/n)).$$

Gradul polinomului $\Phi_n(X)$ este $\phi(n)$, indicatorul lui Euler. Este binecunoscută formula lui Dedekind,

$$X^n - 1 = \prod_{d\,|\,n} \Phi_d(X).$$

Să considerăm acum următoarea formă analoagă a polinomului $\Phi_n(X)$:

$$\Phi[\mathrm{reg}]_n(X) = \prod_{k\in \mathrm{Reg}_n} (X - \exp(2\pi i k/n)).$$

Propoziţia 1.5.10 (Apostol şi Tóth[**6**, Proposition 14]). *Pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\Phi[\mathrm{reg}]_n(X) = \prod_{d \,||\, n} \Phi_d(X).$$

Mai mult, definim polinoamele modificate

$$\Phi[\mathrm{regmod}]_n(X) = (X-1)^{-1}\, \Phi[\mathrm{reg}]_n(X) = \prod_{\substack{d \,||\, n \\ d>1}} \Phi_d(X).$$

Obţinem următoarele identităţi:

Propoziţia 1.5.11 (Apostol şi Tóth[**6**, Proposition 15]). *Pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$,

$$\mathrm{U[regmod]}(n) := \prod_{\substack{k=1 \\ k \in \mathrm{Reg}_n}}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\Phi[\mathrm{regmod}]_n(1)}{2^{\varrho(n)-1}} = \frac{\gamma(n)}{2^{\varrho(n)-1}},$$

şi pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 3$ *impar*,

$$\mathrm{V[regmod]}(n) := \prod_{\substack{k=1 \\ k \in \mathrm{Reg}_n}}^{n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\Phi[\mathrm{regmod}]_n(-1)}{(-4)^{(\varrho(n)-1)/2}} = \left(-\frac{1}{4}\right)^{\frac{\varrho(n)-1}{2}}$$

CAPITOLUL 2

Ordine medii şi ordine extremale ale funcţiei $\varrho(n)$

Scopul acestui capitol este de a studia ordine medii şi ordine extremale ale funcţiei $\varrho(n)$.
Am determinat ordine medii pentru funcţiile $\varrho(n)/\psi(n)$, $\varrho(n)/\sigma(n)$ şi $\varrho(n)/\sigma^*(n)$. Spre exemplu, următoarea propoziţie ne precizează un ordin mediu pentru funcţia $\varrho(n)/\psi(n)$:
Propoziţia 2.2.1 (Apostol şi Petrescu [**5**, Proposition 6]).

$$\sum_{n\le x}\frac{\varrho(n)}{\psi(n)} = Kx + O\big(x^{\varepsilon}\big)$$

pentru orice $\varepsilon > 0$*, unde*

$$K = \prod_{p\in\mathbb{P}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p^{\alpha}}}{p^{\alpha}+p^{\alpha-1}}\right).$$

Ordine extremale pentru produse de funcţii aritmetice

Produsul $\phi(n)\sigma(n)$ are un ordin maximal $6/\pi^2$. Un ordin minimal al acestuia este 1.

Am studiat ordine extremale ale produselor $\varrho(n)\sigma(n)$ şi $\varrho(n)\psi(n)$, considerând şi cazul când n este powerful.
Propoziţia 2.3.1 (Apostol [**2**, Proposition 1]).

(i)
$$\frac{\varrho(n)\sigma(n)}{n^2} > 1,$$

pentru orice $n > 1$*.*

(ii)
$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\varrho(n)\sigma(n)}{n^2} = 1;$$

(iii)
$$\frac{\varrho(n)\sigma(n)}{n^2} \le \frac{\zeta(2)}{\zeta(6)},$$

pentru orice număr powerful n*.*

(iv)
$$\limsup_{\substack{n\to\infty\\ n \text{ powerful}}}\frac{\varrho(n)\sigma(n)}{n^2} = \frac{\zeta(2)}{\zeta(6)}.$$

O problemă deschisă a fost formulată în [**2**]: Putem determina ordine maximale pentru funcţiile $\varrho(n)\sigma(n)$ şi $\varrho(n)\psi(n)$? Răspunsul este dat de

Propoziţia 2.3.4 (Apostol şi Tóth[**6**, Proposition 16]).

