Teză de Doctorat
Rezumat

Analiză stocastică şi potenţiale - ergodicitate şi cvasi-martingale pentru procese Markov

Iulian Cîmpean

Conducător : Lucian Beznea

Bucureşti, 2016

Această tezaă este dedicată studiului unor proprietăţi globale şi locale pentru procese Markov împreună cu semigrupurile şi rezolvantele asociate, utilizând instrumente analitice şi probabiliste de teoria potenţialului: recurenţă, tranzienţă, ireductibilitate şi ergodicitate în spaţii L^p, existenţa măsurilor invariante, cvasi-martingale şi semimartingale pe spaţii Markov. Cadrul este îndeajuns de general pentru a permite aplicaţii în analiza pe spaţii infinit dimensionale via forme Dirichlet, la ecuaţii stocastice cu derivate parţiale pe spaţii Hilbert, sau la procese cu valori măsuri.

Exceptând preliminariile prezentate în primul capitol al lucrării, deosebim patru teme centrale diferite (prezentate pe scurt mai jos), tratate separat în patru capitole.

În prima parte studiem proprietăţile de tranzienţă, recurenţă şi ireductibilitate pentru rezolvante sub-Markoviene de nuclee şi dualele lor, în raport cu o măsura subinvariantă m. Prezentăm o caracterizare completă a funcţiilor invariante, scoţând în evidenţă faptul că o funcţie din L^p este armonică dacă şi numai dacă este armonică faţă de rezolvanta duală. Tehnicile folosite sunt cele specifice teoriei potenţialului pentru rezolvante în dualitate slabă. Demonstrăm că recurenţa m-ireductibilă pentru rezolvante este echivalentă cu extremalitatea măsurii m în mulţimea tuturor măsurilor invariante şi aplicăm acest rezultat la măsuri Gibbs. De asemenea, arătăm că rezultatele obţinute se pot aplica la forme Dirichlet nesimetrice, în situaţii generale sau concrete. O a doua aplicaţie constă în extinderea aşa numitei teoreme de ergodicitate a lui Fukushima pentru forme Dirichlet simetrice, la rezolvante sub-Markoviene de nuclee.

În a doua parte prezentăm o nouă abordare, în doi paşi, pentru a demonstra existenţa măsurilor invariante finite pentru semigrupuri Markoviene. Întâi identificăm o măsură auxiliară convenabilă, iar apoi demonstrăm condiţii echivalente pentru existenţa unei măsuri invariante finite absolut conţinue în raport cu măsura auxiliară. Ca aplicaţii, dăm o demonstraţie scurtă pentru rezultatul lui Lasota şi Szarek asupra măsurilor invariante şi obţinem o generalizare cu caracter unificator pentru diferite versiuni ale teoremei de ergodicitate a lui Harris, ce ne permite să dăm un răspuns unei probleme deschise a lui Tweedie. Arătăm că pentru o ecuaţie stocastică cu derivate parţiale pe un triplet Gelfand, condiţia de coercivitate strictă este suficientă pentru a garanta existenţa unei unice probabilităţi invariante pentru semigrupul asociat, de îndată ce o inegalitate de tip Harnack este satisfăcută. De asemenea, un corolar ar rezultatului principal arată că orice semigrup uniform mărginit pe L^p admite o măsură invariantă, după care considerăm câteva aplicaţii la perturbări sectoriale a formelor Dirichlet.

În partea a treia studiem funcţiile u cu proprietatea că $u(X)$ este un cvasi-martingal, unde X este un proces drept fixat. Analiza se bazează pe o reformulare pur analitică a proprietăţii de cvasi-martingal pentru $u(X)$ în termenii unei variaţii a lui u în raport cu funcţia de tranziţie a procesului. Arătăm că $u(X)$ este un cvasi-martingal dacă şi numai dacă u este o diferenţă de două funcţii excesive finite. În particular, arătăm că structura de cvasi-martingal a lui u este păstrată la transformări de tipul omorâre, schimbare de timp, sau subordonare Bochner. Dăm condiţii suficiente ca $u(X)$ să fie un cvasi-martingal şi, în final, extindem la cazul semi-Dirichlet o caracterizare a funcţionalelor semimartingal obţinută de Fukushima pentru procese Markov simetrice.

În ultima parte, printr-o abordare directă bazată pe teorema lui Lusin, demonstrăm teorema Bochner-Kolmogorov de existenţă a limitei proiective de sisteme de spaţii Hausdorff (ne-metrizabile) cu baza numărabilă, înzestrate cu probabilităţi interior regulate, pentru care aplicaţiile de proiecţie sunt doar funcţii măsurabile. Motivul reluării acestui rezultat clasic provine dintr-o aplicaţie la construcţia de procese de fragmentare în timp continuu, în asociere cu procese de ramificare.

