Proposition d'un projet de recherche pour l'appel 2009 LEA Franco-Roumain Math Mode

1 Titre du projet :

Géométries convexes tropicales

2 Participants :

- Marianne Akian, INRIA Saclay - Île-de-France et Centre de Mathématiques Appliquées (CMAP), École Polytechnique, e-mail : marianne.akian@inria.fr
- Stéphane Gaubert, INRIA Saclay - Île-de-France et Centre de Mathématiques Appliquées (CMAP), École Polytechnique, e-mail : stephane.gaubert@inria.fr
- Viorel Nitica, IMAR, Bucarest et Department of Mathematics, West Chester University, USA, e-mail : VNitica@wcupa.edu
- Ivan Singer, IMAR, Bucarest, e-mail : Ivan.Singer@imar.ro

3 Présentation du projet scientifique

3.1 Motivation

Le semi-anneau max-plus, ou tropical, s'obtient en considérant l'ensemble des réels muni du maximum, vu comme un loi additive, et de la somme usuelle, vue comme une loi multiplicative.

Des structures de ce type ont été introduites et étudiées par plusieurs écoles, avec des motivations variées, tout d'abord, dans des domaines des mathématiques appliquées, de la modélisation mathématique, ou de l'informatique (optimisation [Vor67, CG79], systèmes à événements discrets [BCOQ92, CGQ99], théorie des automates [Pin98]), de la physique mathématique (asymptotiques quasi-classiques [Mas87]), du calcul des variations et du contrôle optimal abordés sous l'angle de la programmation dynamique ou des équations d'Hamilton-Jacobi [AQV98, KM97a, LMS01, McE06, AGW08, AGW06], parfois en liaison avec l'étude de problèmes de grandes déviations en théorie des probabilités [Aki99, Puh01, AGK05], et plus récemment, de la géométrie algébrique [Vir01, Mik05, EKL06, FPT00, IMS07, RGST05].

On s'intéresse ici à l'analogue max-plus ou tropical de la géométrie convexe. L'étude de celle-ci remonte à K. Zimmermann [Zim77], et elle a été développée plus récemment dans plusieurs courants de recherches d'inspirations diverses, initiés de manière indépendante.

On peut ainsi citer les travaux en analyse idempotente de Maslov et de ses collaborateurs, parmi lesquels Kolokoltsov, Litvinov et Shpiz [KM97b, LMS01]. L'analyse idempotente traite notamment des analogues max-plus des résultats classiques de l'analyse fonctionnelle, qui sont intimement liés aux questions de convexité en dimension infinie.

Un autre courant est issu du travail de Cohen, Gaubert, Quadrat [CGQ01, CGQ04], motivé par l'analyse des systèmes dynamiques à événements discrets. Celui-ci étudie les analogues max-plus des modules, appelés semi-modules, qui ne sont autre que des cônes convexes tropicaux.

La convexité tropicale peut être considérée dans la perspective plus large de la convexité abstraite, développée en particulier par Singer [Sin97]. Plusieurs de ses travaux, notamment avec Martínez-Legaz et Rubinov [MLRS02], se sont trouvés rejoindre les travaux en convexité tropicale [CGQS05].

Une série importante de recherches sur les polyèdres convexes tropicaux, motivée par le développement de la géométrie et de la combinatoire tropicale, est due à Develin, Joswig, Sturmfels et Yu [DS04, Jos05, DY07].

Enfin, Briec et Horvath [BH04], étudiant une classe de déformations de convexes classiques, ont introduit une notion appelée “$\mathbb{B}$-convexité”, qui se trouve coïncider avec la convexité tropicale.

Ces différents courants ont commencé à se rapprocher, et le domaine est actuellement très actif. On peut ainsi citer les travaux récents [AS03, BHR05, AR06, GK06a, GK06b, LS06, BSS07a, GS07, NS07a, NS07b, AGG08, BH08b, BH08a, GM08], émanant d'auteurs déjà cités, ainsi que de nouveaux : Adilov, Akian, Allamigeon, Butkovič, Goubault, Katz, Meunier, Nitica, Schneider, Sergeev.

