Analyse spectrale du voisinage d'un point de contact de deux fonctions de Bloch en 2 dimensions dans un champ magnétique régulier a variation lente.

Bernard Helffer et Radu Purice.

April 18, 2019

Nous proposons de continuer une coopération scientifique concernant l'étude spectral des Hamiltoniens de Schrödinger 2-dimensionnels en champ magnétique régulier (i.e. avec des composantes indéfiniment dérivables et bornées ainsi que toutes leurs dérivés). Cette activité va impliqué aussi la continuation de notre colaboration scientifique avec Horia Cornean de l'Université d'Aalborg au Danemark.

Dans nos papiers récents [1, 2] nous avons reconsidéré la méthode des Hamiltoniens effectifs de Peierls-Onsager dans une situation bidimensionnelle où l'analyse spectrale peut être poussée assez loin.

Rappelons qu'un Hamiltonien de Schrödinger périodique est un opérateur differentiel de la forma

$$H_V := -\Delta + V(x) \tag{0.1}$$

où $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est une fonction indéfiniment dérivable et périodique. Rappelons encore que le spectre d'un Hamiltonien de Schrödinger périodique est détérminé par une suite infinie de fonctions continues $\{\lambda_n : \mathbb{T} \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$, with $\lambda_n(\theta) \leq \lambda_{n+1}(\theta)$ for any $\theta \in \mathbb{T}$ and $n \in \mathbb{N}$ and $\lim_{n\nearrow\infty} \lambda_n(\theta) = +\infty$ for any $\theta \in \mathbb{T}$ (with $\mathbb{T}$ the 2-dimensional torus), de façon que le spectre est la reunion des images $\lambda_n\big(\mathbb{T}\big) \subset \mathbb{R}$. Chaque fonction $\lambda_n : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est appelée *fonction de Bloch*; une famille $\{\lambda_j\}_{k\leq j\leq k+p}$ avec $p \in \mathbb{N}$ telle que la reunion de ces imager de $\mathbb{T}$ est séparée par des lacunes spectrales du reste du spectre est appélée *une bande isolée*.

Le Hamiltonien périodique dans un champ magnétique de potentiel vecteur $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est un opérateur differentiel de la forme

$$H_{A,V} := \sum_{1\leq j\leq d} \big(-i\partial_j - A_j(x)\big)^2 + V(x). \tag{0.2}$$

La théorie de Peierls-Onsager affirme que si on superpose une interaction avec un champ magnétique avec un potentiel vecteur $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, alors la dynamique dans une fenêtre etroite d'energie autour d'une bande de Bloch $\lambda_k : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ peu être approchée pour des champs magnétiques faibles par l'opérateur $\lambda_k\big(-i\nabla - A(x)\big)$. Donner un sens précis a cette affirmation physique et contrôler l'erreur est un problème mathématique assez difficile et une solution complète est encore loin d'être obtenue.

Nous considérons un champ magnétique de la forme $B^{\epsilon,\kappa}(x) := \epsilon B^\circ + \kappa\epsilon B(\epsilon x)$ pour $x \in \mathbb{R}^2$ où B° est un champ magnétique constant, B est un champ magnétique régulier et (ϵ, κ) sont deux paramètres positifs considérés petits.

Dans [1] nous avons considéré une fenêtre etroite d'énergie autour de la marge inférieure d'une fonction de Bloch formant toute seule une bande isolée, Nous avons montré que le spectre contenu dans une telle fenêtre est formé par des bandes étroites voisines des valeurs propres d'un Hamiltonien de Schrödinger construit à partir du Hessien de la fonction de Bloch associée autour de son minimum. Notre méthode consiste dans la construction de la matrice infinie du Hamiltonien effectif de Peierls-Onsager dans une base de fonctions de Wannier 'magnétiques' et de contrôler l'erreur à l'aide d'une procedure du type Schur-Feshbach. Un instrument important est un *calcul pseudodifferentiel magnétique avec des symboles a variation lente.*

