

Projet de recherche

1. Titre : Analyse diophantienne dans l'étude des polynômes et des équations diophantiennes

2. Participants : Yann Bugeaud et Maurice Mignotte (Université de Strasbourg, Institut de Recherche Mathématique Avancée – UMR 7501), Nicolae Ciprian Bonciocat et Mihai Cipu (Institut de Mathématiques Simion Stoilow de l'Académie Roumaine, Bucarest)

3. Description du projet : Les techniques d'approximation diophantienne se sont révélées utiles dans l'étude des polynômes d'une variable et dans la résolution des équations diophantiennes.

Un problème fascinant est l'étude de la séparation des racines d'un polynôme P à coefficients entiers. Il s'agit de comparer la distance entre deux racines distinctes de P avec le module $H(P)$ de son plus grand coefficient. Des résultats récents (voir [7, 5, 11]) ont reçu des démonstrations nouvelles et plus simples en [8], où on donne aussi de nouveaux résultats dans le cas des polynômes unitaires ou irréductibles. En l'absence d'une théorie qui permette de construire des polynômes à coefficients entiers de degré $d \geq 4$ avec deux racines voisines, on doit se contenter de construire explicitement des classes d'exemples. Quelques inégalités pourraient être améliorées si on savait établir l'irréductibilité de certains polynômes. Ici on touche à un problème plus ancien, dont les réponses partielles, très variées, laissent lieu à de nouveaux résultats. L'analogie avec l'écriture en base dix d'un nombre premier a été utilisée en [2]. Une autre classe de polynômes, ayant un coefficient très grand, soit par rapport à une valuation p -adique, soit par rapport à la valeur absolue usuelle, a été étudiée en [3, 4]. Dans l'état actuel de nos connaissances, ni ces critères, ni les plus anciens, servent dans le problème sur la séparation des racines et on aura besoin d'autres résultats.

Parmi les nombreuses questions sur les polynômes à coefficients entiers qui portent sur l'approximation diophantienne, nous sommes en train de travailler sur la factorisation et les minima des polynômes positifs sur les réels.

Une autre direction de recherche est la résolution des équations en nombres entiers. Nous avons déjà plusieurs publications communes [6,

1, 9] et communications aux réunions scientifiques portant sur les équations de Fermat-Pell généralisées. Les démonstrations de nos résultats mettent en œuvre une large variété de techniques d'approximation diophantienne et requièrent également de long calculs sur ordinateur. Cette classe d'équations est rencontrée dans l'étude des $D(n)$ -suites, qui sont des suites de nombres entiers telles que tout produit de deux termes distincts majoré par un entier fixé n est un carré parfait. Nous nous proposons de donner de meilleures bornes pour chaque terme en fonction de son rang dans une $D(n)$ -suite. À part l'intérêt en soi, une telle information est aussi utile pour étudier la longueur maximale d'une $D(n)$ -suite, afin d'améliorer les résultats de Dujella et ses collaborateurs (voir [10]).

Objectifs scientifiques à suivre :

- 1) développer de nouveaux critères pour reconnaître des polynômes irréductibles ou séparables,
- 2) analyser la séparation des racines d'un polynôme d'une variable à coefficients entiers,
- 3) étudier les minima des polynômes positifs sur les réels,
- 4) améliorer les bornes pour les termes d'une $D(n)$ -suite.

