Topologia algebrică şi diferenţială a suprafeţelor

Sergiu Moroianu

Cuprins

Introducere

Scopul acestei cărţi este de a prezenta intr-un mod unitar teoria suprafeţelor din trei puncte de vedere: topologic; diferenţial şi complex-analitic. Ne vom concentra pe cazul suprafeţelor compacte fără bord. Scopul nostru este de a demonstra trei mari rezultate: teorema de clasificare a suprafeţelor topologice, teorema Gauss-Bonnet şi teorema de uniformizare. Vom începe cu aspectele topologice ale teoriei.

CAPITOLUL 1

Topologie algebrică

1. Ce este topologia algebrică?

Topologia algebrică înseamnă folosirea algebrei ca instrument pentru studierea spaţiilor topologie. Vom încerca să clasificăm anumite categorii de spaţii topologice căutând invarianţi algebrici. Deci obiectul de studiu al topologiei algebrice îl reprezintă spaţiile topologice iar metodele provin din domeniul algebrei.

Pentru completitudine, să recapitulăm noţiunea de spaţiu topologic. O referinţă excelentă în această direcţie este volumul 1 din monografia dieudonne [**3**].

Definiţia 1.1. Un spaţiu topologic este o mulţime X împreună cu o submulţime $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ a mulţimii părţilor lui X, astfel încât :

- $\emptyset \in \tau$ şi $X \in \tau$;
- Orice reuniune de elemente din τ aparţine lui τ;
- Orice intersecţie a unui număr finit de elemente din τ aparţine lui τ.

Elementele lui τ se numesc mulţimi *deschise* în X, iar complementarele lor *închise*.

Un spaţiu topologic (pe scurt, *spaţiu*) se numeşte *compact* dacă orice acoperire a lui cu deschişi admite o subacoperire finită.

comp Exemplul 1.2. Intervalul $I := [0,1]$ cu topologia indusă de pe $\mathbb{R}$ este compact. Este şi conex. Completitudinea lui $\mathbb{R}$ are un rol esenţial în demonstrarea acestor proprietăţi. Să reamintim că $\mathbb{R}$ este definit prin completarea metrică a lui $\mathbb{Q}$ faţă de metrica euclidiană.

Mai general, orice mulţime închisă şi mărginită din $\mathbb{R}^n$ este compactă. Acest lucru nu e adevărat în spaţii vectoriale infinit dimensionale, chiar daca sunt complete. De exemplu, fie H un spaţiu Hilbert (peste $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$) separabil şi $B_1(0)$ bila închisă de rază 1 din H, care este închisă şi mărginită. Fie $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o bază Hilbert a lui H. Şirul (e_n) nu are nici un subşir convergent în H, deci B nu e compactă. Cu toate acestea, B este compactă pentru aşa-numita topologie slabă pe H (teorema lui Alaoglu). De exemplu, şirul (e_n) de mai sus converge slab la 0, în sensul următor: pentru orice vector $x \in H$ fixat, sirul de numere complexe $\langle e_n, v\rangle$ tinde la 0. Aceasta se poate vedea uşor descompunând pe x în baza Hilbert e_n.

De remarcat că sfera de rază 1 din H nu este compactă chiar pentru topologia slabă! Intr-adevăr, exemplul de mai sus ne dă un sir de puncte pe sferă care e slab convergent la un punct din afara ei.

In concluzie, spatiile infinit dimensionale sunt mai puţin intuitive decât cele finit dimensionale. Pentru o primă incursiune în topologia algebrică vom rămâne aşadar în cadrul familiar al spatiului euclidian $\mathbb{R}^n$. Chiar şi asta poate fi prea ambiţios, întrucât deja la a patra dimensiune intuiţia geometrică scade. Ne vom ocupa mai ales de suprafeţe, adică de obiecte de dimensiune 2, cum ar fi sfera, torul, faimoasa banda Möbius (suprafaţa cu o singură faţă) sau misterioasa sticlă a lui Klein, care nu are interior. Din păcate, suprafeţele compacte neorientabile (ca de exemplu sticla lui Klein) nu pot fi scufundate in $\mathbb{R}^3$, aşa încât suntem în mod natural conduşi la spaţii topologice mai generale.

Prezentăm acum un prim exerciţiu care ne va arăta cum topologia generală devine "algebrică":

Exerciţiul 1.3. Arătaţi că $\mathbb{R}$ şi $\mathbb{R}^2$ nu sunt homeomorfe.

Să ne reamintim că o *aplicaţie* (numită şi *morfism*) $f : X \to Y$ între două spaţii topologice se numeşte continuă dacă întoarce deschişi în deschişi, adica pentru orice deschis U din Y, preimaginea $f^{-1}(U)$ este deschisă în X. Un homeomorfism este o aplicaţie bijectivă, continuă şi astfel încât inversa $f^{-1} : Y \to X$ să fie continuă.

Demonstraţie. Să presupunem prin reducere la absurd că ar exista $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ un homeomorfism. Restricţionând f la $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ obţinem un homeomorfism de la $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ la $\mathbb{R}^2 \setminus \{f(0)\}$. Dar $\mathbb{R}$ fără un punct nu este conex, iar $\mathbb{R}^2$ fără un punct este conex. Contradicţie! □

Această demonstraţie, oricât de banală ar părea, marchează începutul topologiei algebrice. Am asociat unui spaţiu topologic numărul lui de componente conexe. Acest număr natural se păstrează prin homeomorfisme, deci este un invariant topologic. Pasul final al demonstraţiei a fost că $2 \neq 1$, deci un argument de algebră. Vom învăţa sa lucrăm cu invarianţi ceva mai sofisticaţi, anume grupuri pe care le vom asocia unor spaţii.

2. Teorema lui Euler despre poliedre

theu

Teorema 2.1. *Fie X un poliedru (conex) în $\mathbb{R}^3$ cu proprietatea că orice curbă închisă fară auto-intersecţii în X separă X în exact două componente conexe. Atunci*

$$v - m + f = 2$$

unde v este numărul de vârfuri, m numărul de muchii iar f numărul de feţe.

O definiţie exactă a noţiunii de poliedru va apărea mai târziu. Deocamdată considerăm că suntem familiari cu această noţiune din liceu.

Demonstraţie. (Schiţă) Vom numi graf în poliedrul X o mulţime conexă de vârfuri şi muchii a lui X. Conexitatea înseamnă aici că două vârfuri se pot uni printr-un lanţ de muchii din graf. Mai general, un graf (abstract) se defineşte ca un spaţiu topologic obţinut dintr-o reuniune disjunctă de intervale compacte prin identificarea unora dintre capetele intervalelor. Pentru simplitate presupunem ca nu există muchii care pleacă şi sosesc în acelaşi vârf.

Numărul Euler al unui graf G, notat $\chi(G)$, este prin definiţie diferenţa dintre numărul de vârfuri şi numărul de muchii din G. Este de fapt tot o caracteristică Euler, având în vedere că pentru grafuri nu avem feţe.

Un *arbore* este un graf fără *cicli*, adică fără drumuri închise. Se observă uşor că numărul Euler al unui arbore este 1 (Exerciţiul 2.3).

Conexitatea lui X din ipoteză va implica faptul că mulţimea tuturor vârfurilor şi muchiilor din X formează un graf.

Propoziţia 2.2. *Orice graf G conţine un arbore maximal.*

Demonstraţie. Putem ordona subarborii din G după incluziune şi apoi folosim lema lui Zorn. Având în vedere că mulţimile cu care lucrăm aici sunt finite putem pleca cu un punct oarecare din graf şi adăugăm muchii, păstrând conexitatea, până când orice muchie nouă ar forma un ciclu. Fiindcă avem doar un număr finit de muchii construcţia sigur se opreşte. □

Fie acum T un arbore maximal în X. Atunci T va conţine toate vârfurile lui X (vezi Tema 1.1). Construim un graf abstract G "dual" lui T având ca vârfuri feţele lui X (adică un vârf notat V_F pentru fiecare faţă F a lui X). Două vârfuri V_F şi V_H sunt unite printr-o muchie în G dacă şi numai dacă F şi H sunt adiacente în X după o muchie care nu este în T. Reprezentăm V_F în baricentrul lui F, iar muchia între V_F şi V_H printr-un drum de la V_F la mijlocul muchiei $F \cap H$, urmat de un drum la V_H. Putem astfel reprezenta G în X ca fiind un graf care ocoleste T.

De fapt G nu este încă un graf, deoarece am cerut conexitatea în definiţia grafului. Acest lucru va rezulta din faptul că T este un arbore. Dacă două vârfuri din G nu se pot uni printr-un drum în G înseamnă că sunt separate de un ciclu din T. Acest fapt ar merita o demonstraţie mai detaliată dar lucrurile vor fi mai transparente cand vom vorbi despre suprafeţe.

Mai mult G este un arbore. Dacă ar conţine un ciclu acesta ar fi o curbă care conform ipotezei separă X în două componente conexe. Avem vârfuri ale lui T în ambele componente (luăm o muchie din ciclul lui G, aceasta taie o muchie a lui X în mijloc, iar vârfurile ei sunt în două componente diferite). Orice încercare de a uni aceste vârfuri ale lui T va intersecta ciclul din G, deci nu poate fi în T din moment ce T şi G nu se intersectează. Aceste raţionamente justifică şi folosirea cuvântului "dual". T şi G sunt intr-un fel duale având în vedere că am demonstrat conexitatea lui G folosind faptul ca T este arbore şi apoi am arătat că G este arbore folosind conexitatea lui T.

Acum vârfurile lui X coincid cu vârfurile lui T, feţele lui X sunt in bijecţie cu vârfurile lui G, în sfârsit orice muchie în X este fie în T fie produce o muchie în G. Deci:

$$\begin{aligned} v(T) - m(T) &= \chi(T) = 1 & v(T) &= v(X) \\ v(G) - m(G) &= \chi(G) = 1 & v(G) &= f(X) \\ m(T) + m(G) &= m(X) \end{aligned}$$

Teorema rezultă acum prin însumarea celor două numere Euler. □

Numarul $v - m + f$ se numeşte caracteristica Euler a poliedrului X. Caracteristica Euler este un invariant al spaţiilor topologice, pe care-l vom introduce în cadrul particular al complexelor simpliciale în secţiunea 17. În termeni moderni, teorema de mai sus decurge din faptul că orice poliedru convex este homeomorf cu sfera, care are caracteristica Euler 2.

ex11 Exerciţiul 2.3. Demonstraţi prin inducţie că numărul Euler al unui arbore este 1.

Exerciţiul 2.4. Arătaţi că orice arbore maximal dintr-un graf conţine toate vârfurile.

exe13 Exerciţiul 2.5. Fie X un poliedru regulat care satisface ipotezele teoremei lui Euler. Presupunem că fiecare faţă are p laturi şi prin fiecare vârf trec q laturi. Arătaţi că :

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}+\frac{1}{m}.$$

Exerciţiul 2.6. Folosind exerciţiul exe13 2.5, demonstraţi că există exact 5 poliedre regulate; desenaţi-le.

3. Spaţii de identificare şi grupul fundamental

Topologia este înţeleasă cel mai bine prin colaje de hârtie. Deşi lipirea (în limbaj matematic, identificarea) şi tăierea (chirurgia) pot fi descrise riguros, spre deosebire de algebră consider că fără un solid suport intuitiv studiul topologiei este imposibil.

Începem prin a defini topologia factor.

Definiţia 3.1. Fie X un spaţiu topologic şi $\sim$ o relaţie de echivalenţă pe X. Fie $X_\sim$ mulţimea claselor de echivalenţă; clasa de echivalenţă a unui punct $x \in X$ se notează $[x]$. Fie $\phi : X \to X_\sim$ aplicaţia tautologică $x \mapsto [x]$. Definim topologia de identificare pe $X_\sim$ în felul următor: $U \subset X_\sim$ este deschisă dacă şi numai dacă $\phi^{-1}(U)$ e deschis în X.

Este uşor de văzut că se obţine într-adevăr o topologie; e suficient să ne convingem că operaţia de preimagine comută cu operaţiile de reuniune şi intersecţie pe mulţimi:

intpr
$$\phi^{-1}(U\cap V)=\phi^{-1}(U)\cap\phi^{-1}(V), \qquad \bigcup_{\alpha\in A}\phi^{-1}(U_\alpha)=\phi^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha\right). \tag{1}$$

funconiden Propoziţia 3.2. *Fie X, Y spaţii topologice şi $\sim$ o relaţie de echivalenţă pe X.*

- *O funcţie $f : X_\sim \to Y$ este continuă dacă şi numai dacă $f\circ\phi : X \to Y$ este continuă, unde $\phi : X \to X_\sim$ este proiecţia canonică.*
- *O aplicaţie $F : X \to Y$ constantă pe clasele de echivalenţă ale lui $\sim$ induce o aplicaţie $f : X_\sim \to Y$ prin formula*

$$f([x]) = F(x)$$

pentru o alegere arbitrară a lui $x \in [x]$.

Demonstraţie. Din definiţia topologiei pe $X_\sim$, o submulţime din $X_\sim$ este deschisă dacă şi numai dacă preimaginea sa în X este deschisă. Astfel, $f^{-1}(U)$ este deschis în $X_\sim$ dacă şi numai dacă $\phi^{-1}(f^{-1}(U))$ este deschis în X. Insă $\phi^{-1}(f^{-1}(U)) = (f\circ\phi)^{-1}(U)$.

Pentru a doua afirmaţie, din ipoteza despre F rezultă că f este bine definită; din prima parte a propoziţiei, f e continuă. □

In particular, remarcăm că proiecţia canonică $\phi : X \to X_\sim$ este continuă. Spunem că F construit din f ca mai sus *coboară* la spaţiul de identificare.

Exemplul 3.3 (Cercul). Pe $\mathbb{R}$ considerăm relaţia de echivalenţă

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}.$$

Spaţiul de identificare $\mathbb{R}_\sim$ este în acest caz grupul factor $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Fie $S^1 = \{z \in \mathbb{C}; \|z\| = 1\}$ cercul unitate din $R^2 \simeq \mathbb{C}$. Atunci aplicaţia exponenţială

$$\exp : \mathbb{R} \to S^1, \qquad x \mapsto \exp(2\pi i x)$$

coboară la un homeomorfism

$$\exp : \mathbb{R}_\sim \to S^1, \qquad [x] \mapsto \exp(2\pi i x).$$

Intr-adevăr, $\exp(2\pi i x)$ nu depinde de alegerea lui x în clasa de echivalenţa $[x]$ deoarece pentru orice $k \in \mathbb{Z}$ avem $e^{2\pi k i} = 1$.

`cil` Exemplul 3.4 (Cilindrul). Fie $X = I \times I$ pătratul unitate din $\mathbb{R}^2$ şi relaţia de echivalenţă definită de $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ dacă $x_1, x_2 \in \{0, 1\}$ şi $y_1 = y_2$. Cu alte cuvinte, am identificat ("lipit") laturile verticale ale pătratului suprapunându-le în acelaşi sens. E uşor de văzut că în acest mod se obţine *cilindrul*, adică un spaţiu topologic homeomorf cu $S^1 \times I$. Un homeomorfism este dat de

$$(I \times I)_\sim \ni [(x, y)] \mapsto (\exp(2\pi i x), y) \in S^1 \times I.$$

`mob` Exemplul 3.5 (Banda lui Möbius). Fie din nou $X = I \times I$, dar identificăm acum segmentele în sens contrar, adică $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ dacă $x_1 = 0,\ x_2 = 1$ şi $y_1 = 1 - y_2$. Nu e greu de vizualizat această construcţie. Luăm o bandă lungă şi îngustă, o răsucim cu 180° şi "lipim" marginile (astfel de "lipiri" sunt descrise de topologia factor). Se obţine astfel celebra *bandă a lui Möbius*. Este un obiect ciudat, vom vedea mai târziu cauza (nu este orientabilă). Puteţi observa intuitiv sau construind un model de hârtie că bordul acestui spaţiu este conex (un cerc). Banda lui Möbius va fi un obiect de studiu important al acestui cărţi.

Exemplul 3.6 (Torul şi sticla lui Klein). Identificam acum câte două perechi de laturi: segmentele verticale în aceeaşi direcţie (până acum am obţinut un cilindru) şi segmentele orizontale între ele, tot în aceaşi direcţie. Mai precis identificăm $(0, y)$ cu $(1, y)$ şi $(x, 0)$ cu $(x, 1)$. Se obţine astfel o suprafaţă fără bord: *torul*. Putem vizualiza torul în $\mathbb{R}^3$ ca suprafaţa unui colac cu o singura gaură, cu alte cuvinte torul poate fi scufundat în $\mathbb{R}^3$ în felul următor: Construim un cilindru plin din plastilină, apoi lipim cele două discuri de capăt prin suprapunere. Torul va fi suprafaţa solidului astfel construit. O scufundare a torului în $\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$ este dată de

$$(I \times I)_\sim \ni [(x, y)] \mapsto (\exp(2\pi i x), \exp(2\pi i y)) \in S^1 \times S^1 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}.$$

Dacă indentificăm la al doilea pas segmentele orizontale în sens invers (ca la exemplul mob 3.5) se obţine o altă creatură ciudată numită *sticla lui Klein*. Explicit, identificăm $(0, y)$ cu $(1, y)$ şi $(x, 0)$ cu $(1 - x, 1)$. Ca şi banda lui Möbius, sticla lui Klein are o singură faţă (este neorientabilă), dar (ceea ce este şi mai surprinzător) ea nu are interior şi exterior, cum are de exemplu torul. Sticla lui Klein nu poate fi scufundată în $\mathbb{R}^3$ dar poate fi totuşi imersată. Pentru a vizualiza asta, decupaţi (mental) un cerc mic din corpul cilindrului şi treceţi pe acolo un capăt al cilindrului unindu-l apoi *prin interiorul cilindrului* cu celălalt capăt.

proie

Exemplul 3.7 (Planul proiectiv). A mai rămas un caz. Să indentificăm ambele perechi de segmente de frontieră opuse din $I \times I$ în sensuri contrare. E ca şi când am avea un disc şi identificăm fiecare punct de pe frontiera sa cu antipodalul său. Obiectul obţinut este *planul proiectiv*. Este neorientabil şi nu se poate scufunda în $\mathbb{R}^3$. Din nou se poate imersa, dar este mult mai complicat decât în cazul sticlei lui Klein. Despre tor, planul proiectiv şi sticla lui Klein vom mai vorbi la teorema de clasificare a suprafeţelor compacte.

Exemplul 3.8 (Grafuri abstracte). Fie A o mulţime şi $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$ o familie de intervale închise indexate de A. Fie $X := \bigsqcup_{\alpha\in A} I_\alpha$ reuniunea lor disjunctă şi $\sim$ o relaţie de echivalenţă pe X ale cărei clase sunt formate din câte un singur punct interior sau dintr-o mulţime de extremităţi ale intervalelor $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$. Spaţiul de identificare $X/\sim$ se numeşte *graf topologic*. Dacă pentru orice $\alpha \in A$ extremitatile lui I_α sunt distincte, spatiul $X/\sim$ se numeste *complex simplicial* de dimensiune 1, dar despre astfel de complexe vom mai vorbi.

4. Grupul fundamental

Vom introduce un prim invariant algebric consistent. Vom asocia fiecărui spaţiu topologic un grup. Până acum mai puteam asocia spaţiilor numere: numărul de componente conexe, caracteristica Euler (într-un cadru restrâns). Fiind vorba despre grupuri, algebra va juca un rol tot mai important în cele ce urmează. Avem nevoie doar de principalele proprietăţi ale grupurilor şi de câteva noţiuni despre grupuri libere pe care le vom introduce pe masură ce le folosim.

Topologia încearcă în principiu să distingă spaţiile topologice până la homeomorfism. De exemplu pentru noi cercul şi pătratul reprezintă acelaşi spaţiu (Exerciţiul ex31 4.18). Uneori este însă convenabil să operăm o clasificare mai grosieră a spatiilor (şi a funcţiilor) prin noţiunea de omotopie (vezi şi definiţia defom 5.1).

Definiţia 4.1. Fie $f, g : X \to Y$ două aplicaţii continue. Spunem că f e omotopă cu g (se notează $f \simeq g$) dacă există $F : X \times I \to Y$ continuă astfel încât $F(x, 0) = f(x)$ şi $F(x, 1) = g(x)$ pentru orice $x \in X$.

Date fiind f şi g oarecare, nu există neapărat o astfel de omotopie F. Mai mult, atunci când există, vor exista în general mai multe omotopii; se pot distinge cazurile cand există omotopii F_1 şi F_2 între f şi g care să nu fie omotope între ele. Teoria omotopiei este suprinzător de bogată!

O altă modalitate de a privi definiţia omotopiei este să considerăm F ca o familie continuă de funcţii $f_t : X \to Y$ unde $f_t(x) = F(x, t)$, iar $t \in [0, 1]$ reprezintă timpul sau momentul deformării. În acest caz trebuie sa definim continuitatea familiei $[0, 1] \in t \mapsto f_t$ cu valori în spaţiul funcţiilor continue $C(X, Y)$, deci o topologie pe acest spaţiu. Reamintim că o sub-bază de deschişi pentru topologia "compact-deschisă"pe spaţiul $C(X, Y)$ este indexată de câte un compact K din X şi un deschis U din Y, deschisul corespunzător fiind $D_{K,U} := \{f : X \to Y \text{continuă}; f(K) \subset U\}$.

exe210 EXERCIŢIUL 4.2. O funcţie $F : I \times X \to Y$ este continuă dacă şi numai dacă

- pentru orice $t \in I$, funcţia $f_t := F_{|\{t\}\times X}$ este continuă;
- funcţia
$$I \mapsto C(X, Y), \qquad\qquad t \mapsto f_t$$
este continuă faţă de topologia compact-deschisă.

Nu vom insista asupra demonstraţiei (simplă, de altfel) deoarece nu vom folosi acest rezultat. Reţinem însă că omotopia F înseamnă deformarea continuă a aplicaţiei f în g în spaţiul funcţiilor continue.

Dacă $A \subset X$ şi $f_{|A} = g_{|A}$, spunem că f şi g sunt omotope *relativ la* A dacă există F ca mai sus astfel ca $F(x, t) = f(x)(= g(x))$ pentru orice $x \in A$. Omotopia relativ la $\emptyset$ se reduce la omotopia ne-relativă descrisă mai sus.

Pentru a demonstra ca omotopia (relativă) este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea $C(X, Y)$ a funcţiilor continue de la X în Y este nevoie de un enunţ de topologie:

LEMA 4.3 (Lema de lipire). *Fie X un spaţiu topologic şi $X = U \cup V$ o acoperire cu doi inchişi. Dacă $f_U : U \to Y$ şi $F_V : V \to Y$ sunt două funcţii continue care coincid pe intersecţia $U \cap V$, atunci funcţia obţinută prin "lipire":*

$$f : X \to Y, \qquad\qquad f(x) = \begin{cases} f_U(x), & \textit{dacă } x \in U \\ f_V(x), & \textit{dacă } x \in V \end{cases}$$

este bine definită şi continuă.