Aceasta teză este constituită în principal din lucrările [BeCîRö 15], [BeCîRö 15a], [BeCî 16], şi [BeCî 14].

În cele ce urmează detaliem structura şi rezultatele principale ale acestei teze. Menţionăm că celor patru teme principale precizate mai sus le corespund capitolele 2-5.

În Capitolul 1, *Preliminarii*, pentru a veni în sprijinul cititorului dar şi pentru a fixa notaţiile, trecem în revistă câteva definiţii şi rezultate mai mult sau mai puţin clasice, ce vor fi folosite intensiv dealungul capitolelor ulterioare: rezolvante de nuclee, funcţii excesive, dualitate, procese Markov şi teoria potenţialului, elemente de teoria formelor Dirichlet. În această parte, pentru a sublinia intrumentele sau tehnicile standard pe care le-am folosit în demonstraţiile rezultatelor principale ale acestei teze, ne-am străduit să indicăm măcar secţiunea unde ele sunt invocate.

Cel de-al doilea capitol, intitulat *Proprietăţi ergodice pentru rezolvante şi aplicaţii*, are un dublu-scop: în primul rând, să clarifice legătura dintre variatele definiţii pentru tranzienţă, recurenţă şi ireductibilitate, şi să unifice diferite caracterizări ale acestor nţiuni; în al doilea rând, să studieze în ce măsură tranzienţa, recurecta şi ireductibilitatea sunt proprietăţi stabile când se trece la structura duală, adică procesul Markov dual sau respectiv resolvanta duală, măsura de dualitate fiind una sub-invariantă pentru rezolvanta iniţială. Pe parcurs, sunt obţinute o serie de rezultate noi pe acest subiect, folosind tehnici de teoria potenţialului.

Motivaţi de exemple relevante ce apar cu precădere pe spaţii infinit dimensionale, tratăm acest subiect pe spaţii L^p, pentru rezolvante sub-Markoviene. Această abordare se dovedeşte a fi cu caracter unificator, permiţându-ne, în particular, să considerăm aplicaţii la măsuri invariante şi măsuri Gibbs.

Probleme legate de recurenţă, tranzienţă şi ireductibilitate a proceselor Markov au fost tratate în contexte variate şi cu instrumente specifice, atât din punct de vedere probabilistic cât şi analitic: a se vedea [ChenFu 11], [Get 80], [Oshi 92], [Sturm 94], [Fu 07], [FuOsTa 11] şi [MaUeWa 12] pentru procese în timp continuu, şi [MeTw 93] şi [Norr 97] pentru lanţuri Markov, cât şi referinţele menţionate în aceste lucrări.

Structura şi rezultatele principale ale capitolului 2 sunt urmăroarele.

În prima parte a secţiunii 2.1 studiem diferite caracterizări ale tranzienţei, recurenţei şi ireductibilităţii unei rezolvante sub-Markoviene de nuclee $\mathcal{U}$ pe un spaţiu Lusin măsurabil E, în raport cu o măsură sub-invariantă σ-finita m. Dorim să subliniem că nu presupunem nicio proprietate de continuitate a rezolvantei şi că demonstraţiile prezentate se bazează pe dualitatea slabă pentru rezolvanta $\mathcal{U}$ şi pe tehnicile de teoria potenţialului asociată, venind în contrast cu cele din [Fu 07] şi [FuOsTa 11], unde ingredientele principale sunt inegalitatea maximală a lui Hopf şi continuitatea funcţiei de tranziţie. Atunci când $\mathcal{U}$ este rezolvanta unui proces drept, arătăm că m-tranzienţa şi recurenţa m-ireductibilă sunt respectiv echivalente cu tranzienţa şi recurenţa procesului în sensul mai tare din [Get 80], în afara unei mulţimi m-inesenţiale. Această faţetă probabilistă a fost studiată în [FuOsTa 11] pentru procese Hunt m-simetrice. Apoi, prezentăm o caracterizare a funcţiilor invariante din $L^p(E, m)$, $1 \le p \le \infty$, unificând abordările de la procese stocastice, forme Dirichlet, semigrupuri pozitive, sau teorie ergodică. Rezultatele obţinute acoperă şi extind pe cele din [Schi 04] şi le vom utiliza în secţiunile 2.2 şi 2.3 pentru a demonstra echivalenţa dintre ireductibilitate şi extremalitatea măsurilor invariante, respectiv extremalitatea măsurilor Gibbs. O a doua consecinţă afirmă că un element u din nucleul generatorului unei rezolvante sub-Markoviene de contracţii tare continuă pe L^p, aparţine, de asemenea, nucleului co-generatorului de pe L^p indus de dualitatea slabă.

