Projet de Recherche

1. Titre: Méthodes de Décomposition de Domaine pour les Problèmes de Contact avec Frottement

2. Participants: Lori Badea (Institut de Mathématiques "Simion Stoilow" de l'Académie Roumaine), Marius Cocou et Frédéric Lebon (Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique CNRS et Université de Provence (Aix-Marseille 1))

3. Déscription du projet:

La résolution numérique des problèmes de contact avec frottement nécessite des exigences particulières concernant la discrétisation du problème et la méthode de calcul utilisée. Ceci est relié principalement au fait que le modèle mathématique du frottement de Coulomb engendre une inéquation quasi-variationnelle qui introduit beaucoup plus de difficultés (du point de vue de l'existence et l'unicité de la solution et aussi des méthodes numériques) qu'une inéquation variationnelle standard. Par exemple, l'existence et l'unicité de la solution pour le problème statique de contact avec frottement de Coulomb ne peuvent pas être dérivées en utilisant directement les résultats de minimisation d'analyse convexe; au lieu de cela, des techniques de point fixe et de régularisation doivent être appliquées (voir [7], [12] pour le cas statique ou [8], [13], [14] pour le cas quasi-statique). Quand le seuil de frottement est supposé connu, on obtient la loi de frottement de Tresca. Dans ce cas, nous obtenons une inéquation variationnelle de deuxième espèce et l'existence et l'unicité de la solution peuvent être démontrées en utilisant les techniques d'analyse convexe.

La plupart des méthodes pour la résolution numérique des problèmes de contact avec frottement sont basées sur les techniques de point fixe, en se rapprochant du frottement de Coulomb par une suite de problèmes avec frottement de Tresca ([10, 11]). Cependant, la convergence de la méthode n'est pas prouvée théoriquement pour la formulation primale. Dans le même temps, dû au coût du calcul élevé, qui est imposé par la résolution répétée des inéquations variationnelles de deuxième espèce, cette procédure n'est pas attirante d'un point de vue du calcul. De plus, le taux de contraction de l'itération de point fixe dégénère pour les maillages fins. Par conséquent, une approche plus directe de la loi de frottement de Coulomb peut être une alternative plus efficace et fiable. Nous nous proposons dans ce projet d'étudier la convergence des méthodes de décomposition des domaines de Schwarz pour les problèmes de contact avec frottement décrits par les deux lois, de Tresca et de Coulomb.

Bien que les méthodes de Schwarz soient largement utilisées pour les problèmes linéaires, où elles fournissent des méthodes robustes et efficaces, leurs généralisations aux problèmes non-linéaires comme, par exemple, les inéquations quasi-variationnelles, ne sont pas simples. En particulier, une évaluation du taux de convergence des méthodes de Schwarz à deux ou plusieurs niveaux dans le cas des problèmes non linéaires est loin d'être établie théoriquement, à très peu d'exceptions. Concernant l'application de la méthode multiplicative de Schwarz à un seul maillage au problèmes de contact avec frottement, on peut citer [5] et [6]. Dans les deux papiers, le problème décrit la dynamique des séismes, modélisés comme des instabilités de glissement avec frottement entre deux plaques tectoniques. Dans [5], le problème anti-plan est considéré. Dans ce cas, le problème est equivalent à la minimisation avec contraintes d'une fonctionnelle non-quadratique, et on peut appliquer les résultats de convergence de la méthode de Schwarz de [1] et [2] (pour de résultats similaires concernant la convergence de la méthode additive de Schwarz, on peut voir [3]). Dans [6], le problème genéral (2D où 3D) a été considéré. Dans ce cas, on a à résoudre une inéquation quasi-variationnelle. Même si les résultats numériques ont été très encourageants, la convergence de la méthode n'est pas démontrée théoriquement.