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\varrho(n)\sigma(n)}{n^2 \log\log n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\varrho(n)\psi(n)}{n^2 \log\log n} = \frac{6}{\pi^2} e^{\gamma}.$$

Ordine extremale pentru rapoarte de funcţii aritmetice

Propoziţia următoare arată că un ordin maximal al lui $\dfrac{\sigma(n)}{\varrho(n)}$ este $e^{2\gamma}(\log\log n)^2$:

Propoziţia 2.4.1 (Apostol [**2**, Proposition 4]).

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sigma(n)}{\varrho(n)(\log\log n)^2} = e^{2\gamma}.$$

Funcţiile $\sigma^*(n)/\varrho(n)$ şi $\phi^*(n)/\varrho(n)$ au un ordin minimal 1. Determinăm ordine maximale ale acestor funcţii în următoarea propoziţie.

Propoziţia 2.4.3 (Apostol [**2**, Proposition 6]).

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sigma^*(n)}{\varrho(n)\log\log n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\phi^*(n)}{\varrho(n)\log\log n} = e^{\gamma}. \tag{2.1}$$

Compuneri de funcţii aritmetice

Sándor şi Tóth [**23**, Theorem 6] au investigat ordine maximale ale compunerii $\phi^*(\phi(n))$. Acest lucru ne sugerează ideea studierii compunerii $\varrho(\phi(n))$. Ca urmare, avem următoarea propoziţie:

Propoziţia 2.5.1 (Apostol [**2**, Proposition 7]). *Un ordin maximal al lui $\varrho(\phi(n))$ este n.*

În ceea ce priveşte studiul de ordine maximale ale compunerii $\varrho(\phi^*(n))$, propoziţia următoare dă un răspuns acestei probleme.

Propoziţia 2.5.2 (Apostol [**2**, Proposition 8]). *Un ordin maximal al lui $\varrho(\phi^*(n))$ este n.*

CAPITOLUL 3

Alte proprietăţi ale funcţiei aritmetice $\varrho(n)$

Investigăm anumite proprietăţi de natură asimptotică ale funcţiei $\varrho(n)$.

Propoziţia 3.1.1 (Apostol [**3**, Proposition 3]).

$$\limsup_{n\to\infty}(\varrho(n+1)-\varrho(n)) = +\infty \text{ } \c{s}i \text{ } \liminf_{n\to\infty}(\varrho(n+1)-\varrho(n)) = -\infty.$$

Să considerăm acum mulţimile

$$\mathcal{A} = \left\{ n \in \mathbb{N}^* : \frac{\varrho(n+1)}{\varrho(n)} > 1 \right\} \quad \text{şi} \quad \mathcal{B} = \left\{ n \in \mathbb{N}^* : \frac{\varrho(n+1)}{\varrho(n)} < 1 \right\}$$

care sunt infinite.

Propoziţia 3.2.2 (Apostol [**3**, Proposition 2]).

$$\liminf_{\substack{n\to\infty\\ n\in\mathcal{A}}} \frac{\varrho(n+1)}{\varrho(n)} = 1 \text{ } \c{s}i \text{ } \limsup_{\substack{n\to\infty\\ n\in\mathcal{B}}} \frac{\varrho(n+1)}{\varrho(n)} = 1.$$

J. Sándor [**22**, Chapter 3, §21], studiind probleme de densitate, arată că mulţimile $\left\{ \frac{\psi(n)}{n} : n \geq 1 \right\}$ şi $\left\{ \frac{\psi(n)}{\phi(n)} : n \geq 1 \right\}$ sunt dense în $(1, +\infty)$, în sens topologic.

Cercetând acelaşi tip de proprietate pentru funcţiile $\frac{\psi(n)}{\varrho(n)}$ şi $\frac{\varrho(n)}{\phi(n)}$ obţinem

Propoziţia 3.3.2 (Apostol [**3**, Proposition 4]).

(i) *Mulţimea* $\left\{ \frac{\psi(n)}{\varrho(n)} : n \geq 1 \right\}$ *este densă* în $(1, +\infty)$;

(ii) *Mulţimea* $\left\{ \frac{\varrho(n)}{\phi(n)} : n \geq 1 \right\}$ *este densă* în $(1, +\infty)$.

