

# Projet de recherche soumis au LEA Math-Mode

*Méthodes variationnelles en micromagnétisme.*

## 1 Introduction

Les matériaux ferromagnétiques sont très employés de nos jours comme outils technologiques dans le stockage d'information (disques durs, bandes magnétiques, mémoires magnétiques), ainsi que dans la protection radar et les télécommunications. La modélisation des particules ferromagnétiques de petites taille fait appel à la théorie du micromagnétisme. Dans cette théorie, les matériaux sont décrits par une distribution d'un champ de vecteurs, appelé *aimantation* dont les états stables correspondent aux minimiseurs de l'énergie micromagnétique. Le problème variationnel sous-jacent est non-convexe et non-local. De plus c'est un problème multi-échelle comprenant des paramètres intrinsèques (liés au matériau ferromagnétique) et des paramètres extrinsèques dépendants de la géométrie de l'échantillon. Selon la petitesse relative de ces paramètres, différents régimes asymptotiques apparaissent et conduisent à la formation de nombreuses structures stables.

Génériquement, un état stable comporte des vastes régions uniformément magnétisées (*domaines magnétiques*) séparés par des couches limites, les *parois*, où l'aimantation varie très vite. En fonction de régimes des paramètres du système, les expériences physiques prédisent asymptotiquement des défauts de type paroi (*paroi de Néel*, *paroi de Bloch asymétrique*), vortex (*ligne de Bloch*) ou de type mixte paroi-vortex (*paroi "cross-tie"*).

Notre but est d'analyser qualitativement et quantitativement le comportement des minimiseurs globaux de l'énergie micromagnétique dans certains régimes asymptotiques. Nous voulons donner une justification mathématique à la prédiction physique sur la création et la classification des singularités de l'aimantation. Les méthodes classiques de l'analyse fonctionnelle linéaire sont insuffisantes à rendre compte de ces phénomènes de perte de régularité. Des nouvelles approches sont nécessaires mettant en oeuvre des outils de la théorie géométrique de la mesure appliqués à l'analyse des équations aux dérivées partielles. Notre étude demandera également l'élaboration et l'adaptation de quelques nouvelles méthodes d'analyse non-linéaire (méthodes topologiques et de point critique) pour l'investigation des états d'équilibre.

## 2 Chercheurs impliqués dans le projet

Ce projet comporte une équipe de trois chercheurs parisiens et une équipe roumaine de l'Université de Cluj :

### Équipe française :

- François Alouges, Professeur, Laboratoire de Mathématiques, Université Paris-Sud ;
- Radu Ignat, Maître de Conférences, Laboratoire de Mathématiques, Université Paris-Sud ;
- Benoît Merlet, Maître de Conférences, LAGA, Université Paris 13.

### Équipe roumaine :

- Radu Precup, Professeur, Faculté de Mathématiques et Informatique, Université Babes-Bolyai, Cluj ;
- Adrian VIOREL, Doctorant, Université Babes-Bolyai, Cluj ;
- Florin-Cristian CRISTEA, étudiant en Master, Université Babes-Bolyai, Cluj.

## 3 Montant demandé et justification des dépenses

Ce projet est prévu pour les deux ans 2008 et 2009. Les actions suivantes sont envisagées (tous les montants sont HT) :

1. Organisation d'un groupe de travail à l'Université de Cluj pendant 10 jours en 2008. Un cours et des exposés sur le sujet sont prévus. Il faudra prendre en charge les frais de voyage et de séjour des chercheurs invités. Soit 4000 euro.
2. Echanges des chercheurs et des étudiants entre l'Université de Cluj et l'Université Paris-Sud pour des courts séjours (1 semaine) en 2008-2009. Soit 4 séjours et voyages à 1000 euro chaque : 4000 euro.
3. Achat d'une dizaine d'ouvrages sur le sujet. 500 euro.

