REFERAT: Ideale polimatroidale

Doctorand: *Cimpoeaş Mircea*
Coordonator: *Prof.dr.Popescu Dorin*

16 decembrie 2004

Rezumat

Studiul polimatroizilor constituie una din temele centrale ale combinatoricii şi ale algebrei combinatorice.

Polimatroizii discreţi sunt o generalizare naturală a matroizilor, de mult timp încetăţenintă în matematică.

În acest referat prezint combinatorica şi algebra polimatroizilor discreţi. De asemenea, arăt cum se poate aplica această teorie combinatorică în algebra comutativă, via ideale polimatroidale.

Referatul îl structurez în următoarele capitole. În prima secţiune, prezint definiţii şi rezultate preliminare. În a doua secţiune definesc noţiunea de ideal polimatroidal şi prezint proprietăţile elementare ale acestora. În cea de-a treie secţiune, demonstrez teorema de caracterizare a idealelor polimatroidale Cohen-Macaulay.

Remarcă: Trebuie să mai lucrez la această introducere...

1 Definiţii şi rezultate preliminare

Definiţia 1.1. *Fie* $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ *şi* $\mathcal{P}([n])$ = *mulţimea submulţimilor lui* $[n]$. *Se numeşte matroid, orice familie nevidă* $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}([n]) = 2^{[n]}$ *care verifică următoarele proprietăţi:*

1. *Dacă* $F \in \mathcal{M}$ *şi* $G \subset F \Rightarrow G \in \mathcal{M}$.

2. *Dacă* $F, G \in \mathcal{M}$ *şi* $|F| < |G|$ *atunci* $(\exists)x \in G$ *a.î.* $F \cup \{x\} \in \mathcal{M}$.

Elementelui lui $\mathcal{M}$ *se numesc mulţimi independente. O bază în* $\mathcal{M}$ *este o mulţime independentă maximială.*

Propoziţia 1.2.
1. *Mulţimea bazelor lui* $\mathcal{M}$ *are proprietatea de interschimbare următoare:*

   (B) Dacă B_1 *şi* B_2 *sunt două baze a lui* $\mathcal{M}$ *şi* $x \in B_1 \setminus B_2$, *atunci există* $y \in B_2 \setminus B_1$ *astfel că* $(B_1 \setminus \{x\}) \cap \{y\}$ *este o bază în* $\mathcal{M}$.

   În particular, rezultă că orice două baze au acelaşi cardinal, numit dimensiunea lui $\mathcal{M}$.

2. *De fapt, mulţimea bazelor lui* $\mathcal{M}$ *are proprietatea de interschimbare simetrică:*

   (S) Dacă B_1 *şi* B_2 *sunt două baze a lui* $\mathcal{M}$ *şi* $x \in B_1 \setminus B_2$, *atunci există* $y \in B_2 \setminus B_1$ *astfel că* $(B_1 \setminus \{x\}) \cap \{y\}$ *şi* $(B_1 \setminus \{y\}) \cap \{x\}$ *sunt baze în* $\mathcal{M}$.

3. *O mulţime* $\mathcal{B} \subset 2^{[n]}$ *este mulţimea bazelor unui matroid* $\mathcal{M}$ *dacă şi numai dacă* $\mathcal{B}$ *verifică proprietatea (B).*

Notaţii:

Notăm $e_1, \ldots, e_n$ baza canonică din $\mathbb{R}^n$ ($e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$).
Pe $\mathbb{R}^n$ considerăm ordinea naturală " $\leq$ " ($u \leq v \Leftrightarrow u_i \geq v_i$, $(\forall)i \in [n]$).
Dacă $u \in \mathbb{R}^n$, notăm $|u| = \sum_{i=1}^n u_i$.
Notăm $\mathbb{R}^n_+ = \{u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n | u_i \geq 0, (\forall)i \in [n]\}$.
Notăm $\mathbb{Z}^n_+ = \mathbb{R}^n_+ \cap \mathbb{Z}^n$.

Observaţia 1.3. *Un matroid poate fi înţeles ca o familie de vectori în* $\mathcal{M} \subset \{0, 1\}^n$ *care verifică proprietăţile:*

1. *Dacă* $u \in \mathcal{M}$ *şi* $v \in \{0, 1\}^n$ *astfel încât* $u \leq v$ *atunci* $v \in \mathcal{M}$.

2. *Dacă* $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathcal{M}$ *şi* $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathcal{M}$ *cu* $|u| < |v|$ *atunci există un număr* $i \in [n]$ *cu* $u_i = 0$ *şi* $v_i = 0$ *şi* $u + e_i \in \mathcal{M}$.

Această remarcă ne permite să introducem următoarea generalizare.

Definiţia 1.4. *Un polimatroid discret este o familie nevidă* $\mathcal{P} \subset \mathbb{Z}^n_+$ *care verifică următoarele proprietăţi:*

1. *Dacă* $u \in \mathcal{P}$ *şi* $v \in \mathbb{Z}^n_+$ *cu* $v \leq u$ *atunci* $v \in \mathcal{P}$.

2. *Dacă* $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathcal{P}$ *şi* $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathcal{P}$ *cu* $|u| < |v|$, *atunci există un număr* $i \in [n]$ *cu* $u_i < v_i$ *şi* $u + e_i \in \mathcal{P}$.

2 Ideale polimatroidale.

Definiţia 2.1. *Fie k un corp şi* $S = K[X_1, \ldots, X_n]$ *inelul de polinoame în n variabile peste k. Fie* $I \lhd S$ *un ideal monomial. Notăm* $G(I)$ = *mulţimea generatorilor minimali ai lui* I.

