

# Mathématiques et Modélisation

Marius Paicu\* et Aida Timofte†

Les matériaux céramiques et les monocristaux, montrant un comportement ferroélectrique, sont utilisés dans des nombreuses applications dans l'électronique et l'optique. Un cristal est ferroélectrique s'il a une polarisation spontanée dont on peut inverser le sens ou l'orientation par l'application d'un champ électrique plus grand que le champ coercitif. Un grand nombre d'applications des céramiques ferroélectriques exploitent également des propriétés comme celles diélectriques, piézoélectriques, pyroélectriques et électro-optiques, qui sont des conséquences indirectes de la ferroélectricité. La plus grande utilisation de ces matériaux se trouve dans des domaines comme celles des céramiques diélectriques pour les condensateurs, des couches minces ferroélectriques pour mémoires non volatiles, des matériaux piézoélectriques pour l'imagerie médicale d'échographie et pour actionneurs, et des matériaux électro-optiques pour le stockage des données et les affichages.

Le modèle proposé dans [MT06] prend en compte le comportement en hystérésis des matériaux ferroélectriques, en gardant en même temps la perspective générale pour le traitement du comportement multi-axial et des géométries complexes. Il est fondé sur des modèles tridimensionnelles du type "rate-independent", utilisés dans la littérature des ingénieurs, dans le cadre des petites déformations et de l'approximation quasistatique pour l'équilibre élastique et électrostatique.

Nous prenons comme variables réversibles fondamentales le déplacement élastique  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  et le déplacement électrique  $D : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ . En utilisant les variables internes, irréversibles  $q$  (comme la polarisation rémanente), le processus peut être rédigé dans une formulation énergétique qui est basée sur la fonctionnelle d'énergie stockée

$$\mathcal{E}(t, u, D, q) = \int_{\Omega} \left( W(x, \varepsilon(u), D, q) + \frac{k}{2} |\nabla q|^2 \right) dx + \int_{\mathbb{R}^d \setminus \Omega} \frac{1}{2\epsilon_0} |D|^2 dx - \langle \ell(t), (u, D) \rangle$$

et sur un potentiel de dissipation de la forme

$$\mathcal{R}(\dot{q}(t)) = \int_{\Omega} R(x, \dot{q}(t, x)) dx.$$

La théorie est basée sur une condition de stabilité purement statique (S) et sur le bilan énergétique (E), qui doivent être satisfaites pour tout  $t \in [0, T]$ :

$$(S) \quad \mathcal{E}(t, u(t), D(t), q(t)) \leq \mathcal{E}(t, \hat{u}, \hat{D}, \hat{q}) + \mathcal{R}(\hat{q} - q(t)) \quad \text{pour tous } \hat{u}, \hat{D}, \hat{q};$$

$$(E) \quad \mathcal{E}(t, u(t), D(t), q(t)) + \int_0^t \mathcal{R}(\dot{q}(s)) ds \\ = \mathcal{E}(0, u(0), D(0), q(0)) - \int_0^t \langle \dot{\ell}(s), (u(s), D(s)) \rangle ds.$$

---

\*Université Paris-Sud, [marius.paicu@math.u-psud.fr](mailto:marius.paicu@math.u-psud.fr)

†l'Institut de Mathématiques "Simion Stoilow" de l'Académie Roumaine, [aida.timofte@imar.ro](mailto:aida.timofte@imar.ro)

L'avantage majeur de cette formulation (voir [Mie05]) est de ne pas impliquer les dérivées des fonctions constitutives  $W$  et  $R$  et les dérivées de la solution  $(u, D, q)$ , qui ne sont pas contrôlées par l'énergie fonctionnelle  $\mathcal{E}$ . L'intégrale de dissipation  $\int_0^t \mathcal{R}(\dot{q}(s)) ds$  peut être réécrite comme une variation totale, et donc les dérivées temporelles de la solution n'apparaissent pas.

Dans des hypothèses assez générales, l'existence des solutions pour (S) & (E) dans des espaces de fonctions appropriés a été prouvée dans [MT06]. Dans des hypothèses plus restrictives des résultats d'unicité ont également été établis.

**Travail proposé.** Pour le modèle décrit ci-dessus, on envisage d'obtenir un résultat d'homogénéisation (après l'introduction d'un "length scale parameter"  $\varepsilon$  dans les densités) à l'aide des méthodes déjà établies dans [MT07]. Dans ce dernier article cité l'énergie libre avait une forme quadratique, pendant qu'ici elle a une forme assez générale. La théorie développée dans [MT07] est basée sur la *convergence à double échelle faible et forte via éclatement périodique* (voir aussi [CDG02]), et sur la théorie abstraite de  $\Gamma$ -convergence pour la formulation énergétique qui utilise les soi-disant *joint recovery sequences*. Nos travaux précédents ainsi que l'expérience acquise nous donne l'espoir raisonnable d'obtenir de tels résultats d'homogénéisation.

Afin de réaliser ce projet nous avons besoin de deux séjours pour Aida Timofte à l'Université Paris Sud, pour les périodes 5.06.2008-4.07.2008 respectivement 17.06.2009-16.07.2009.

## References

- [CDG02] D. CIORANESCU, A. DAMLAMIAN, and G. GRISO. Periodic unfolding and homogenization. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 335(1), 99–104, 2002.
- [Mie05] A. MIELKE. Evolution in rate-independent systems. In *Handbook of Differential Equations II, Evolutionary Equations*. Elsevier B.V., 2, 461–559, 2005.
- [MT06] A. MIELKE and A. M. TIMOFTE. An energetic material model for time-dependent ferroelectric behaviour: Existence and uniqueness. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 29, 1393–1410, 2006.
- [MT07] A. MIELKE and A. M. TIMOFTE. Two-scale homogenization for evolutionary variational inequalities via the energetic formulation. *SIAM J. Math. Anal.*, 39, 462–668, 2007.