Total : **8500 euro HT.**

## 4 Description scientifique détaillée

L'aimantation adimensionnée d'un échantillon ferromagnétique  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  est décrite par un champs de vecteurs unitaires  $m : \Omega \rightarrow S^2$  et est créée par le mouvement des spins des électrons. Les aimantations observées expérimentalement sont des minimiseurs (locaux) de l'énergie ferromagnétique écrite ici en l'absence de champs extérieur ou d'anisotropie :

$$E(m) = d^2 \int_{\Omega} |\nabla m|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx.$$

Le premier terme, appelé l'*énergie d'échange* est dû aux interactions à courte distance des spins et a la tendance d'aligner les spins voisins. Ce terme local est mis en compétition avec l'*énergie démagnétisante* due aux interactions à longue distance des spins modélisées par l'équation de Maxwell stationnaire. Plus précisément, le potentiel démagnétisant  $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  est déterminé par

$$\Delta u = \nabla \cdot (m 1_{\Omega}), \quad (1)$$

$$\text{i.e.,} \quad \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \cdot \nabla \zeta dx = \int_{\Omega} m \cdot \nabla \zeta dx, \quad \forall \zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3).$$

Le potentiel  $u$  est donc généré d'un coté par la divergence de  $m$  à l'intérieur de  $\Omega$  (les charges volumiques) et d'un autre coté par la composante normale de  $m$  à la surface de l'échantillon magnétique (les charges surfaciques). La longueur d'échange  $d$  est un paramètre du matériau et caractérise la force relative entre l'énergie d'échange et l'énergie démagnétisante.

Nous nous considérons un échantillon magnétique sous la forme d'un cylindre de hauteur  $t$  et de section transversale  $\Omega'$  de diamètre  $\ell$ . Les trois lon-

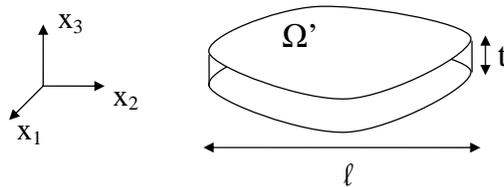


Fig. Échantillon ferromagnétique.

gueurs caractéristiques du système  $d$ ,  $\ell$  et  $t$  déterminent les régimes asymptotiques qui comportent diverses structures pour l'aimantation. L'aimantation varie uniformément sur des vastes régions ("domaines magnétiques") séparées par différents types de couches limites ("parois") : parois de Néel et de Bloch asymétrique, ligne de Bloch, paroi "cross-tie".

Par la suite, nous décrivons quelques régimes asymptotiques en focalisant sur la création des parois.

## 4.1 Régime de film mince

Dans le régime de film mince, l'épaisseur de l'échantillon est petite devant la constante d'échange, i.e.,  $t \ll d$ ; de plus, nous supposons que l'échantillon est assez large, i.e.,  $d^2 \ll tl$ . Pour des configurations invariantes dans la direction  $x_3$ , i.e.,  $m = m(x') : \Omega' \rightarrow S^2$ ,  $x' = (x_1, x_2)$ , l'énergie micromagnétique approchée d'un film mince (voir [6]) s'écrit :

$$\frac{1}{td^2} E(m) \approx \int_{\omega'} |\nabla' m|^2 dx' + \frac{1}{\eta} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla'^{-\frac{1}{2}} \nabla' \cdot (m' \mathbf{1}_{\omega'})|^2 dx' + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\omega'} m_3^2 dx', \quad (2)$$

où  $\omega' = \Omega'/l$  est la section transversale adimensionnée,  $\varepsilon := \frac{d}{\ell}$  est la taille du vortex et  $\eta := \frac{2d^2}{\ell t}$  correspond à la taille de la paroi de Néel. L'apostrophe ' indique toujours une quantité  $2D$ . Le but est d'étudier le comportement asymptotique des minimiseurs de (2) dans le régime du film mince

$$\varepsilon \ll \eta \ll 1.$$

**État de Landau.** La configuration limite de l'aimantation a été prédite par van den Berg [15] :

$$\begin{cases} m_3 = 0, |m'| = 1 \text{ et } \nabla' \cdot m' = 0 & \text{dans } \omega', \\ m' \cdot \nu' = 0 & \text{sur } \partial\omega', \end{cases} \quad (3)$$