L'ensemble de ces travaux contribuent à développer un analogue tropical de la géométrie et de l'analyse convexe, tant du point de vue de la combinatoire et de l'algèbre (questions de polyèdres) que de l'analyse fonctionnelle. Les techniques de preuves sont souvent très différentes des techniques classiques. Les analogues tropicaux des propriétés suivantes ont ainsi été obtenus : théorème de Hahn-Banach sous forme géométrique (séparation) [CGQ01, CGQ04, CGQS05] ou analytique [LMS01], représentation des formes linéaires [KM97b, Aki99, LMS01, CGQ04, LS06], génération des convexes compacts par leurs points extrêmes - théorèmes de Krein-Milman ou de Minkowski [GK06b, BSS07b], voire de Choquet [AGW08], théorèmes de Helly [BH04, GS07, GM08], de Radon [BH04, GM08], de Carathéodory [DS04], de Carathéodory coloré [GM08] ou de Tverberg [GM08].

Cependant, des difficultés inhabituelles en convexité classique apparaissent dans le cas tropical. Ainsi, il n'existe pas de notion satisfaisante de face d'un ensemble convexe ; il est toujours possible de définir des ensembles polaires, mais ceux-ci vivent dans des espaces de dimension supérieure et il n'existe pas de résultat aussi simple que le théorème de Farkas [GK08] ; et enfin, les caractéristiques combinatoires des polyèdres tropicaux (et en particulier l'analogue tropical de la théorie des f-vecteurs, qui traite du dénombrement des faces d'un polyèdre) sont moins bien appréhendées que dans le cas classique.

Par ailleurs, des questions algorithmiques de base restent ouvertes. Ainsi, l'appartenance à un polyèdre tropical défini par des générateurs peut être vérifiée en temps linéaire, mais lorsque le polyèdre est défini par des contraintes, on sait seulement que le test de l'appartenance se ramène [DG06] à un problème de jeu combinatoire avec paiement ergodique pour lequel l'existence d'un algorithme polynômial est un problème ouvert (l'existence d'un tel algorithme est très probable car le problème appartient à la classe NP $\cap$ coNP).

La convexité tropicale fournit évidemment un modèle (inhabituel) de géométrie convexe, et elle est pour cela d'un intérêt intrinsèque, cependant, son étude a été motivée par plusieurs questions ou applications spécifiques.

Ainsi, les solutions d'équations d'Hamilton-Jacobi stationnaires issues de problèmes de contrôle optimal déterministe vérifient une propriété de superposition [KM97b], de sorte que les espaces formés de ces solutions constituent des cônes convexes tropicaux. Les directions extrêmes de ces derniers peuvent être mis en correspondance avec les stratégies stationnaires optimales [AGW08, AGW06]. Le point de vue de la convexité tropicale renseigne également sur la compactification d'un espace métrique par ses horofonctions. On montre en effet que les fonctions de Busemann, lesquelles sont définies comme des limites de géodésiques dans cette compactification, peuvent être identifiées aux directions extrêmes du convexe tropical formé des fonctions Lipchitziennes [AGW08]. Ce résultat a trouvé par exemple une application dans [Wal07].

Par ailleurs, les polyèdres tropicaux interviennent dans plusieurs problèmes de nature discrète ou combinatoire. Ils représentent ainsi des espaces associés à des problèmes de contrôlabilité et d'observabilité de systèmes à événements discrets [CGQ99, Kat07], ils ont été employés dans [AGG08] pour résoudre des problèmes d'analyse statique de programme (détermination automatique d'invariants de nature disjonctive, qui interviennent notamment dans la vérification de procédures d'allocation mémoire). Par ailleurs, Develin et Sturmfels [DS04] ont mis en évidence des relations remarquables entre les polyèdres tropicaux et certains problèmes d'analyse phylogénétique.

