Structures de Weyl à holonomie réduite

Florin Belgun (IMAR), Andrei Moroianu (CNRS, Univ. Paris-Sud)

Dans ce projet nous nous proposons d'étudier les variétés riemanniennes compactes (M, g) dont la connexion de Levi-Civita ∇^g est à holonomie spéciale, et qui admettent une connexion de Weyl fermée D (différente de ∇^g), à holonomie réduite $\mathrm{Hol}_0(D)$ strictement contenue dans le groupe orthogonal.

Dans le cas où D est exacte (donc la connexion de Levi-Civita d'une autre métrique dans la classe conforme de g), ce problème se réduit à l'étude des classes conformes contenant deux métriques riemanniennes non-homothétiques à holonomie spéciale, qui a été récemment résolu dans [3] et [4].

Nous allons donc considérer desormais que D est fermée non-exacte. On peut alors distinguer trois cas :

— Si $\mathrm{Hol}_0(D)$ est contenue dans le groupe unitaire, alors (M, g) est une variété localement conformément kählerienne à holonomie réduite, donc on peut appliquer la classification de [3]

— Si D est Weyl-Einstein, on peut utiliser des arguments de Gauduchon et Tod [5] pour montrer que la forme de Lee de D est parallèle par rapport à la métrique de Gauduchon, ce qui en principe devrait permettre de construire toutes les solutions du problème.

— Enfin, le cas le plus difficile est celui où $\mathrm{Hol}_0(D)$ est réductible, qui a déjà été considéré dans [1]. Nous espérons utiliser des résultats récents de Kourganoff [2] afin de faire des progrès dans cette direction.

Références

[1] Florin Belgun, Andrei Moroianu. *On the irreducibility of locally metric connections*. J. reine angew. Math. **714** (2016), 123–150.

[2] Mickaël Kourganoff. *Similarity structures and de Rham decomposition*. Math. Ann. (2018). https ://doi.org/10.1007/s00208-018-1748-y.

[3] Farid Madani, Andrei Moroianu et Mihaela Pilca. *Conformally related Kähler metrics and the holonomy of lcK manifolds*. À paraître dans J. Eur. Math. Soc.

[4] Andrei Moroianu. *Conformally related metrics with non-generic holonomy*. J. reine angew. Math. (2019) https ://doi.org/10.1515/crelle-2017-0031.

[5] Paul Gauduchon. *Structures de Weyl-Einstein, espaces de twisteurs et variétés de type $S^1 \times S^3$*, J. reine angew. Math. **469** (1995), 1–50.