où  $\nu'$  est le vecteur normal unitaire au bord de  $\omega'$ . Remarquons que les conditions (3) sont trop rigides pour l'existence d'aimantations régulières  $m'$ . Ceci peut être vu en écrivant  $m' = \nabla'^{\perp} \psi$ ; alors (3) se transforme en un problème de Dirichlet pour l'équation eikonale en  $\psi$  :

$$|\nabla'^{\perp} \psi| = 1 \text{ dans } \omega', \quad \psi = 0 \text{ sur } \partial\omega'. \quad (4)$$

En utilisant la méthode des caractéristiques, il n'y a aucune solution régulière

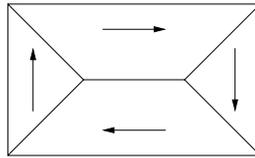


Fig. État de Landau.

de l'équation (4) pour un domaine  $\omega'$  borné et simplement connexe. Mais il existe une infinité de solutions continues qui satisfont (4) au sens des distributions et qui induisent des singularités de type lignes ou vortex pour  $m'$ .

L'expérience physique prédit que la configuration optimale de l'aimantation limite correspond à la "solution de viscosité" de (4), appelée l'état de Landau :

$$m'(x') = \nabla^\perp \text{dist}(x', \partial\omega').$$

Les lignes de singularités de  $m'$  sont une idéalisation au niveau mésoscopique de la formation des parois de Néel dans les films minces. Ces parois sont déterminées par un unique angle  $\theta$  formé par les aimantations dans les domaines adjacents. Il y a également un phénomène de vortex (la ligne de Bloch) créé par la contrainte topologique  $m' \cdot \nu' = 0$ . Pour l'état de Landau, la prédiction physique affirme que le vortex apparaît à l'intérieur dans l'un des points de jonction des parois de Néel.

**Question 1 :** *Comment montrer rigoureusement que les minimiseurs de (2) convergent vers l'état de Landau ?*

L'idée est d'analyser le comportement qualitatif et quantitatif des parois de Néel et de la ligne de Bloch. Ces parois donnent l'ordre de grandeur du niveau d'énergie de l'état de Landau, ainsi que l'information sur l'aspect local de cet état.

**Paroi de Néel.** La paroi de Néel est la couche limite prédominante dans les films très minces. Elle est caractérisée par une rotation monodimensionnelle de l'aimantation dans  $S^1$  qui connecte deux directions d'angle  $-\theta$  et  $\theta$  :

$$m_3 = 0, \quad m = m(x_1) \quad \text{et} \quad m'(x_1) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \pm \sin \theta \end{pmatrix} \quad \text{si} \quad \pm x_1 \geq 1. \quad (5)$$

On veut connaître le niveau de l'énergie de cette paroi de Néel. Pour des

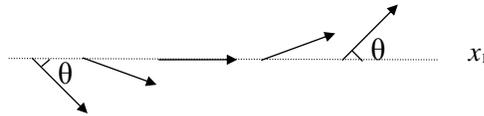


Fig. Paroi de Néel d'angle  $\theta$ .

aimantations  $1D$ , l'énergie spécifique (2) se réduit à

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{dm}{dx_1} \right|^2 dx_1 + \frac{1}{\eta} \int_{\mathbb{R}} \left| \left| \frac{d}{dx_1} \right|^{1/2} m_1 \right|^2 dx_1. \quad (6)$$