În secţiunea 2.2 aplicăm rezultatele din secţiunea precedentă pentru a demonstra echivalenţa dintre recurenţa ireductibilă şi ergodicitatea unei rezolvante de nuclee sub-Markoviene, în raport cu o măsură sub-invariantă σ-finită, extinzând aşa numita teoremă ergodică a lui Fukushima pentru o formă Dirichlet (cvasi) regulată; a se vedea [FuOsTa 11], Teorema 4.7.3 şi [AlKoRö 97a], Teorema 4.6. Ingredientul cheie afirmă convergenţa tare a unei familii rezolvante L^p-uniform mărginită de operatori $(\alpha U_\alpha)_{\alpha>0}$ la proiecţia pe nucleul operatorului $\mathcal{I} - \beta U_\beta$, când α tinde la 0, pentru unul (deci pentru toţi) $\beta > 0$.

Rezultatul central al secţiunii 2.3 afirmă că rezolvanta sub-Markoviana de nuclee $\mathcal{U}$ este m-recurentă şi m-ireductibilă dacă şi numai dacă probabilitatea m este extremală în mulţimea tuturor probabilităţilor invariante pentru $\mathcal{U}$. Acest rezultat le extinde pe cele din [AlKoRö 97a], [AlKoRö 97b] şi [DaZa 96], Secţiunea 3.1, cu privire la ergodicitatea şi extremalitatea măsurilor invariante.

În secţiunea 2.4 aplicăm rezultatele obţinute despre tranzienţa, recurenţa, ireductibilitate şi extremalitatea măsurilor invariante, în contextul formelor (nesimetrice) Dirichlet. Ca aplicaţii, extindem la cazul nesimetric două bine cunoscute criterii de recurenţă a formelor simetrice, unul în termeni de existenţă a unui şir de elemente din domeniul formei care urcă la 1 şi converge în energie la 0 (ca în [Oshi 92] şi [FuOsTa 11]), iar celălalt în termeni de creştere în volum a bilelor (cf. [Sturm 94]). O generalizarea similară este obţinută pentru tranzienţă. De asemenea, prezentăm o caracterizare pentru ireductibilitatea formelor Dirichlet. Această din urmă o extinde pe cea din [AlKoRö 97a], Propoziţia 2.3, unde formele sunt simetrice, recurente, ce admit operator *carré du champ*. Dorim să scoatem în evidenţă altă consecinţă, şi anume că proprietatea de m-recurenţă, dar şi cea de m-recurenţă ireductibilă în cazul în care măsura m este finită, depind doar de partea simetrică a formei Dirichlet, de indată ce condiţia tare de sector este satisfăcută. Ilustrăm acest lucru printr-un exemplu concret în dimensiune infinită.

Rezultatule principale al acestei ultime secţiuni din capitolul 1 sunt prezentate întro subsecţiune despre extremalitatea măsurilor Gibbs. Reamintim că în [AlKoRö 97a], autorii extind rezultate clasice ale lui Holley şi Strook pentru modelul Ising, demonstrând că o măsură Gibbs este extremală dacă şi numai dacă forma Dirichlet asociată este ireductibilă (sau, echivalent, ergodică), pentru clase de modele pe latici, cu spaţiu de spin ne-compact dar liniar. În particular, numeroase exemple de forme Dirichlet ireductibile pe spaţii infinit dimensionale au fost obţinute. Pentru aplicaţii la modele mai generale facem trimitere la [AlKoRö 97b]. Scopul acestei subsecţiuni este de a reobţine două dintre rezultatele centrale din [AlKoRö 97a] ca situaţii particulare ale rezultatelor noastre, plasând astfel problema extremalităţii măsurilor Gibbs într-un context mai larg. Punctul cheie îl constituie un rezultat care afirmă că spaţiul măsurilor Gibbs care sunt absolut continue în raport cu o măsură Gibbs fixată m coincide cu spaţiul tuturor probabilităţilor $\mathcal{U}$-invariante care sunt absolut continue în raport cu m; aici, $\mathcal{U}$ este rezolvanta asociată formei Dirichlet. Rezultatul principal reobţinut se referă la echivalenţă dintre extremalitatea măsurilor Gibbs şi ireductibilitatea formelor Dirichlet corespunzătoare.

În Capitolul 3, intitulat *Existenţa măsurilor invariante pentru semigrupuri Markoviene*, ne concentrăm asupra măsurilor invariante, care sunt obiecte centrale în teoria ergodică. Mai precis, avem de a face cu problema existenţei măsurilor invariante finite pentru semigrupuri Markoviene. Acest subiect a fost studiat de mulţi autori în ultimii zeci de ani, din diferite puncte de vedere; a se consulta, de exemplu, monografiile [MeTw 93], [DaZa 96] şi referinţele menţionate în ele.