RÉFÉRENCES

- [1] M.A. Bennett, M. Cipu, M. Mignotte, R. Okazaki, *On the number of solutions of simultaneous Pell equations II*, Acta Arith. , **122** (2006), 75–122.
- [2] N.C. Bonciocat, A.I. Bonciocat, The irreducibility of polynomials that have one large coefficient and take a prime value, Canad. Math. Bull., **52** (2009), no. 4, 511–520.
- [3] N.C. Bonciocat, A.I. Bonciocat, On the irreducibility of polynomials with leading coefficient divisible by a large prime power, Amer. Math. Monthly, **116** (2009), no. 8, 743–745.
- [4] N.C. Bonciocat, A.I. Bonciocat, Some classes of irreducible polynomials, Acta Arith., **123** (2006), no. 4, 349–360.
- [5] Y. Bugeaud, Approximation by algebraic numbers, Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge, 2004.
- [6] Y. Bugeaud, M. Cipu, M. Mignotte, On the representation of Fibonacci and Lucas numbers in an integer base, Annales Sci. Math. Québec, à paraître
- [7] Y. Bugeaud, M. Mignotte, On the distance between roots of integer polynomials, Proc. Edinburgh Math. Soc., **47** (2004), 553–556.
- [8] Y. Bugeaud, M. Mignotte, Polynomial root separation, Intern. J. Number Theory, à paraître.

- [9] M. Cipu, M. Mignotte, On the number of solutions to system of Pell equations, *J. Number Theory*, **125** (2007), 356–392.
- [10] <http://web.math.hr/~duje/>
- [11] A. Schönhage, Polynomial root separation examples, *J. Symbolic Comput.*, **41** (2006), 1080–1090.

4. Visites envisagées :

Côté Roumanie : à Strasbourg–2 semaines en 2010 (deux visites) et 2 semaines en 2011 (deux visites).

Côté France : à Bucarest–2 semaines en 2010 (deux visites) et 2 semaines en 2011 (deux visites).

5. Financement demandé au Laboratoire Européen Associé CNRS Franco-Roumain :

Frais d’hébergement et perdiem pour 8 semaines de séjour, 4 semaines en France et 4 semaines en Roumanie.

Frais de voyage pour 4 voyages aller-retour Bucarest-Strasbourg et 4 voyages aller-retour Strasbourg-Bucarest.

6. Notice individuelle Yann Bugeaud :

Poste détenu actuellement : Professeur en mathématique, première classe, Université de Strasbourg

Formation :

1993 Agrégation de mathématiques, Ecole Normale Supérieure de Lyon

1996 Thèse d’Etat en Mathématiques, ‘Formes linéaires de logarithmes et applications’, Université Louis Pasteur de Strasbourg

1997 Maître de conférence, Université Louis Pasteur de Strasbourg

2000 Habilitation à Diriger des Recherches, ‘Approximations diophantienne effective’

2001 Professeur en Mathématique, Université Louis Pasteur de Strasbourg

2006 Professeur première classe

2008 Membre junior de l’Institut Universitaire de France

Stage scientifique, invitations et collaborations à l’étranger : Universités de Debrecen (Hongrie), Vilnius (Lituanie), York et Edimbourg (Royaume Uni), Aarhus (Danemark), Thessaloniki (Grèce), Science University de Tokyo (Japon), Morelia (Mexic), Beer Sheva (Israël),

Moscou (Russie), Université Technique de Vienne, de Graz et Institut Schrödinger Vienne (Autriche), Institut Mathématique de Bucarest (Roumanie), Prague (République Tchèque) et Hanoi (Vietnam), Institut Max Planck à Bonn (Allemagne), I. M. P. A. de Rio de Janeiro (Brésil).

Activité de recherche : Approximation diophantienne, en particulier forme linéaires de logarithmes et leurs applications à la résolution de certaines équations diophantiennes, et théorie des nombres transcendants. Equidistribution modulo 1.

7. Notice individuelle Maurice Mignotte :

Poste déteu actuellement : Professeur en mathématique, classe exceptionnelle, Université de Strasbourg

Formation :

1970 Assistant en mathématiques, Université Paris XIII

1973 Maîtrise d'Informatique, Université Paris VI

1974 Thèse d'Etat ("Sur quelques problèmes d'effectivité en théorie des nombres", directeur : Georges Poitou), Université Paris XIII

1974 Professeur en informatique, Strasbourg

1988 Professeur en mathématique, Strasbourg

1978–80 Secrétaire de la "Société Mathématique de France"

1990–1995 Directeur de l'Institut de mathématique et informatique, Université Louis Pasteur, Strasbourg