CAPITOLUL 4

O generalizare a funcţiei $\varrho(n)$

În acest ultim capitol introducem şi studiem funcţia aritmetică $\varrho_r(n)$ ($r \in \mathbb{N}^*$), o formă generalizată a funcţiei $\varrho(n)$. Funcţia $\varrho_r(n)$ este analoaga funcţiei lui Jordan de ordinul r, respectiv $\phi_r(n)$, reprezentând numărul sistemelor ordonate de r întregi $(a_1, \ldots, a_r) \in \{1, \ldots, n\}^r$ astfel încât $\gcd(a_1, \ldots, a_r)$ este prim cu n (vezi, de exemplu, [**16**]).

Pentru $r \in \mathbb{N}^*$ considerăm $\varrho_r(n)$ numărul de sisteme ordonate de r întregi $(k_1, \ldots, k_r) \in \{1, \ldots, n\}^r$ astfel încât $\gcd(k_1, \ldots, k_r)$ este regulat (mod n). Dacă $r = 1$, atunci $\varrho_1 = \varrho$. Mai mult,

$$\varrho_r(n) = \sum_{\substack{(a_1,\ldots,a_r)\in\{1,2,\ldots,n\}^r \\ \gcd(a_1,a_2,\ldots,a_r)\in\mathrm{Reg}_n}} 1.$$

Următoarea propoziţie ne dă o formulă pentru $\varrho_r(n)$, analoagă celei deja cunoscute, $\varrho(n) = \sum_{d\|n} \phi(d)$.

Propoziţia 4.2.1 (Apostol şi Tóth[**6**, Proposition 1]). *Pentru orice $r, n \in \mathbb{N}^*$,*

$$\varrho_r(n) = \sum_{d\,||\,n} \phi_r(d).$$

Pentru un număr real fixat s definim $\phi_s(n) = \sum_{d\,|\,n} d^s \mu(n/d)$, funcţia Jordan generalizată şi funcţia ϱ_s, prin

$$\varrho_s(n) = \sum_{d\,||\,n} \phi_s(d) \quad (n \in \mathbb{N}^*). \tag{4.1}$$

Funcţiile ϕ_s şi ϱ_s care vor fi utilizate în continuare sunt multiplicative.

O formulă asimptotică pentru $\varrho_s(n)$

Studiind comportarea asimptotică a funcţiei $\varrho_s(n)$ cu $s > 1$, am obţinut următorul rezultat:

Propoziţia 4.3.1 (Apostol şi Tóth[**6**, Proposition 2]). *Dacă $s > 1$ este un număr real, atunci*

$$\sum_{n\leq x} \varrho_s(n) = \frac{x^{s+1}}{s+1} \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^{s+1}} + \frac{p-1}{p(p^{s+1}-1)}\right) + O(x^s). \tag{4.2}$$

Seria Dirichlet a funcţiei $\varrho_r(n)$

B. Apostol şi L. Petrescu [**5**] au studiat seria Dirichlet a funcţiei $\varrho(n)$. În cele ce urmează dăm o formulă pentru seria Dirichlet a lui $\varrho_r(n)$ pentru $r \geq 2$.

Propoziţia 4.4.1 (Apostol şi Petrescu[**4**, Proposition 1.1]). *Pentru orice $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ cu $\sigma > r + 1$,*

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\varrho_r(n)}{n^s} = \zeta(s-r)\zeta(s) \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{p^{2s-r} + p^s - p^{s-r}}{p^{3s-r}}\right).$$

Ordine extremale pentru $\varrho_s(n)\sigma_s(n)$ şi $\varrho_s(n)\psi_s(n)$

Precizăm un ordin maximal pentru $\varrho_s(n)\sigma_s(n)$ şi $\varrho_s(n)\psi_s(n)$, unde $\sigma_s(n)$ şi $\psi_s(n)$ sunt forme generalizate pentru $\sigma(n)$ şi $\psi(n)$.

Propoziţia 4.5.1 (Apostol şi Tóth[**6**, Remark 4]).

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{\varrho_s(n)\sigma_s(n)}{n^{2s}} = \limsup_{n \to \infty} \frac{\varrho_s(n)\psi_s(n)}{n^{2s}} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)},$$

pentru orice număr real $s > 1$.