La paroi de Néel correspond au minimiseur global  $1D$  de (6) sous la contrainte (5). C'est un objet à deux échelles : un petit coeur ( $|x_1| \lesssim w_{core}$ ) où l'aimantation varie rapidement et deux queues ( $w_{core} \lesssim |x_1| \lesssim 1$ ) à décroissance

logarithmique. Le fait que la section transversale soit finie dans la direction  $x_1$  nous sert de mécanisme de confinement pour les queues de la paroi de Néel. La prédiction de la décroissance logarithmique a été formellement prouvée par Riedel et Seeger [14]; une présentation mathématique détaillée de leurs résultats a été effectuée par Garcia-Cervera [4]. Finalement, Melcher a établi rigoureusement dans [12, 13] l'échelle logarithmique exacte des queues de paroi de Néel. Le niveau d'énergie de cette structure à deux échelles est d'ordre

$$E_{Neel} \approx \frac{\pi(1 - |\cos \theta|)^2}{\eta |\ln \eta|} \quad \text{quand } \eta \rightarrow 0.$$

La stabilité de la paroi de Néel sous des perturbations arbitraires  $2D$  a été montrée par DeSimone, Knüpfer et Otto dans [5]. Cela signifie qu'asymptotiquement, l'énergie minimale est atteinte par une paroi droite et donc, les variations  $2D$  de la couche limite  $1D$  ne décroissent pas l'ordre principal de l'énergie. Ensuite, Ignat et Otto [9] ont montré l'optimalité de la paroi de Néel, i.e., asymptotiquement la couche limite  $1D$  est l'unique minimiseur  $2D$  de l'énergie (2) au tour de la paroi.

**Question 2 :** *Quel est le comportement des minimiseurs locaux  $1D$  de l'énergie micromagnétique (6) ?*

Nous attendons la création de plusieurs défauts de type paroi pour un minimiseur local. Le but est de localiser les parois et de déterminer l'énergie gouvernant la position de ces défauts. Cette énergie comporte un terme de répulsion entre les parois ainsi qu'un effet de répulsion à la frontière. C'est une énergie similaire à l'énergie renormalisée entre les vortex dans les problèmes de type Ginzburg-Landau. L'analyse asymptotique de la structure des parois est liée au problème suivant de la  $\Gamma$ -convergence pour les énergies normalisées des aimantations  $1D$  (voir Ignat [8]) :

**Question 3 :** *Étudier la  $\Gamma$ -limite de la famille d'énergies*

$$\eta \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{dm}{dx_1} \right|^2 dx_1 + |\ln \eta| \int_{\mathbb{R}} \left| \left| \frac{d}{dx_1} \right|^{1/2} m_1 \right|^2 dx_1$$

quand  $\eta \rightarrow 0$  pour la classe des aimantations  $m : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ .

**Ligne de Bloch.** La ligne de Bloch est une régularisation d'un vortex

$$m'(x') = \frac{x'^{\perp}}{|x'|}$$

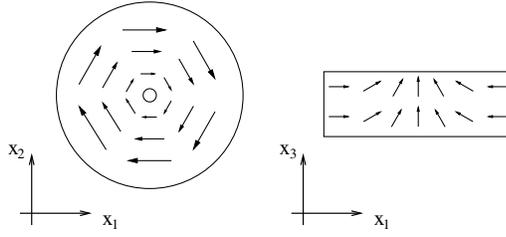


Fig. Ligne de Bloch.

où  $\perp$  denote une rotation de  $90^\circ$  dans le plan. En dehors du coeur de la ligne de Bloch, l'aimantation tourne comme un vortex. En s'approchant du coeur, le système evite la singularité en créant un phénomène de “fuite” dans la direction verticale, i.e., l'aimantation devient perpendiculaire au plan horizontal au centre de la ligne de Bloch. Par conséquent, la ligne de Bloch est essentiellement un objet zero-dimensionnel. Pour estimer son énergie, nous regardons les aimantations  $2D$  à valeurs dans  $S^2$  sans charges volumiques  $\nabla' \cdot m' = 0$  dans  $\mathbb{R}^2$  (engendrant une contrainte topologique  $m' \cdot \nu' = 0$  sur  $\omega'$ ), mais qui genèrent des charges surfaciques  $m_3^2 = 1 - |m'|^2 \neq 0$ . Alors (2) correspond à une énergie de type Ginzburg-Landau

$$\int_{\omega'} |\nabla' m|^2 dx' + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\omega'} m_3^2 dx'.$$