Il existe un autre modèle de géométrie convexe, intimement liée à la convexité tropicale, et qui peut être vu comme une dégénérescence de celle-ci : la convexité max-min, obtenue en faisant toujours jouer au maximum le rôle de l'addition, mais en prenant cette fois ci le minimum comme la multiplication. Les cônes convexes max-min interviennent naturellement dans l'étude de problèmes de calcul des variations lorsque l'on cherche à minimiser une fonctionnelle d'une trajectoire donnée par un supremum plutôt que par un terme additif. À la différence de la convexité tropicale, la convexité max-min est encore assez peu étudiée. Elle a été abordée pour la première fois par K. Zimmermann [Zim77], dans le cadre général de la *convexité extrême*, et récemment, dans des travaux de Nitica et Singer [NS08a, NS08b].

3.2 Recherches projetées

Nous nous proposons ici d'étudier les analogues des résultats de convexité classique, pour diverses structures de nature tropicale (max-plus, max-min, ...), à la fois du point de vue de l'analyse fonctionnelle et du point de vue de la convexité discrète.

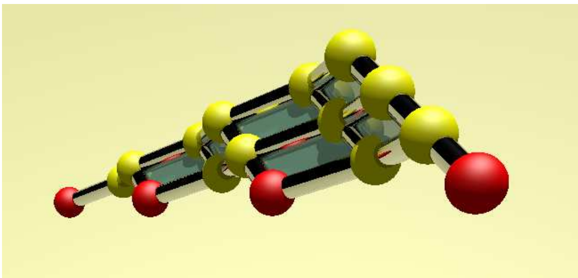
Les recherches proposées s'articulent selon les axes suivants.

1. **Géométrie des convexes max-min.** Dans le cas de la convexité max-min, les propriétés de séparation concernant plusieurs ensembles convexes ne sont pas encore connues. Par ailleurs, les analogues des résultats de génération des convexes par leur points extrêmes (théorèmes de Minkowski, de Krein-Milman, ou de Choquet) restent encore à découvrir. La théorie de la dualité est encore mal comprise. Enfin, les analogues de théorèmes classiques de convexité discrète (Carathéodory, Radon, Helly, ...) méritent d'être examinés.

2. **Meilleure approximation.** Un autre sujet classique dont l'analogue tropical ou extrême n'est pas encore bien compris est la théorie de la meilleure approximation, qui vise à caractériser les éléments minimisant certaines distances. Dans le cas tropical, deux distances peuvent être vues comme des analogues naturels de la métrique euclidienne, celles-ci peuvent être identifiées à la métrique projective de Hilbert et à la métrique de Thompson sur un cône simplicial. On espère que cette étude puisse éclairer des problèmes d'approximation plus généraux, faisant notamment intervenir les métriques de Hilbert ou de Thompson sur d'autres cônes. On peut aussi se demander s'il existe d'autres métriques compatibles avec la structure convexe, dans l'esprit du travail [MLM07].

3. **Hémi-espaces.** Un autre thème concerne la classification des hémi-espaces, c'est-à-dire des convexes dont le complémentaire est également convexe, qui s'avère plus difficile dans le cas tropical ou max-min que dans le cas classique [MLS88].

Pour conclure, en guise d'illustration, nous montrons le dessin de l'analogue tropical d'un polytope cyclique à quatre générateurs (les points rouges), produit par le programme POLYMAKE de Gawrilow et Joswig (voir [GJ01] pour une présentation générale de POLYMAKE, sans l'extension tropicale qui est récente).



4 Financement demandé au LEA

Les visites suivantes sont envisagées :

– I. Singer : 1 visite d'une semaine au CMAP (Palaiseau/Paris) en 2009.
– V. Nitica : 1 visite d'une semaine au CMAP (Palaiseau/Paris) en 2010.
– S. Gaubert : 1 visite d'une semaine à Bucarest en 2009.
– M. Akian : 1 visite d'une semaine à Bucarest en 2010.