Vom folosi foarte des această lemăpentru a construi funcţii continue.

DEMONSTRAŢIE. Condiţia de compatibilitate pe $U \cap V$ este echivalentă cu buna-definire a lui f. Fie A un închis din Y. Din ipoteză, $f_U^{-1}(A)$ şi $f_V^{-1}(A)$ sunt închise în U, respectiv în V. Dar închişii din U sunt închişi şi ca submulţimi în X, deoarece U este închis. Folosind (intpr 1), obţinem că $f^{-1}(A)$ este închis în X. □

Folosind acest rezultat, să ne asigurăm că $f \simeq g, g \simeq h$ relativ la $A \subset X$ implică $f \simeq h$ relativ la A. Pentru asta, fie F, G omotopii între f şi g, respectiv între g şi h relativ la A. Definim

tranzi (2)
$$H : I \times X \to Y, \qquad\qquad H(t, x) := \begin{cases} F(2t, x) & \text{dacă } 0 \le x \le 1/2 \\ G(2t-1, x) & \text{dacă } 1/2 \le x \le 1. \end{cases}$$

Din lema de lipire H este continuă iar $H_{|I\times A} = f_{|A}$ deoarece F şi G au această proprietate.

Este evident că omotopia este reflexivă în sensul că $f \simeq g$ implică $g \simeq f$: e suficient sa definim $G(t, x) := F(1 - t, x)$. Omotopia constantă $F(t, x) := f(x)$ este o omotopie de la f la f pentru orice $f \in C(X, Y)$. În concluzie, am demonstrat

TEOREMA 4.4. *Omotopia este o relaţie de echivalenţă pe $C(X, Y)$.*

EXEMPLUL 4.5. Conul abstract peste un spaţiu Y, notat CY, este spaţiul cât $(Y \times I)_\sim$ unde $(x,t) \sim (y,t')$ dacă $t = t' = 1$.

PROPOZIŢIA 4.6. *Oricare două aplicaţii $f, g : X \to CY$ sunt omotope.*

DEMONSTRAŢIE. Definim $h : X \to CY$, $h(x) = v$ unde v este vârful conului, adică $v = [(x,1)]$. Arătăm că f şi h sunt omotope, iar propoziţia va rezulta din tranzitivitate. Dacă f(x)=[a(x),b(x)], fie $F(x,t) = [a(x), t + (1-t)b(x)]$. Atunci $F(x,0) = f(x)$, iar $F(x,1) = [a(x),1] = v$. $\square$

DEFINIŢIA 4.7. Fie X un spaţiu topologic şi I intervalul unitate. O funcţie continuă $\alpha : I \to X$ se numeşte *drum* în X, iar $\alpha(0)$ şi $\alpha(1)$ se numesc capetele drumului. Pe mulţimea acestor drumuri, notată $C(I,X)$, definim operaţia de *concatenare*. Două drumuri α sii β pot fi concatenate dacă se îndeplineşte o condiţie de compatibilitate la capete, deci dacă $\alpha(1) = \beta(0)$. În acest caz definim

$$\alpha.\beta(t) := \begin{cases} \alpha(2t) & \text{pentru } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \text{pentru } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

OBSERVAŢIA 4.8. Din exerciţiul 4.2, o omotopie între f şi g nu este altceva decât un drum în $C(X,Y)$ între f şi g. Deşi foarte folositor, punctul acesta de vedere este oarecum abstract şi va fi neglijat aici, fiind dăunător la un prim contact. Din punctul nostru de vedere, omotopia este o noţiune extrem de intuitivă care poate fi abordată fără o bună întelegere a spatiilor vectoriale topologice de dimensiune infinită, cel puţin la început. Sa mai remarcăm doar că formula (2) (folosită pentru a demonstra tranzitivitatea omotopiei) reprezintă concatenarea celor două omotopii văzute ca drumuri.

Drumul concatenat $\alpha.\beta$ este drumul de la $\alpha(0)$ la $\beta(1)$ care parcurge mai întâi α şi apoi β. Concatenarea nu este însă decât o operaţie parţială pe $C(I,X)$, din cauza condiţiei de compatibilitate la capete. Mai mult, chiar atunci când este definită, concatenarea nu este asociativă:

$$(\alpha.\beta).\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(4t) & \text{pentru } 0 \le t \le \frac{1}{4} \\ \beta(4t-1) & \text{pentru } \frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{2} \\ \gamma(2t-1) & \text{pentru } \frac{1}{2} \le t \end{cases}$$

în timp ce:

$$\alpha.(\beta.\gamma)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{pentru } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \beta(4t-2) & \text{pentru } \frac{1}{2} \le t \le \frac{3}{4} \\ \gamma(4t-3) & \text{pentru } \frac{3}{4} \le t \end{cases}$$

Lipsa asociativităţii se datorează însă numai parametrizării drumului, nu şi imaginii acestuia. Într-adevar, avem următoarea

asoc LEMA 4.9. *Fie $\alpha, \beta, \gamma \in C(I,X)$ cu $\alpha(1) = \beta(0)$, $\beta(1) = \gamma(0)$. Atunci $(\alpha.\beta).\gamma$ şi $\alpha.(\beta.\gamma)$ sunt omotope relativ la $\{0,1\}$.*

DEMONSTRAŢIE. Se verifică direct că $(\alpha.\beta).\gamma$ este egal cu $\alpha.(\beta.\gamma)\circ f$, unde $f : I \to I$ este dată de

$$f(s) = \begin{cases} 2s & \text{pentru } 0 \le s \le \frac{1}{4} \\ s + \frac{1}{4} & \text{pentru } \frac{1}{4} \le s \le \frac{1}{2} \\ \frac{s+1}{2} & \text{pentru } \frac{1}{2} \le s \le 1. \end{cases}$$

Deoarece $f(0) = 0$ şi $f(1) = 1$, putem construi imediat o omotopie (relativă la $\{0,1\}$) între f şi identitatea pe I ("îndreptăm" graficul lui f). Explicit, pentru $t \in [0,1]$,

$$f_t(s) = (1-t)f(s) + ts = \begin{cases} (2-t)s & \text{pentru } 0 \le s \le \frac{1}{4} \\ s + \frac{1-t}{4} & \text{pentru } \frac{1}{4} \le s \le \frac{1}{2} \\ \frac{1+t}{2}s + \frac{1-t}{2} & \text{pentru } \frac{1}{2} \le s \le 1. \end{cases}$$

Compunând această omotopie cu $\alpha.(\beta.\gamma)$ obţinem omotopia dorită. □

Modulo omotopie (relativă la $\{0,1\}$), concatenarea are şi elemente neutre:

elemneutru

LEMA 4.10. *Fie $\alpha \in C(I,X)$ drum şi e_0, e_1 drumurile constante*

$$e_0, e_1 : I \to X, \qquad e_0(s) = \alpha(0), \qquad e_1(s) = \alpha(1).$$

Atunci

$$e_0.\alpha \simeq \alpha \simeq \alpha.e_1 \text{ relativ la } \{0,1\}.$$

DEMONSTRAŢIE. Vom demonstra doar prima omotopie, cea de-a doua fiind similară. Din nou, drumurile $e_0.\alpha$ şi α au ca imagine aceeaşi curbă în X, parcursă în acelaşi sens. Omotopia explictă între α şi $e_0.\alpha$ este dată de

$$f_t(s) = \begin{cases} \alpha(0) & \text{pentru } 0 \le s \le \frac{t}{2} \\ \alpha\left(\frac{2s-t}{2-t}\right) & \text{pentru } \frac{t}{2} \le s \le 1. \end{cases}$$

□

Cu alte cuvinte, până la omotopie, e_0 este element neutru la stânga şi e_1 la dreapta pentru concatenare. Acelaşi argument arată că oricare ar fi funcţia continuă $\phi : I \to I$ cu $\phi(0) = 0$ şi $\phi(1) = 1$, orice drum α în X este omotop cu $\alpha \circ \phi$ relativ la $\{0,1\}$. Sensul de parcurgere (faptul că ϕ porneşte de la 0 şi ajunge în 1) este legat de existenţa inversului (până la omotopie). Pentru o clasă de omotopie $\langle\alpha\rangle$ considerăm $\overline{\alpha}$ bucla parcursă în sensul contrar, adică $\overline{\alpha}(s) = \alpha(1-s)$.

EXERCIŢIUL 4.11. Dacă $\alpha \simeq \beta$ atunci $\overline{\alpha} \simeq \overline{\beta}$.

invers

LEMA 4.12. *Afirmăm că pentru orice drum α şi pentru e_0 drumul constant $e_0(s) = \alpha(0)$, avem*

$$\alpha.\overline{\alpha} \simeq e_0$$

relativ la $\{0,1\}$.

Demonstraţie. Într-adevăr, pentru $t \in I$ fie $\phi_t : I \to I$ definită prin

$$\phi_t(s) = \begin{cases} 2st & \text{pentru } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ (2-2s)t & \text{pentru } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Din lema de lipire, ϕ_t este continuă. Întrucât $\alpha \circ \phi_0 = e_0$, $\alpha \circ \phi_1 = \alpha.\overline{\alpha}$ şi $\phi_t(0) = 0, \forall t \in [0,1]$, înseamnă că e este omotopă relativ la $\{0,1\}$ cu $\alpha.\overline{\alpha}$, omotopia fiind realizată de $\alpha \circ \phi_t$, $t \in I$. Analog $\overline{\alpha}.\alpha \simeq e_1$, unde $e_1(s) = \alpha(1)$. □

Fie $p \in X$ un punct fixat (perechea (X,p) se numeşte spaţiu topologic cu punct bază). O *buclă* în p este un drum $\alpha \in C(I,X)$ cu $\alpha(0) = \alpha(1) = p$. Vom analiza mai în detaliu mulţimea claselor de omotopie de bucle relativ la $\{0,1\}$. Fie:

$$\Gamma_p(X) := \{\alpha : I \to X \text{continuă}; \alpha(0) = \alpha(1) = p\}$$

mulţimea buclelor în X bazate în p. Concatenarea este acum o operaţie pe $\Gamma_p(X)$, adică o funcţie $\Gamma_p(X) \times \Gamma_p(X) \to \Gamma_p(X)$. Până la grupul fundamental mai avem doar un pas.

Ideea teoriei omotopiei este de a considera că deformările continue constituie echivalenţe. Cu alte cuvinte, definim pe $\Gamma_p(X)$ relaţia de echivalenţă $\alpha \sim \beta$ dacă α şi β sunt omotope relativ la capete. Asta înseamnă în particular că în timpul omotopiei punctul bază trebuie să rămână fix; fără această condiţie, orice două drumuri într-un spaţiu conex prin arce ar fi omotope!.

Notăm cu $\langle\alpha\rangle$ clasa de omotopie a buclei α relativ la $\{0,1\}$. Operaţia de concatenare a buclelor pe $\Gamma_p(X)$ este bine definită pe multimea claselor de echivalentă. Pentru asta trebuie demonstrat că dacă $\alpha_1 \sim \alpha_2$ şi $\beta_1 \sim \beta_2$ atunci $\alpha_1.\beta_1 \sim \alpha_2.\beta_2$, lucru ce se poate verifica uşor. Combinând lemele de mai sus obţinem următoarea teoremă:

Teorema 4.13 (Poincaré). *Mulţimea claselor de echivalenţă pe $\Gamma_p(X)$ formează un grup cu operaţia de multiplicare $\langle\alpha\rangle.\langle\beta\rangle := \langle\alpha.\beta\rangle$.*

Demonstraţie. Definim elementul neutru $\langle e\rangle$ ca fiind clasa buclei constante $e(s) = p$. Din lema 4.10, $\langle e\rangle$ este într-adevar element neutru la înmulţirea la stânga şi la dreapta. Din lema 4.12, inversa clasei $\langle\alpha\rangle$ există şi este egală cu $\langle\overline{\alpha}\rangle$. Operaţia de concatenare este asociativă din lema 4.9. □

Grupul de mai sus se numeşte *grupul fundamental* sau *grupul Poincaré al lui X cu punct baza p* şi se notează cu $\pi_1(X,p)$. Doar componenta conexă prin arce a lui X care conţine punctul p intervine practic în construcţia grupului fundamental, deoarece orice drum care porneşte din p va rămâne în aceeaşi componentă conexă prin arce. Din acest motiv restrângem implicit studiul nostru la spaţii conexe prin arce. Cu această restricţie grupul fundamental nu depinde de punctul bază ales iniţial. Grupul fundamental se mai numeşte şi *primul grup de omotopie*, ceea ce sugerează existenţa grupurilor de omotopie superioară. Într-adevăr există un grup $\pi_n(X)$ pentru orice număr natural, definit ca mulţimea claselor de omotopie de aplicaţii de la S^n (sfera de dimensiune n) în X relativ la un punct fixat, dar aceste grupuri nu vor fi studiate aici.

piuiz TEOREMA 4.14. *Dacă X este conex prin arce atunci $\pi_1(X,p)$ şi $\pi_1(X,q)$ sunt izomorfe pentru orice $p,q \in X$. Pentru orice drum $\tau \in C(I,X)$ cu $\tau(0)=p$, $\tau(1)=q$, un izomorfism este indus de*

$$\Gamma_p(X) \ni \alpha \mapsto \overline{\tau}.\alpha.\tau \in \Gamma_q(X).$$

DEMONSTRAŢIE. Alegem un drum τ între p şi q ($\tau(0)=p,\ \tau(1)=q$). Dacă α este o buclă bazată în p atunci $\mathrm{Ad}_\tau := \overline{\tau}.\alpha.\tau$ este o buclă bazată în q. Mai mult, dacă $\alpha \simeq \beta$ atunci şi $\overline{\tau}.\alpha.\tau \simeq \overline{\tau}.\beta.\tau$. Am construit deci o funcţie bine definită

$$\mathrm{Ad}_\tau : \pi_1(X,p) \to \pi_1(X,q), \qquad \mathrm{Ad}_\tau\langle\alpha\rangle := \langle \mathrm{Ad}_\tau\alpha\rangle = \langle\overline{\tau}.\alpha.\tau\rangle.$$

Deoarece $\mathrm{Ad}_\tau\langle\alpha\rangle.\mathrm{Ad}_\tau\langle\beta\rangle = \langle\overline{\tau}.\alpha.\tau.\overline{\tau}.\beta.\tau\rangle = \langle\overline{\tau}.\alpha.\beta.\tau\rangle = \mathrm{Ad}_\tau(\langle\alpha.\beta\rangle)$ rezultă că Ad_τ este morfism de grupuri. Remarcăm acum că $\overline{\tau}$ este un drum de la q la p şi deci

$$\mathrm{Ad}_{\overline{\tau}} : \pi_1(X,q) \to \pi_1(X,p),\ \mathrm{Ad}_{\overline{\tau}}(\langle\alpha\rangle) = \langle\tau.\alpha.\overline{\tau}\rangle.$$

Am folosit în formula de mai sus faptul că $\overline{\overline{\tau}} = \tau$. Se vede uşor că Ad_τ şi $\mathrm{Ad}_{\overline{\tau}}$ sunt inverse una alteia, deci bijective. Aşadar Ad_τ este un izomorfism de grupuri de la $\pi_1(X,p)$ la $\pi_1(X,q)$. $\square$

Să observăm că dacă τ' este omotop cu τ modulo $\{0,1\}$ atunci $\mathrm{Ad}_{\tau'}\gamma \simeq \mathrm{Ad}_\tau\gamma$ pentru orice buclă bazată în p (omotopia este dată de $\mathrm{Ad}_{\tau_s}\gamma$ pentru $\{\tau_s\}_{s\in I}$ o omotopie între τ şi τ') şi deci la nivel de grupuri fundamentale,

$$\mathrm{Ad}_\tau = \mathrm{Ad}_{\tau'} : \pi_1(X,p) \to \pi_1(X,q).$$

Dacă însă $\tau \not\simeq \tau'$, cum diferă cele două izomorfisme induse de τ,τ'? Cu alte cuvinte, ce putem spune despre automorfismul $\mathrm{Ad}_{\tau'}^{-1} \circ \mathrm{Ad}_\tau : \pi_1(X,p) \to \pi_1(X,p)$? Pentru a raspunde la această întrebare, să remarcăm că dacă τ,σ sunt două drumuri care se pot concatena, atunci

$$\mathrm{Ad}_\sigma \circ \mathrm{Ad}_\tau = \mathrm{Ad}_{\tau.\sigma}.$$

Cum $\tau.\tau'$ este o buclă (notată α) bazată în p, rezultă că $\mathrm{Ad}_{\tau'}^{-1}\mathrm{Ad}_\tau\gamma = \overline{\alpha}\gamma\alpha$ deci la nivel de π_1,

$$\mathrm{Ad}_{\tau'}^{-1}\mathrm{Ad}_\tau\langle\gamma\rangle = \langle\alpha\rangle^{-1}\rangle\langle\gamma\rangle\langle\alpha\rangle$$

adică conjugarea cu elementul $\langle\alpha\rangle \in \pi_1(X,p)$.

necan OBSERVAŢIA 4.15. În demonstraţia teoremei precedente am ales un drum oarecare între p şi q; izomorfismul depinde în principiu de această alegere. Deci $\pi_1(X,p)$ şi $\pi_1(X,q)$ sunt izomorfe, dar nu canonic. Două alegeri diferite de drumuri conduc la izomorfisme care diferă între ele printr-un automorfism *interior* al lui $\pi_1(X,p)$ adică printr-un automorfism de conjugare.

În plus faţă de existenţa lui $\pi_1(X,p)$, pentru orice aplicaţie continuă $f : X \to Y$ există "$\pi_1(f)$", adică un morfism de grupuri

$$f_* : \pi_1(X,p) \to \pi_1(Y,f(p))$$

indus de f. Pentru orice drum $\tau \in C(I,X)$ definim $f_*\tau \in C(I,Y)$ prin $f_*\tau(s) := f(\tau(s))$. Dacă $\tau \simeq \tau'$ relativ la $\{0,1\}$, adică există o omotopie F între τ şi τ', atunci $f \circ F$ este o omotopie între $f_*\tau$ şi $f_*\tau'$ relativ la $\{0,1\}$. Rezultă că f_* este bine definită pe mulţimea claselor de omotopie relativă. Specializând la bucle, putem defini imaginea directă după cum urmează:

DEFINIŢIA 4.16. Fie $f : X \to Y$ continuă. Pentru $\langle\gamma\rangle \in \pi_1(X,p)$ definim

$$f_*\langle\gamma\rangle := \langle f \circ \gamma\rangle \in \pi_1(Y, f(p)).$$

funct PROPOZIŢIA 4.17. *Fie $f : X \to Y$ o aplicaţie şi $p \in X$. Atunci*

- *$f_*\pi_1(X,p) \to \pi_1(Y, f(p))$ este morfism de grupuri.*
- *Daca 1_X este aplicaţia identică a lui X atunci $(1_X)_*$ este morfismul identitate pe $\pi_1(X,p)$.*
- *Fie $g : Y \to Z$ o altă aplicaţie, atunci:*

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

DEMONSTRAŢIE. Definim $f_* : \Gamma_p(X) \to \Gamma_{f(p)}(Y)$ prin $f_*\alpha := f \circ \alpha$.

- În fapt, f_* comută cu concatenarea chiar la nivel de bucle, adică
$$f \circ \alpha . f \circ \beta = f \circ (\alpha.\beta).$$
- $(1_X)_*(\langle\alpha\rangle) = \langle 1_X \circ \alpha\rangle = \langle\alpha\rangle$
- $(g \circ f)_*(\langle\alpha\rangle) = \langle g \circ f \circ \alpha\rangle = g_*(\langle f \circ \alpha\rangle) = g_*(f_*(\langle\alpha\rangle))$

□

Ultima propoziţie arată că π_1 este un *functor* de la categoria spaţiilor topologice cu punct bază la categoria grupurilor. Un astfel de obiect exemplifică legătura dintre topologie şi algebră: avem acum o metodă de a reduce probleme de topologie la probleme de algebră. Să presupunem că vrem să arătăm că două spaţii topologice conexe prin arce nu sunt homeomorfe. Calculăm grupurile lor fundamentale şi nu mai rămâne de arătat decât că nu sunt izomorfe. Desigur există spaţii ne-homeomorfe cu acelaşi grup fundamental. Vom vedea în secţiunea următoare o altă relaţie de echivalenţă pe categoria spaţiilor topologice, mai grosieră decât homeomorfismul, faţă de care grupul fundamental este invariant.

ex31 EXERCIŢIUL 4.18. Arătaţi, folosind lema de lipire, că pătratul şi cercul sunt homeomorfe.

EXERCIŢIUL 4.19. Construiţi din hârtie o bandă Möbius prin lipirea a două laturi opuse ale unui dreptunghi după ce le-ati răsucit cu 180°.

mob EXERCIŢIUL 4.20. Segmentul $I \times \{1/2\}$ devine un cerc după identificarea din exemplul 3.5. Ce se obţine din banda lui Möbius când tăiem cu foarfeca de-a lungul acestui cerc banda Möbius construită la exerciţiul anterior?

EXERCIŢIUL 4.21. Arătaţi că f_* este într-adevăr morfism de grupuri.

EXERCIŢIUL 4.22. Arătaţi că $\pi_1(X)$ este comutativ dacă şi numai dacă oricare p şi q din X şi oricare γ_1 şi γ_2 drumuri între p şi q avem $\mathrm{Ad}_{\gamma_1} = \mathrm{Ad}_{\gamma_2}$, adică există un morfism canonic de la $\pi_1(X,p)$ la $\pi_1(X,q)$.

5. Calcule cu π_1

Având noţiunea de funcţii omotope, putem introduce o nouă relaţie de echivalenţă în categoria spaţiilor topologice, mai grosieră decât homeomorfismul.

defom DEFINIŢIA 5.1. Două spaţii X şi Y au *acelaşi tip de omotopie* sau sunt *omotop echivalente* dacă există $f : X \to Y$ şi $g : Y \to X$ continue astfel încât $g \circ f \simeq 1_X$ şi $f \circ g \simeq 1_Y$.

Pentru homeomorfism am fi cerut egalitate cu identităţile, pentru acelaşi tip de omotopie cerem doar existenţa unei omotopii cu identităţile. Rezultă că două spaţii homeomorfe au acelaşi tip de omotopie. Un exerciţiu uşor arată că echivalenţa omotopică este o relaţie de echivalenţă. Functorul π_1 este un invariant faţă de această echivalenţă:

TEOREMA 5.2 (Invarianţa omotopică). *Fie X şi Y două spaţii omotop echivalente şi conexe prin arce şi f, g ca în definiţia 5.1. Atunci pentru orice $p \in X$, $q \in Y$, morfismele $f_* : \pi_1(X, p) \to \pi_1(Y, f(p))$ şi $g_* : \pi_1(Y, q) \to \pi_1(X, g(q)$ sunt izomorfisme.*

Să verificăm mai întâi cum depind morfismele de mai sus de alegerea punctului bază. Fie $p' \in X$ şi τ un drum între p şi p'. Este evident că $f_*(\mathrm{Ad}_\tau \gamma) = \mathrm{Ad}_{f_* \tau} f_* \gamma$. Datorită teoremei 4.14 nu e necesar să precizăm punctele bază, însă din observaţia 4.15 izomorfismul nu e canonic.