En utilisant les résultats de Béthuel, Brezis et Hélein [3], le minimum de cette énergie sous la contrainte topologique que  $m'$  reste tangente au bord de  $\omega'$  est d'ordre

$$E_{Bloch} \approx 2\pi |\ln \varepsilon| \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

En sachant que l'état de Landau comporte des parois de Néel et une ligne de Bloch, on déduit son niveau d'énergie :

$$E_{Landau} \approx \frac{C}{\eta |\ln \eta|} + 2\pi |\ln \varepsilon|$$

où  $C$  est une constante qui dépend de la longueur des parois de Néel ainsi que de leurs angles. Dans ce contexte, le problème suivant lié à la Question 1 se pose naturellement :

**Question 4 :** *A-t-on la compacité des aimantations d'énergie proche au niveau de l'état de Landau ?*

La réponse est positive si l'énergie du vortex est plus importante que l'énergie des parois (voir Ignat et Otto [10]). Bien évidemment, les configurations limites vérifient la prédiction physique de van den Berg (3). Le problème reste ouvert dans le régime  $E_{Bloch} \ll E_{Neel}$ .

## 4.2 Autres comportements dans le cas de films plus épais et de matériaux anisotropes

Nous étudions également un régime de film plus épais où les parois typiques sont les parois “cross-tie” et la paroi de Bloch asymétrique.

**Paroi “cross-tie”.** Dans les échantillons ferromagnétiques moins minces, le coût relatif d’une ligne de Bloch par rapport à une paroi de Néel devient plus favorable. Cela explique que dans les échantillons épais, des parois ayant une structure bidimensionnelle appelées parois “cross-tie” sont observées. Ces parois combinent des lignes de Bloch (vortex) et des parois de Néel.

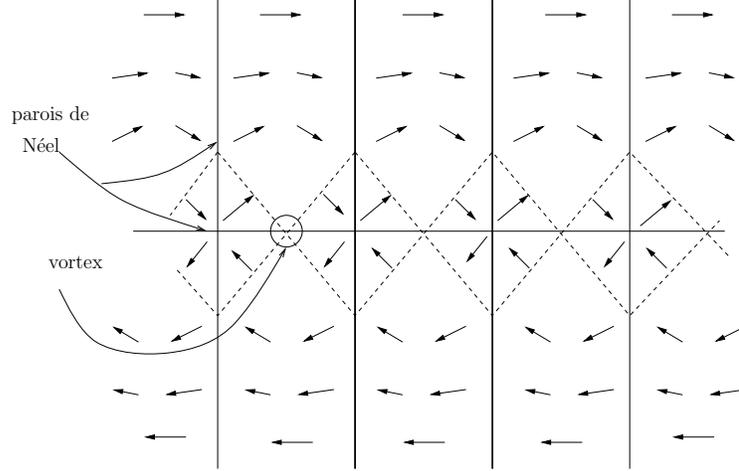


Fig. Transition par parois “cross-tie”

Une justification mathématique rigoureuse de ce phénomène a été réalisée par Alouges, Rivière et Serfaty [2]. Dans cet article, le domaine magnétique considéré est un cylindre de hauteur infinie  $\Omega' \times \mathbb{R}$  et l’aimantation est supposée invariante par translation verticale. De plus le matériau est supposé anisotrope et favorise les aimantations dans le plan de la section  $\Omega'$ . L’énergie considérée a la forme

$$F_\varepsilon(m) = \varepsilon \int_{\Omega'} |\nabla' m|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla' \Delta'^{-1} \nabla' \cdot (m' \mathbf{1}_{\Omega'})|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega'} m_3^2 \quad (7)$$

pour les aimantations  $m \in H^1(\Omega', S^2)$ .