Dans [2] des méthodes similaires a celles de [1] sont developpées pour le cas ou on n'a pas des fonctions de Wannier. L'idée est d'utiliser le calcul pseudodifferentiel magnétique avec des symboles a variation lente pour se localiser dans un petit voisinage du minimum de la fonction de Bloch (dans le torre) et de montrer que l'influence de du complementaire de ce voisinage est negligeable. Cette 'localisation' permet de travailler avec des *quasi-fonctions de Wannier* définissant une *quasi-fonction de Bloch* qui coïncide avec la vraie seulement sur le petit voisinage considéré.

Dans le projet que nous proposons dans le cadre du GDRI ECO-Math, nous considerons le cas où deux fonctions de Bloch voisines ont un point commun et il existe une fenêtre d'énergie autour de ce point commun qui n'intersecte plus le spectre en dehors d'un petit voisinage du préimage du point commun sur le torre. Dans ce cas le Hamiltonien effectif est supposé être un Hamiltonien de Dirac en dimension 2 associé au developpement d'ordre 1 autour du

point commun. Plus precisement, nous considerons les hypothèses suivante:
Hypothèse 1: Dans la structure des fonctions de Bloch associées à l'Hamiltonien périodique H_V il existe un interval compact $I \subset \mathbb{R}$ et un entier $k_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que

$$\mathtt{sp}(H) \cap I \;=\; \Big(\lambda_{k_0}(\mathbb{T}) \cap I\Big) \bigcup \Big(\lambda_{k_0+1}(\mathbb{T}) \cap I\Big) \tag{0.3}$$

et $\Sigma_I := \lambda_{k_0}^{-1}\big(I\big) \cup \lambda_{k_0+1}^{-1}\big(I\big) \subset \mathbb{T}$ est difféomorphe a un disque bidimensionnel.

Alors localement dans un petit ouvert $\Theta \subset \Sigma_I$ l'Hamiltonien est unitairement equivalent à l'opérateur de multiplication avec la fonction

$$\mathbb{T} \ni \theta \mapsto F_0(\theta)\mathbb{1} + \sum_{\ell=1,2,3} \mathbf{F}_\ell \sigma_\ell \in \mathbb{B}\big(\mathbb{C}^2\big) \tag{0.4}$$

dans $L^2\big(\mathbb{T};\mathbb{C}^2\big)$ avec $F_0 : \Theta \to \mathbb{R}$ et $\mathbf{F} : \Theta \to \mathbb{R}^3$ des fonctions indéfiniment dérivables et σ_ℓ sont les matrices de Dirac.
Hypothèse 2: $\mathbf{F}(\theta)$ a un zéro non-dégénéré en $\theta_\circ \in \Theta \subset \Sigma_I$ et il existe $a \in [0, 1/2)$ tel que $\big|F_0(\theta)\big| \leq a\big|\mathbf{F}(\theta)\big|$ pour tout $\theta \in \Theta$.

Notre but est de trouver une extension de nos méthodes élaborées dans [1, 2] pour ce problème impliquant des fonctions a valeures matrices bidimensionelles et de prover que dans l'intervale $I \subset \mathbb{R}$ définit dans l'Hypothèse 1, des lacunes spectrales apparaissent, délimitant des iles spectrales situées autour des valeures propres d'un Hamiltonien Landau-Dirac bidimensionel associé au champ magnétique constant ϵB°. Nous voulons bien controler les largeures de ces bandes de spectre et des lacunes.

References

[1] Horia D. Cornean, Bernard Helffer, Radu Purice: Low lying spectral gaps induced by slowly varying magnetic fields, Journal of Functional Analysis 273, (1), (2017), pp. 206–282

[2] Horia Cornean, Bernard Helffer, Radu Purice: Peierls' substitution for low lying spectral energy windows, Journal of Spectral Theory (2019) Published online first: 2019-03-21, DOI: 10.4171/JST/274.