DEMONSTRAŢIE. Fixăm $q \in Y$ şi notăm $p := g(q) \in X$. Fie f, g ca în definiţia 5.1. Vom arăta că morfismul de grupuri $f_* : \pi_1(X, p) \to \pi_1(Y, f(p))$ este izomorfism. Este suficient să arătăm că

$$g_* \circ f_* : \pi_1(X, p) \to \pi_1(X, g(f(p))), \qquad f_* \circ g_* : \pi_1(Y, q) \to \pi_1(Y, f(p))$$

sunt bijective, deoarece asta ar implica pe de o parte faptul ca f_* este injectivă şi pe de altă parte că f_* este surjectivă.

Din functorialitate (propoziţia 4.17), $g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$. Deci trebuie să arătăm că $(g \circ f)_* : \pi_1(X, p) \to \pi_1(X, g(f(p)))$ este bijectivă. Din ipoteză, $g \circ f$ e omotopă cu 1_X. Fie $F : I \times X \to X$ o omotopie între 1_X şi $g \circ f$ şi fie

$$\tau : I \to X, \qquad \tau(t) := F(p, t)$$

traiectoria lui p sub actiunea omotopiei F. Drumul τ leagă $\tau(0) = p$ şi $\tau(1) = g(f(p))$. Pentru orice $s \in I$ definim drumul τ_s care parcurge τ până în $\tau(s)$:

$$\tau_s : I \to X, \qquad \tau_s(t) := \tau(st).$$

Vom arăta că $(g \circ f)_* = \mathrm{Ad}_\tau$. Fie γ o buclă bazată în p. Definim o familie continuă de bucle bazate în p prin

$$\gamma_s := \tau_s . F(\gamma(\cdot), s) . \overline{\tau_s},$$

cu alte cuvinte $\{\gamma_s\}_{s \in I}$ este o omotopie între γ_0 şi γ_1 (pentru concatenare am folosit faptul că $F(\gamma(\cdot), s)$ este o buclă bazată în $\tau(s)$). Remarcăm că $\gamma_1 = \mathrm{Ad}_{\overline{\gamma}}(g \circ f)_*(\gamma)$, în timp ce $\gamma_0 = e.\gamma.e$ este omotopă cu γ (lemma 4.10). Rezultă că γ este omotopă cu $\mathrm{Ad}_{\overline{\gamma}}(g \circ f)_*(\gamma)$ sau echivalent $\mathrm{Ad}_\tau \gamma \simeq (g \circ f)_*(\gamma)$. Întrucât γ a fost ales arbitrar, deducem $\tau_* = (g \circ f)_*$. Rezultă că $(g \circ f)_*$ este bijectivă (am arătat în secţiunea precedentă că Ad_τ este izomorfism între $\pi_1(X, \tau(0))$ şi $\pi_1(X, \tau(1))$). În mod analog $(f \circ g)_*$ bijectivă. Aşadar f_* şi g_* sunt bijecţii. □

Definiţia 5.3. Un spaţiu X se numeşte *contractibil* dacă este omotop echivalent cu un punct. Cu alte cuvinte compunerea dintre proiecţia $P : X \to \{p\}$ şi incluziunea $\imath_p : \{p\} \hookrightarrow X$ este omotopă cu 1_X.

Un caz particular al teoremei de mai sus arată că dacă X este contractibil atunci $\pi_1(X) = 0$. Într-adevăr, $C(I, \{p\})$ are un singur element, deci o singură clasă de omotopie de bucle; Rezultă că $\pi_1(\{p\}, p) = \{1\}$.

Observaţia 5.4. Dacă $\pi_1(X, p) = 0$ atunci $\pi_1(X, q) = 0$ pentru orice alt punct $q \in X$, deci în egalitatea $\pi_1(X) = 0$ nu e necesar să precizăm punctul bază. Un spaţiu cu π_1 trivial se numeşte *simplu conex*.

omotcontra Propoziţia 5.5. *Fie X un spaţiu contractibil şi $p, q \in X$. Atunci oricare două drumuri în X între p şi q sunt omotope relativ la $\{0, 1\}$.*

Demonstraţie. Fie $F : X \times I$ astfel ca $F(x, 0) = x$ şi $F(x, 1) = x_0, \forall x \in X$. Definim $G : I \times I \to X$ prin

$$G(t, s) = \begin{cases} F(\tau_1(t), 2s) & \text{pentru } 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ F(\tau_2(t), 2s - 1) & \text{pentru } \frac{1}{2} \le s \le 1. \end{cases}$$

Din lema de lipire, G este continuă şi în mod evident este o omotopie între τ_1 şi τ_2 relativ la capete. □

Exemplul 5.6. $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ sau orice mulţime convexă din $\mathbb{R}^n$ sunt spaţii contractibile. În particular sunt simplu conexe. Spre exemplificare, identitatea lui $\mathbb{R}^n$ poate fi deformată în aplicaţia 0 prin familia de aplicatii

$$F_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad F_t(x) := tx.$$

Există şi spaţii necontractibile cu π_1 trivial, de exemplu sfera $S^n, n \ge 2$.

Un prim exemplu de spaţiu cu grupul fundamental netrivial este cercul.

pi1cerc Teorema 5.7. *$\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.*

Întrucât $\mathbb{Z}$ este comutativ, punctul bază nu e important (vezi Tema 2). Ce trebuie subliniat e că izomorfismul este dat de o constructie explicită la nivel de bucle.

Demonstraţie. Identificăm cercul cu mulţimea numerelor complexe de modul 1 şi fie $\exp : \mathbb{R} \to S^1$ exponenţiala $\exp(x) = e^{2\pi i x}$. Numerele întregi sunt duse în $1 \in S^1$ de această funcţie şi alegem acest punct ca fiind punctul bază. $\mathbb{R}$ împreună cu aplicaţia exp este ceea ce se numeşte *spaţiu de acoperire* pentru cerc. Egalitatea $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ va rezulta în esenţă din faptul că $\mathbb{R}$ este simplu conex,în timp ce fibra punctului bază este $\mathbb{Z}$.

Fie $n \in \mathbb{Z}$ şi γ_n drumul între 0 şi n în $\mathbb{R}$ dat de $\gamma_n(s) = ns$. Drumul γ este proiectat de exp într-o buclă bazată în 1 care parcurge cercul de n ori în sens trigonometric sau invers-trigonometric, după cum n e pozitiv sau negativ. Avem deci o funcţie:

$$\phi : \mathbb{Z} \to \pi_1(S^1, 1) \qquad \phi(n) = \langle \exp \circ \gamma_n \rangle.$$

Vom arăta că această funcţie este izomorfism de grupuri.

Să arătăm că ϕ este morfism. Fie n, m două numere întregi. Fie $\gamma_n^m(s) := m + \gamma_n(s)$ drumul de la m la $m+n$. Se vede uşor că $\exp \circ \gamma_n^m = \exp \circ \gamma_n$ deoarece exp are perioadă 1. Drumul concatenat $\gamma_m.\gamma_n^m$ este un drum care pleacă din 0 şi ajunge în $m+n$, în general diferit însă de γ_{m+n}. În orice caz, este un drum omotop în $\mathbb{R}$ cu γ_{m+n} relativ la $\{0,1\}$, o omotopie concretă fiind dată de “segmentul” dintre cele două drumuri în $C(I,X)$, adică

$$F(t,s) := t(\gamma_m.\gamma_n^m)(s) + (1-t)\gamma_{m+n}(s).$$

Desigur că $\exp \circ (\gamma_m.\gamma_n^m) \simeq \exp \circ \gamma_{m+n}$, o omotopie fiind $\exp \circ F$. Avem:

$$\begin{aligned} \phi(m+n) &= \langle \exp \circ \gamma_{m+n} \rangle = \langle \exp \circ (\gamma_m.\gamma_n^m) \rangle = \langle (\exp \circ \gamma_m).(\exp \circ \gamma_n^m) \rangle \\ &= \langle \exp \circ \gamma_m \rangle . \langle \exp \circ \gamma_n \rangle = \phi(m).\phi(n) \end{aligned}$$

Pentru a arăta surjectivitatea morfismului de mai sus, demonstrăm întâi:

Lema 5.8 (Ridicarea drumului). *Fie $\alpha : I \to S^1$ un drum bazat in $\alpha_0 \in S^1$ şi fie $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ cu $\exp(\gamma_0) = e^{2\pi i \gamma_0} = \alpha_0$. Atunci exista un unic drum $\gamma : I \to \mathbb{R}$ pentru care $\gamma(0) = \gamma_0$ şi*

ridic

$$\alpha = \exp \circ \gamma. \tag{3}$$

Demonstraţie. Fie $S^1_+ = S^1 \setminus \{-1\}$ şi $S^1_- = S^1 \setminus \{1\}$. Aceste două mulţimi deschise acoperă cercul, deci preimaginile lor $\alpha^{-1}(S^1_+)$ şi $\alpha^{-1}(S^1_-)$ acoperă intervalul I. Întrucât componentele conexe ale deschişilor $\alpha^{-1}(S^1_+)$ şi $\alpha^{-1}(S^1_-)$ formează o acoperire deschisă (posibil infinită) pentru I şi deoarece I este compact (Exemplul comp 1.2), putem extrage o subacoperire finită, pe care o putem alege minimală. Orice mulţime conexă din I este un interval. Dacă

$$I_0 = [0, b_0), I_1 = (a_1, b_1), \dots, I_m = (a_m, 1]$$

este acoperirea deschisă găsită mai sus, ordonată astfel ca $0 := a_0 < a_1 < \dots < a_m$, rezultă din minimalitatea acoperirii că $b_0 < \dots < b_{m-1} < b_m := 1$ şi în plus $b_j > a_{j+1}$ pentru orice j (pentru ca intervalele să acopere I). Pentru $j = 1, \dots, m-1$ fixăm arbitrar $t_j \in I_{j-1} \cap I_j = (b_j, a_{j+1})$. Rezultă ca $0 < t_1 < \dots < t_{m-1}$. Dacă notăm $t_0 = 0, t_m = 1$, din construcţie avem

$$[t_j, t_{j+1}] \subset I_j$$

şi deci $\alpha([t_j, t_{j+1}]) \subset \alpha(I_j)$ este conţinut în întregime în S^1_+ sau în S^1_-.

Observaţia crucială aici este că aplicaţia exp restricţionată la $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ este homeomorfism între $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ şi S^1_+, inversa fiind una din ramurile funcţiei log. Mai general, pentru orice $n \in \mathbb{Z}$, aplicaţiile

$$\exp : (n - \tfrac{1}{2}, n + \tfrac{1}{2}) \to S^1_+, \qquad \exp : (n, n+1) \to S^1_-$$

sunt homeomorfisme, inversele lor fiind notate $\log_{n-\frac{1}{2}}$, respectiv $\log_n$.

Drumul γ este definit în 0 din ipoteză. Presupunem că am arătat inductiv că γ există şi e unică pe intervalul $[0, t_k]$ cu proprietăţile din enunţ.

Cazul I. Dacă $\alpha([t_k, t_{k+1}]) \subseteq S^1_+$ atunci $\gamma(t_k) \in (n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$ pentru un anumit întreg n. Dacă există extinderea $\gamma : [t_k, t_{k+1}] \to \mathbb{R}$ astfel ca $\exp \circ \gamma(s) = \alpha(s)$, rezultă că pe intervalul $[t_k, t_{k+1}]$ funcţia γ ia valori în $\exp^{-1}(S^1_+) = \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})$. Din continuitate, γ ia valori numai în componenta conexă a lui $\gamma(t_k)$ din $\mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})$ adică în $(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$, ceea ce implică

$$\gamma(s) := \log_{n-\frac{1}{2}} \circ \alpha(s).$$

Pe de altă parte, este clar că γ definit ca mai sus este continuă pe $[t_k, t_{k+1}]$ şi satisface $\exp \circ \gamma = \alpha$. Din lema de lipire, γ este continuă pe intervalul $[0, t_{k+1}]$, ceea ce demonstrază pasul de inducţie.

Cazul II. Dacă $\alpha([t_k, t_{k+1}]) \subseteq S^1_-$ atunci $\gamma(t_k) \in (n, n+1)$ pentru un anumit $n \in \mathbb{Z}$, iar exp restricţionat la $(n, n+1)$ este un homeomorfism cu S^1_-. Din nou există şi este unică extinderea lui γ la $[t_k, t_{k+1}]$, dată de formula

$$\gamma(s) = \log_n \circ \alpha(s).$$

Rezultă că γ se poate defini inductiv pe întreg intervalul I. □

Să arătăm surjectivitatea lui ϕ. Fie α o buclă bazată în 1. Vrem să găsim un n astfel încât $\phi(n) = \langle \alpha \rangle$. De fapt, intuitiv vrem să vedem de câte ori parcurge α cercul şi în ce direcţie. Ideea este să *ridicăm* α la un drum γ pe $\mathbb{R}$ cu $\gamma(0) = 0$ care să fie proiectat prin exp la α, adică $\exp \circ \gamma = \alpha$, folosind lema de ridicare a drumurilor. În particular, $\exp(\gamma(1)) = \alpha(1) = 1$ deci $\gamma(1) =: n \in \mathbb{Z}$. Întrucât γ şi γ_n sunt drumuri în $\mathbb{R}$ de la 0 la n, rezultă că sunt omotope relativ la $\{0, 1\}$, deci şi $\alpha = \exp \circ \gamma$ este omotopă cu $\phi(n) = \exp \circ \gamma_n$.

Pentru a arăta injectivitatea lui ϕ va trebui să ridicăm omotopii in loc de drumuri. Nu este cu mult mai greu, doar că acum funcţiile sunt definite pe $I \times I$ în loc de I ca până acum.

Lema 5.9 (Ridicarea omotopiei). *Fie $F : I \times I \to S^1$ o aplicaţie cu $F(0,0) = 1$ pentru $0 \leq t \leq 1$. Atunci există o unică aplicaţie $G : I \times I \to \mathbb{R}$ cu $G(0,0) = 0$ $\forall$ $0 \leq t \leq 1$ şi $F = \exp \circ G$.*

Demonstraţie. Întrucât $I \times I$ este compact, funcţia continuă F este uniform continuă. Fie $\delta > 0$ astfel încât pentru $p_1, p_2 \in I \times I$ cu $|p_1 - p_2| \leq \delta$ să avem $|F(p_1) - F(p_2)| < 2$. Echivalent, deoarece $F(p_1), F(p_2) \in S^1$, avem $\frac{F(p_1)}{F(p_2)} \neq -1$ pentru orice $|p_1 - p_2| \leq \delta$. Asta înseamnă că

$$\log_{-\frac{1}{2}} \frac{F(p_1)}{F(p_2)}$$

este bine definit pentru orice $|p_1 - p_2| \leq \delta$, unde $\log_{-\frac{1}{2}} : S^1 \setminus \{-1\} \to (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ este ramura principală a funcţiei logaritm, împărţită la $2\pi i$.

Din lema de ridicare a drumului există o unică ridicare $G : I \times \{0\} \to S^1$ cu $G(0,0) = 0$ a funcţiei F restrânsă la intervalul $I \times \{0\}$. Să presupunem prin inducţie că am arătat că pentru $k \geq 0$ există şi e unică ridicarea $G : I \times [0, k\delta] \to S^1$ cu $G(0,0) = 0$. Vom arăta acelaşi lucru pentru $k+1$ în loc de k. Mai întâi, dacă ar exista extinderea continuă a lui G la $I \times [0, (k+1)\delta]$, am avea pentru orice $x \in I, y \in [k\delta, (k+1)\delta]$,

loga (4) $$\exp(G(x,y) - G(x,k\delta)) = F(x,y)/F(x,k\delta) \in S^1_+$$

(din alegerea lui δ). Cum $y \mapsto G(x,y) - G(x,k\delta)$ este continuă, ia valori în $\exp^{-1}(S^1_+) = \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})$ iar pentru $y = k\delta$ ia valoarea 0, rezultă că pentru toate valorile lui $x \in I$ şi $y \in [k\delta, (k+1)\delta]$, $G(x,y) - G(x,k\delta) \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Din (4),

$$G(x,y) - G(x,k\delta) = \log_{-\frac{1}{2}} F(x,y)/F(x,k\delta) \tag{5}$$

şi deci $G(x,y)$ este unică (dacă există). Pe de altă parte, (4) defineşte o extindere continuă a lui G la $I \times [0,(k+1)\delta]$ care din ipoteza de inducţie este o ridicare a lui F. □

Putem acum demonstra injectivitatea lui ϕ. Fie m şi n cu $\phi(m) = \phi(n)$, adică $\langle \exp \circ \gamma_m \rangle = \langle \exp \circ \gamma_n \rangle$. Fie $F : I \times I \to S^1$ o omotopie între buclele $\exp \circ \gamma_m$ şi $\exp \circ \gamma_n$ cu $F(0,s) = F(1,s) = 1, \forall s \in I$. Dacă ridicăm cele două drumuri la $\mathbb{R}$ obţinem la loc γ_m şi γ_n (din unicitatea ridicării). Ridicând şi omotopia F dintre ele obţinem o omotopie G între γ_m şi γ_n cu proprietatea $\exp(G(t,s) = F(t,s)$. În particular, $G(1,s)$ are proprietăţile

- $G(1,0) = \gamma_m(1) = m$;
- $G(1,1) = \gamma_n(1) = n$;
- $s \mapsto G(1,s)$ este continuă;
- $\exp G(1,s) = F(1,s) = 1$ deci $G(1,s) \in \mathbb{Z}$.

Rezultă că $m = n$. □

Iată o demonstraţie alternativă a injectivităţii morfismului ϕ. O teoremă de analiză complexă datorată lui Cauchy afirmă că dacă o curbă netedă $\mathcal{C}$ este nul-omotopă (adică este omotopă cu o curbă constantă în interiorul lui $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, atunci

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z} = 0.$$

Vom recapitula demonstraţia acestui fapt în secţiunea 7. Pe de altă parte, un calcul direct (7) arată că

$$\int_{S^1} \frac{dz}{z} = 2\pi i.$$

Rezultă că S^1 nu este nul-omotopă în $\mathbb{C}^*$, adică nu există o aplicaţie continuă $G : S^1 \times I \to \mathbb{C}^*$ cu $G(z,0) = z$, $G(z,1) = 1$, $\forall z \in S^1$.

Folosind acest fapt, să arătăm ca $\phi(1) \neq 1$. Dacă $F : I \times I \to S^1$ ar fi o omotopie între γ_1 şi bucla constantă $\gamma_0 \equiv 1$ relativ la capete, adică $F(0,s) = F(1,s) = 1$ pentru orice $s \in I$, definim o aplicaţie $G : S^1 \times I \to S^1$ folosind propozitia 3.2 şi exemplul 3.4. Dar această aplicaţie ar fi o omotopie în $S^1 \subset \mathbb{C}^*$ între identitatea lui S^1 şi aplicaţia constantă 1, contradicţie.

6. Aplicaţie: teorema de punct fix

Teorema 6.1 (Brower). *Orice funcţie continuă de la discul închis*

$$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{R}^2; ||z|| \leq 1\}$$

la el însuşi admite un punct fix.

Demonstraţie. Fie $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ o funcţie continuă. Presupunem că f nu are nici un punct fix. Atunci pentru orice $x \in \mathbb{D}$ semidreapta orientată pornind de la $f(z)$ către z este bine definită. Fie $g(z)$ unicul ei punct de intersecţie cu cercul S^1 (frontiera lui $\mathbb{D}$). Este clar (sau ar trebui sa fie dupa tema 3) că $g : \mathbb{D} \to S^1$ este continuă. În plus, $g_{|S^1} = 1_{S^1}$. Aplicăm functorul π_1 şirului de aplicaţii

$$S^1 \xrightarrow{i} \mathbb{D} \xrightarrow{g} S^1.$$

(adică calculam aplicaţiile induse la nivelul grupurilor fundamentale). Am văzut mai sus ca $g \circ i = 1_{S^1}$. Deci $g_* \circ i_*$ este morfismul identitate pe $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ (aici folosim calculul din teorema precedenta). Însă g_* ia valori în grupul 0, deci este aplicatia 0 (pentru ca $\pi_1(\mathbb{D}) = 0$ ca pentru orice spatiu contractibil). Rezultă că $g_* \circ i_* = 0$, contradictie. □

Observaţia 6.2. Dacă încercaţi să reproduceţi demonstraţia acasă, s-ar putea să consideraţi semidreapta de la z la $f(z)$; în acest caz, argumentul nu mai funcţionează!

Exerciţiul 6.3. Pentru ce $m, n \in \mathbb{Z}$ şi γ_n, γ_n^m ca în demonstraţia teoremei pi1cerc 5.7 are loc egalitatea $\gamma_m.\gamma_n^m = \gamma_{m+n}$?

Exerciţiul 6.4. Arătaţi, pornind de la definiţia numerelor reale, că orice mulţime conexă din $\mathbb{R}$ este un interval.

Exerciţiul 6.5. O mulţime $A \subset \mathbb{R}^n$ se numeşte *stelată* dacă există $p_0 \in A$ astfel încât pentru orice $x \in A$, segmentul închis $\{tp_o + (1-t)x; t \in [0,1]\}$ este inclus în A. Arătaţi că pentru orice mulţime stelată $A \subset \mathbb{R}^n$ şi pentru orice $p \in A$ avem $\pi_1(A, p) = \{1\}$.

Exerciţiul 6.6. Arătaţi că g din demonstraţia teoremei de punct fix este continuă.