Dacă spaţiul de bază E este un spaţiu polonez, semigrupul este funcţia de tranziţie a unui proces Markov şi este Feller (adică duce spaţiul funcţiilor reale continue şi mărginite pe E în el insuşi), atunci existenţa unei măsuri invariante finite poate fi obţinută aplicând rezultatul din [LaSz 06], de indată ce există o submulţime compactă a lui E, pe care procesul o vizitează infinit de des. Deşi aceste ipoteze se verifică în cazul multor exemple, uneori ele sunt destul de greu sau chiar imposibil de verificat, mai ales dacă E este infinit dimensional. O altă tehnică de a demonstra existenţă măsurilor invariante decurge din teorema lui Harris şi versiuni ale acesteia, precum în [MeTw 93], [MeTw 93b], [MeTw 93c], [MeTw 93d], [DoFoGu 09] şi [Hai 10]. În constrast cu cel menţionat mai sus, aceste rezultate presupun condiţii netopologice precum existenţa mulţimilor *mici* (în sensul precizat în subsecţiunea 3.2.2) vizitate infinit de des. Aceste mulţimi sunt mai uşor de specificat atunci când procesul e ireductibil; a se vedea [MeTw 93], Teorema 5.2.2 De asemenea, măsurile invariante au fost investigate şi dintr-o perspectivă analitică, cum ar fi în [BoRöZh 00] şi [Hino 00], lucrând cu semigrupuri Markoviene tare continue pe L^p, $1 < p < \infty$. Exemple de astfel de situaţie apar considerând perturbări sectoriale ale formelor Dirichlet ce satisfac anumite inegalităţi funţionale (a se vedea subsecţiunea 3.2.4).

Principalul scop al Capitolului 3 este de a propune o nouă abordare a existenţei măsurilor invariante pentru semigrupuri Markoviene, ce constă din doi paşi. Întâi construim o măsură *auxiliară* convenabilă, iar apoi impunem condiţii asupra perechii (P_t, m) care caracterizează existenţa unei funcţii nenule, integrabile şi co-excesive pentru $(P_t)_{t\geq 0}$, privit ca semigrup pe $L^\infty(m)$, ceea ce e echivalent cu existenţa unei măsuri finite invariante nenule pentru $(P_t)_{t\geq 0}$, care este absolut continuă în raport cu m. Aşadar, numim această procedură *abordarea în doi paşi*; a se vedea subsecţiunea 3.1.2.

Mai multe aplicaţii sunt considerate: În subsecţiunea 3.2.1, deşi nu în toată generalitatea, prezentăm o demonstraţie foarte scurtă a unui bine cunoscut rezultat al lui Lasota şi Szarek [LaSz 06]. Aici, abordarea în doi paşi vine cu un beneficiu adiţional deoarece atrage după sine, în particular, absolut continuitatea măsurii invariante obţinute faţă de măsura auxiliară fixată.

În subsecţiunea 3.2.2 unificăm diferite versiuni ale teoremei a lui Harris într-una mult mai generală, toate celelalte reprezentând cazuri particulare. Ca o consecinţă, oferim un raspuns unei probleme deschise menţionate de Tweedie [Tw 01].

În subsecţiunea 3.2.3 demonstrăm că pentru o ecuaţie stocastică neliniară cu derivate parţiale pe un triplet Gelfand $V \subset H \subset V^*$, a cărei soluţii satisface o inegalitate de tip Harnack, condiţia de stric coercivitate faţă de norma de pe H este suficientă pentru a garanta existenţa unei unice probabilităţi invariante. Acest rezultat le îmbunătăţeşte pe cele din [Liu 09] şi [Wa 13], unde scufundarea $V \subset H$ este asumată compactă, iar strict coercivitatea este considerată în raport cu norma mai puternică de pe V. De asemenea, considerăm o perturbare cu un nucleu Markovian ce satisfae o condiţie combinată Harnack-Lyapunov, pentru care rezultatul lui Tweedie nu poate fi folosit, dar pentru care abordarea în doi paşi propusă de noi poate fi aplicată cu uşurinţă. De asemenea, discutăm aplicabilitatea rezultatului lui Harris în cazul acestei perturbări. Menţionăm că ultima parte a acestei subsecţiuni a fost redactată luând în considerare o remarcă amabilă a lui Martin Hairer.

În subsecţiunea 3.2.4 studiem situaţia unui C_0-semigrup uniform mărginit pe L^p, $p \geq 1$. Utilizând abordarea în doi paşi obţinem aplicaţii noi la semigrupuri obţinute prin mici perturbări ale formelor Dirichlet, generalizând [BoRöZh 00] şi [Hino 98].