Deux aller-retour Paris-Bucarest ainsi qu'un séjour d'une semaine en France pourront être financés par l'INRIA.

Nous demandons donc au LEA le financement de 2 séjours d'une semaine à Bucarest pour les participants français, d'une semaine à Paris pour l'un des deux participants roumains, et de 2 aller-retour Bucarest-Paris.

Références

[AGG08] X. Allamigeon, S. Gaubert, and É. Goubault. Inferring min and max invariants using max-plus polyhedra. In *Proceedings of the 15th International Static Analysis Symposium (SAS'08)*, volume 5079 of *LNCS*, pages 189–204. Springer, Valencia, Spain, 2008.

[AGK05] M. Akian, S. Gaubert, and V. N. Kolokoltsov. Solutions of max-plus linear equations and large deviations. In *Proceedings of the joint 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference ECC 2005 (CDC-ECC'05)*, Seville, Espagne, 2005. Voir aussi arXiv:math.PR/0509279.

[AGW06] M. Akian, S. Gaubert, and C. Walsh. How to find horizon-independent optimal strategies leading off to infinity : a max-plus approach. In *Proc. of the 45th IEEE Conference on Decision and Control (CDC'06)*, San Diego, 2006. arXiv:math.OC/0609243.

[AGW08] M. Akian, S. Gaubert, and C. Walsh. The max-plus Martin boundary. *Documenta Mathematica*, 2008. to appear, see also arXiv:math.MG/0412408.

[Aki99] M. Akian. Densities of idempotent measures and large deviations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 351(11) :4515–4543, 1999.

[AQV98] M. Akian, J.-P. Quadrat, and M. Viot. Duality between probability and optimization. In *Idempotency (Bristol, 1994)*, volume 11 of *Publ. Newton Inst.*, pages 331–353. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

[AR06] G. Adilov and A. Rubinov. $\mathbb{B}$-convex sets and functions. *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 27 :237–257, 2006.

[AS03] M. Akian and I. Singer. Topologies on lattice ordered groups, separation from closed downward sets and conjugations of type Lau. *Optimization*, 52(6) :629–672, 2003.

[BCOQ92] F. Baccelli, G. Cohen, G.J. Olsder, and J.P. Quadrat. *Synchronization and Linearity.* Wiley, 1992.

[BH04] W. Briec and C. Horvath. $\mathbb{B}$-convexity. *Optimization*, 53 :103–127, 2004.

[BH08a] W. Briec and C. Horvath. Halfspaces and Hahn-Banach like properties in $\mathbb{B}$-convexity and max-plus convexity. *Pac. J. Optim.*, 4(2) :293–317, 2008.

[BH08b] W. Briec and C. Horvath. Nash points, Ky Fan inequality and equilibria of abstract economies in Max-Plus and $\mathbb{B}$-convexity. *J. Math. Anal. Appl.*, 341(1) :188–199, 2008.

[BHR05] W. Briec, C. Horvath, and A. Rubinov. Separation in $\mathbb{B}$-convexity. *Pacific Journal of Optimization*, 1 :13–30, 2005.

[BSS07a] P. Butkovič, H. Schneider, and S. Sergeev. Generators, extremals and bases of max cones. *Linear Algebra Appl.*, 421(2-3) :394–406, 2007.

[BSS07b] P. Butkovič, H. Schneider, and S. Sergeev. Generators, extremals and bases of max cones. *Linear Algebra Appl.*, 421 :394–406, 2007.

[CG79] R. A. Cuninghame-Green. *Minimax algebra*, volume 166 of *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[CGQ99] G. Cohen, S. Gaubert, and J.P. Quadrat. Max-plus algebra and system theory : where we are and where to go now. *Annual Reviews in Control*, 23 :207–219, 1999.

[CGQ01] G. Cohen, S. Gaubert, and J.P. Quadrat. Hahn-Banach separation theorem for max-plus semimodules. In J.L. Menaldi, E. Rofman, and A. Sulem, editors, *Optimal Control and Partial Differential Equations*, pages 325–334. IOS Press, 2001.