Ordine extremale ale funcţiilor $\dfrac{\sigma_r(n)}{\varrho_r(n)}$ şi $\dfrac{\psi_r(n)}{\varrho_r(n)}$

Prezentăm un rezultat care afirmă că un ordin maximal al funcţiilor $\dfrac{\sigma_r(n)}{\varrho_r(n)}$ şi $\dfrac{\psi_r(n)}{\varrho_r(n)}$ este $\dfrac{6}{\pi^2}e^{2\gamma}(\log\log n)^2$:

Propoziţia 4.6.1 (Apostol şi Petrescu[**4**, Proposition 1.2]).
Pentru orice $r \geq 2$,

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{\sigma_r(n)}{\varrho_r(n)(\log\log n)^2} = \limsup_{n \to \infty} \frac{\psi_r(n)}{\varrho_r(n)(\log\log n)^2} = \frac{6}{\pi^2}e^{2\gamma}.$$

Funcţiile unitare analoage pentru $\sigma_r(n)$ şi $\phi_r(n)$

În cele ce urmează considerăm, pentru $r \geq 1$, funcţiile $\sigma_r^*(n)$ şi $\phi_r^*(n)$, forme generalizate pentru funcţia sumă a divizorilor unitari ai lui n şi pentru funcţia unitară analoagă a lui Euler, respectiv. Un ordin minimal al funcţiilor $\sigma_r^*(n)/\varrho_r(n)$ şi $\phi_r^*(n)/\varrho_r(n)$ este 1.

Pentru un ordin maximal al acestor funcţii demonstrăm

Propoziţia 4.7.1 (Apostol şi Petrescu[**4**, Proposition 3.1]). *Pentru orice $r \geq 1$,*

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{\sigma_r^*(n)}{\varrho_r(n)\log\log n} = \limsup_{n \to \infty} \frac{\phi_r^*(n)}{\varrho_r(n)\log\log n} = e^{\gamma}.$$

Compuneri de funcţii aritmetice generalizate

Ne îndreptăm atenţia asupra ordinelor extremale ale anumitor compuneri de funcţii aritmetice, în forma lor generalizată. Începem cu

$\varrho_r(\varrho_r(n))$ şi $\phi_r(\varrho_r(n))$ pentru $r \geq 1$, care au un ordin maximal egal cu n^{r^2}.

În [**2**] a fost investigată existenţa unui ordin maximal al lui $\varrho(\phi(n))$. Am continuat cercetarea pentru formele generalizate ale funcţiilor $\varrho(n)$ şi $\phi(n)$. În consecinţă, am demonstrat

Propoziţia 4.8.1 (Apostol şi Petrescu[**4**, Proposition 4.1]). *Un ordin maximal al lui* $\varrho_r(\phi_r(n))$ este n^{r^2}.

Am demonstrat că un ordin maximal al lui $\varrho(\phi^*(n))$ este n (vezi [**2**]). Pentru un ordin maximal al lui $\varrho_r(\phi^*(n))$ dăm

Propoziţia 4.8.2 (Apostol şi Petrescu[**4**, Proposition 4.2]).

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\varrho_r(\phi^*(n))}{n^r} = 1.$$

Ordine maximale pentru $\dfrac{\sigma_r(\phi^*(n))}{\varrho_r(\phi^*(n))}$ şi $\dfrac{\psi_r(\phi^*(n))}{\varrho_r(\phi^*(n))}$ sunt date de

Propoziţia 4.8.5 (Apostol şi Petrescu[**4**, Proposition 4.3]).

(i)

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sigma_r(\phi^*(n))}{\varrho_r(\phi^*(n))(\log\log n)^2} = \frac{6}{\pi^2}e^{2\gamma}$$

şi

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sigma_r(\phi^*(n))}{\varrho_r(\phi^*(n))(\log\log \phi^*(n))^2} = \frac{6}{\pi^2}e^{2\gamma};$$

(ii)

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\psi_r(\phi^*(n))}{\varrho_r(\phi^*(n))(\log\log n)^2} = \frac{6}{\pi^2}e^{2\gamma}$$

şi

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\psi_r(\phi^*(n))}{\varrho_r(\phi^*(n))(\log\log \phi^*(n))^2} = \frac{6}{\pi^2}e^{2\gamma}.$$

Bibliografie selectivă

[1] O. Alkam, E. Osba, On the regular elements in $\mathbb{Z}_n$, *Turk. J. Math* **32** (2008), 1–9.

[2] B. Apostol, Extremal orders of some functions connected to regular integers modulo n, *An. Ştiinţ. Univ. "Ovidius" Constanţa, Ser. Mat.* **21** (2013), 5–19.