La plus simple des méthodes de Schwarz est la méthode de relaxation de Gauss-Seidel (ou la minimisation successive sur les coordonnées). Il est prouvé dans [9] que cette méthode converge pour une inéquation variationnelle de deuxième espèce dans $\mathbf{R}^d$ si le terme non différentiable est localisé, c'est-à-dire s'il peut être écrit comme $\varphi(v) = \sum_{i=1}^{d} \varphi_i(v_i)$, pour $v = (v_1, \ldots, v_d)$. Une telle décomposition localisée peut être obtenue, par exemple, si le problème continu est discretisé par les éléments finis et $\varphi(v)$ est approché par une intégration numérique. La méthode de Gauss-Seidel est un cas particulier d'une méthode de Schwarz dans laquelle le domaine est décomposé à l'aide de l'intérieur des supports des fonctions de la base nodales. Par conséquent, la décomposition précédente de φ peut être regardée comme une décomposition en concordance avec la décomposition du domaine. Une généralisation simple de la preuve de convergence de [9] aux décompositions plus générales peut être obtenue en utilisant cette idée, mais elle n'est pas très évidente pour les méthodes de Schwarz à plusieurs niveaux, dans le cas où on veut obtenir une convergence plus rapide. Ceci est dû au fait que les nonlinéarités ne sont pas découplées sur les mailles grossières.

Dans cette étude, en utilisant des techniques similaires à celles de [4], nous nous proposons aussi de donner des méthodes de Schwarz qui soient globalement convergentes pour les inéquations variationnelles et quasi-variationnelles de deuxième espèce. De même, nous nous proposons de prouver que ces méthodes ont un taux de convergence optimal dans le cas de plusieurs maillages, c'est-à-dire il dépend seulement de H/δ et de H/h (comme dans le cas des problèmes linéaires), H et h étant les paramètres des maillages et δ le recouvrement des domaines. Ce résultat serait d'un intérêt particulier, puisque, en outre la convergence, la scalabilité de la méthode est d'une grande importance. Davantage que pour les problèmes non linéaires, les maillages grossiers fournissent une robustesse supplémentaire de la convergence de la méthode.

En conclusion, nous nous proposons dans ce projet d'étudier théoriquement la convergence des methodes de Schwarz (y compris à plusieurs maillages) pour les inéquations variationnelles et quasi-variationnelles de deuxième espèce et de les appliquer à la résolution numérique des problèmes de contact avec frottement.

References

[1] L. Badea, *Convergence rate of a multiplicative Schwarz method for strongly non-linear variational inequalities*, in Analysis and Optimization of Differential Systems,

V. Barbu, I. Lasiecka, D. Tiba and C. Varsan (eds.), Kluwer Academic Publishers, 2003, pp. 31–42.

[2] L. Badea, *Convergence rate of a Schwarz multilevel method for the constrained minimization of nonquadratic functionals*, SIAM J. Numer. Anal., **44**, no. 2, 2006, pp. 449–477.

[3] L. Badea, *Additive Schwarz method for the constrained minimization of functionals in reflexive Banach spaces*, in U. Langer et al. (eds.), Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XVII, LNSE 60, Springer, 2008, pp. 427–434.

[4] L. Badea, *Schwarz methods for inequalities with contraction operators*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **215**, 1, 2008, pp. 196–219 (doi:10.1016/j.cam.2007.04.004).

[5] L. Badea, I. Ionescu and S. Wolf, *Domain decomposition method for dynamic faulting under slip-dependent friction*, J. of Computational Physics, **201**, 2, 2004, pp. 487–510.

[6] L. Badea, I. Ionescu and S. Wolf, *Schwarz method for earthquake source dynamics*, J. of Computational Physics, **227**, 8, 2008, pp. 3824-3848 (doi:10.1016/j.jcp.2007.11.044).

[7] M. Cocou, *Existence of solutions of Signorini problems with friction*, Int. J. Engrg. Sci., **22**, 5, 1984, pp. 567–575.