Am construit un invariant pentru spaţii topologice: *grupul fundamental*. Următoarea problemă este calcularea lui π_1 pentru diverse spaţii. Am calculat $\pi_1(S^1)$ şi nu a fost uşor. Pentru alte calcule avem nevoie de teoreme care să reducă cât mai mult raţionamentele, eventual să deducem anumite grupuri fundamentale din altele calculate anterior. O astfel de teoremă există şi se numeşte *teorema lui van Kampen*. Ne spune că dacă un spaţiu X este acoperit de doi deschişi conecşi U şi V, iar $U \cap V$ este conexă prin arce atunci se poate descrie $\pi_1(X)$ în funcţie de grupurile fundamentale ale lui U, V şi $U \cap V$. Vom demonstra pentru moment un caz particular al acestei teoreme:

bucon Propoziţia 6.7. *Fie U, V doi deschişi conecşi din X cu $U \cup V = X$, $U \cap V$ conexă prin arce şi U, V simplu conexe (adică π_1 trivial). Atunci şi $\pi_1(X) = 0$.*

Demonstraţie. Fie $p \in U \cap V$ şi γ un drum în X bazat în p. Ca şi în calculul lui $\pi_1(S^1)$, descompunem γ într-o concatenare finită de drumuri γ_1, $\gamma_2 \ldots \gamma_k$, unde drumurile γ_j sunt conţinute în întregime în U sau în V şi au extremităţile în $U \cap V$. Vom omotopa în p aceste drumuri. Fie $t_0 = p, t_1, \ldots, t_{k-1}, t_k = p$ extremităţile drumurilor. Întrucât $U \cap V$ este conexă prin arce, există drumuri τ_j în $U \cap V$ de la p la t_j. Atunci:

$$\begin{aligned}
\gamma \simeq & \gamma_1 \ldots \gamma_k \\
\simeq & \gamma_1 \overline{\tau}_1 . \tau_1 . \gamma_2 . \overline{\tau}_2 \ldots \tau_{k-2} . \gamma_2 . \overline{\tau}_{k-1} \tau_{k-1} \gamma_k . \\
\simeq & (\gamma_1 \overline{\tau}_1).(\tau_1 . \gamma_2 . \overline{\tau}_2) \ldots (\tau_{k-1} \gamma_k)
\end{aligned}$$

(concatenarea nu e asociativă dar este asociativă până la omotopie; vezi construcţia lui π_1). Am scris deci pe γ ca produs de bucle din U sau V; din ipoteza, aceste bucle sunt nul omotope în U, respectiv în V, deci cu atât mai mult în X. Rezultă că $\gamma \simeq e_p$. $\square$

Exemplul 6.8. Să aplicăm această propoziţie pentru a calcula $\pi_1(S^n)$ pentru $n \geq 2$. Fie:

$$
\begin{aligned}
U =& S^n \setminus \{(0, \ldots, 0, 1)\} \\
V =& S^n \setminus \{(0, \ldots, 0, -1)\}
\end{aligned}
$$

U şi V sunt contractibile, iar $U \cap V$ este homeomorf cu $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, deci este conex prin arce (se poate vedea proiecţia stereograficădin exerciţiul 8.8). În conexitatea lui $U \cap V$ am folosit faptul că $n \geq 2$. Rezultă acum din propoziţie că $\pi_1(S^n) = 0$.

O aplicaţie spectaculoasă a propoziţiei 6.7 este o variantă slabă a teoremei de separare Jordan.

Teorema 6.9. *Fie $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^2$un homeomorfism pe imagine. Fie C imaginea lui γ. C este deci o curbă simplă închisă în plan. Atunci $\mathbb{R}^2 \setminus C$ are cel puţin două componente conexe.*

Demonstraţie. Presupunem prin reducere la absurd că $\mathbb{R}^2 \setminus C$ e conex. Ştim că $\mathbb{R}^2$ este sfera S^2 mai puţin un punct, punctul de la infinit. C este compactă şi adăugând punctul de la infinit păstrăm conexitatea lui $\mathbb{R}^2 \setminus C$. Deci $S^2 \setminus C$ este conexă. Luăm acum un punct $p \in C$ şi indentificăm $S^2 \setminus \{p\}$ cu $\mathbb{R}^2$ şi notăm cu L curba $C \setminus \{p\}$ din $\mathbb{R}^2$. Evident $S^2 \setminus C = \mathbb{R}^2 \setminus L$, deci $\mathbb{R}^2 \setminus L$ este conexă.

Curba L este închisă fiindcă C este închisă în S^2. Este şi homeomorfă cu $\mathbb{R}$ deoarece este un cerc fără un punct. Fie f un homeomorfism dat de inversa lui γ restrânsă la L compusă cu homeomorfismul $S^1 \setminus \{\gamma^{-1}(p)\} \to \mathbb{R}$. Vom arăta folosind propoziţia 6.7 că în aceste condiţii $\mathbb{R}^2 \setminus L$ nu poate fi conexă.

Dacă am reuşi să arătăm că $\mathbb{R}^2 \setminus L$ este homeomorf cu $\mathbb{R}^2$ fără axa x atunci problema ar fi terminată. Acest lucru nu este însă posibil în acest context. Observaţia este că putem totuşi arăta că $\mathbb{R}^3 \setminus L$ este homeomorf cu $\mathbb{R}^3$ mai puţin o axă. Acest spaţiu este conex, dar vom apela la π_1. Deci privim $\mathbb{R}^2$ ca un subspaţiu în $\mathbb{R}^3$ şi considerăm următoarea acoperire cu doi deschişi a lui $\mathbb{R}^3 \setminus L$:

$$
\begin{aligned}
U =& ((\mathbb{R}^2 \setminus L) \times (-1, 0]) \cup \mathbb{R}^3_{z>0} \\
V =& ((\mathbb{R}^2 \setminus L) \times [0, 1)) \cup \mathbb{R}^3_{z<0}.
\end{aligned}
$$

Din definiţie $U \cup V = \mathbb{R}^3 \setminus L$, iar $U \cap V = (\mathbb{R}^2 \setminus L) \times (-1, 1)$. Puţin mai greu de văzut din această definiţie este faptul că U şi V sunt deschise. Putem rescrie $U = ((\mathbb{R}^2 \setminus L) \times (-1, \infty)) \cup \mathbb{R}^3_{z>0}$ şi asta reprezintă reuniunea a doi deschişi (deoarece L este închis). Dacă $\mathbb{R}^2 \setminus L$ este conex atunci şi $U \cap V$ este conex şi fiindcă $\pi_1(U) = \pi_1(V) = 0$ deducem că $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L) = 0$.

Să arătăm acum că $\mathbb{R}^3 \setminus L$ este homeomorf cu $\mathbb{R}^3$ mai puţin axa z. Punctul de plecare este funcţia $f : L \to \mathbb{R}$, care este un homeomorfism. Deoarece L este închis în $\mathbb{R}^2$ putem folosi teorema lui Tietze şi obţinem o funcţie continuă $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ care extinde pe f. Homeomorfismul anunţat îl obţinem prin compunerea următoarelor homeomorfisme:

$$(x, y, z) \mapsto (x, y, z + \tilde{f}(x, y))$$
$$(x, y, z) \mapsto ((x, y) - f^{-1}(z), z)$$

Se verifică uşor că cele două aplicaţii sunt bijective, continue, deci sunt homeomorfisme. Primul homeomorfism "ridică" dreapta L în spaţiu în sensul că acum două puncte din L au înălţimi diferite (coordonata z). Al doilea homeomorfism proiectează dreapta L pe axa z (homeomorfismele sunt de la $\mathbb{R}^3$ la $\mathbb{R}^3$, noi restricţionăm la $\mathbb{R}^3 \setminus L$). $\mathbb{R}^3$ fără axa z este omotop echivalent cu cercul deci are grupul fundamental $\mathbb{Z}$. Dar $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L) = 0$, deci avem o contradicţie. □

7. Digresiune despre 1-forme închise, integrale pe drumuri şi funcţii olomorfe

formin

Fie $\mathcal{U}$ o mulţime deschisă din plan şi $\omega := a(x, y)dx + b(x, y)dy$ o 1-formă diferenţială pe $\mathcal{U}$, unde coeficienţii a, b sunt funcţii de clasă $\mathcal{C}^1$, posibil cu valori complexe. Pentru orice drum $\tau : I \to \mathcal{U}$ de clasă $\mathcal{C}^1$ pe porţiuni definim

$$\int_\tau \omega := \int_0^1 \tau^*\omega, \qquad \tau^*\omega := \left(a(\tau(t))\frac{d\tau_1}{dt} + b(\tau(t)\frac{d\tau_2}{dt}\right)dt$$

unde τ_1, τ_2 sunt componentele aplicaţiei τ. Integrala pe drumul τ nu depinde de parametrizare: dacă $s : I \to I$ este un difeomorfism de clasa $\mathcal{C}^1$, avem

$$\frac{d\tau_1}{dt} = \frac{d\tau_1}{dt}\frac{dt}{ds}ds = \frac{d\tau_1}{ds}ds$$

şi analog pentru τ_2, deci din formula de schimbare de variabilă obţinem

$$\int_\tau \omega = \int_{\tau\circ s} \omega.$$

Forma ω se numeşte *închisă* dacă $d\omega = 0$ unde $d\omega = (\frac{db}{dx} - \frac{da}{dy})dx \wedge dy$. Echivalent, ω este închisă dacă şi numai dacă

holpar (6)
$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}$$

pe $\mathcal{U}$. Pentru o formă închisă se pune problema dacă pentru orice $p, q \in \mathcal{U}$, integrala $\int_\tau \omega$ este independentă de alegerea drumului τ între p şi q. Răspunsul este afirmativ pentru drumuri omotope în $\mathcal{U}$. Pentru a vedea aceasta, fie $T : I \times I \to \mathcal{U}$ o omotopie de clasă $\mathcal{C}^1$ pe porţiuni între τ_1 şi τ_2 relativ la $\{0, 1\}$. Putem privi imaginea lui T ca o reuniune de domenii cu frontiera dată de τ_1 şi τ_2 dar pentru a evita probleme tehnice, tragem înapoi ω prin T pe $I \times I$. Se vede că

$$\int_{\partial(I\times I)} \omega = \int_{\tau_1} \omega - \int_{\tau_2} \omega$$

(semnul minus apare deoarece orientarile induse de $I \times I$ pe cele doua segmente $I \times \{0\}$ şi $I \times \{1\}$ sunt diferite). Din teorema lui Stokes,

$$\int_{\partial(I\times I)} \omega = \int_{I\times I} d\omega = 0.$$

Ce se întâmplă însă pe drumuri care nu sunt omotope? Dacă $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$ această problemă nu se pune întrucât orice două drumuri între p şi q sunt omotope relativ la capete (vezi propoziţia omotcontra 5.5). Dacă drumurile sunt $\mathcal{C}^1$ pe porţiuni, şi omotopia poate fi aleasă $\mathcal{C}^1$ pe porţiuni, prin formula explicită

$$T(t, s) := s\tau_1(t) + (1 - s)\tau_2(t).$$

Există însă domenii necontractibile pentru care integralele unei 1-forme închise pe drumuri neomotope pot fi diferite. Exemplul fundamental este

$$\mathcal{U} = \mathbb{C}^*, \qquad \alpha = \frac{dz}{z} = \frac{dx + idy}{x + iy} = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} + i\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

Forma $\frac{dz}{z}$ este închisă deoarece $d(dz/z) = -dz \wedge dz/z^2 = 0$. Din discuţia de mai sus, integrala lui $\frac{dz}{z}$ pe orice buclă nul omotopă în $\mathbb{C}^*$ se anulează. Fie acum $\mathcal{C}$ cercul unitate, parametrizat prin $\tau(t) = \exp(t) = e^{2\pi i t}$. Atunci

dzz
$$\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z} = \int_0^1 \frac{de^{2\pi i t}}{e^{2\pi i t}} = \int_0^1 2\pi i dt = 2\pi i \neq 0. \tag{7}$$

8. Complexe simpliciale

Topologia algebrică se poate împărţi în două mari domenii strâns legate: omotopie şi omologie. Până acum am studiat doar omotopia şi avem o introducere consistentă în acest subiect. Grupul fundamental este un instrument puternic dar este suficient pentru a distinge doar spaţii de dimensiune mică. De exemplu putem distinge cercul de celelalte sfere, dar nu şi sferele de dimensiune mai mare decât doi înre ele. Pentru asta ar fi nevoie de toate grupurile de omotopie, despre care nu vom vorbi aici. Ceea ce putem face însă cu π_1 şi nu puteam înainte, doar cu topologie elementară, este să distingem de exemplu între tor şi sferă. Pe sferă orice drum poate fi omotopat la un punct ceea ce nu este cazul torului. Pentru omologie, cel puţin pentru omologia în dimensiune 1, ne vom uita tot la drumuri, dar le ignorăm pe cele care sunt frontiera unei regiunii din spaţiu. Orice curbă simplă închisă pe sferă împarte sfera în două regiuni deci este frontiera oricăreia dintre ele. Din nou nu acelaşi lucru se poate spune despre tor.

Construcţia omologiei este ceva mai complicată, în schimb demonstraţiile proprietăţilor ei sunt mai scurte Putem să luăm, ca în cazul construcţiei grupului fundamental, toate drumurile din spaţiu şi să factorizăm la o relaţie de echivalenţă foarte bogată. Pentru a evita spaţiile vectoriale de dimensiune infinită (din motive pedagogice, nu pentru că ar prezenta vreo dificultate insurmontabilă) vom alege o cale de mijloc. Triangulăm spaţiile noastre şi ne restrângem atenţia doar la drumuri formate din muchiile triangulării. Mai întâi trebuie să vedem ce înseamnă o triangulare.

Definiţia 8.1. Fie $v_1, \ldots, v_{k+1} \in \mathbb{R}^n$ în poziţie generală, adică spaţiul afin care trece prin cele $k+1$ puncte are dimensiunea k. *Simplexul de dimensiune k* sau *k-simplexul* cu vârfurile $v_0, \ldots, v_k$ este acoperirea convexă a mulţimii $\{v_0, \ldots, v_k\}$ în $\mathbb{R}^n$:

$$T := \langle v_1, \ldots, v_{k+1} \rangle = \left\{ \sum_{i=0}^{k} \lambda_i v_i; \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1; \lambda_i \geq 0 \right\}$$

O *faţă* a lui T de dimensiune q este orice q-simplex cu vârfurile din mulţimea $\{v_1, \ldots, v_{k+1}\}$.

Simplexul T se mai numeşte simplexul *generat* de vârfurile $v_1, \ldots, v_{k+1}$. Un simplex de dimensiune k generalizează noţiunea de triunghi. Un 0-simplex înseamnă un punct, un 1-simplex este un segment iar triunghiul (nedegenerat) este un simplex de dimensiune 2. Feţele de dimensiune 1 ale unui simplex se mai numesc şi *muchii*. Tetraedrul formează un simplex de dimensiune 3. Feţele unui tetraedru (în noua accepţiune a noţiunii de faţă), sunt toate triunghiurile, muchiile şi vârfurile care îl compun.

Definiţia 8.2. Un complex simplicial K este o mulţime finită de simplexe în $\mathbb{R}^n$ cu proprietăţile:

- Dacă T aparţine lui K, atunci orice faţă a lui T se află în K.
- $T_1, T_2 \in K \Rightarrow T_1 \cap T_2$ este vid sau o faţă în T_1 şi în T_2.

Observaţia 8.3. Un complex simplicial nu este o submulţime din $\mathbb{R}^n$. Obiectele sale sunt un numar finit de simplexe care sunt sumbmulţimi din $\mathbb{R}^n$. Aceste simplexe nu au voie să se suprapună, nu au voie să se intersecteze în interior, pot doar să se "atingă", adică să se intersecteze după o faţă comună.

Definiţia 8.4. Mulţimea $|K| := \cup_{T \in K} T$ se numeşte *realizarea geometrică* a complexului simplicial K. Este un sub-spaţiu topologic în $\mathbb{R}^n$. Datorită condiţiei de finitudine din definiţia complexului simplicial, $|K|$ este un spaţiu compact.

Un spaţiu topologic X se numeşte *triangulabil* dacă e homeomorf cu realizarea geometrică $|K|$ a unui complex simplicial K din $\mathbb{R}^n$ pentru un $n \in \mathbb{N}$.

Noţiunea de complex simplicial ne permite să formalizăm definiţia poliedrelor. Un poliedru este un complex simplicial din $\mathbb{R}^3$ homeomorf cu sfera S^2. Vom vedea în lema 15.4 că un astfel de complex simplicial este de dimensiune 2. Exerciţiile din secţiunea 15 arată că poliedrul (conform definiţiei de mai sus) are proprietăţile intuitive ale poliedrelor din $\mathbb{R}^3$.

Definiţia 8.5. Fie K un complex simplicial în $\mathbb{R}^n$. Numim *conul peste K* complexul simplicial CK din $\mathbb{R}^{n+1}$ obţinut din K prin adăugarea vârfului $e_{n+1} := (0, \ldots, 0, 1)$ şi a unui nou simplex pentru fiecare simplex din K în modul următor: pentru $T \in K$ de dimensiune j, adăugăm $(j+1)$-simplexul $T^+ := \langle e_{n+1}, T \rangle$ generat de e_{n+1} şi de vârfurile lui T, văzute ca puncte în $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Este evident că dacă $v_0, \ldots, v_j$ sunt în poziţie generală în $\mathbb{R}^n$ iar $\tilde{v}_j = (v_j, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, atunci $\tilde{v}_0, \ldots, \tilde{v}_j, e_{n+1}$ se află în poziţie generală în $\mathbb{R}^{n+1}$. Să demonstrăm că CK este un complex simplicial. Fie T^+ un simplex nou creat. Fie U o j-faţă a lui T^+ şi $v_0, \ldots, v_j$

vârfurile lui U. Dacă e_{n+1} nu se află printre aceste vârfuri, înseamnă că U este o faţă a lui T deci aparţine lui $K \subset CK$. Dacă e_{n+1} aparţine mulţimii vârfurilor lui U (să zicem că $e_{n+1} = v_j$) atunci $U = V^+$ unde V este simplexul generat de $v_0, \ldots, v_{j-1}$. Din definiţia complexului simplicial, orice faţa a unui simplex din K aparţine lui K deci $V \in K$, ceea ce implică $U = V^+ \in CK$ din construcţie.

Fie acum U_1, U_2 două simplexe din CK. Trebuie să arătăm că $U_1 \cap U_2 \in CK$. Dacă $U_1, U_2 \in K$ concluzia este clară. Dacă $U_1 \in K$ şi $U_2 = W_2^+$ cu $W_2 \in K$, avem $U_1 \cap W_2^+ = U_1 \cap W_2 \in K$. Dacă $U_1 = W_1^+$ şi $U_2 = W_2^+$ cu $W_1, W_2 \in K$ avem $U_1 \cap U_2 = (W_1 \cap W_2)^+ \in CK$.

Pentru orice complex simplicial K notăm cu $K^{(0)}$ mulţimea 0-simplexelor din K, adică mulţimea tuturor vârfurilor simplexelor din K.

Definiţia 8.6. O funcţie $f : K^{(0)} \to H^{(0)}$ se numeşte *morfism de complexe simpliciale* dacă pentru orice simplex $\langle v_0, \ldots, v_k \rangle \in K$, punctele $f(v_0), \ldots, f(v_k)$ sunt vârfuri (eventual cu repetiţii) ale unui simplex din H.

Un morfism de complexe simpliciale $f : K^{(0)} \to H^{(0)}$ induce o extindere (notată tot cu f) de la K la H prin formula

$$K \ni \langle v_0, \ldots, v_k \rangle \mapsto f(\langle v_0, \ldots, v_k \rangle) := \langle f(v_0), \ldots, f(v_k) \rangle \in H.$$

De remarcat că pentru orice simplex $T \in K$, $\dim f(T) \leq \dim T$. Pe realizarea geometrică, un morfism de complexe simpliciale induce o aplicaţie continuă $\overline{f} : |K| \to |H|$ prin extindere liniară: dacă $v_0, \ldots, v_k$ sunt vârfurile unui k-simplex in K, atunci definim

$$\overline{f}\left(\sum_{i=0}^{k} \lambda_j v_j\right) := \sum_{i=0}^{k} \lambda_j f(v_j).$$

Un morfism $f : K \to H$ este *izomorfism de complexe simpliciale* dacă $f : K^{(0)} \to H^{(0)}$ este bijecţie şi dacă inversa este şi ea morfism de complexe. Echivalent, f este izomorfism dacă $\langle v_0, \ldots, v_k \rangle \in K \Leftrightarrow \langle f(v_1), \ldots, f(v_k) \rangle \in H$.

Observaţia 8.7. Dacă schimbăm $v = (0, \ldots, 0, 1)$ cu un alt punct din $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n$ se obţin conuri izomorfe (izomorfism de complexe simpliciale)

stereo Exerciţiul 8.8. Fie $N := (0, \ldots, 0, 1)$ "polul nord" al sferei $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Fie $\Phi : S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$ construită în modul următor: pentru orice $p \in S^n$ diferit de N definim $\Phi(p)$ ca fiind intersecţia unicei drepte care trece prin p şi prin N cu $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Arătaţi că Φ este un homeomorfism. Aplicaţia Φ se numeşte *proiecţia stereografică.*

Exerciţiul 8.9. Fie K un complex simplicial în $\mathbb{R}^n$. Arătaţi că conul CK conţine un numar impar de simplexe.

Exerciţiul 8.10. Arătaţi, folosind lema de lipire, că $\overline{f} : |K| \to |H|$ este bine definită şi continuă.

Exerciţiul 8.11. Arătaţi că un izomorfism de complexe simpliciale induce un homeomorfism pe realizările geometrice ale celor două complexe.

9. Analiza complexelor simpliciale

DEFINIŢIA 9.1. Fie S un k-simplex din $\mathbb{R}^n$ cu vârfurile $v_0, \dots, v_k$. Atunci:

$$\mathrm{Int}(S) := \left\{ \sum_{j=0}^{k} \lambda_j v_j; \lambda_j > 0, \sum_{j=0}^{k} \lambda_j = 1 \right\}$$

se numeşte *interiorul* lui S.

Ca mulţime din $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{Int}(S)$ este simplexul S din care am eliminat toate feţele de dimensiune mai mică decât k (este suficient sa eliminăm doar feţele de dimensiune $k-1$, celelalte fiind conţinute în acestea). De remarcat că $\mathrm{Int}(S)$ nu este un deschis din $\mathbb{R}^n$ pentru $k < n$. Dacă S este de dimensiune 0 atunci $\mathrm{Int}(S) = S$ adică un punct.

PROPOZIŢIA 9.2. *Fie K un complex simplicial din $\mathbb{R}^n$ şi $p \in |K| \subset \mathbb{R}^n$. Atunci există un unic simplex $S \in K$ astfel încât $p \in \mathrm{Int}(S)$. Notăm acest S cu* $\mathrm{suport}(p)$.

DEMONSTRAŢIE. Fie S un simplex din K e dimensiune minimă astfel încât $p \in S$. Dacă ar exista două astfel de simplexe minimale distince, p ar aparţine şi intersecţiei lor, care este un simplex de dimensiune strict mai mică, contradicţie. Deci S este unic cu proprietăţile de mai sus. Este clar că p nu aparţine nici unei feţe a lui S alta decă S însuşi, altfel s-ar contrazice minimalitatea lui S. Deci $p \in \mathrm{Int}(S)$. Dacă p s-ar mai găsi în interiorul unui alt simplex $T \neq S$, ar rezulta în particular că $p \in S \cap T$. Dar $S \cap T$ nu poate fi o faţă proprie a lui S (altfel s-ar contrazice minimalitatea lui S deci $S \cap T = S$, cu alte cuvinte $S \subset T$. Dar atunci $p \in S$ nu poate să se găsească în $\mathrm{Int}(T)$. □

DEFINIŢIA 9.3. Fie $v \in K^{(0)}$ un vârf. *Steaua deschisă* a lui v este reuniunea în $\mathbb{R}^n$

$$\mathrm{stea}(v) = \bigcup_{v \in S \in K} \mathrm{Int}(S) \subset |K|$$

a tuturor interioarelor simplexelor ce îl conţin pe v ca vârf.