1992–2009 Responsable du DESS de mathématiques discrètes

Chevalier et Officier des Palmes Académiques

Stage scientifique, invitations et collaborations à l'étranger : Nombreuses invitations dans des universités étrangères dont Universités de Debrecen (Hongrie), Dakar (Sénégal), Thessaloniki (Grèce), Morelia (Mexique), Moscou (Russie), Cagliari, Pise, Turin (Italie), Tunis (Tunisie), Fès (Maroc), Ouagadougou (Burkina Faso), Bamako (Mali), Niamey (Niger) et d'Abidjan (Côte d'Ivoire), Institut Mathématique de Bucarest (Roumanie), Prague (République Tchèque), Budapest (Hongrie), I. M. P. A. de Rio de Janeiro (Brésil).

Activité de recherche : Inégalités sur les polynômes en une variable : majorations pour les racines, bornes pour les facteurs, séparation des racines, répartition des arguments des racines. Etude des polynômes "aléatoires" sur les corps finis et à coefficients complexes, applications aux algorithmes. Equations diophantiennes : algorithme de résolution

automatique de certaines équations diophantiennes exponentielles, résolution complète de certaines équations particulières ainsi que de plusieurs familles d'équations de Thue, progrès pour l'équation de Catalan, minorations de formes linéaires de logarithmes et applications. Récurrences linéaires : étude arithmétique, applications des récurrences linéaires en calcul formel. Quelques remarques sur l'élimination des quantificateurs. Notes en cryptographie.

8. Notice individuelle Nicolae Ciprian Bonciocat :

Poste détenu actuellement : Directeur de recherche de troisième classe à l'Institut de Mathématiques Simion Stoilow de l'Académie Roumaine

Formation :

1990 – Diplôme d'ingénieur Institut Politechnique de Bucarest

1997 – Diplôme d'Etudes Supérieures en Mathématiques (license)

Faculté de Mathématiques et Informatique de l'Université de Bucarest

1998 – Diplôme de Spécialisation en Algèbre (équivalent DEA) Fa-

culté de Mathématiques et Informatique de l'Université de Bucarest

2003 – Doctorat ès Sciences Mathématiques (spécialisation algèbre)

Institut de Mathématiques Simion Stoilow de l'Académie Roumaine

Stage scientifique, invitations et collaborations à l'étranger :

Activité de recherche : Factorisation et irréductibilité des polynômes en une ou plusieurs variables. Théorie des groupes.

9. Notice individuelle Mihai Cipu :

Poste détenu actuellement : Directeur de recherche de première classe à l'Institut de Mathématiques Simion Stoilow de l'Académie Roumaine

Formation : 1978 – Diplôme d'Etudes Supérieures en Mathématiques (license) Faculté de Mathématiques et Mécanique de l'Université de Bucarest

1979 – Diplôme de Spécialisation en Algèbre (équivalent DEA) Faculté de Mathématiques et Mécanique de l'Université de Bucarest

1991 – Doctorat ès Sciences Mathématiques (spécialisation algèbre)

Faculté de Mathématiques et Mécanique de l'Université de Bucarest

Bourse postdoctorale NATO, Université de Cologne (Allemagne) apr.–juill. 1994

Bourse postdoctorale I.C.T.P. Trieste (Italie) mars–août 1995

Bourse postdoctorale C.I.C.M.A., Montréal (Canada) août 1996–juill. 1997

Stage scientifique, invitations et collaborations à l'étranger : Professeur invité à l'Université de Ferrara (Italie), Mathematical Mechanization Research Center, Chinese Academy of Sciences Beijing (R. P. Chine), Université de Strasbourg. Stages aux Universités de Trieste et Ferrara (Italie), Essen (Allemagne), U.I.A. Anvers (Belgique), Lund, Stockholm et Linköping (Suède).

Activité de recherche : Anneaux avec la propriété d'approximation. Modules de Buchsbaum et de Cohen-Macaulay généralisés. Résolution des systèmes d'équations polynômiales. Equations diophantiennes exponentielles et de Fermat-Pell.