[CGQ04] G. Cohen, S. Gaubert, and J. P. Quadrat. Duality and separation theorem in idempotent semimodules. *Linear Algebra and Appl.*, 379 :395–422, 2004. Also e-print arXiv:math.FA/0212294.

[CGQS05] G. Cohen, S. Gaubert, J. P. Quadrat, and I. Singer. Max-plus convex sets and functions. In G. L. Litvinov and V. P. Maslov, editors, *Idempotent Mathematics and Mathematical Physics*, Contemporary Mathematics, pages 105–129. American Mathematical Society, 2005. Also ESI Preprint 1341, arXiv:math.FA/0308166.

[DG06] V. Dhingra and S. Gaubert. How to solve large scale deterministic games with mean payoff by policy iteration. In *Valuetools '06 : Proceedings of the 1st international conference on Performance evaluation methodologies and tools*, page 12, New York, NY, USA, 2006. ACM Press.

[DS04] M. Develin and B. Sturmfels. Tropical convexity. *Doc. Math.*, 9 :1–27 (electronic), 2004. Also e-print arXiv:math.MG/0308254.

[DY07] M. Develin and J. Yu. Tropical polytopes and cellular resolutions. *Experimental Mathematics*, 16(3) :277–292, 2007. Also e-print arXiv:math.CO/0605494.

[EKL06] M. Einsiedler, M. Kapranov, and D. Lind. Non-Archimedean amoebas and tropical varieties. *J. Reine Angew. Math.*, 601 :139–157, 2006.

[FPT00] M. Forsberg, M. Passare, and A. Tsikh. Laurent determinants and arrangements of hyperplane amoebas. *Adv. Math.*, 151(1) :45–70, 2000.

[GJ01] E. Gawrilow and M. Joswig. Polymake : an approach to modular software design in computational geometry. In *Proceedings of the 17th Annual Symposium on Computational Geometry*, pages 222–231. ACM, 2001.

[GK06a] S. Gaubert and R. Katz. Max-plus convex geometry. In R. A. Schmidt, editor, *Proceedings of the 9th International Conference on Relational Methods in Computer Science and 4th International Workshop on Applications of Kleene Algebra (RelMiCS/AKA 2006)*, volume 4136 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 192–206. Springer, 2006.

[GK06b] S. Gaubert and R. Katz. The Minkowski theorem for max-plus convex sets. *Linear Algebra and Appl.*, 421 :356–369, 2006. arXiv:math.GM/0605078, Eprint doi:10.1016/j.laa.2006.09.019.

[GK08] S. Gaubert and R. Katz. The tropical analogue of polar cones. *Linear Algebra and Appl.*, 2008. Accepted for publication, also arXiv :0805.3688.

[GM08] S. Gaubert and F. Meunier. Carathéodory, Helly and the others in the max-plus world. arXiv :0804.1361v1, 2008.

[GS07] S. Gaubert and S. Sergeev. Cyclic projectors and separation theorems in idempotent convex geometry. *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika*, 13(4) :33–52, 2007.

[IMS07] I. Itenberg, G. Mikhalkin, and E. Shustin. *Tropical algebraic geometry.* Oberwolfach seminars. Birkhäuser, 2007.

[Jos05] M. Joswig. Tropical halfspaces. In *Combinatorial and computational geometry*, volume 52 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 409–431. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005. Also e-print arXiv:math.CO/0312068.

[Kat07] R. D. Katz. Max-plus (A, B)-invariant spaces and control of timed discrete event systems. *IEEE Trans. Aut. Control*, 52(2) :229–241, 2007. Also e-print arXiv:math.OC/0503448.

[KM97a] V. N. Kolokoltsov and V. P. Maslov. *Idempotent analysis and applications.* Kluwer Acad. Publisher, 1997.