Se numeşte acoperire cu vârfuri a lui I *o submulţime de variabile* $W = \{X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}\}$ *cu proprietatea că* $I \subset (X_{i_1}, \ldots, X_{i_k})$. *O acoperire minimală este o acoperire din care nu putem extrage una mai mică. În acest caz, idealul* $P = (X_{i_1}, \ldots, X_{i_k})$ *este un prim minimal asociat lui* I.

Un ideal monomial se numeşte nemixtat, dacă toate acoperirile minimale ale lui I *au acelaşi cardinal. Dacă* S/I *este Cohen-Macaulay, atunci* I *este nemixtat, deoarece toate primele minimale ale lui* I *au aceiaşi înalţime. Mai mult, în acest caz avem relaţia:*

$$dim(S/I) = n - ht(I).$$

Definiţia 2.2. *Spunem că un ideal monomial* $I \lhd S$ *are câturi liniare, dacă există o ordine pe mulţimea generatorilor minimali,* $u_1, \ldots, u_s$, *astfel încât:*

$$(\forall) 2 \leq j \leq s, \ \ \textit{idealul} \ \ (u_1, \ldots, u_{j-1}) : u_j \ \ \textit{este generat de variabile.}$$

Vom utiliza ulterior următorul rezultat:

Lema 2.3. *Dacă* $I \lhd S$ *este un ideal monomial care are câturi liniare, atunci* I *admite rezoluţie liniară.*

Definiţia 2.4. *Un ideal monomial* $I \lhd S$ *se numeşte (matroidal) polimatroidal dacă sistemul să de generatori minimali* $G(I)$ *corespunde bazei unei matroid (polimatroid). Mai precis spus, avem proprietatea:*

Oricare ar fi monoamele $u = X_1^{a_1} \cdots X_n^{a_n}$ *şi* $v = X_1^{b_1} \cdots X_n^{b_n}$ *din sistemul minimal de generatori ai lui* I, *pentru fiecare* i *cu* $a_i > b_i$ *există un* j *cu* $a_j > b_j$ *astfel încât* $x_j u / x_i \in G(I)$.

Observaţia 2.5. *Un ideal matroidal este un ideal polimatroidal generat de monoame libere de pătrate.*

Propoziţia 2.6. *Dacă* $I, J \lhd S$ *sunt ideale polimatroidale, atunci* $I \cdot J$ *este ideal polimatroidal. În particular* I^n *este polimatroidal.*

Teorema 2.7. *Un ideal polimatroidal* $I \lhd S$ *are câturi liniare în raport cu ordinea invers-lexicografică indusă de* $X_1 > X_1 > \ldots > X_n$. *Mai precis spus, dacă* I *este un ideal polimatroidal, iar* $G(I) = \{u_1, \ldots, u_s\}$ *este sistemul său minimal de generatori ordonaţi descrecător* $u_1 >_{rev} u_2 >_{rev} \ldots >_{rev} u_s$ *atunci idealul* $(u_1, \ldots, u_{j-1}) : u_j$ *este generat de o mulţime de variabile.*

În particular, rezultă că I *admite rezoluţii liniare.*

Exemplul 2.8. *Fie* $d > 0$ *un întreg. Definim idealele:*

$V_d = (X^\alpha, |\alpha| = d)$ *idealul Venonese de grad* d.

$V'_d = (X^\alpha, |\alpha| = d, \alpha_i \leq 1)$ *idealul Venonese de grad* d, *liber de pătrate.*

Atunci atât V_d *cât şi* V'_d *sunt ideale polimatroidale (*V'_d *este chiar matroidal).*

Exemplul 2.9. *Considerăm în* $S = K[X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6]$, *următorul ideal:*

$$I = (X_1X_3, X_1X_4, X_1X_5, X_1X_6, X_2X_3, X_2X_4, X_2X_5, X_2X_6, X_3X_5, X_3X_6, X_4X_5, X_4X_6).$$

Atunci I *este ideal matroidal şi nemixtat, dar* I *nu este Cohen-Macaulay. Rămâne să scriu şi justificarea acestui fapt.*

3 Clasificarea idealelor polimatroidale Cohen-Macaulay

Lema 3.1. *Dacă $I \triangleleft S$ este un ideal polimatroidal, atunci $\sqrt{I}$ este un ideal de tip Veronese liber de pătrate.*

Demonstraţie. $\square$

Teorema 3.2. *(Teorema de clasificare a idealelor polimatroidale Cohen-Macaulay) Un ideal polimatroidal $I \triangleleft S$ este Cohen-Macaulay, dacă şi numai dacă, este:*

1. *un ideal principal,*
2. *un ideal Veronese sau*
3. *un ideal Veronese liber de pătrate.*

Demonstraţie. Conform lemei anterioare, $\sqrt{I} = V_d$ pentru un $d \in \{2, \ldots, n-1\}$. Cum I este Cohen-Macaulay, avem $ht(I) = ht(\sqrt{I}) = n - d + 1$. $\square$

Bibliografie

[1] Jürgen Herzog, Takayuki Hibi ”Discrete polymatroids”, Jurnal of Alg.Comb. (2003)

[2] Jürgen Herzog, Takayuki Hibi ”Cohen-Macaulay polymatroidal ideals”

[3] Alberto Conca and Jürgen Herzog,”Castelnuovo-Mumford regularity of products of ideals”, Collect.Math. 54(2003)

[3] Marius Vlădoiu ”Teză de doctorat”, iunie 2004

Cuprins