În Capitolul 4 intitulat *Funcţionale semimartingal asociate proceselor Markov* ne îndreptăm atenţia către un alt subiect central, şi pentru asta considerăm un proces Markov drept $X = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, \mathbb{P}^x)$ cu spaţiul stărilor E. În lucrarea celebră [ÇiJaPrSh 80], autorii demonstrează că o funcţie cu valori reale u pe E are proprietatea că $u(X)$ este un semimartingal pentru orice $\mathbb{P}^x$ dacă şi numai dacă există un şir de mulţimi fin deschise $(E_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $\bigcup_n E_n = E$, timpii de ieşire T_n din E_n tind la infinit a.s., şi u este diferenţă a două funcţii 1-excesive pe fiecare E_n. Această caracterizare a fost atacată mai târziu de Fukushima în [Fu 99] din perspectiva teoriei formelor Dirichlet. Mai precis, a arătat că dacă X este asociat unei forme Dirichlet simetrice $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ şi $u \in \mathcal{F}$, atunci $u(X)$ este un semimartingal dacă şi numai dacă există un nest $(F_n)_{n\geq 1}$ şi constante $(c_n)_{n\geq 1}$ astfel încât pentru fiecare $n \geq 1$

$$|\mathcal{E}(u,v)| \leq c_n \|v\|_\infty \text{ pentru orice } v \in \mathcal{F}_{b,F_n}. \tag{1}$$

Ideea de demonstraţie a lui Fukushima pentru a demonstra suficienţa inegalităţii (1) a fost să presupună întâi că $\mathcal{E}$ este o formă Dirichlet regulată, astfel că din reprezentarea Riesz, avem $\mathcal{E}(u,v) = \nu(v)$ pentru o măsură Radon ν pe E. Următorul pas a fost să arate că ν este o măsură regulată, ceea ce înseamnă că funcţionala aditivă continuă din descompunerea Fukushima este cu variaţie mărginită, deci $u(X)$ este un semimartingal. Extensia la forme simetrice quasi-regulate a fost obţinută prin aşa numita "metodă de transfer". Acest rezultat a fost folosit ulterior de autor pentru a dezvolta o faţetă probabilistă profundă a funcţiilor cu variaţie mărginită atât în dimensiune finită cât şi infinită; în afară de lucrarea deja menţionată, trimitem cititorul şi către [Fu 00] şi referinţele aferente. De fapt, această abordare cu forme Dirichlet are originea în lucrarea lui Bass şi Hsu [BaHs 90] în care se arată că mişcarea browniană reflectată într-un domeniu Lipschitz este un semimartingal, rezultat ce a fost extins mai târziu în [ChFiWi 93] la mulţimi (tare) Caccioppoli, unde autorii investighează structura de cvasi-martingal a procesului reflectat. Merită să menţionăm că în [ChFiWi 93] autorii consideră cvasi-martingale doar pe intervale finite şi nu pe întreaga semi-axă pozitivă, aşa cum facem noi. Deşi ar putea părea doar o mică diferenţă, acestă este de fapt punctul cheie ce face studiul nostru posibil, şi din câte ştim, nou.

Dezideratul Capitolului 4 este dublu: întâi, investigăm acele funcţii cu valori reale u pe E pentru care $u(X)$ este un cvasi-martingal; apoi, ultilizând formele semi-Dirichlet, studiem acele funcţii u pentru care $u(X)$ este un semimartingal uitându-ne la structura locală de cvasi-martingal. Mai departe, prezentăm pe scurt structura şi rezultatele principale ale acestui capitol.

În secţiunea 4.1 arătăm că proprietatea de cvasi-martingal a lui $u(X)$ poate fi reformulată în raport cu variaţia

$$V(u) := \sup_{\tau}\{\sum_{i=1}^{n} P_{t_{i-1}}|u - P_{t_i - t_{i-1}}u| + P_{t_n}|u|\}$$

a lui u în raport cu semigrupul procesului $(P_t)_{t\geq 0}$, ceea ce ne permite să dezvoltăm studiul dintr-un punct de vedere pur analitic. Rezultatele centrale spun în esenţă că $\{x \in E \,:\, u(X) \text{ este un cvasi-martingal fata de } \mathbb{P}^x\} = \{V(u) < \infty\}$, şi că $u(X)$ este un cvasi-martingal (prin convenţie însemnând în raport cu toate probabilităţile $\mathbb{P}^x, x \in E$) dacă şi numai dacă u poate fi descompusă ca o diferenţă de funcţii excesive finite. În particular, dacă procesul este ireductibil şi $(e^{-\alpha t}u(X_t))_{t\geq 0}$ este un $\mathbb{P}^{x_0}$-cvasi-martingal pentru un $x_0 \in E$, atunci e un $\mathbb{P}^x$-cvasi-martingal pentru toţi $x \in E$. O descompunere de tip Riesz şi câteva remarci asupra spaţiului diferenţelor de funcţii excesive sunt discutate în finalul acestei secţiuni.