À la limite  $\varepsilon \downarrow 0$ , les minimiseurs  $m_\varepsilon$  de  $F_\varepsilon$  convergent à extraction près vers un champ  $2D$  :  $m_0 \in L^1(\Omega', S^1)$ . Dans [2], il est montré que le coût asymptotique d’une transition entre deux états  $m_0^-, m_0^+ \in S^1$  séparés par un angle  $2\theta$  est (pour une paroi de longueur 1)

$$f_0(m_0^-, m_0^+) = \begin{cases} 2(\sin \theta - \theta \cos \theta) & \text{si } \theta \in [0, \pi/4], \\ 2((\theta - \pi/2) \cos \theta - \sin \theta + \sqrt{2}) & \text{si } \theta \in [\pi/4, \pi/2]. \end{cases}$$

Pour  $\theta \in [0, \pi/4]$ , l'énergie optimale est obtenue par une transition de type paroi de Néel et pour  $\theta \in [\pi/4, \pi/2]$  par un paroi de type cross-tie wall.

**Paroi de Bloch asymétrique.** Un autre type de paroi de transition est observé dans les échantillons ferromagnétiques épais. Dans des échantillons suffisamment épais, il est possible que dans l'énergie la contribution due au champs démagnétisant domine celle due à l'énergie d'échange. Il devient alors avantageux d'annuler le champs démagnétisant, i.e.,

$$\nabla \cdot (m1_\Omega) \equiv 0 \Leftrightarrow \left( \nabla \cdot m = 0 \text{ dans } \Omega \quad \text{et} \quad m_3 = 0 \text{ si } x_3 \in \{0, t\} \right). \quad (8)$$

Dans ce cas, (contrairement aux transitions exposées plus haut), au niveau microscopique, l'aimantation varie dans la direction de l'épaisseur de la paroi ( $\partial_{x_3} m \neq 0$ ) et n'est pas 2D ( $m_3 \neq 0$ ). Les parois de Bloch asymétriques sont des transitions satisfaisant (8).

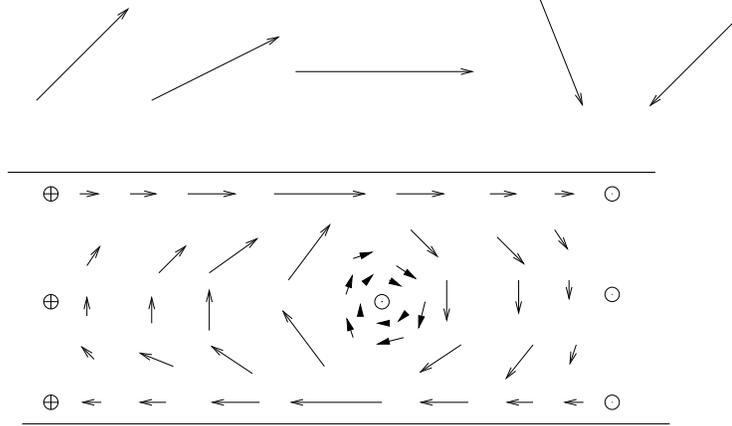


Fig. Paroi de Bloch asymétrique

Pour évaluer le coût énergétique de ces transitions, nous considérons un domaine de hauteur  $t$  fixe et font tendre la longueur d'échange  $d$  vers 0. Pour simplifier nous supposons que les aimantations ne dépendent pas de  $x_3$ . Après de nouvelles simplifications, nous sommes amenés à l'étude de la famille d'énergies  $G_\varepsilon$  définies par

$$G_\varepsilon(m) = \varepsilon \int_{\Omega'} |\nabla' m|^2 + \varepsilon^{-1} \int_{\Omega'} m_3^2, \quad (9)$$

pour des aimantations  $m \in H^1(\Omega', S^2)$  satisfaisant la contrainte  $\nabla' \cdot m' = 0$ .

Formellement, la  $\Gamma$ -limite pour cette famille d'énergies est

$$G_0(m_0) := \int_J |m_0^+ - m_0^-|^2$$

où l'aimantation limite satisfait

$$m_0 \in L^1(\Omega', S^1), \quad \nabla' \cdot m_0 = 0$$

et est régulière en dehors de lignes de sauts  $J$  où les traces de  $m_0$  sont  $m_0^+$  et  $m_0^-$ .