[3] B. Apostol, Some properties of regular integers modulo n, *Pioneer J. Algebra Number Theory Appl.* **2** (2011), 73–82.

[4] B. Apostol, L. Petrescu, Extremal orders of certain functions associated with regular integers modulo n, *J. Integer Seq.* **16** (2013), Article 13.7.5.

[5] B. Apostol, L. Petrescu, On the number of regular integers modulo n, *J. Algebra Number Theory Acad.* **2** (2012), 337–352.

[6] B. Apostol, L.Tóth, Some remarks on regular integers modulo n, *Filomat* (2014), acceptat.

[7] T.M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer-Verlag, New York, 1976.

[8] S. Finch, Idempotents and nilpotents modulo n, 2006, preprint, `http://arxiv.org/abs/math.NT/0605019v1`.

[9] P. Haukkanen, L. Tóth, An analogue of Ramanujan's sum with respect to regular integers (mod r), *Ramanujan J.* **27** (2012), 71–78.

[10] K. Ireland, M. Rosen, *A Classical Introduction to Modern Number Theory*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics 84, Springer, 1990.

[11] V. S. Joshi, Order-free integers (mod n), *Lecture Notes in Math.* **938** Springer (1982), 93–100.

[12] J.-M. de Koninck, F. Luca, On the composition of the Euler function and the sum of divisors function, *Colloq. Math.* **108** (2007), 31–51.

[13] J.-M. de Koninck, I. Kátai, Some remarks on a paper of L. Tóth, *J. Integer Sequences* **13** (2010), Article 10.1.2.

[14] F. Luca, C. Pomerance, On some problems of Makowski-Schinzel and Erdős concerning the arithmetical functions ϕ and σ, *Colloq. Math.* **92** (2002), 111–130.

[15] A. Mąkowski, A. Schinzel, On the functions $\phi(n)$ and $\sigma(n)$, *Colloq. Math.* **13** (1964-1965), 95–99.

[16] P . J. McCarthy, *Introduction to Arithmetical Functions*, Springer, 1986.

[17] P. K. Menon, On the sum $\sum (a-1, n)[(a, n) = 1]$, *J. Indian Math. Soc. (N.S.)* **29** (1965), 155–163.

[18] J. Morgado, A property of the Euler ϕ-function concerning the integers wich are regular modulo n, *Portugal. Math.* **33** (1974), 185–191.

[19] J. Morgado, Inteiros regulares módulo n, *Gazeta de Matematica (Lisboa)* **33** (1972), No. 125-128, 1–5.

[20] I. Niven, H. S. Zuckerman, H.L. Montgomery, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5th ed. John Wiley & Sons, 1991.

[21] L. Panaitopol, A. Gica, *O Introducere în Aritmetică şi Teoria Numerelor*, Editura Universităţii din Bucureşti, 2001.

[22] J. Sándor, *Geometric Theorems, Diophantine Equations, And Arithmetic Functions*, American Research Press Rehoboth 2002.

[23] J. Sándor, L. Tóth, Extremal orders of compositions of certain arithmetical functions, *Integers: Electronic Journal of Combinatorial Number Theory* **8** (2008), #A34.

[24] R. Sivaramakrishnan, *Classical Theory of Arithmetic Functions*, Marcel Dekker, 1989.

[25] L. Tóth, A gcd-sum function over regular integers mod n, *J. Integer Seq.* **12** (2009), Article 09.2.5.

[26] L. Tóth, A survey of gcd-sum functions, *J. Integer Seq.* **13** (2010), Article 10.8.1.

[27] L. Tóth, Menon's identity and arithmetical sums representing functions of several variables, *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino* **69** (2011), 97–110.

[28] L. Tóth, Regular integers mod n, *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp.* **29** (2008), 264–275, `http://front.math.ucdavis.edu/0710.1936`.

[29] Zhao Hua Yang, A note for orfer-free integers (mod n), *J. China Univ. Sci. Tech.* **16** (1986), 116–118.

[30] D. Zhang, W. Zhai, Mean values of a class of arithmetical functions, *J. Integer Sequences* **14** (2011), Article 11.6.5.

[31] D. Zhang, W. Zhai, Mean values of a gcd-sum function of regular integers modulo n, *J. Integer Sequences* **13** (2010), Article 10.4.7.