Evident, v este singurul vârf din $\mathrm{stea}(v)$. Observăm că reuniunea de mai sus este disjunctă.

DEFINIŢIA 9.4. Fie X un spaţiu şi $A \subset X$. O aplicaţie $F : X \times I \to X$ se numeşte *retracţie prin deformare a lui X la A* dacă $F(x, 0) = x$, $F(x, 1) \in A$ şi $F(a, t) = a$ pentru orice $a \in A, x \in X$.

LEMA 9.5. *Fie K un complex simplicial şi $v \in K^{(0)}$. Atunci $\mathrm{stea}(v)$ se retractă prin deformare la v.*

DEMONSTRAŢIE. Definim $F : |K| \times I \to \mathbb{R}^n$ prin $F(x, t) := (1 - t)x + tv$. Este clar că $F(v, t) = v$ pentru orice t şi $F(x, 0) = x, \forall x \in |K|$. Dacă x şi v aparţin unui aceluiaşi simplex $T \in K$, atunci $F(x, t) \in T \subset |K|$. Mai mult, dacă $v \in T$ şi $x \in \mathrm{Int}(T)$ atunci $F(x, t) \in \mathrm{Int}(T)$ pentru orice $t \in I$. Deci F duce $\mathrm{stea}(v)$ în ea însăşi. Din definiţie este clar că F este continuă. □

Ca o consecinţă, stea(v) este conexă prin arce. Fiecare submulţime stea$(v) \subset |K|$ este deschisă (exerciţiul 11.4). Orice punct din $|K|$ aparţine interiorului unui simplex din K, deci stelei asociate oricăruia dintre vârfurile acelui simplex. Rezultă că avem o acoperire a lui $|K|$ cu mulţimi deschise conexe prin arce:

$$|K| = \bigcup_{v \in K^{(0)}} \mathrm{stea}(v).$$

Deci dacă realizarea $|K|$ este conexă atunci este conexă prin arce.

10. Diviziunea baricentrică

Dacă avem un complex simplicial putem să îl "spargem" în simplexe mai mici, dar cu aceiaşi realizare geometrică. De exemplu, considerăm un simplex $T = \langle v_0, \ldots, v_k \rangle$. Fixăm un punct $v \in \mathrm{Int}(T)$ şi considerăm complexul T' format din toate simplexele de dimensiune cel mult k formate cu vărfurile $\{v_0, \ldots, v_k, v\}$ cu excepţia simplexului iniţial T. Este uşor de văzut că $|T'| = T$. Pentru a analiza acelaşi fenomen pe complexe simpliciale, este convenabil sa stabilim o alegere canonica a vârfului adiţional.

Definiţia 10.1. Fie $S = \langle v_0, \ldots, v_k \rangle$ un simplex din $\mathbb{R}^n$. *Baricentrul* (sau centrul de greutate) al lui S se defineşte prin:

$$G_S := \frac{v_0 + \ldots + v_k}{k+1} \in \mathrm{Int}(S).$$

Fie K un complex simplicial. Definim o relaţie de ordine parţială pe K prin:

$$S \leq T \iff S \subset T (\text{ adică } S \text{ este o faţă a lui } T).$$

Definiţia 10.2. *Prima diviziune baricentrică a lui K* este complexul simplicial K_1 având ca vârfuri baricentrele simplexelor din K, iar $\langle G_{S_0}, \ldots, G_{S_k} \rangle \in K_1$ dacă şi numai dacă mulţimea $\{S_0, \ldots, S_k\}$ este total ordonată pentru ordinea de mai sus.

Să justificăm faptul că $G_{S_0}, \ldots, G_{S_k}$ se află în poziţie generală (presupunem că am eliminat repetiţiile). Putem presupune că $S_0 < \ldots < S_k$ şi deci toate simplexele S_j sunt conţinute în S_k. Fie $v_0, \ldots, v_k$ vârfurile lui S_k. Atunci

$$G_{S_j} = \sum_{i=0}^{k} a_{ij} v_i, \qquad a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\dim(S_j)+1} & \text{dacă } v_i \in S_j^{(0)} \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$

În particular, fiecare G_{S_j} este o combinaţie liniară cu suma coeficienţilor 1 de aceste vârfuri. Dacă o combinaţie liniară $\sum_{j=0}^{k} \lambda_j G_{S_j}$ cu $\sum_{j=0}^{k} \lambda_j = 1$ s-ar anula, am obţine

$$0 = \sum_{j=0}^{k} \lambda_j G_{S_j} = \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{k} a_{ij} v_i = \sum_{i=0}^{k} \left(\sum_{j=0}^{k} \lambda_j a_{ij} \right) v_i$$

ceea ce contrazice faptul că $v_0, \ldots, v_k$ sunt în poziţie generală întrucât

$$\sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k} \lambda_j a_{ij} = \sum_{j=0}^{k} \lambda_j \left(\sum_{i=0}^{k} a_{ij} \right) = \sum_{j=0}^{k} \lambda_j = 1.$$

Trebuie să mai justificăm faptul ca K_1 este complex simplicial.

Un vârf din K rămâne vârf în prima diviziune baricentrică, dar oricare două vârfuri din $K^{(0)}$ nu aparţin aceluiaşi simplex din K_1 deoarece nu sunt comparabile faţă de relaţia de ordine de mai sus. Segmentele sunt împărţite în două segmente de prima diviziune baricentrică, triunghiurile în 6 triunghiuri, în general un k-simplex este împărţit în $(k+1)!$ simplexe (demonstraţie prin inducţie).

Să fixăm câteva notaţii. *Dimensiunea* unui complex simplicial K este dimensiunea maximă a simplexelor care îl compun. *Diametrul* unui simplex este diametrul lui ca submulţime compactă în spaţiul metric $\mathbb{R}^n$. *Calibrul* lui K este maximul diametrelor simplexelor din K.

Observaţia 10.3. Diametrul unui simplex T se realizează pe o muchie a lui T, adică este dat de distanţa între două vârfuri. Aceasta se demonstrează folosind următorul fapt elementar : dacă ABC este un triunghi şi $M \in BC$, atunci $AM \leq \max\{AB, AC\}$. Simplexul fiind compact, există două puncte p, q între care se atinge supremumul distanţei pe T. Punctul p nu se poate afla în interiorul unui segment BC conţinut în T, din faptul de mai sus. Deci p este un vârf şi analog q este vârf.

Ca o consecinţă calibrul unui complex se realizează pe o muchie.

Teorema 10.4. *Fie K un complex simplicial de dimensiune M şi K_1 prima diviziune baricentrică. Atunci:*

$$\text{Calibru}(K_1) \leq \frac{m}{m+1}\text{Calibru}(K).$$

Demonstraţie. Calibrul se realizează pe muchii. Fie deci $G_S G_T$ o muchie din K_1 (adică un simplex de dimensiune 1). Din definiţia diviziunii baricentrice putem compara pe S cu T. Să presupunem că $S \langle T$. Deci $G_S G_T$ este o muchie care uneşte baricentrul lui T cu baricentrul unei feţe a lui T. Apicând repetat inegalitatea din observaţia anterioară obţinem că $\text{dist}(G_S, G_T) \leq \text{dist}(v, G_T)$ unde v este un vârf a lui T. Fie $k = \dim(T) \leq m$. Arătăm că:

$$dist(v, G_T) \leq \frac{k}{k+1}\text{diam}(T)$$

Translatăm pe v în 0 şi fie $v_1, \ldots, v_k$ celelalte vârfuri din T. Atunci:

$$G_T = \frac{v_1 + \ldots + v_k}{k+1}$$

Acum $\text{dist}(0, v_j) \leq \text{diam}(T)$ pentru orice j şi folosind inegalitatea triunghiului rezultă inegalitatea anunţată. Deci:

$$\text{dist}(G_S, G_T) \leq \text{dist}(v, G_T) \leq \frac{k}{k+1}\text{diam}(T) \leq \frac{m}{m+1}\text{diam}(T) \leq \frac{m}{m+1}\text{Calibru}(K)$$

□

Ca un corolar rezultă că dacă iterăm diviziunea baricentrică de un număr suficient de ori, calibrul poate fi făcut arbitrar de mic. De fapt acesta este şi motivul pentru care am introdus noţiunea de diviziune baricentrică. Să notăm cu K_p complexul simplicial obţinut prin aplicarea diviziunii baricentrice de p ori.

11. Aproximarea simplicială

Am definit mai sus noţiunea de morfism de complexe simpliciale. Un morfism de complexe simpliciale este o funcţie $f : K^{(0)} \to L^{(0)}$ care duce vârfurile oricărui simplex din K în vârfurile unui simplex din L, posibil cu repetiţii. Prin liniaritate, un morfism induce o funcţie continuăîntre realizările geometrice $|K|$ şi $|L|$. Fie acum $f : |K| \to |L|$ continuă. Dorim un morfism de complexe simpliciale $g : K \to L$ astfel încât aplicaţia indusă (notată cu aceaşi literă) $g : |K| \to |L|$ să fie omotopă cu f. În acestă formă propoziţia nu este adevărată. E nevoie de o condiţie suplimentară care să ne garanteze că operaţia $(1-t)f(x) + tg(x)$ are loc într-un simplex din $|L|$.I

Definiţia 11.1. Un morfism g de complexe simpliciale $g : K^{(0)} \to L^{(0)}$ se numeşte *aproximare simplicială* a aplicaţiei continue $f : |K| \to |L|$ dacă

$$f(\mathrm{stea}(v)) \subset \mathrm{stea}(g(v)), \forall v \in K^{(0)}.$$

Cu această condiţie putem arăta că f şi g sunt omotope.

Lema 11.2. *Fie g aproximare simplicială a lui f. Atunci $f \simeq g$.*

Demonstraţie. Presupunem L complex simplicial din $\mathbb{R}^n$ şi fie $F : |K| \times I \to \mathbb{R}^n$, $F(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$. Trebuie să vedem că $f(x)$ şi $g(x)$ sunt într-adevăr din acelaşi simplex din L. Fie $S = \mathrm{suport}(x)$ (simplexul în interiorul căruia este x), $S = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$. Atunci $x \in \cap_{j=1}^k \mathrm{stea}(v_j)$. Rezultă $f(x) \in \cap_{j=1}^k f(\mathrm{stea}(v_j))$ şi din ipoteză $\cap_{j=1}^k f(\mathrm{stea}(v_j)) \subset \cap_{j=1}^k \mathrm{stea}(g(v_j))$. Dar $S = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle \in K$ implică $R := \langle g(v_1), \ldots, g(v_k) \rangle \in L$. $g(S) = R$ (fiindcă g morfism) deci $g(x) \in R$. Acum $f(x) \in \cap_{j=1}^k \mathrm{stea}(g(v_j))$, deci $\mathrm{suport}(f(x))$ conţine pe R ca o faţă. Aşadar $\mathrm{suport}(f(x))$ conţine şi pe $f(x)$ şi pe $g(x)$. Deci segmentul care uneşte pe $f(x)$ cu $g(x)$ este în $|L|$, deci imaginea lui F este în $|L|$ şi atunci f şi g sunt omotope. □

O aproximare simplicială nu poate fi întotdeauna găsităṀotivul este că stelele din L pot fi foarte mici faţă de imaginea stelelor din K. Aici se dovedeşte utilă diviziunea baricentrică.

Teorema 11.3. *Fie $f : |K| \to |L|$ continuă. Atunci există $m \in \mathbb{N}$ şi un morfism de complexe simpliciale între $g : K_m \to L$ care este o aproximare simplicială pentru f.*

Demonstraţie. Mulţimile $\{\mathrm{stea}(u); u \in L^{(0)}\}$ formează o acoperire deschisă a lui $|L|$. Cum f este continuă, $\{f^{-1}(\mathrm{stea}(u)); u \in L^{(0)}\}$ formează o acoperire deschisă a spaţiului metric compact $|K|$. Atunci există un număr $\delta > 0$ (numit număr Lebesgue al acoperirii) astfel încât orice mulţime din $|K|$ de diametru mai mic decât δ este conţinută în unul din aceşti deschişi. Ştim că există $m > 0$ astfel încât $\mathrm{Calibru}(K_m) < \delta/2$. Din inegalitatea triunghiului rezultă că diametrul oricărei stele din K e mai mic decât δ şi deci steaua respectivă e conţinută într-un deschis al acoperirii. Rezultă că imaginea ei este inclusă într-o stea din L. □

steadesch Exerciţiul 11.4. Arătaţi că $\mathrm{stea}(v) \subset |K|$ este o mulţime deschisă în $|K|$.

Exerciţiul 11.5. Arătaţi că K_1 este într-adevăr complex simplicial şi că $|K_1| = |K|$.

Exerciţiul 11.6. Folosind teorema de aproximare simplicială, arătaţi că pentru $n \geq 2$ avem $\pi_1(S^n) = 0$.

12. Grupul drumurilor pe muchii

Am arătat mai sus existenţa aproximărilor simpliciale pentru funcţii continue, cu preţul trecerii la diviziunea baricentrică.

Propoziţia 12.1. *Fie $f : |K| \to |L|$ continuă. Atunci există $m \in \mathbb{N}$ şi $g : (K_m)^{(0)} \to L^{(0)}$ morfism de complexe simpliciale astfel încât $f(\mathrm{stea}(v)) \subset \mathrm{stea}(g(v))$ pentru orice v vârf în K_m. În plus g induce o aplicaţie $g : |K_m| = |K| \to |L|$ omotopă cu f.*

Când am definit grupul fundamental am considerat toate drumurile bazate într-un punct fixat şi am factorizat la o relaţie bogată de echivalenţă. Pentru spaţii triangulabile, fiindcă avem aproximarea simplicială pentru funcţii continue putem să ne restrângem atenţia doar la drumuri pe muchiile unei triangulări. Vom obţine o descriere combinatorică a grupului fundamental.

Fie X un spaţiu şi K o triangulare a sa. Din moment ce *grupul fundamental* este un invariant la homeomorfisme, putem identifica pe X cu $|K|$.

Fie $v_0 \in K^{(0)}$ şi $\gamma : I \to |K|$ un drum bazat în v_0 (adică $\gamma(0) = \gamma(1) = v_0$). Folosind aproximarea simplicială obţinem $g : (I_m)_0 \to K^{(0)}$ astfel încât $g : |I_m| \to |K|$ e omotop cu γ. Să vedem că şi g e un drum bazat în v_0. Din definiţie, $\gamma(\mathrm{stea}(0)) \subset \mathrm{stea}(g(0))$. Ştim că orice stea deschisă conţine un singur vârf iar $\gamma(0) = v_0$ este unşi $g(0)$ sunt vârfuri din $\mathrm{stea}(g(0))$. Rezultă $g(0) = v_0$. Analog $g(1) = \gamma(1) = v_0$.

În demonstraţia omotopiei dintre o funcţie continuă şi aproximarea sa am folosit omotopia pe segmente: $F(t, s) = (1 - s)\gamma(t) + sg(t)$. Deoarece $g(0) = g(1) = v_0$ avem $F(0, s) = F(1, s) = v_0$, adică omotopia păstrează capetele intervalului. Am demonstrat că g şi γ sunt omotope relativ la $\{0, 1\}$, deci egalitatea $\langle\gamma\rangle = \langle g\rangle$ în $\pi_1(|K|)$.

Definiţia 12.2. Fie K un complex simplicial şi $v_0 \in K^{(0)}$ un vârf. Un *drum pe muchii în K* este un şir $v_0v_1 \ldots v_k$ de vârfuri din K astfel încât $\langle v_i, v_{i+1}\rangle$ e un simplex în K, fie o muchie, fie $v_i = v_{i+1}$. *Grupul de drumuri închise pe muchii*, notat $E(K, v_0)$, este mulţimea tuturor drumurilor pe muchii cu proprietatea $v_{k+1} = v_0$, factorizată la relaţia de echivalenţă dată de următoarele *mişcări elementare*: pentru orice drumuri pe muchii d_1 care începe în v_0, respectiv d_2 care se termină în v_0,

- $d_1vvd_2 \sim d_1vd_2$
- $d_1vuvd_2 \sim d_1vd_2$
- $d_1uvwd_2 \sim d_1uwd_2$ dacă $\langle uvw\rangle$ este un triunghi în K

A doua mişcare elementară poate fi văzută ca un caz particular al celei de a treia, privind v, u, v ca vârfurile unui triunghi degenerat. Operaţiile pe $E(K, v_0)$ sunt evidente: produsul este concatenarea şirurilor(care este evident asociativă), iar inversul lui $v_0v_1 \ldots v_kv_0$ este $v_0v_k \ldots v_1v_0$.

Teorema 12.3. *$E(K,v)$ este izomorf cu $\pi_1(|K|,v)$.*

Demonstraţie. Un şir de vârfuri din K $vv_1 \dots v_k v$ astfel încât oricare două consecutive formează o muchie poate fi interpretat ca un drum în $|K|$. Fie $\alpha : I \to |K|$, $\alpha(0) = \alpha(1) = v$, $\alpha(\frac{j}{k+1}) = v_j$ şi în rest α liniar pe intervale de forma $[\frac{j}{k+1}, \frac{j+1}{k+1}]$. Definim acum:

$$\Phi(vv_1 \dots v_k v) = \langle \alpha \rangle$$

Observăm cămişcările elementare corespund la drumuri omotope în $|K|$ (exerciţiu), deci Φ este bine definită. E uşor de văzut că Φ este morfism. Surjectivitatea am demonstrat-o înainte de definiţia lui $E(K,v)$. Mai trebuie doar schimbată parametrizarea pe muchii, astfel încât vârfurile să fie exact imaginile punctelor $j/k+1$ din I.

Partea mai complicată este injectivitatea. Fie $q = [v_0 v_1 \dots v_k v_0] \in E(K,v_0)$ cu $\Phi(q) = 0 \in \pi_1(|K|,v_0)$. Asta înseamnă că există $F : I \times I \to |K|$ omotopie între α şi drumul constant v_0. Ideea este să aplicăm teorema de aproximare simplicială pentru F ca să arătăm că $q = 0$ în $E(K,v_0)$. Mai întâi trebuie să transformăm pe $I \times I$ într-un complex simplicial. Să privim pe $I \times I$ ca fiind pătratul $abcd$ cu F luând valoarea v_0 pe laturile ab, bc, cd şi cu punctele $a_1, a_2, \dots a_k$ egal distanţate pe latura ad astfel încât $F(a_i) = v_i$. Unind punctul b cu toate punctele a_i şi cu punctul d triangulăm pătratul. Să notăm simplexul obţinut cu L. Este format din $k+2$ triunghiuri. Există $m \in \mathbb{N}$ şi $S : |L_m| \to |K|$ aproximare simplicială pentru F. Acum S duce triunghiuri din L_m în triunghiuri din K. Deci S ne dă o transformare prin mişcări elementare în K a drumului $S(ad)$ la drumul $S(ab, bc, cd)$.

Toate vârfurile din L_m de pe laturile ab, bc, cd sunt duse de F în v_0. S fiind aproximarea simplicială a lui F va duce şi el toate aceste vârfuri în v_0 (argumentul folosit şi la început că o stea deschisă conţine un singur vârf). Deci drumul $S(ab, bc, cd)$ este v_0 repetat de multe ori (de $3 * 2^m + 1$, dar nu are importanţă asta), adică este 0 din $E(K,v_0)$.

Rămâne să mai vedem că $S(ad)$ este q, egalitatea având loc în $E(K,v_0)$. $F(a_i) = v_i$ şi fiindcă S aproximează simplicial pe F, imaginea prin S a oricărui vârf nou apărut între a_i şi a_{i+1} este v_i sau v_{i+1}. Deci $S(ad)$ este echivalent cu q (doar prin a doua mişcare elementară). Deci $q = 0$ şi Φ este injectivă. □

Vom construi acum un alt grup $G(K,L)$, izomorf cu $E(K)$ şi cu $\pi_1(|K|)$, care să simplifice şi mai mult descrierea lui π_1. L va fi un subcomplex a lui K, care să conţină toate vârfurile şi care să fie conex prin arce şi simplu conex. Un astfel de subcomplex este un arbore maximal în graful muchiilor lui K.

13. Grupuri definite prin generatori şi relaţii

Este momentul să introducem câteva noţiuni de algebră. Fie $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ o mulţime finită. Un *cuvânt de lungime* n pe mulţimea A este o funcţie $j : \{1, \dots, n\} \to A \times \{\pm 1\}$. Dacă scriem $j(i) = (j_i, \epsilon_i)$, cuvântul j se mai notează $a_{j_1}^{\epsilon_1} \dots a_{j_n}^{\epsilon_n}$. Avem o operaţie evidentă pe mulţimea cuvintelor cu litere din A, numită concatenare, care constă în alăturarea cuvintelor:

$$j.j' := a_{j_1}^{\epsilon_1} \dots a_{j_n}^{\epsilon_n} a_{j'_1}^{\epsilon'_1} \dots a_{j'_n}^{\epsilon'_{n'}}.$$

Concatenarea este asociativă din definiţie. O *echivalenţă elementară* este o pereche de cuvinte de forma

$$\{d_1 a_j^{\epsilon} a_j^{-\epsilon} d_2, d_1 d_2\}$$

unde $\epsilon \in \{\pm 1\}$ iar d_1, d_2 sunt cuvinte arbitrare. Pe mulţimea cuvintelor cu litere din A definim o relaţie de echivalenţă în modul următor: două cuvinte sunt echivalente dacă pot fi legate printr-un lanţ finit de echivalenţe elementare. Astfel, cele două cuvinte pot fi transformate unul în celălalt prin stergerea sau introducerea unor perechi $a_j a_j^{-1}$ sau $a_j^{-1} a_j, j = 1, \ldots, n$. *Grupul liber* generat de A, notat $F(A)$, este mulţimea cuvintelor cu litere din A factorizată la această relaţie de echivalenţă.

Grupul liber are o proprietate de universalitate in categoria grupurilor. Pentru orice grup G şi elemente $g_1, \ldots, g_k \in G$, există un (unic) morfism de grupuri $\phi : F(A) \to G$ cu $\phi(a_j) = g_j, j = 1, \ldots, k$.

Mai general, fie $M = \{c_1, \ldots, c_m\}$ o mulţime de cuvinte cu litere din A, numite *relaţii*. Subgrupul normal $N(c_1, \ldots, c_m)$ generat de M este intersecţia tuturor subgrupurilor normale care conţin M. Grupul cu generatori $a_1, \ldots, a_k$ şi relaţii $c_1, \ldots, c_m$ este grupul factor

$$\langle a_1, \ldots, a_k | c_1, \ldots, c_m \rangle := F(A)/N(c_1, \ldots, c_m).$$

Pentru simplitate am presupus că numărul de generatori şi de relaţii este finit, dar restricţia aceasta nu este necesară.