On obtient cette  $\Gamma$ -limite *a priori* en supposant qu'au travers des lignes de sauts, les aimantations  $m_\varepsilon$  varient essentiellement dans la direction du saut et pas transversalement. Démontrer que  $G_0$  est bien la  $\Gamma$ -limite cherchée indiquerait que cette hypothèse est correcte, les sauts seraient essentiellement monodimensionnels.

Ce n'est pas toujours vrai comme nous l'avons vu dans le cas des parois "cross-tie". Par ailleurs, Jin et Kohn [11] étudient la  $\Gamma$ -limite de familles d'énergies très proches de (9). En particulier, ils construisent une famille d'énergies pour lesquelles des transitions non-monodimensionnelles apparaissent.

C'est à cette discrimination entre structure monodimensionnelle et structure plus complexe que l'on s'intéresse tout d'abord. Pour le moment nous avons obtenu l'inégalité

$$G_0(m_0) \leq C \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} G_\varepsilon(m_\varepsilon), \quad (10)$$

quand  $m_\varepsilon$  est une famille d'aimantations satisfaisant  $\nabla' \cdot m'_\varepsilon = 0$  et convergeant vers  $m_0 \in L^1(\Omega', S^1)$ .

**Question 5 :** Étudier la  $\Gamma$ -limite de la famille d'énergies  $G_\varepsilon$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  pour la classe des aimantations  $m : \Omega' \rightarrow S^1$  satisfaisant  $\nabla' \cdot m = 0$ . En particulier : démontrer (10) avec  $C = 1$ .

## Références

- [1] F. Alouges et S. Labbé, *z-invariant micromagnetic configurations in cylindrical domains*, soumis.
- [2] F. Alouges, T. Rivière et S. Serfaty, *Néel and cross-tie wall energies for planar micromagnetic configurations*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **8** (2002), 31–68
- [3] F. Bethuel, H. Brezis et F. Hélein, *Ginzburg-Landau vortices*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 13. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1994

- [4] C.J. García-Cervera, *One-dimensional magnetic domain walls*, European J. Appl. Math., **15** (2004), 451–486,
- [5] A. DeSimone, H. Knüpfer et F. Otto, *2-d stability of the Néel wall*, Calc. Var. Partial Differential Equations **27** (2006), 233-253.
- [6] A. Desimone, R. V. Kohn, S. Müller et F. Otto, *A reduced theory for thin-film micromagnetics*, Comm. Pure Appl. Math., **55** (2002), 1408–1460.
- [7] A. Desimone, R. V. Kohn, S. Müller et F. Otto, *Magnetic microstructures-a paradigm of multiscale problems*, In ICIAM 99 (Edinburgh), pages 175-190. Oxford Univ. Press, Oxford, 2000.
- [8] R. Ignat, *A  $\Gamma$ -convergence result for the Néel wall*, en préparation.
- [9] R. Ignat et F. Otto, *A compactness result in thin-film micromagnetics and the optimality of the Néel wall*, J. Eur. Math. Soc., à paraître.
- [10] R. Ignat et F. Otto, *Compactness of the Landau state in thin-film micromagnetics*, en préparation.
- [11] W. Jin et R. Kohn, *Singular perturbation and the energy of folds*. J. Nonlinear Sci. **10** no 3 (2000), 355–390.
- [12] C. Melcher, *The logarithmic tail of Néel walls*, Arch. Ration. Mech. Anal. **168** (2003), 83–113.
- [13] C. Melcher, *Logarithmic lower bounds for Néel walls*, Calc. Var. Partial Differential Equations **21** (2004), 209–219.
- [14] R. Riedel et A. Seeger, *Micromagnetic treatment of Néel walls*, Phys. Stat. Sol. , **46**, 1971, 377–384.
- [15] H.A.M. van den Berg, *Self-consistent domain theory in soft-ferromagnetic media. II, Basic domain structures in thin film objects*, J. Appl. Phys. **60** (1986), 1104-1113.