În secţiunea 4.2 arătăm că proprietatea de cvasi-martingal a funcţiilor este păstrată la omorâre, schimbare de timp, şi subordonare Bochner. În plus, arătăm că pentru o funcţională multiplicativă M cu mulţimea punctelor permanente E_M, avem că $(e^{-\alpha t}M_t u(X_t))_t$ este un cvasi-martingal dacă şi numai dacă $(e^{-\alpha t}u|_{E_M}(X^M))_t$ este un cvasi-martingal, unde X^M denotă procesul omorât cu M. De asemenea, arătăm că dacă $(e^{-\alpha t}u(X_t))_t$ este un cvasi-martingal, atunci la fel este şi procesul $(e^{-\alpha\tau_t}u(Y_t))_t$, unde τ este inversa unei funcţionale aditive fixate a procesului X iar Y este procesul schimbat de timp în mod corespunzător.

În secţiunea 4.3 prezentăm condiţii tractabile asupra lui u astfel încât $(e^{-\alpha t}u(X_t))_t$ să fie un cvasi-martingal. Distingem două moduri de a considera aceste condiţii, pe care le tratăm separat: primul mod implică utilizarea rezolvantei $\mathcal{U} = (U_\alpha)_\alpha$ a procesului, pe când cel de-al doilea implică un context $L^p(\mu)$, unde μ este o măsură σ-finită sub-invariantă. Pe scurt, ideea e că o estimare de tipul $U_\alpha(|P_t u - u|) \lesssim t$ în cazul primei abordări, şi de tipul $\mu(|P_t u - u|f) \lesssim t\|f\|_\infty$ în contextul L^p, sunt suficiente pentru a garanta proprietatea de cvasi-martingal pentru $u(X)$. Prezentăm, de asemenea, o condiţie exprimată în raport cu generatorul dual de pe L^p.

În secţiunea 4.4 tratăm funcţionalele cvasi-martingal şi semimartingal din perspectiva formelor Dirichlet. Mai precis, dacă $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ este o formă Drichlet (nesimetrică), atunci pentru un element $u \in \mathcal{F}$, o inegalitate de tipul

$$|\mathcal{E}(u, v)| \leq c\|v\|_\infty \text{ for all } v \in \mathcal{F}_b \tag{2}$$

garantează că $(e^{-\alpha t}u(X_t))_t$ este un cvasi-martingal. De fapt, arătăm că afirmaţia rămâne adevărată şi în situaţia mai generală, când expresia $\|v\|_\infty$ din (2) este înlocuită cu $\|v\|_\infty + \|v\|_{L^2(\mu)}$. Apoi, extindem caracterizările pentru semimartingale datorate lui Fukushima, la forme Dirichlet nesimetrice. Mai mult, tratăm şi situaţia când u nu este neapărat din $\mathcal{F}$ (de exemplu $u \in \mathcal{F}_{\mathrm{loc}}$), sub ipoteza adiţională că forma are proprietatea locală. În acest moment dorim să scoatem în evidenţă că spre deosebire de abordările anterioare, pentru a demonstra suficienţa condiţiilor (1) sau (2), nu folosim descompunerea Fukushima sau corespondenţa Revuz. În schimb, utilizăm în mod consistent rezultatele obţinute în secţiunile precedente, şi de fapt, această abordare ne permite să extindem rezultatele de mai sus la forme semi-Dirichlet, fără nicio condiţie în plus. Secţiunea se încheie cu câteva remarci despre situaţiile când este suficient să verificăm inegalităţile (1) sau (2) doar pentru v dintr-un subspaţiu al lui $\mathcal{F}$, cum ar fi nucleele sau nucleele standard speciale.

Ultima parte a tezei (Capitolul 5, intitulat *Teorema Bochner-Kolmogorov*) este devotată teoremei clasice Bochner-Kolmogorov. Demonstrăm un rezultat de existenţă a limitei unui sistem proiectiv ce consistă din spaţii topologice Hausdorff, cu bază numărabilă, nu neapărat metrizabile, înzestrate cu probabilităţi regulate. Aceste ipoteze topologice sunt automat satisfăcute dacă spaţiile sunt spaţii topologice Lusin (sau mai general, Radon), iar extinderea la spaţii Lusin măsurabile decurge fără complicaţii.

Motivaţia tratării acestui subiect provine din aplicaţiile acestui rezultat în [BeDeLu 15] şi [BeDeLu 15a], cu scopul de a construi procese de ramificare asociate unor procese de fragmentare şi de a propune un model probabilist pentru faza de fragmentare a unei avalanşe.

Reamintim că teorema clasică de extensie a lui Kolmogorov asigură că o colecţie compatibilă de distribuţii finit-dimensionale definesc un proces stocastic. Bochner (vezi [Boch 55]) a considerat situaţia abstractă a unui sistem proiectiv de spaţii topologice Hausdorff cu măsuri şi a demonstrat existenţa limitei sub condiţiile că măsurile să fie aproximabile din interior cu compacţi şi că proiecţiile canonice să fie continue.