Definiţia 13.1. Fie K un complex simplicial şi L un subcomplex care conţine toate vârfurile şi astfel încât $|L|$ este conex prin arce şi simplu conex. Fie $v_0, v_1, \ldots, v_k$ vârfurile lui K. Definim $G(K, L)$ ca fiind grupul cu câte un generator g_{ij} pentru fiecare muchie $v_i v_j$ din K şi cu relaţiile $g_{ij} = 1$ dacă $\langle v_i, v_j \rangle \in L$ şi $g_{ij} g_{jk} = g_{ik}$ dacă $\langle v_i, v_j, v_k \rangle \in K$.

Observaţia 13.2. Este posibil sa rescriem $G(K, L)$ cu mai puţini generatori. Ţinând cont că $g_{ii} = 1$ şi că $g_{ij} = g_{ji}^{-1}$, atunci $G(K, L)$ are un generator g_{ij} pentru fiecare muchie $v_i v_j$ din $K \setminus L$ cu $i < j$ şi relaţiile $g_{ij} g_{jk} = g_{ik}$ dacă $\langle v_i v_j v_k \rangle \in K$ şi $i < j < k$.

Teorema 13.3. *Grupurile $G(K, L)$ şi $E(K, v_0)$ sunt izomorfe.*

Demonstraţie. Vom defini două aplicaţii $\Phi : G(K, L) \to E(K, v_0)$ şi $\Psi : E(K, v_0) \to G(K, L)$ care sunt inverse una alteia. Fie $[v_0 v_l v_m \ldots v_n v_0] \in E(K, v_0)$. Definim

$$\Phi([v_0 v_l v_m \ldots v_n v_0]) = g_{0l} g_{lm} \ldots g_{n0}.$$

Se vede uşor că Φ este bine definit şi morfism de grupuri.

Pentru fiecare vârf v_j, fie E_j drumul simplicial minimal (adică fără repetiţii) în L de la v_0 la v_j, în particular E_0 este drumul constant v_0. Definim $\Psi(g_{ij}) = E_i v_i v_j E_j^{-1}$. Dacă

$\langle v_i v_j v_k\rangle \in K$ atunci:

$$\begin{aligned}\Psi(g_{ij})\Psi(g_{jk}) =&\{E_i v_i v_j E_j^{-1}\}\{E_j v_j v_k E_k^{-1}\}\\ =&\{E_i v_i v_j E_j^{-1} E_j v_j v_k E_k^{-1}\}\\ =&\{E_i v_i v_j v_k E_k^{-1}\}\\ =&\{E_i v_i v_k E_k^{-1}\}\\ =&\Psi(g_{ik})\end{aligned}$$

Deci Ψ păstrează relaţiile de echivalenţă din $G(K, L)$ şi defineşte un morfism. Acum:

$$\Phi(\Psi(g_{ij})) = \Phi(\{E_i v_i v_j E_j^{-1}\}) = g_{ij}$$

ultima egalitate având loc fiindcă E_i şi E_j sunt drumuri în L. Reciproc,

$$\begin{aligned}\Psi(\Phi(v_0 v_l v_m \dots v_n v_0) =&\Psi(g_{0l} g_{lm} \dots g_{n0})\\ =&E_0 v_0 v_l E_l^{-1} E_l v_l v_m E_m^{-1} \dots E_n v_n v_0 E_0^{-1}\\ =&E_0 v_0 v_l v_l v_m v_m \dots v_n v_n v_0 E_0^{-1}\\ =&v_0 v_l v_m \dots v_n\end{aligned}$$

Deci Φ şi Ψ sunt bijective şi deci izomorfisme. □

Corolar 13.4. *Fie K un complex simplicial si $K^{(2)}$* scheletul 2-dimensional *al lui K, adică subcomplexul format din toate vârfurile, muchiile şi triunghiurile lui K. Atunci incluziunea $K^{(2)} \hookrightarrow K$ induce un izomorfism*

$$\pi_1(|K^{(2)}|) \equiv \pi_1(|K|).$$

Demonstraţie. Fie L un arbore maximal în K. Atunci L este şi un arbore maximal în $K^{(2)}$. Mai mult, grupurile $G(K, L)$ şi $G(K^{(2)}, L)$ au exact aceiaşi generatori şi relaţii. □

14. Teorema lui van Kampen pentru complexe simpliciale

Fie K_1, K_2 sub-complexe simpliciale intr-un complex K din $\mathbb{R}^n$. Atunci $K_1 \cap K_2$ este un subcomplex în K_1, K_2 si în K. Ca spaţii topologice, $|K_1 \cap K_2| = |K_1| \cap |K_2|$). Să presupunem că realizările geometrice $|K_1|$, $|K_2|$ şi $|K_1 \cap K_2|$ sunt conexe (şi deci conexe prin arce). Teorema lui van Kampen exprimă $\pi_1(|K|)$ în funcţie de grupurile fundamentale ale lui $|K_1|$, $|K_2|$ şi $|K_1 \cap K_2|$.

Avem nevoie de o noţiune de algebră. Fie G_1 şi G_2 două grupuri definite cu generatori şi relaţii. *Produsul liber* $G_1 * G_2$ este grupul definit de reuniunea generatorilor şi relaţiilor din G_1 şi G_2.

Fie $v \in (K_1 \cap K_2)^{(0)}$. Vom pleca de la produsul liber $\pi_1(|K_1|, v) * \pi_1(|K_2|, v)$. Avem incluziunile canonice $j_1 : |K_1 \cap K_2| \to |K_1|$ şi $j_2 : |K_1 \cap K_2| \to |K_2|$. Dacă $a \in \pi_1(|K_1 \cap K_2|, v)$ atunci $(j_1)_*(a) \in \pi_1(|K_1|, v)$ şi $(j_2)_*(a) \in \pi_1(|K_2|, v)$. Astfel, vom fi nevoiţi să factorizăm produsul liber la relaţiile $(j_1)_*(a) = (j_2)_*(a)$.

Teorema 14.1 (van Kampen). *Grupul fundamental al lui $|K|$ bazat în v este produsul liber al grupurilor $\pi_1(|K_1|, v)$ şi $\pi_2(|K_2|, v)$ factorizat la relaţiile $(j_1)_*(a) = (j_2)_*(a)$ pentru orice $a \in \pi_1(|K_1 \cap K_2|, v)$.*

Demonstraţie. Vom folosi descrierea combinatorică a grupului fundamental. Fie L_0 un arbore maximal în $K_1 \cap K_2$. Prelungim L_0 la câte un arbore maximal L_1, L_2 în K_1, respectiv în K_2. Atunci $L := L_1 \cup L_2$ va fi un arbore maximal în K. Pentru $j = 0, 1, 2$ fie E_j, T_j mulţimea muchiilor din $K_j \setminus L_j$, respectiv a triunghiurilor din L_j. Incluziunea $K_1 \cap K_2 \hookrightarrow K_1$ induce la nivel de grupuri fundamentale combinatorice aplicaţia

$$(j_1)_* : G(K_0, L_0) \to G(G_1; L_1), \qquad\qquad E_0 \ni g \mapsto g$$

(remarcăm că $T_0 \subset T_1$, $E_0 \subset E_1$ deci aplicaţia de mai sus este bine definită). Produsul liber $G(K_1, L_1) * G(K_2, L_2)$ are generatori şi relaţii $E_1 \sqcup E_2$, respectiv $T_1 \sqcup T_2$. Aceştia sunt generatorii şi relaţiile din $G(K, L)$ numai că generatorii din G_0 apar de două ori, împreună cu relaţiile din T_0. Pentru orice muchie g din E_0 fie g_1, g_2 cele două copii distincte ale lui g în reuniunea disjunctă $E_1 \sqcup E_2$. Dacă introducem în $G(K_1, L_1) * G(K_2, L_2)$ relaţiile suplimentare $g_1 g_2^{-1}$ pentru orice muchie g din E_0, putem elimina generatorul g_2 (care va fi egal cu g_1). Fie t un triunghi din K_0 şi t_1, t_2 copiile sale în $E_1 \sqcup E_2$. Relaţile corespunzătoare triunghiurilor t_1, t_2 devin identice dacă identificăm $g_1 = g_2$ pentru orice muchie g din K_0; putemn deci elimina una dintre cópii. În concluzie, grupul amalgamat

$$G(K_1, L_1) * G(K_2, L_2) / \langle j_1(a) j_2(a), \forall a \in G(K_0, L_0) \rangle$$

are o prezentare cu generatori $E_1 \cap E_2$ şi relaţii date de triunghiurile din $T_1 \cap T_2$. Dar acestea sunt precis mulţimea muchiilor din $K \setminus L$, respectiv mulţimea triunghiurilor din K, deci grupul amalgamat de mai sus este izomorf cu $G(K, L)$. $\square$

Exerciţiul 14.2. Arătaţi că grupul fundamental al unui arbore este trivial.

Exerciţiul 14.3. Unde am folosit în demonstraţia izomorfismului dintre $G(K, L)$ şi $E(K, v_0)$ faptul că L este simplu conex?

Exerciţiul 14.4. Calculaţi grupul fundamental al sticlei lui Klein.

Exerciţiul 14.5. Calculaţi grupul fundamental al suprafeţelor M_g, suprafeţele compacte orientabile de gen g (torul cu g ”găuri” sau suma conexă dintre g toruri).

15. Suprafeţe topologice

cap7

Definiţia 15.1. Un spaţiu Hausdorff X se numeşte *suprafaţă* (sau varietate topologică de dimensiune 2) dacă orice $p \in X$ are o vecinătate homeomorfă cu un deschis din $\mathbb{R}^2$.

Deoarece pentru orice $r > 0$, planul $\mathbb{R}^2$ este homeomorf cu discul deschis de rază r, obţinem uşor următorul rezultat:

Exerciţiul 15.2. Orice punct dintr-o suprafaţă are o vecinătate homeomorfă cu $\mathbb{R}^2$.

Observaţia 15.3. Un exemplu de spaţiu local homeomorf cu $\mathbb{R}^2$ care nu este Hausdorff este planul cu punct dublu: $\mathbb{R}^2 \times \{0, 1\} / \sim$; $(x, 0) \sim (y, 1)$ dacă $x = y \neq 0$. Acest spaţiu contrazice intuiţia în privinţa a ceea ce ar trebui să fie o suprafaţă.

Scopul următoarelor secţiuni va fi clasificarea până la homeomorfism a suprafeţelor compacte, adică o lista exhaustivă de suprafeţe. Este un rezultat puternic, având în vedere că astfel de clasificări sunt o raritate în matematică.

O *suprafaţă combinatorică* este un complex simplicial K astfel încât $|K|$ să fie o suprafaţă.

7.4 LEMA 15.4. *Fie K o suprafaţă combinatorică. Atunci dimensiunea de complex simplicial a lui K este* 2.

DEMONSTRAŢIE. Presupunem prin reducere la absurd că există simplexe în K de dimensiune mai mare ca 2. Fie T un astfel de simplex de dimensiune maximală, $k = \dim(T) = \dim(K) > 2$. Atunci $\mathrm{Int}(T)$ este deschis în $|K|$. Fie $x \in \mathrm{Int}(T)$ (de exemplu baricentrul lui T). Din ipoteză, există o vecinătate U_1 a lui x homeomorfă cu $\mathbb{R}^2$, adică un homeomorfism

$$\phi : U \to \mathbb{R}^2, \qquad\qquad \phi(x) = 0.$$

Putem presupune, restrângând domeniul lui ϕ, că $U \subset \mathrm{Int}(T)$. Fie $B(x, r_1)$ bila deschisă centrată în x de rază r_1 din spaţiul ambient $\mathbb{R}^n$. Pentru r_1 suficient de mic, intersecţia $U_2 := \mathrm{Int}(T) \cap B(x, r_1)$ este o bilă k-dimensională, adică există o transformare afină care duce U_2 peste $B^k(0, r_1) \subset \mathbb{R}^k$. În particular, U_2 este homeomorf cu $B^k(0, r_1)$. Putem presupune că am ales r_1 suficient de mic astfel ca $U_2 \subset U_1$. Pentru r_2 suficient de mic, preimaginea $U_3 := \phi^{-1}(B(0, r_2)$ a discului de rază r_2 prin ϕ este conţinută în U_2. Scoţând punctul x, avem şirul de incluziuni

$$U_3^* \hookrightarrow U_2^* \hookrightarrow U_1^*$$

a carui compunere este incluziunea $U_3^* \hookrightarrow U_1^*$. La nivel de grupuri fundamentale obţinem

$$\pi_1(U_3^*) \to \pi_1(U_2^*) \to \pi_1(U_1^*).$$

Dar U_3^* şi U_1^* sunt homemorfe cu discul fără un punct, deci grupul lor fundamental este $\mathbb{Z}$. Mai mult, incluziunea $U_3^* \hookrightarrow U_1^*$ este o echivalenţă omotopică deci dă naştere la morfismul identitate $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la nivel de grupuri fundamentale. Dimpotrivă, U_2^* este omotop echivalent cu sfera S^{k-1}, deci este simplu conex. Am factorizat aşadar identitatea $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ prin grupul trivial, contradicţie! □

Tot folosind grupul fundamental, se arată:

douatr EXERCIŢIUL 15.5. Într-o suprafaţă combinatorică fiecare muchie se găseşte în exact două triunghiuri.

trsuc EXERCIŢIUL 15.6. Într-o suprafaţă combinatorică fiecare vârf se găseşte într-un şir de triunghiuri $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_k = \Delta_0$ astfel încât două triunghiuri consecutive să se intersecteze după o muchie şi oricare alte două să se intersecteze doar după vârf.

Vom introduce acum anumiţi invarianţi pentru suprafeţele combinatorice care vor fi necesari în teorema de clasificare.

16. Orientarea suprafeţelor

Ideea de orientabilitate poate fi explicată examinând banda lui Möbius. Dacă o creatură 2-dimensională care trăieşte pe banda lui Möbius parcurge cercul median o dată, la intoarcere va observa că ceea ce înainte considera ca fiind în dreapta acum se află în stânga sa. Dacă spaţiul în care trăim ar fi neorientabil atunci cineva mergând pe un astfel de drum s-ar întoarce cu inima în partea dreaptă! Pentru suprafeţe aşa ceva este posibil doar dacă conţin o bandă a lui Möbius în componenţă (conform lemei 16.8 de mai jos).

Vom defini noţiunea de orientare pentru suprafeţe combinatorice. Mai întâi trebuie să ştim ce înseamnă o orientare pe un triunghi (adică pe un simplex de dimensiune 2) şi apoi vom cere o orientare pe fiecare triunghi din simplex cu o anumită condiţie de compatibilitate. O orientare pe triunghi înseamnă un sens de parcurgere al laturilor sau o enumerare a vârfurilor; o permutare pară a ordinii de enumerare a vârfurilor va conduce la aceeaşi orientare.

Definiţia 16.1. Fie $\Delta = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ un $(k-1)$-simplex din $\mathbb{R}^n$. O *orientare* a lui Δ este o clasă de echivalenţă de vectori $(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$ unde $\sigma \in \Sigma_k$ este o permutare; doi astfel de vectori $(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$ şi $(v_{\sigma'(1)}, \dots, v_{\sigma'(k)})$ sunt echivalenţi dacă şi numai dacă $\sigma^{-1}\sigma'$ este o permutare pară, adică se poate scrie ca produsul unui număr par de transpoziţii.

Ne concentrăm acum pe cazul 2-dimensional. Pentru orice triunghi există două orientări posibile, cea trigonometrică şi cea invers trigonometrică, dacă privim triunghiul ca pe o figură inclusă în planul $\mathbb{R}^2$. O orientare induce şi un sens de parcurgere a laturilor, adică o orientare pe fiecare muchie: dacă (v_1, v_2, v_3) este o orientare pentru triunghiul $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, atunci (v_1, v_2) este orientarea indusă pe muchia $\langle v_1, v_2 \rangle$. Dacă două triunghiuri au în comun o latură spunem că orientările sunt *compatibile* dacă induc sensuri contrare pe latura comună. Se poate vedea dintr-un desen că definiţia concordă cu ideea empirică: două triunghiuri din plan care se intersectează pe o latura sunt orientate compatibil dacă şi numai dacă sensurile de rotaţie induse de orientări în fiecare punct din triunghiuri este acelaşi de-a lungul muchiei comune.

Definiţia 16.2. O orientare a unei suprafeţe combinatoriale K este o alegere a unei orientări pentru fiecare triunghi astfel încât pe muchii sensurile induse să fie opuse.

Definiţia are sens intrucât fiecare muchie se găseşte exact în două triunghiuri (exerciţiul 15.5). Să notăm că sfera şi torul sunt orientabile. Într-adevar, sfera se poate triangula printr-un tetraedru cu vârfuri $v_1, \dots, v_4$, care este frontiera tetraedrului plin. Fixând orientarea (v_1, v_2, v_3, v_4) pe tetraedrul plin, definim (v_i, v_j, v_k) ca fiind orientarea triunghiului $\langle v_i, v_j, v_k \rangle$ dacă adăugând al patrulea vârf v_l, cvartetul (v_i, v_j, v_k, v_l) este pozitiv orientat. Fie $\langle v_i, v_j \rangle$ o muchie; atunci (v_i, v_j, v_k) şi (v_i, v_j, v_l) sunt opus orientate (adăugând vectorul care lipseşte la fiecare triplet, obţinem cvartete opus orientate) deci orientările induse pe muchia $\langle v_i, v_j \rangle$ de pe $\langle v_i, v_j, v_k \rangle$ şi $\langle v_i, v_j, v_l \rangle$ sunt opuse.

Acelaşi argument arată că sfera n-dimensională este orientabilă.

Pentru tor folosim acelaşi argument, anume îl vedem ca frontiera torului plin. Fără a descrie explicit triangularea, acceptăm că torul plin se poate scrie ca un complex simplicial din $\mathbb{R}^3$. Mai general, fie K o suprafaţă combinatorică în $\mathbb{R}^3$ şi X un complex simplicial de dimensiune 3 din $\mathbb{R}^3$ a carui frontieră este K, în sensul următor:

- triunghiurile lui K sunt feţe în exact un tetraedru din X;
- triunghurile din X care nu sunt în K sunt feţele a exact două tetraedre din X.

Orice simplex 3-dimensional din $\mathbb{R}^3$ are o orientare indusă de pe $\mathbb{R}^3$ după cum urmează: cvartetul (v_1, v_2, v_3, v_4) este pozitiv orientat dacă şi numai dacă matricea cu coloanele $v_2 - v_1, v_3 - v_1, v_4 - v_1$ are determinantul pozitiv.

Exerciţiul 16.3. Definiţia de mai sus este compatibilă cu definiţia orientării, adică orientările (v_1, v_2, v_3, v_4) şi $(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, v_{\sigma(3)}, v_{\sigma(4)})$ diferă prin semnul permutării $\sigma \in \Sigma_4$.

Să verificăm că două simplexe din X care se interesectează după o faţă din K induc orientări opuse pe acea faţă. Dacă

Putem presupune că X este conex, altfel construim orientarea pe fiecare din componentele conexe ale lui X şi pe frontierele respective.

Folosind orientarea pe X definim o orientare pe K. Anume, fie $T = \langle v_1, v_2, v_3\rangle \in K$ şi $\langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle \in X$ unicul simplex din X care îl conţine pe T. Definim (v_1, v_2, v_3) ca fiind pozitiv orientat dacă (v_4, v_1, v_2, v_3) este pozitiv orientat în X. Din nou, se verifică uşor că definiţia este compatibilă cu permutările din Σ_3. Să demonstrăm compatibilitatea orientării pe K. Fie $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$ şi $\langle v_1, v_2, v_4\rangle$ două simplexe din K având o muchie comună. Fie $\langle v_5, v_1, v_2, v_3\rangle$ şi $\langle v_6 v_1, v_2, v_4\rangle$ unicele simplexe din X care conţin cele două simplexe din K drept feţe. Muchia $\langle v_1, v_2\rangle$ este conţinută exact în 2 simplexe din K. Considerăm toate 3-simplexele din X care conţin $\langle v_1, v_2\rangle$ şi feţele lor 2-dimensionale care conţin $\langle v_1, v_2\rangle$. Toate aceste feţe, cu excepţia celor două de mai sus, trebuie să apară exact de două ori printre aceste feţe, deci există un şir $w_1, \dots, w_k$ astfel ca $\langle v_1, v_2, w_j, w_{j+1}\rangle \in X$, cu $w_1 = v_3$ şi $w_2 = v_4$. Este uşor de văzut că (v_1, v_2, w_j) şi (v_1, v_2, w_{j+1}) moştenesc de pe X orientări opuse (adică induc rientări compatibile pe muchia comună (v_1, v_2)) deci obţinem compatibilitatea dorită.

Exemplul 16.4. Cilindrul se poate orienta. Împărţim dreptunghiul în triunghiuri, le orientăm pe fiecare şi când identificăm cele două segmente opuse observăm că sensurile induse sunt contrare. Alternativ, putem vedea cilindrul ca o sferă din care am scos două triunghiuri disjuncte; orientarea de pe sferă induce o orientare pe cilindru.

Exemplul 16.5. Banda lui Möbius nu poate fi orientată, adică nu există nici o triangulare pe care să avem o alegere bună de orientări.

Vom vedea că orientabilitatea unei suprafeţe triangulate $X \cong |K|$ este independentă de triangularea K. Orientabilitatea este deci o proprietate intrinsecă a suprafeţelor.

Avem nevoie de metode prin care să recunoaştem dacă o suprafaţă triangulată este orientabilă sau nu. În general, o suprafaţă este neorientabilă dacă şi numai dacă conţine o bandă Möbius. Ca să arătăm acest lucru pe suprafeţe triangulate, plecăm de la următoarea idee: considerăm un drum pe muchii închis şi construim o vecinătate a lui în suprafaţă. Obţinem un cilindru sau o banda Möbius.

DEFINIŢIA 16.6. Fie Γ un graf în K (adică un subcomplex de dimensiune 1 în K sau reuniune de muchii) unde K este o suprafaţă combinatorică. *Îngroşarea* lui Γ este prin definiţie reuniunea simplexelor din K_2 (a doua diviziune baricentrică) care îl ating pe Γ.

Îngroşarea lui $|\Gamma|$, notată cu $N(\Gamma)$, este o vecinătate a lui $|\Gamma|$ în $|K|$ echivalentă omotopic cu $|\Gamma|$. Alternativ, $N(\Gamma)$ poate fi privit ca reuniunea stelelor închise din K_2 cu vârfurile pe Γ (steaua închisă a unui vârf este închiderea stelei deschise, adică reuniunea tuturor simplexelor care conţin vârful respectiv).