[KM97b] V. N. Kolokoltsov and V. P. Maslov. *Idempotent analysis and its applications*, volume 401 of *Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1997. Translation of *Idempotent analysis and its application in optimal control* (Russian), "Nauka"

Moscow, 1994 [MR1375021 (97d :49031)], Translated by V. E. Nazaikinskii, With an appendix by Pierre Del Moral.

[LMS01] G.L. Litvinov, V.P. Maslov, and G.B. Shpiz. Idempotent functional analysis : an algebraic approach. *Math. Notes*, 69(5) :696–729, 2001.

[LS06] G. L. Litvinov and G. B. Shpiz. Kernel theorems and nuclearity in idempotent mathematics : an algebraic approach. *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)*, 331(Teor. Predst. Din. Sist. Komb. i Algoritm. Metody. 14) :60–83, 222–223, 2006.

[Mas87] V. P. Maslov. *Méthodes Operatorielles*. Edition Mir, Moscou, 1987.

[McE06] W. M. McEneaney. *Max-plus methods for nonlinear control and estimation*. Systems & Control : Foundations & Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2006.

[Mik05] G. Mikhalkin. Enumerative tropical algebraic geometry in $\mathbb{R}^2$. *J. Amer. Math. Soc.*, 18(2) :313–377 (electronic), 2005.

[MLM07] J.-E. Martínez-Legaz and A. Martinón. Boundedly connected sets and the distance to the intersection of two sets. *J. Math. Anal. Appl.*, 332(1) :400–406, 2007.

[MLRS02] J.-E. Martínez-Legaz, A. M. Rubinov, and I. Singer. Downward sets and their separation and approximation properties. *J. Global Optim.*, 23(2) :111–137, 2002.

[MLS88] J.-E. Martínez-Legaz and I. Singer. The structure of hemispaces in $\mathbf{R}^n$. *Linear Algebra Appl.*, 110 :117–179, 1988.

[NS07a] V. Nitica and I. Singer. Max-plus convex sets and max-plus semispaces. I. *Optimization*, 56(1–2) :171–205, 2007.

[NS07b] V. Nitica and I. Singer. Max-plus convex sets and max-plus semispaces. II. *Optimization*, 56(3) :293–303, 2007.

[NS08a] V. Nitica and I. Singer. Contributions to max-min convex geometry. I. Segments. *Linear Algebra Appl.*, 428(7) :1439–1459, 2008.

[NS08b] V. Nitica and I. Singer. Contributions to max-min convex geometry. II. Semispaces and convex sets. *Linear Algebra Appl.*, 428(8-9) :2085–2115, 2008.

[Pin98] J.-E. Pin. Tropical semirings. In *Idempotency (Bristol, 1994)*, volume 11 of *Publ. Newton Inst.*, pages 50–69. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

[Puh01] A. Puhalskiĭ. *Large Deviations and Idempotent Probability*. Number 119 in Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. Chapman & Hall, 2001.

[RGST05] J. Richter-Gebert, B. Sturmfels, and T. Theobald. First steps in tropical geometry. In *Idempotent mathematics and mathematical physics*, volume 377 of *Contemp. Math.*, pages 289–317. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[Sin97] I. Singer. *Abstract convex analysis*. Wiley, 1997.

[Vir01] O. Viro. Dequantization of real algebraic geometry on logarithmic paper. In *European Congress of Mathematics, Vol. I (Barcelona, 2000)*, volume 201 of *Progr. Math.*, pages 135–146. Birkhäuser, Basel, 2001.

[Vor67] N.N. Vorobyev. Extremal algebra of positive matrices. *Elektron. Informationsverarbeitung und Kybernetik*, 3 :39–71, 1967. in Russian.

[Wal07] C. Walsh. The horofunction boundary of finite-dimensional normed spaces. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 142(3) :497–507, 2007.

[Zim77] K. Zimmermann. A general separation theorem in extremal algebras. *Ekonom.-Mat. Obzor*, 13(2) :179–201, 1977.