[8] M. Cocou, E. Pratt and M. Raous, *Formulation and approximation of quasistatic frictional contact*, Int. J. Engrg. Sci., **34**, 7, 1996, pp. 783–798.

[9] R. Glowinski, *Numerical methods for nonlinear variational problems*, Springer Series in Computational Physics, Springer-Verlag New York, 1984.

[10] F. Lebon, *Contact problems with friction: Models and simulations*, Simulation, Modelling, Practice and Theory, **11**, 2003, pp. 449–464.

[11] F. Lebon and M. Raous, *Friction modelling of a bolted junction under internal pressure loading*, Computers and Structures, **43**, 1992, pp. 925–933.

[12] A. Radoslovescu Capatina and M. Cocou, *Internal approximation of quasi-variational inequalities*, Numer. Math., **59**, 1991, pp. 385–398.

[13] R. Rocca and M. Cocou, *Existence and approximation of a solution to quasistatic Signorini problem with local friction*, Int. J. Engrg. Sci., **39**, 11, 2001, pp. 1233–1255.

[14] R. Rocca and M. Cocou, *Numerical analysis of quasistatic unilateral contact problems with local friction*, SIAM J. Numer. Anal., **39**, 4, 2001, pp. 1324–1342.

4. Visites envisagées:

Lori Badea - à Marseille - 2 semaines en 2008 (entre 28 juillet et 10 août) et 2 semaines en 2009

Marius Cocou - à Bucarest - 1 semaine en 2008 (en octobre ou novembre) et 2 semaines en 2009
Frédéric Lebon - à Bucarest - 1 semaine en 2008 (en octobre ou novembre) et 2 semaines en 2009

5. Financement demandé au L.E.A.: Frais de voyage, frais d'hébergement et perdiem pour 8 semaines de séjour, 2 semaines en France et 6 semaines en Roumanie. Les frais de la visite de deux semaines en 2008 de M. Lori Badea seront supportés par l'Institut de Mathématiques de l'Académie Roumaine sur un contrat de recherche.

6. Notice individuelle de Lori Badea.
(un CV détaillé ainsi qu'une liste des publications peuvent être consultés à l'adresse http://www.imar.ro/ ˜lbadea)

Date de naissance. 09/08/1948.
Lieu de naissance. Visinesti (Roumanie).
Formation.
- Maîtrise en Mathématiques à la Faculté de Mathématiques de l'Université de Bucarest (1971).
- Doctorat de l'Université Paris 6, France (1992).

Poste détenu actuellement. Directeur de Recherche de première classe à l'Institut de Mathématiques "Simion Stoilow" de l'Académie Roumaine.
Distinctions. Prix "Spiru Haret" de l'Académie Roumaine, Section de Mathématiques (2001).
Stages à l'étranger comme professeur ou chercheur invité en France, Allemagne, Suisse, Norvège et aux Etats Unis.

6. Notice individuelle de Marius Cocou.

Date de naissance. 19/10/1954.
Lieu de naissance. Ploiesti (Roumanie).
Formation.
- Master de Mécanique des Solides, Faculté de Mathématiques, Université de Bucarest (1979).
- Doctorat ès Sciences Mathématiques, Spécialité Mécanique des Solides, de l'Université de Bucarest (1991).

Poste détenu actuellement. Professeur à l'Université de Provence.
Stages à l'étranger comme professeur invité en Suède, Grèce, Espagne, Portugal, République Tchèque et Roumanie.

7. Notice individuelle de Frédéric Lebon.

Date de naissance. 22/03/1961.
Lieu de naissance. Marseille (France).
Formation.
- Maîtrise en Mathématiques Appliquées à l'Université de Provence (1984).
- Doctorat de l'Université de Provence, France (1989).

Poste détenu actuellement. Professeur de première classe à l'Université de Provence.

Stages à l'étranger comme professeur ou chercheur invité en Italie, Roumanie, Brésil, Argentine, Cuba et Colombie.