LEMA 16.7. *Îngroşarea unui arbore este homeomorfă cu un disc închis.*

DEMONSTRAŢIE. Prin inducţie după numărul de laturi. Să presupunem că Γ conţine doar un vârf. Atunci $N(\Gamma)$ este steaua închisă a acelui vârf. Deoarece suntem într-o suprafaţă combinatorică se vede folosind exerciţiul 15.6 că obţinem un spaţiu homeomorf cu un disc închis. Fie acum Γ un arbore oarecare şi v un vârf de indice 1 (adică unit cu un singur alt vârf din graf, o frunză în limbaj de teoria grafurilor). Dacă înlăturăm din Γ acel vârf împreună cu muchia sa obţinem un arbore Γ_1 cu o muchie mai puţin. Din inducţie $N(\Gamma_1)$ e homeomorf cu un disc. Ca să obţinem înapoi $N(\Gamma)$ trebuie să mai adăugăm două stele închise din K_2, a vârfului scos şi a mijlocului muchiei eliminate. Aceste mulţimi (cele două stele şi $N(\Gamma_1)$) se intersectează după două segmente. Se vede uşor că reuniunea a două discuri închise care se intersectează pe un segment de pe frontieră sunt topologic tot un disc. $\square$

ingr

LEMA 16.8. *Îngroşarea unei curbe simple închise este un cilindru sau o bandă Möbius.*

DEMONSTRAŢIE. Fie E o muchie din curba pe care o eliminăm. Obţinem un arbore a cărui îngroşare este un disc din lema precedentă. Mai trebuie să adăugăm la acest disc steaua din K_2, baricentrului lui E. Această stea intersectează frontiera discului după două segmente disjuncte. Lipind după primul segment obţinem tot un disc. Acum avem un disc si trebuie să identificăm două segmente de pe frontieră. Alegem un homeomorfism astfel încât discul să devină pătratul unitate şi cele două segmente două laturi opuse. Acum avem două posibilităţi de a identifica cele două segmente şi obţinem sau cilindrul, sau banda lui Möbius dupa cum laturile sunt identificate direct sau prin răsucire cu 180° (Exemplele 3.4, 3.5). $\square$

seceuler

17. Caracteristica Euler

Un alt instrument în a decide că două suprafeţe nu sunt homeomorfe este caracteristica Euler. Rezultatul extraordinar în ceea ce priveşte suprafeţele este că împreună cu orientabilitatea, caracteristica Euler este un invariant suficient de puternic pentru o clasificare completă. Cu alte cuvinte, două suprafeţe compacte orientabile care au aceeaşi caracteristică Euler sunt Sunt foarte multe moduri posibile de a defini caracteristica Euler pentru un spaţiu compact, noi ne vom folosi de triangulări. Mertită menţionat că mai general, caracteristica Euler este un invariant omologic al spaţiilor topologice.

Definiţia 17.1. Fie L un complex simplicial de dimensiune n. *Caracteristica Euler* este suma alternată:

$$\chi(L) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \alpha_i$$

unde α_i este numărul de simplexe i-dimensionale din L. Pentru o suprafaţă combinatorică K avem formula clasică:

$$\chi(K) = v - m + f$$

unde v este numărul de vârfuri, m numărul de muchii şi f numărul de feţe.

De exemplu, pentru orice graf T are loc $\chi(T) \leq 1$, cu egalitate dacă şi numai dacă T este arbore.

Teorema 17.2. *Orice suprafaţă compactă este triangulabilă.*

Nu vom demonstra această teoremă. Nici nu este uşor. Putem construi triangulări pentru cazuri particulare de suprafeţe. De exemplu, pentru sferă, orice poliedru cu toate feţele triunghiuri este o triangulare. Din construcţia cu topologia factor a torului şi a planului proiectiv se pot obţine şi triangulări pentru aceste suprafeţe, dar e nevoie de puţină atenţie fiindcă două simplexe au voie să se intersecteze doar după o faţă comună.

Acum este într-adevăr o problemă invarianţa caracteristicii Euler la diverse triangulări. Un caz particular de invarianţă a fost demonstrat în teorema 2.1 Vom demonstra cazul general folosind legătura cu omologia singulară. Totuşi se poate verifica faptul că $\chi(K) = \chi(K_1)$ (prima diviziune baricentrică).

Exerciţiul 17.3. Arătaţi că următoarele două spaţii nu sunt homeomorfe: $\{z \in \mathbb{C}; |z|\langle 1\} \cup \{|z| = 1; arg(z) \in (-\pi/2, \pi/2)\}$ şi $\{z \in \mathbb{C}; |z|\langle 1\}$.

18. Spaţii proiective

Definiţia 18.1. Fie k un corp. Spaţiul proiectiv de dimensiune n peste k este $kP^n := \{P \in k^{n+1} \setminus \{0\}\}/\sim$ unde $P \sim \lambda P\ \forall \lambda \in k \setminus \{0\}$.

Privit puţin altfel, spaţiul proiectiv este un spaţiu ale cărui puncte sunt dreptele ce trec prin origine. Fie $U_j \subset kP^n$, $j = 0, \ldots, n$:

$$U_j = \{[a_0 : \ldots : a_n];\ a_j \neq 0\}$$

Fiecare U_j se află în bijecţie cu k^n:

$$\varphi_j([a_0 : \ldots : a_n]) = (\frac{a_0}{a_j}, \ldots, \frac{a_{j-1}}{a_j}, \frac{a_{j+1}}{a_j}, \ldots, \frac{a_n}{a_j}).$$

Mai mult, două aplicaţii φ se compun după formula:

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : k \times \ldots \times k^* \times \ldots \times k \to k \times \ldots \times k^* \times \ldots \times k,$$

$$\begin{aligned} \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n) &= \varphi_i([x_1, \ldots, x_{j-1}, 1, x_{j+1}, \ldots, x_n]) \\ &= (\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{1}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}) \end{aligned}$$

Cu aceste calcule observăm că $\mathbb{R}P^n$ poate fi transformat într-o varietate diferenţiabilă, iar $\mathbb{C}P^n$ într-o varietate "olomorfă" (analitică).

$\mathbb{R}P^2$, planul proiectiv real, este deci o suprafaţă. Va trebui să îl regăsim în lista de suprafeţe din teorema de clasificare. Vrem să obţinem o descriere mai simplă a lui. După o primă identificare în $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ a punctului x cu $x/|x|$ (ceea ce corespunde geometric la a identifica x cu punctul în care semidreapta prin x inţeapă sfera S^2), observăm că $\mathbb{R}P^2$ este sfera unitate pe care identificăm punctele antipodale. Renunţând la jumătate de sferă, putem privi planul proiectiv ca un disc închis, pe care identificăm punctele antipodale de pe frontieră. Altfel spus, obţinem descrierea pe care am dat-o şi în exemplul 3.7: un dreptunghi cu laturile opuse identificate două câte două în sensuri contrare.

19. Teorema lui Euler revizitată

Vom repeta construcţia din teorema 2.1, doar că acum pentru o suprafaţă combinatorică oarecare.

Definiţia 19.1. Fie K o suprafaţă combinatorică şi Γ un arbore maximal. Ştim că Γ conţine toate vârfurile lui K. Graful dual T al lui Γ este sub-complexul simplicial în prima diviziune baricentrică K_1 format din toate simplexele disjuncte de Γ.

Putem descrie T după cu urmează: vârfurile lui T sunt baricentrele tuturor feţelor lui K precum şi ale tuturor muchiilor lui K care nu se află în Γ. Muchiile lui T prin definiţie leaga baricentrul G_F al unui triunghi F cu baricentrul G_m al unei muchii m dacă muchia m este conţinutăîn F. Deoarece orice 2-simplex din K_1 conţine un vârf din K, iar toate aceste vârfuri sunt conţinute în arborele maximal Γ, rezultă că T nu conţine triunghiuri, deci este într-adevăr un graf.

Graful T nu este neapărat arbore. Acest lucru se întâmpla totuşi pentru sferă. Să mai observăm că reuniunea îngroşărilor $N(\Gamma) \cup N(T)$ este realizarea geometrică $|K|$. Pe de altă parte, $N(\Gamma) \cap N(T)$ este frontiera lui $N(\Gamma)$, deci homeomorfă cu un cerc.

Următoarea teoremă va reprezenta primul pas către teorema de clasificare.

euler Teorema 19.2 (Euler). *Fie K o suprafaţă combinatorică. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

- *orice curbă simplă închisă formată pe muchii din K_1 separă $|K|$;*
- $\chi(K) = 2$*;*
- $|K|$ *e homeomorf cu sfera.*

Sfera devine astfel punctul de plecare în teorema de clasificare. Această teoremă a lui Euler ne dă două moduri de a recunoaşte sfera, fie prin caracteristica Euler, fie prin faptul că orice curbă închisă separă realizarea geometrică.

Demonstraţie. Fie T un arbore maximal în K şi Γ graful său dual. Mai întâi câteva observaţii care ne vor ajuta şi să demonstrăm că Γ e conex. Fie Γ_1 prima diviziune baricentrică, subcomplex în K_1. Γ_1 are ca vârfuri baricentrele feţelor lui K şi baricentrele muchiilor din $K \setminus T$. Nu e greu de văzut acum (eventual pe un desen) că:

- $N(T) \cup N(\Gamma) = |K|$;

- $N(T)$ şi $N(\Gamma)$ se intersectează după un cerc, adică după frontiera lui $N(T)$

Acum Γ este conex dacă şi numai dacă $N(\Gamma)$ este conex. Două puncte x şi y din $N(\Gamma)$ se pot uni printr-un drum în $|K|$. Fie p şi q primul şi ultimul punct în care acest drum intersectează frontiera lui $N(T)$. Obţinem acum un drum între x şi y în $N(\Gamma)$ după cum urmează: urmărim drumul iniţial de la x la p, mergem pe frontiera lui $N(\Gamma)$ de la p la q şi din nou pe drumul iniţial de la q la y. Deci Γ este conex, adică acum am demonstrat că este un graf.

Vârfurile din K sunt vârfuri în T. Feţele din K sunt vârfuri în Γ. Muchiile din K sunt muchii în T sau generează o muchie în Γ. Se vede uşor că $\chi(K) = \chi(T) + \chi(\Gamma) = 1 + \chi(\Gamma)$.

(1) $\Rightarrow$ (2) Să arătăm că Γ este un arbore. Presupunem că conţine un ciclu. Din ipoteză acest ciclu separă $|K|$. Fiecare componentă a lui $|K|$ fără acest ciclu trebuie să conţină un vârf. Acele vârfuri sunt şi în T şi se contrazice conexitatea lui T împreună cu T şi Γ disjuncte. Astfel Γ este arbore, $\chi(\Gamma) = 1$ şi deci $\chi(K) = 2$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Dacă $\chi(K) = 2$ atunci $\chi(\Gamma) = 1$ şi deci Γ este arbore. Atunci $N(\Gamma)$ este un disc, iar $|K|$ este reuniunea a două discuri lipite pe frontieră, deci $|K|$ este homeomorf cu sfera.

(3) $\Rightarrow$ (1) Avem o sferă şi trebuie să arătăm că orice curbă poligonală închisă separă suprafaţa. Aceasta este teorema lui Jordan jordan 6.9.

$\square$

chimmd

Corolar 19.3. *$\chi(K) \leq 2$ pentru orice suprafaţă combinatorică K, cu egalitate pentru $|K|$ homeomorf cu sfera.*

Demonstraţie. $\chi(K) = 1 + \chi(\Gamma)$, iar $\chi(\Gamma) \leq 1$ cu egalitate pentru Γ arbore. $\square$

20. Chirurgie

Acum că am "fixat" sfera ca o suprafaţă centrală în teorema de clasificare, avem nevoie de o metodă prin care plecând de la orice suprafaţă prin diverse transformări să ajungem la sferă. Fie o suprafaţă oarecare. Dacă nu e sfera atunci caracteristica Euler e mai mică strict decât 2 şi există o curbă închisă care nu separă. Tăind suprafaţă după acea curbă obţinem o suprafaţă cu bordul unul sau două cercuri (în funcţie de îngroşarea curbei care nu separa). Acoperind acele cercuri cu unul sau două discuri obţinem o nouă suprafaţă fără bord şi, ce e mai important, cu caracteristica Euler mai mare cu 1 sau cu 2. În felul acesta, printr-un număr finit de paşi, vom ajunge la o suprafaţă cu caracteristica Euler maximul posibil; potrivit corolarului chimmd 19.3, maximul caracteristicii Euler se atinge pentru sferă.

Am descris în linii mari operaţia de chirurgie pentru suprafeţe. Descrierea a fost topologică şi aşa şi trebuie gândită. Noi am lucrat însă numai cu trinagulări şi pentru avea la îndemână instrumente precum caracteristica Euler trebuie să lucrăm tot cu suprafeţe combinatoriale.

Definiţia 20.1. Fie K o suprafaţă combinatorială şi L subcomplex în K o curbă simplă închisă. Fie $N(L)$ îngroşarea lui L, subcomplex în K_2. Ştim că $N(L)$ este fie un cilindru, fie banda lui Möbius. Fie M complementul în K_2 a lui $N(L)$ (simplexele din K_2 care nu îl ating pe $N(L)$, împreună cu feţele lor). Dacă $N(L)$ este un cilindru, atunci $|M|$ este o suprafaţă cu bordul compus din două cercuri, L_1 şi L_2. Definim suprafaţa combinatorică:

$$K_* = M \cup CL_1 \cup CL_2$$

unde CL_1 şi CL_2 sunt conurile simpliciale peste L_1 şi L_2. Dacă $N(L)$ este banda lui Möbius, atunci bordul lui $|M|$ este format dintr-un singur cerc L_1. În acest caz:

$$K_* = M \cup CL_1$$

În ambele cazuri K_* este suprafaţa obţinută din K prin chirurgie de-a lungul lui L.

Vrem să calculăm $\chi(K_*)$ în funcţie de $\chi(K)$. Un prim rezultat este următoarea lemă, uşor de verificat.

Lema 20.2. *Fie K şi L două complexe simpliciale care se intersectează după un subcomplex simplicial comun. Atunci:*

$$\chi(K \cup L) = \chi(K) + \chi(L) - \chi(K \cap L).$$

Vom calcula pe rand caracteristica Euler a fiecarui complex care apare în definiţia chirurgiei. $\chi(L) = 0$ fiindcă L este o curbă simplă închisă. Acum $N(L)$ este omotop cu L şi va avea aceaşi caracteristică Euler. Noi nu am demonstrat asta, dar urmărind complexele din K_2 se poate arăta că într-adevăr $\chi(N(L))$=0. $\chi(L_1) = \chi(L_2) = 0$ fiind cercuri, iar $\chi(CL_1) = \chi(CL_2) = 1$, după cum se poate verifica. Obţinem următoarea teoremă, pe care de altfel o şi aşteptam:

Teorema 20.3. $\chi(K_*) > \chi(K)$ *pentru orice K şi orice L curbă de-a lungul căreia are loc chirurgia.*

Demonstraţie. Dacă îngroşarea lui L este un cilindru, atunci avem:

$$\chi(K_*) = \chi(M) + \chi(CL_1) + \chi(CL_2) - \chi(L_1) - \chi(L_2) = \chi(M) + 1 + 1 = \chi(M) + 2.$$

Dacă îngroşarea lui L este banda lui Möbius, atunci:

$$\chi(K_*) = \chi(M) + \chi(CL_1) - \chi(L_1) = \chi(M) + 1 = \chi(M) + 1.$$

Totodată:

$$\chi(K) = \chi(K_2) = \chi(M) + \chi(N(L)) - \chi(M \cap N(L)) = \chi(M).$$

□

Corolar 20.4. *Plecând de la orice suprafaţă combinatorică printr-un număr finit de chirurgii se obţine sfera.*

Demonstraţie. Dacă suprafaţa nu este homeomorfă cu sfera atunci are caracteristica Euler mai mică strict decât 2 şi există o curbă poligonală simplă închisă care nu separă suprafaţa. Făcând chirurgie în lungul acelei curbe, obţinem o suprafaţă cu caracteristica Euler strict mai mare. După un număr finit de paşi trebuie să ajungem la o suprafaţă cu caracteristica maximă, adică 2; din teorema 19.2 şi corolarul ei, această suprafaţă este un poliedru homeomorf cu sfera. □

Pentru a recupera suprafaţa iniţială avem nevoie de o operaţie inversă chirurgiei. Fie K o suprafaţă combinatorică. În cazul în care chirurgia a fost făcută după un cilindru, atunci avem D_1 şi D_2 subcomplexe în K homeomorfe cu discuri. Scoatem interioarele acestor discuri şi pe cele două cercuri rămase ataşăm un cilindru. Acest cilindru trebuie triangulat şi se lipeşte ca subcomplex. Din nou operaţia a fost prezentată din punct de vedere al triangulărilor, dar ea trebuie gândită pur topologic. E ca şi când am adăuga un mâner suprafeţei. În cazul în care chirurgia a fost făcută după o bandă a lui Möbius, pe suprafaţă avem un disc, pe care îl înlăturăm şi lipim o bandă a lui Möbius (a cărei frontieră este un cerc). Putem enunţa acum teorema de clasificare.

Teorema 20.5. *Orice suprafaţă compactă, fără bord e homeomorfă cu exact una din suprafeţele din lista de mai jos:*

- $H(p)$ *sfera cu* p *mânere ataşate,* $p \in \mathbb{N}$. *Acestea sunt suprafeţele orientabile;*
- $M(q)$ *sfera cu* q *benzi a lui Möbius ataşate,* $q \in \mathbb{N}^*$. *Acestea sunt suprafeţele neorientabile.*

Observaţia 20.6. Cilindrul trebuie adăugat corect la sferă, adică suprafaţa să rămână orientabilă.

Exerciţiul 20.7. Cu care suprafaţă din lista de clasificare sunt homeomorfe spaţiile următoare:

(1) sticla lui Klein?
(2) $\mathbb{R}P^2$?
(3) colacul cu 4 găuri?
(4) torul la care lipim o bandă Möbius?
(5) $H(p)$ la care lipim greşit un cilindru?

21. Teorema de clasificare

Pentru demonstraţia teoremei de clasificare a suprafeţelor vom arăta, folosind în esenţă caracteristica Euler, că orice suprafaţă simplicială este homeomorfă cu una din suprafeţele din enunţ. Apoi folosind grupul fundamental vom demonstra ca toate suprafeţele din teorema de clasificare sunt diferite între ele.

Demonstraţie. Primul pas din demonstraţie, că orice suprafaţă compactă se poate triangula, nu îl vom demonstra. Fie deci K o suprafaţă combinatorică. Dacă $\chi(K) = 2$ atunci din teorema euler 19.2, $|K|$ este homeomorfă cu sfera S^2. Dacă nu, mărim prin chirurgie caracteristica Euler, până ajungem la sferă. Avem acum o sferă cu câteva cercuri decupate. În cazul în care K este orientabilă, nu avem benzi Möbius şi obţinem suprafaţa initială din sferă prin adăugarea unui număr de mânere. Dacă la unul din paşii de chirurgie am lipit o bandă Möbius pe sferă, atunci adăugarea unui mâner este echivalentă cu adăugarea a două benzi Möbius. Asta fiindcă nu mai contează dacă mânerul îl adăugam corect sau greşit (îl putem "plimba" pe banda lui Möbius şi la o parcurgere se răsuceşte). Adăugarea unui mâner în mod "greşit" este echivalentă cu suma conexă cu sticla lui Klein, care este echivalentă la rândul ei cu adăugarea a două benzi Möbius.

Trebuie să mai arătăm că printre suprafeţele $H(p)$ şi $M(q)$ nu există două homeomorfe între ele. Deoarece vrem să arătăm că nu există homemorfisme între anumite suprafeţe, va trebui sa folosim invarianţii algebrici ai spaţiilor topologice. Un candidat ar fi caracteristica Euler împreună cu orientabilitatea. Din păcate nu am arătat încă despre caracteristica Euler că este invariantă la homeomorfism, de fapt la diverse triangulări. Avem însă la dispoziţie un alt invariant algebric suficient de puternic pentru a rezolva problema: grupul fundamental.

Pentru a calcula grupul fundamental al suprafeţelor avem nevoie de ceea ce se numeşte simbolul principal. Ştim să obţinem suprafeţe precum torul, sticla lui Klein sau planul proiectiv din patrulatere pentru care identificăm perechi de laturi, în acelaşi sens sau în sensuri contrare. Simbolul principal va însemna "citirea" acestor laturi. Parcurgem frontiera patrulaterului într-un sens şi pentru fiecare latură scriem a sau a^{-1} dacă sensul în care se identifică acea latură corespunde sau nu cu sensul de parcurgere a frontierei. De exemplu pentru tor simbolul principal este: $aba^{-1}b^{-1}$. Pentru planul proiectiv: $abab$, dar asta este echivalent cu aa, adică o figură cu două laturi pe care le identificăm în sens contrar. Pentru sticla lui Klein obţinem $abab^{-1}$, dar vom prefera să folosim un alt simbol echivalent.

Putem privi suprafeţele orientabile $H(p)$ ca suma conexă dintre p toruri, iar suprafeţele neorientabile $M(q)$ ca suma conexă dintre q plane proiective. Simbolul princilal al torului este $aba^{-1}b^{-1}$. Se poate arăta prin inducţie că simbolul principal al suprafeţei $H(P)$ este:

$$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}\dots a_pb_pa_p^{-1}b_p^{-1}$$

,adică suprafaţa se obţine dintr-o figură cu $4p$ laturi identificate după cum arată simbolul principal. Pentru planului proiectiv simbolul principal este aa. În mod asemănător se demonstrează că simbolul principal al suprafeţei $M(q)$ este:

$$a_1a_1a_2a_2\dots a_qa_q.$$

Sticla lui Klein este $M(2)$, deci are simbolul principal $aabb$.

Pentru a calcula grupul fundamental al acestor suprafeţe vom folosi teorema lui Van Kampen. Vom scoate un disc din interiorul poligoanelor. Ce rămâne este omotop echivalent cu frontiera poligonului. Discul are bineînţeles grupul fundamental trivial, intersecţia spaţii lor este un cerc, deci are grupul fundamental $\mathbb{Z}$. Fie mai întâi $H(p)$ o suprafaţă orientabilă. $H(p)$ fără un disc este omotop cu frontiera poligonului cu $4p$ laturi care după identificări devine figura formată din $2p$ cercuri cu un punct comun. Grupul fundmental al acestui spaţiu este produsul liber a lui $\mathbb{Z}$ de $2p$ ori, un sistem de generatori fiind $a_1, b_1, \dots a_p, b_p$. Teorema lui Van Kampen ne spune că trebuie să mai adăugăm câteva relaţii. Luăm frontiera discului care a fost scos. Acest cerc generează grupul fundamental al intersecţiei. Privit ca o buclă pe disc acesta poate fi omotopat la un punct. În poligon se omotopează la frontieră. Avem:

$$\pi_1(H(p)) = \{a_1, b_1, \dots, a_p, b_p | \prod_{j=1}^{p} a_jb_ja_j^{-1}b_j^{-1} = e\}$$

adică un grup cu $2p$ generatori şi cu o singură relaţie. În mod similar:

$$\pi_1(M(q)) = \{a_1, a_2, \ldots, a_q | a_1^2 a_2^2 \ldots a_q^2 = e\}$$

Am ilustrat aici modul în care topologia algebrică funcţionează. Am avut o problemă de topologie: să arătăm că anumite suprafeţe nu sunt homeomorfe. Am ales un invariant algebric suficient de puternic pentru problema noastră: grupul fundamental. Am făcut câteva calcule pentru a obţine o descriere algebrică a grupurilor fundamentale. Acum am rămas cu o problemă de algebră: să arătăm că nişte grupuri nu sunt izomorfe.