Aplicaţii recente ale teoremei Bochner-Kolmogorov pentru a demonstra rezultate netriviale despre sisteme spaţiale, cum ar fi existenţa măsurilo Gibbs (a se consulta, de exemplu, [KoPaRö 12] şi [Pres 05]), necesită, mai degrabă, ipoteze de măsurabilitate decât topologice. O îmbunătăţire semnificativă, utilă în astfel de aplicaţii, a fost obţinută de Parthasaraty (vezi [Parth 67], Capitolul V, Teorema 3.2). Parthasaraty a demonstrat existenţa limitei unui sistem proiectiv de spaţii măsurabile indexate după mulţimea numerelor naturale, unde spaţiile sunt Lusin măsurabile iar aplicaţiile de proiecţie sunt doar măsurabile. Ideea principală a demonstraţiei a fost să se reducă contextul, via izomorfisme măsurabile, la spaţii compacte şi proiecţii continue (situaţii în care limita proiectivă există); o altă demonstraţie a acestui rezultat poate fi găsită în [DeMe 78], Capitolul III, pagina 70. Dorim să scoate în evidenţă că în constrast cu abordarea noastră, metrizabilitatea spaţiilor joacă un rol important în demonstraţiile rezultatelor mai sus amintitite, deoarece unul din ingrediente este teorema Souslin-Lusin asupra imaginilor directe de mulţimi măsurabile, respectiv Souslin. Facem trimitere şi la [Rao 71] (Teoremele 4.3, 4.5 şi 4.7) pentru caracterizări ale existenţei limitei proiective în termeni de corpuri m-pure, σ-aditivitate uniformă, martingale uniform integrabile şi spaţii Orlicz.

Capitolul 5 este organizat astfel: în secţiunea 5.1, după câteva preliminarii, prezentăm rezultatele principale. În secţiunea 5.2 discutăm aplicaţia anunţată deja, necesară în construcţia unui proces de ramificare plecând de la unul de fragmentare.

References

[AlKoRö 97a] S. Albeverio, Y. G. Kondratiev and M. Röckner, Ergodicity of L^2-semigroups and extremality of Gibbs states, *J. Funct. Anal.* 144 (1997) 394–423.

[AlKoRö 97b] S. Albeverio, Y. G. Kondratiev and M. Röckner, Ergodicity for the stochastic dynamics of quasi-invariant measures with applications to Gibbs states, *J. Funct. Anal.* 149 (1997) 415–469.

[BaHs 90] R.F. Bass and P. Hsu The semimartingale structure of reflecting Brownian motion", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **108**, 1007–1010 (1990).

[Bert 06] J. Bertoin, *Random Fragmentation and Coagulation Processes*, Cambridge University Press, Ney York 2006.

[BeCî 14] L. Beznea and **I. Cîmpean**, On Bochner-Kolmogorov Theorem, *Séminaire de Probabilités XLVI* (Lecture Notes in Mathematics, Vol. 2123), Springer 2014, pp. 61–70.

[BeCî 16] L. Beznea and **I. Cîmpean**, Quasimartingales associated to Markov processes, *preprint*, 2016.

[BeCîRö 15] L. Beznea, **I. Cîmpean**, and M. Röckner, Irreducible recurrence, ergodicity, and extremality of invariant measures for resolvents, arXiv:1409.6492v2.

[BeCîRö 15a] L. Beznea, **I. Cîmpean**, and M. Röckner, A new approach to the existence of invariant measures for Markovian semigroups, arXiv:1508.06863v3.

[BeDeLu 15] L. Beznea, M. Deaconu, and O. Lupaşcu: Branching processes for the fragmentation equation. *Stochastic Processes and their Applications* **125** (2015), 1861–1885.

[BeDeLu 15a] L. Beznea, M. Deaconu, and O. Lupaşcu: Stochastic equation of fragmentation and branching processes related to avalanches. *J. of Statistical Physics* 2015 (to appear).

[Boch 55] S. Bochner, *Harmonic Analysis and the Theory of Probability*, Univ. California Press, Los-Angeles 1955.

[BoRöZh 00] V. Bogachev, M. Röckner, and T.S. Zhang, Existence and uniqueness of invariant measures: an approach via sectorial forms, *Appl. Math, Optim.* **41**, 87–109 (2000).

[ChFiWi 93] Z.Q. Chen, P.J. Fitzsimmons, R.J. Williams, Reflecting Brownian motions: quasimartingales and strong Caccioppoli sets, *Potential Analysis* **2**, 219–243 (1993).

[ChenFu 11] Z.Q. Chen and M. Fukushima, *Symmetric Markov Processes, Time Change, and Boundary Theory*, (Princeton University Press, 2011)

[ÇiJaPrSh 80] E. Çinlar, J. Jacod, P. Protter, and M.J. Sharpe, Semimartingale and Markov processes, *Z. Wahrscheinlichkietstheorie verw. Gebiete* **54**, 161–219 (1980).

[DaZa 96] G. Da Prato and J. Zabczyk, *Ergodicity for Infinite Dimensional Systems*, (Cambridge University Press, 1996).

