PROJET SCIENTIFIQUE

ALEXANDRU DIMCA ET STEFAN PAPADIMA

1. Titre: *Variétés caractéristiques et de résonance*

2. Présentation. L'étude de la variété de représentations du groupe fondamental d'une variété, $\Gamma = \pi_1(M)$, dans un groupe algébrique G, $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$, est un sujet attractif, situé au point de jonction de la théorie des groupes avec la géometrie algébrique et différentielle et la topologie. Lorsque $G = GL_r$ est le groupe général linéaire complexe d'ordre r, une représentation $\rho \in \mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ correspond à un système local ${}_\rho\mathbb{C}^r$ de rang r sur M, et aussi à une connexion intégrable ∇ sur un fibré vectoriel holomorphe de rang r sur M.

Pour chaque i, il y a une stratification naturelle par *variétés caractéristiques en degré i*,

$$\mathcal{V}^i_k(M, \mathbb{C}^r) := \{\rho \in \mathrm{Hom}(\Gamma, GL_r) \mid \dim H^i(M, {}_\rho\mathbb{C}^r) \geq k\}\,.$$

Les variétés $\mathcal{V}^i_k$ sont liées à la théorie de Morse-Novikov des 1-formes fermées sur M (Novikov, Soviet Math. Dokl. 33, 1986), et aussi aux travaux fondamentaux de Green et Lazarsfeld (J. Amer. Math. Soc. 4, 1991), A. Beauville (Lecture Notes in Math. 1507, 1992) et C. Simpson (Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 26, 1993).

En rang $r = 1$, on peut remplacer le tore $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*)$ par son algèbre de Lie, $H^1(M, \mathbb{C})$, pour définir une version infinitésimale, à savoir les *variétés de résonance*,

$$\mathcal{R}^i_k(M, \mathbb{C}) := \{z \in H^1(M, \mathbb{C}) \mid \dim H^i(H^\bullet M, z) \geq k\}\,,$$

où H^i est calculé via la multiplication par z dans $H^\bullet M$. Un résultat fondamental de Esnault-Schechtman-Viehweg (Invent. Math. 109, 1992), obtenu via la théorie de Deligne sur les connexions logarithmiques, dit que pour un complément d'arrangement d'hyperplans M les germes $(\mathcal{V}^i_k, 1)$ et $(\mathcal{R}^i_k, 0)$ sont isomorphes. Ce fait peut être vu comme un phénomène de *formalité*, au sens de D. Sullivan (Publ. IHES 47, 1977), c'est à dire ceci montre qu'une certaine information topologique sur M ne dépend que de l'algèbre de cohomologie $H^\bullet M$.

Notre collaboration régulière a débuté avec les travaux [P12,13,17], sur l'homologie tordue d'un complément d'hypersurface. Ensuite, on

Date: 14 février 2008.

a réussi (voir [P25]) d'élucider le rôle décisif de la 1-formalité de M, dans le résultat de Esnault-Schechtman-Viehweg en degré 1. En plus, on a obtenu des informations sur la structure fine des $\mathcal{V}^1_k(M, \mathbb{C})$, pour M algébrique lisse arbitraire, qui nous ont permis de répondre à la question classique de Serre, sur la caractérisation du $\pi_1(M)$, dans un bon nombre de cas; voir [P22,23,25].

Dans l'article [D17] on utilise cette technique pour répondre à une ancienne question ouverte posée par Donaldson: quels sont les groupes qui peuvent être en même temps groupes fondamentaux de 3-variété réelle compacte et orientable, et de variété projective lisse?

Plusieurs questions se présentent naturellement dans notre projet, à partir du résultat de Esnault-Schechtman-Viehweg. Comment définir $\mathcal{R}^i_k(M, \mathbb{C}^r)$, en rang $r > 1$? A-t-on encore la propriété de Esnault-Schechtman-Viehweg, si l'espace M est 'suffisamment' formel? Peut-on remplacer 1 par une autre représentation $\rho \in \mathrm{Hom}(\Gamma, G)$? Notons que les variétés projectives lisses et les compléments d'hypersurface fournissent beaucoup d'exemples formels intéressants.

Les références ci-dessus se trouvent dans nos listes de publications attachées, où on a sélectionné les travaux liés au projet.

3. Visites envisagées: deux visites d'un mois, en 2008.
• A. Dimca: 1 mois à Bucarest, dans la période octobre-novembre
• S. Papadima: 1 mois à Nice, dans la période mai-juin

4. Financement.
• A. Dimca: Je demande au LEA 2 semaines de frais de séjour à Bucarest
• S. Papadima: Je demande au LEA 4 semaines de frais de séjour à Nice