GÉOMÉTRIE SPINORIELLE SUR LES VARIÉTÉS LOCALEMENT CONFORMÉMENT KÄHLERIENNES

– PROJET DE RECHERCHE –

ANDREI MOROIANU AND LIVIU ORNEA

Parmi les variétés hermitiennes, les variétés localement conformément kähleriennes (l.c.k.) forment une classe tres importante et beaucoup étudiée, voir la monographie [Dragomir-Ornea] et plus récemment [Ornea]. D'un autre côté, la géométrie spinorielle est une branche de la géométrie riemannienne dont difficilement on pourrait sous–estimer l'importance. Ses liens avec la géométrie kählerienne sont également très étudiés (voir par exemple l'article [M] ou les notes de cours [M1]).

Bien que la structure riemannienne des variétés l.c.k. soit presque entièrement comprise à présent, une étude systématique de leur géométrie spinorielle manque encore (peut–être à cause de l'absence d'une caractérisation en termes d'holonomie). À notre connaissance, il existe un seul papier, [Alexandrov-Grantcharov-Ivanov], dans lequel on discute les surfaces hermitiennes l.c.k. à l'aide de l'opérateur de Dolbeault – qui, sur les surfaces, agit essentiellement de la même manière que l'opérateur de Dirac. Plus précisément, les auteurs démontrent une inégalité satisfaite par les valeurs propres de l'opérateur de Dolbeault, dont le cas d'égalité caractérise les surfaces l.c.k.

Nous nous proposons d'initier une étude systématique des variétés l.c.k. spinorielles. Nous irons dans plusieures directions :

(1) Voir si les variétés l.c.k. peuvent supporter des champs de spineurs avec des propriétés spéciales (Killing conforme, par exemple).

(2) Obtenir des estimées pour les valeurs propres de l'opérateur de Dirac sur les variétés l.c.k. compactes.

(3) Caracteriser les variétés de Vaisman (Einstein–Weyl) dans la classe l.c.k. à l'aide d'une propriété spinorielle (ou spin^c). Cela devrait être possible, étant donné le parallélisme entre ces variétés et celles de Sasaki–Einstein.

Chacun de nous deux est assez experimenté dans un des deux domaines impliqués : la géométrie spinorielle et la géométrie l.c.k. En outre, nous avons déjà une certaine experience de recherche en commun, et même sur un problème lié à celui maintenant proposé, [Moroianu-Ornea]. Cela étant, nous pensons que notre projet est tout-à-fait réalisable.

Références

[Alexandrov-Grantcharov-Ivanov] B. Alexandrov, G. Grantcharov, S. Ivanov, *The Dolbeault operator on Hermitian spin surfaces*, Ann. Inst. Fourier **51** (2001), 221–235.

[Dragomir-Ornea] S. Dragomir, L. Ornea, Locally conformal Kähler geometry, Progress in Math. **155**, Birkhäuser, Boston, Basel, 1998.

[M] A. Moroianu *Kähler Manifolds with Small Eigenvalues of the Dirac Operator and a Conjecture of Lichnerowicz,* Ann. Inst. Fourier **49** (1999), 1637–1659.

[M1] A. Moroianu *Lectures on Kähler Geometry*, LMS Student Texts **69**, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[Moroianu-Ornea] A. Moroianu, L. Ornea, *Eigenvalue estimates for the Dirac operator and harmonic 1-forms of constant length*, C.R. Acad. Sci. Paris **338** (2004), 561–564.

[Ornea] L. Ornea, *Locally conformally Kähler manifolds. A selection of results*, Lecture notes of Seminario Interdisciplinare di Matematica. Vol. IV, 121–152, Lect. Notes Semin. Interdiscip. Mat., IV, S.I.M. Dep. Mat. Univ. Basilicata, Potenza, 2005.

Centre de Mathémathiques, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France

E-mail address: `am@math.polytechnique.fr`

Institute of Mathematics "Simion Stoilow" of the Romanian Academy, 21 Calea Grivitei Str. 010702-Bucharest, Romania

E-mail address: `liviu.ornea@imar.ro`