[DeMe 78] C. Dellacherrie and P.A. Meyer, *Probabilities and Potential A*, Hermann, Paris 1978.

[DoFoGu 09] R. Douc, G. Fort, and A. Guillin, Subgeometric rates of convergence of f-ergodic strong Markov processes, Stoch. Proc. Appl. **119**, 897-923 (2009).

[Fu 99] M. Fukushima, On semi-martingale characterization of functionals of symmetric Markov processes *Electronic Journal of Probability*, **4**, 1–32 (1999).

[Fu 00] M. Fukushima, BV functions and distorted Ornstein Uhlenbeck processes over the abstract Wiener space *J. Funct. Anal.* **174**, 227–249 (2000)

[Fu 07] M. Fukushima, *Transience, Recurrence and Large Deviation of Markov Processes*, (Bielefeld IGK Seminar, 2007).

[FuOsTa 11] M. Fukushima, Y. Oshima, and M. Takeda, *Dirichlet forms and Symmetric Markov processes*, (Walter de Gruyter, Berlin/New York, 2011).

[Get 80] R. K. Getoor, Transience and recurrence of Markov processes, *Séminaire de probabilités (Strasbourg)* 14 (1980) 397–409.

[Hai 10] M. Hairer, Convergence of Markov Processes, Lecture Notes, University of Warwick, http://www.hairer.org/notes/Convergence.pdf, 2010.

[Hino 98] M. Hino, Existence of invariant measures for diffusion processes on a Wiener space, *Osaka J. Math.* **35**, 717–734 (1998).

[Hino 00] M. Hino, Exponential decay of positivity preserving semigroups on L^p, *Osaka J. Math.* **37**, 603–624 (2000).

[Kom 67] J. Komlós, A generalization of a problem of Steinhaus, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **18**, 217-229 (1967).

[KoPeSz 10] T. Komorowski, S. Peszat, and T. Szarek, On ergodicity of some Markov processes, *Ann. Probab.* **38**, 1401-1443 (2010).

[KoPaRö 12] Y. Kondratiev, T. Pasurek, and M. Röckner, Gibbs measures of continuous systems: An analytic approach, *Rev. Math. Phys.* **24** (2012), 1-54.

[LaSz 06] A. Lasota, and T. Szarek, Lower bound technique in the theory of a stochastic differential equation, *J. Differ. Equ.* **231**, 513–533 (2006).

[Liu 09] W. Liu, Harnack inequality and applications for stochastic evolution equations with monotone drifts, *J. Evol. Equ.* **9**, 747–770 (2009).

[MaUeWa 12] J. Masamune, T. Uemura and J. Wang, 'On the conservativeness and the recurrence of symmetric jump-diffusions', *J. Funct. Anal.* 263 (2012) 3984–4008.

[MeTw 93] S. P. Meyn and R. L. Tweedie, *Markov Chains and Stochastic Stability*, (Springer-Verlag, London, 1993).

[MeTw 93b] S.P. Meyn, and R.L. Tweedie, Stability of markovian processes II: continuous-time processes and sampled chains, *Adv. Appl. Prob.* **25**, 487–517 (1993).

[MeTw 93c] S.P. Meyn, and R.L. Tweedie, Stability of markovian processes III: Foster-Lyapunov criteria for continuous-time processes, *Adv. Appl. Prob.* **25**, 518–548 (1993).

[MeTw 93d] S.P. Meyn, and R.L. Tweedie, Generalized resolvents and Harris Recurrence of Markov processes, *American Mathematical Society, Providence, RI*, 227–250 (1993).

[Norr 97] J. R. Norris, *Markov Chains*, (Cambridge University Press, 1997).

[Oshi 92] Y. Oshima, 'On conservativeness and recurrence criteria for Markov processes', *Potential Anal.* 1 (1992) 115–131.

[Parth 67] K. R. Parthasarathy, *Probability Measures on Metric Spaces*, Academic Press, New York 1967.

[Pres 05] C. Preston, *Specifications and their Gibbs States*, Lecture Notes, Bielefeld University 2005.

[Rao 71] M. M. Rao, Projective limits of probability spaces, *J. Multivar. Anal*, **1** (1971), 28–57.

[Schi 04] R. L. Schilling, A note on invariant sets, *Probab. Math. Statist.* 24 (2004) 47–66.

[Sturm 94] K.T. Sturm, 'Analysis on local Dirichlet spaces. I. Recurrence, conservativeness and Lp-Liouville properties', *J. Reine Angew. Math.* 456 (1994) 173–196.

[Tw 01] R.L. Tweedie, Drift conditions and invariant measures for Markov chains, *Stoch. Proc. Appl.* **92**, 345–354 (2001).

[Wa 13] F.-Y. Wang, *Harnack Inequalities for Stochastic Partial Differential Equations*, Springer, New York, 2013.