Pentru a rezolva această problemă de algebră vom abelianiza grupurile. Abelianizatul lui $\pi_1(H_p)$ devine grupul liber abelian $\mathbb{Z}^{2p}$, iar abelianizatul lui $\pi_1(M(q))$ este grupul $\{x_1, x_2, \ldots, x_q | (x_1 x_2 \ldots x_q)^2 = e\}$. Sa observăm că $\{x_1 x_2 \ldots x_q, x_2, \ldots, x_q\}$ formează un sistem de generatori pentru acest grup abelian, care este deci izomorf cu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^{q-1}$. Evident abelianizările nu sunt izomorfe între ele deoarece au ranguri diferite, deci nici grupurile iniţiale nu erau izomorfe. $\square$

Suprafaţa $H(P)$ se numeşte *suprafaţa standard orientabilă de gen* p, iar $M(q)$ se numeşte *suprafaţa standard neorientabilă de gen* q.

22. Structuri diferenţiale şi analitice

Există structuri mai bogate decât cea topologică pe varietăţi.

DEFINIŢIA 22.1. Fie X o suprafaţă topologică. Un *atlas* pe X este o acoperire $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ cu deschişi homeomorfi cu deschişi din $\mathbb{R}^2$,

$$\phi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \subset \mathbb{R}^2.$$

Aplicaţiile ϕ_α se numesc *hărţi* iar

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

sunt *schimbările de coordonate*. Atlasul $\mathcal{U}$ se numeste atlas C^∞, respectiv olomorf, dacă schimbările de coordonate sunt funcţii de clasă C^∞, respectiv olomorfe (în acest din urmă caz, folosim identificarea canonică $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$).

Pentru fiecare suprafaţă compactă există o unică structură diferenţiabilă C^∞. În acest moment putem vorbi şi despre spaţiul tangent. Există şi produse scalare pe acest spaţiu şi aceste suprafeţe devin *varietăţi riemanniene*.

Pentru suprafeţele orientabile fibratul tangent este orientabil. În acest moment apare problema existenţei structurilor complexe.

DEFINIŢIA 22.2. Fie V un spaţiu vectorial real. O structură complexă pe acest spaţiu este o aplicaţie liniară $J : V \to V$ astfel încât $J \circ J = -1$ (adică $J^2(v) = -v$).

Un spaţiu vectorial real împreună cu o structură complexă devine un spaţiu vectorial complex, înmulţirea cu i fiind dată exact de aplicaţia J. O structură complexă pe fibratul tangent înseamnă o structură aproape complexă pe varietate.

Pentu o varietate două metrici sunt conforme dacă induc aceiaşi structură complexă pe fibratul tangent.

TEOREMA 22.3. *În fiecare clasă conformă (clase de metrici care sunt conforme una cu cealaltă) pe a suprafaţă există o metrică cu curbura constantă, unică până la o constantă multiplicativă.*

TEOREMA 22.4 (Gauss-Bonnet). *Fie g o metrică Riemanniană oarecare pe o suprafaţă orientabilă închisă. Notăm cu dg forma volum şi cu κ curbura Gaussiană. Atunci*

$$\int_M \kappa dg = 2\pi\chi(M).$$

In particular, pentru metrici de curbură constantă avem $\kappa\mathrm{vol}(M) = 2\pi\chi(M)$. Semnul curburii este deci acelaşi cu semnul caracteristicii Euler!

23. Acoperirea universală

Fie M o suprafaţă. $\tilde{M}$ este un spaţiu de acoperire pentru M dacă există o aplicaţie $\pi : \tilde{M} \to M$ astfel încât pentru fiecare $x \in M$ există o vecinătate $V \subset M$ a lui x astfel încât $\pi^{-1}(V)$ este reuniune disjunctă de mulţimi U_α şi restricţia lui π la fiecare U_α este un homeomorfism între U_α şi V.

EXEMPLUL 23.1. Exemplu standard este $\exp : \mathbb{R} \to S^1$, adică $\mathbb{R}$ este un spaţiu de acoperire pentru cerc.

EXEMPLUL 23.2. Sfera S^2 este spaţiu de acoperire pentru planul proiectiv. Aplicaţia de acoperire este $x \longrightarrow [x]$. Fibra fiecărui punct din planul proiectiv are exact două elemente.

Dacă în plus spaţiul de acoperire pentru M este simplu conex atunci el se numeşte acoperirea universală a lui M. Dreapta reală este acoperirea universală a cercului. Sfera este acoperirea universală a planului proiectiv. Aoperirea universală a torului este planul.

PROPOZIŢIA 23.3. *Orice varietate conexă are o unică acoperire universală.*

Pentru suprafeţele cu caracteristica Euler strict pozitivă, curbura este strict pozitivă (Gauss-Bonnet) şi acoperirea universală este sfera. Pentru cele două suprafeţe cu caracteristica 0 acoperirea universală este planul, iar pentru celelalte semiplanul Poincaré.

DEFINIŢIA 23.4. Semiplanul Poincaré este suprafaţa $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$ împreună cu metrica $g = \frac{1}{y^2}(dx \otimes dx + dy \otimes dy)$.

OBSERVAŢIA 23.5. $\mathbb{H}^2, S^2, T^2$ pot fi organizate ca suprafeţe complexe.

PROPOZIŢIA 23.6. *Izometriile lui $\mathbb{H}^2$ sunt transformările $z \to \frac{az+b}{cz+d}$ unde $ad - bc > 0$.*

EXERCIŢIUL 23.7. Banda lui Möbius răsucită de două ori poate fi deformată la un cilindru în $\mathbb{R}^4$?

EXERCIŢIUL 23.8. Folosind aplicaţia stereografică găsiţi un atlas pentru S^2 cu schimbările de hartă olomorfe. Cu alte cuvinte, S^2 este varietate complexă.

24. Omologie simplicială

Vom defini acum grupurile de omologie pentru spaţii topologice. Există mai multe moduri de a face asta, noi am ales *omologia simplicială* adică triangulăm mai întâi spaţiile. Ca şi până acum, nu va fi evident la început că obiectele definite sunt invarianţi la diverse triangulări. Vom demonstra acest fapt folosind omologia singulară în secţiunile următoare.

Fie deci K un complex simplicial în $\mathbb{R}^n$. Definim K_d mulţimea simplexelor din K de dimensiune d. Un simplex împreună cu o orientare se numeşte simplex orientat. Pentru orice simplex orientat σ, notăm cu σ^- acelaşi simplex dar cu orientarea opusă.

DEFINIŢIA 24.1. Spaţiul lanţurilor de dimensiune d pe complexul simplicial K este grupul abelian $C_d(K)$ generat de toate simplexele orientate de dimensine d din K, împreună cu relaţile $\sigma^- = -\sigma$ pentru fiecare simplex orientat $\sigma \in K_d$.

Un element din $C_d(K)$ se numeşte un lanţ de dimensiune d şi poate fi privit ca o sumă formală $\lambda_1\sigma_1 + \lambda_2\sigma_2 + \ldots + \lambda_s\sigma_s$ unde σ_i sunt simplexe din K_d iar λ_i sunt numere întregi. Mai trebuie ştiut că $(-\lambda)\sigma = \lambda\sigma^-$.

Bineînţeles că grupurile depind de triangulare. Următorul pas din construcţia grupurilor de omologie (care vor depinde doar de $|K|$, nu de triangularea K) este să definim aplicaţii între grupurile de lanţuri. Vor fi nişte morfisme de bord, adică fiecărui lanţ îi asociem într-un fel "bordul" lui, un lanţ de dimensiune cu 1 mai mică.

Fie $\sigma = \langle p_0, p_1, \ldots, p_d\rangle$ un simplex orientat de dimensiune d. Bordul lui σ este prin definiţie suma feţelor lui de dimensiune $d-1$. Trebuie să mai fim atenţi la orientări. Definim deci:

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^{d} (-1)^i \langle p_0, p_1, \ldots, \hat{p}_i, \ldots, p_d\rangle$$

DEFINIŢIA 24.2. Pentru fiecare d definim morfismul de grupuri $\partial_d : C_d(K) \to C_{d-1}(K)$ care pe generatori acţionează conform formulei de mai sus.

Este necesar să ne convingem că $\partial\sigma^- = -\partial\sigma$ pentru ca definiţia de mai sus să fie coerentă.

EXEMPLUL 24.3. Fie $\langle p_0, p_1\rangle$ un segment. Atunci $\partial_1\langle p_0, p_1\rangle = p_1 - p_0$. Fie $\langle p_0, p_1, p_2\rangle$ un triunghi. Atunci $\partial_2\langle p_0, p_1, p_2\rangle = \langle p_1, p_2\rangle - \langle p_0, p_2\rangle + \langle p_0, p_1\rangle$.

Ceea ce face ca lucrurile să funcţioneze este o formulă des întâlnită în diferite domenii ale matematicii:

PROPOZIŢIA 24.4. $\partial_{d-1} \circ \partial_d = 0$ *pentru orice* d *natural nenul.*

Demonstraţie. Este suficient să demonstrăm formula pentru generatori, adică pentru un simplex oarecare din K_d. Fie $\langle p_0, \ldots, p_d\rangle \in K_d$.

$$\begin{aligned}\partial^2\langle p_0, \ldots, p_d\rangle =&\partial \sum_{i=0}^{d}(-1)^i(\langle p_0, \ldots, \hat{p}_i, \ldots, p_d\rangle\\ =&\sum_{i=0}^{d}(-1)^i\partial\langle p_0, \ldots, \hat{p}_i, \ldots, p_d\rangle\\ =&\sum_{i=0}^{d}(-1)^i\sum_{j=i+1}^{d}(-1)^{j-1}\langle p_0, \ldots, \hat{p}_i, \ldots, \hat{p}_j, \ldots, p_d\rangle\\ &+\sum_{i=0}^{d}(-1)^i\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\langle p_0, \ldots, \hat{p}_j, \ldots, \hat{p}_i, \ldots, p_d\rangle\end{aligned}$$

Membrul drept este 0 deoarece fiecare simplex $\langle p_0, \ldots, \hat{p}_k, \ldots, \hat{p}_l, \ldots, p_d\rangle$ apare o dată în prima sumă pentru $i = k, j = l$ cu semnul $(-1)^{k+l-1}$ şi a doua oară în a doua sumă pentru $j = k, i = l$ cu semnul $(-1)^{k+l}$. □

Ceea ce am obţinut este un *lanţ omologic* sau *complex diferenţial*, adică un şir de grupuri $C_d(K)$ împreună cu nişte aplicaţii $\partial_d : C_d(K) \to C_{d-1}(K)$ pentru care $\partial_{d-1} \circ \partial_d = 0$:

$$\ldots . \xrightarrow{\partial_{d+1}} C_d(K) \xrightarrow{\partial_d} \ldots \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \to 0.$$

Ultima relaţie este echivalentă cu $\mathrm{Im}\partial_{d+1} \subset \ker \partial_d$. Vom nota această structură cu $C(K)$.

Definiţia 24.5. Definim $H_d(K) = \ker(\partial_d)/\mathrm{Im}(\partial_{d+1})$ ca fiind al d-ulea grup de omologie.

Observaţia 24.6. În algebra omologică toate grupurile sunt comutative. În particular, nu avem nici o problemă cu grupul factor din definiţia grupurilor de omotopie; orice subgrup într-un grup comutativ este normal.

Un element din $\ker(\partial_d)$ se numeşte *ciclu*. Un element din $\mathrm{Im}(\partial_{d+1})$ se numeşte *frontieră*. Orice frontieră este şi ciclu, dar nu orice ciclu este şi frontieră. Altfel omologia ar fi 0 tot timpul; de fapt, chiar asta măsoarăomologia: ciclii care nu sunt frontiere.

Propoziţia 24.7. *$H_0(K)$ este grupul liber abelian cu rangul egal cu numărul de componente conexe a lui $|K|$.*

Demonstraţie. $\ker(\partial_0)$ este $C_0(K)$ deoarece ∂_0 este definită cu valori în grupul nul (nu avem simplexe de dimensiune -1). Pentru două puncte din aceaşi componentă a lui $|K|$ există un drum pe muchii care le uneşte, deci sunt omotope (diferenţa lor este o imagine prin ∂_1 a unui ciclu din $C_1(K)$). Două puncte din componente diferite nu pot fi omotope. Deci $H_0(K)$ este suma direcă a lui $\mathbb{Z}$ de numărul de componente conexe a lui $|K|$ ori. □

PROPOZIŢIA 24.8. *Fie K o varietate combinatorică de dimensiune n conexă. Atunci $H_n(K) = \mathbb{Z}$ dacă K e orientabilă şi $H_n(K) = 0$ altfel.*

DEMONSTRAŢIE. Imaginea lui ∂_{n+1} este 0, deoarece este definit pe grupul nul (nu avem simplexe de dimensiune $n+1$). Ne interesează doar $\ker(\partial_n)$.

$$\ker(\partial_n) = \{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i T_i | \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \partial_n(T_i) = 0; T_i \in K_n \text{ simplex orientat}\}$$

Fiecare $S \in K_{n-1}$ apare ca faţă în exact două simplexe din K_n, să spunem T_i şi T_j. Atunci coeficientul lui S este $\pm\lambda_i \pm \lambda_j$, semnele în funcţie de orientări. Deci toţi coeficienţi din sumă trebuie să aibe acelaşi modul, iar orientările alese astfel încât să inducă orientări diferite pe feţe. O astfel de alegere este posibilă doar dacă varietatea este orientabilă. □

După această demonstraţie avem o definiţie mai "profesionistă" a orientabilităţii. O varietate de dimensiune n este orientabilă dacă H_n este $\mathbb{Z}$, iar o orientare este unul dintre cei doi generatori ai acestui grup.

TEOREMA 24.9. *Dacă $|K|$ este conex atunci $H_1(K)$ este abelianizatul lui $\pi_1(|K|)$*

DEMONSTRAŢIE. Am demonstrat că $\pi_1(|K|)$ este izomorf cu $E(K)$ (grupul de drumuri pe muchii), iar descrierea lui $E(K)$ era foarte apropriată de definiţia lui H_1, deci e normal să lucrăm cu $E(K)$. Fie $p \in K^{(0)}$ şi un drum pe muchii din $E(K,p)$, $\alpha = pp_1p_2\ldots p_kp$. Acestui drum îi putem asocia un 1-lanţ $z(\alpha) = \langle p, p_1\rangle + \langle p_1, p_2\rangle + \ldots + \langle p_k, p\rangle$, omiţând $\langle p_i, p_{i+1}\rangle$ de fiecare dată când $p_i = p_{i+1}$. E uşor de văzut că $z(\alpha) \in \ker(\partial_1)$ şi că dacă două drumuri diferă printr-o mişcare elementară atunci lanţurile asociate sunt omotope. Deci $\alpha \to z(\alpha)$ defineşte un morfism $\Phi : E(K,p) \to H_1(K)$.

Să arătăm mai întâi că Φ este surjectiv. Fie $c \in \ker(\partial_1)$. Putem descompune pe c în sume de ciclii elemenari: $c = (\langle w_1, w_2\rangle + \langle w_2, w_3\rangle + \ldots + \langle w_s, w_1\rangle) + (\langle v_1, v_2\rangle + \langle v_2, v_3\rangle + \ldots + \langle v_r, v_1\rangle) + (\ldots)$. Adăugând şi scăzând muchia $\langle w_1, v_1\rangle$ îl putem aduce la forma: $c = \langle p_1, p_2\rangle + \langle p_2, p_3\rangle + \ldots + \langle p_k, p_1\rangle$. Unim pe p cu p_1 printr-un drum γ şi definim $\alpha = \gamma p_1p_2\ldots p_kp_1\gamma^{-1}$. Se vede uşor că $z(\alpha) = c$, deci Φ este surjectiv.

Pentru a rezulta concluzia teoremei trebuie să arătăm egalitatea dintre $\ker(\Phi)$ şi subgrupul comutator a lui $E(K,p)$ şi folosim apoi teorema fundamentală de izomorfism. Acum $H_1(K)$ este un grup comutativ, deci $\ker(\Phi)$ trebuie să conţină subgrupul comutator a lui $E(K,p)$. Fie atunci α un drum pe muchii pentru care $z(\alpha) \in \mathrm{Im}(\partial_2)$. Trebuie să arătăm că α este în subgrupul comutator. Presupunem că:

$$z(\alpha) = \partial(\lambda_1\sigma_1 + \ldots + \lambda_l\sigma_l)$$

unde σ_i sunt 2-simplexe orientate din K. Fie $\sigma_i = \langle a_ib_ic_i\rangle$ şi pentru fiecare i fie γ_i un drum care uneşte p cu a_i. Atunci drumul pe muchii $\gamma_ia_ib_ic_ia_i\gamma_i^{-1}$ este echivalent drumul trivial p, deci şi produsul:

$$\beta = \prod_{i=1}^{l}(\gamma_ia_ib_ic_ia_i\gamma_i^{-1})^{\lambda_i}$$

este echivalent cu drumul constant. Deci $\alpha\beta^{-1} = \alpha$ în $E(K,p)$. Acum:

$$z(\gamma_i a_i b_i c_i a_i \gamma_i^{-1}) = \partial(\langle a_i b_i c_i \rangle)$$

deci $z(\alpha\beta^{-1}) = 0$ (acesta este de fapt motivul pentru care am definit β). Singura posibilitate ca imaginea prin z a unui drum să fie exact 0 este ca de fiecare dată când o muchie $\langle ab \rangle$ apare de n-ori atunci şi muchia $-\langle ab \rangle = \langle ba \rangle$ să apară de n-ori. Am mai definit şi grupul $G(K,L)$ împreună cu un izomorfism $\Theta : E(K,p) \to G(K,L)$. Prin acest izomorfism $\alpha\beta^{-1}$ este un produs de elemente din $G(K,L)$ în care fiecare element apare de acelaşi număr de ori ca inversul său. Rezultă că abelianizatul în $G(K,L)$ a imaginii lui $\alpha\beta^{-1}$ este 0. Deoarece Θ este izomorfism, rezultă că şi abelianizatul în $E(K,p)$ a lui $\alpha\beta^{-1}$ este 0. Deci $\alpha = \alpha\beta^{-1}$ este în comutatorul lui $E(K,p)$. □

Exerciţiul 24.10. Calculaţi omologia suprafeţelor compacte.

Exerciţiul 24.11. G subgrup în F şi F grup liber abelian, atunci şi G este liber.

Exerciţiul 24.12. Fie G un grup abelian, finit generat, fără torsiune. Atunci $G \sim \mathbb{Z}^n$.

25. Legătura dintre omologie şi omotopie

O funcţie continuă între două spaţii induce un morfism între grupurile fundamentale. La fel se va întâmpla şi pentru grupurile de omologie, dar definiţia noastră a omologiei folosind complexe simpliciale ne va obliga să lucrăm mai întâi cu aplicaţii simpliciale (morfisme de complexe simpliciale) şi apoi să folosim aproximarea simplicială pentru funcţii continue.

Fie K şi L două complexe simpliciale şi $s : |K| \to |L|$ o aplicaţie simplicială (s duce simplexe liniar în simplexe, dar poate să scadă dimensiunea). Pentru fiecare $q \in \mathbb{N}$ vom defini un morfism $s_q : C_q(K) \to C_q(L)$ specificând valoarea lui s_q pe generatorii lui $C_q(K)$, adică pe simplexele de dimensiune q. Fie deci $\sigma = \langle v_0, v_1, \ldots, v_q \rangle$ un q-simplex orientat din K. Definim $s_q(\sigma) = \langle s(v_0), s(v_1), \ldots, s(v_q) \rangle$ dacă vârfurile $s(v_0), s(v_1), \ldots, s(v_q)$ sunt distincte (adică dacă ele generează un element din $C_q(L)$) şi $s_q(\sigma) = 0$ în rest. Este uşor de văzut că $s_q(-\sigma) = -s_q(\sigma)$ şi deci că s_q determină un morfism. Ca să transportăm acest morfism la grupurile de omotopie trebuie să arătăm că s_q duce ciclii în ciclii şi frontiere în frontiere. Vom face acest lucru arătând că s "comută" cu ∂.

Lema 25.1. *$\partial s_q = s_{q-1}\partial : C_q(K) \to C_{q-1}(L)$ sau $\partial s = s\partial$ dacă eliminăm indicii.*

Demonstraţie. Fie $\sigma = \langle v_0, v_1, \ldots, v_q \rangle$ un q-simplex din K. Egalitatea cerută este uşor de văzut pentru cazul în care $s(v_0), s(v_1), \ldots, s(v_q)$ sunt diferite. Presupunem acum că $s(v_j) = s(v_k)$ unde $j \langle k$. Atunci, din definiţie, $s(\sigma) = 0$ ceea ce implică $\partial s(\sigma) = 0$. Avem:

$$s\partial(\sigma) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i s_{q-1}(\langle v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_q \rangle),$$

dar în această sumă rămân doar doi termeni, pentru $i = j$ şi $i = k$:

$$s\partial(\sigma) = (-1)^j s_{q-1}(\langle v_0, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, v_q \rangle) + (-1)^k s_{q-1}(\langle v_0, \ldots, \hat{v}_k, \ldots, v_q \rangle)$$

Cele două complexe din sumă au aceleaşi vârfuri, dar în altă ordine (imaginea lor prin s ar putea fi 0 dacă s mai identifică şi alte vârfuri, dar nu ne interesează acest caz particular). Trebuie să mai potrivim nişte semne. Orientarea simplexului se schimbă la fiecare transpoziţie între două vârfuri consecutive. Trebuie să aducem vârful v_k din $\langle v_0, \ldots, \hat{v_j}, \ldots, v_q \rangle$ de pe poziţia k pe care o ocupă pe poziţia $j+1$, poziţie pe care o are v_j în simplexul $\langle v_0, \ldots, \hat{v_k}, \ldots, v_q \rangle$. Sunt $k-j-1$ transpoziţii şi deoarece $s(v_j) = s(v_k)$ obţinem şi $s\partial(\sigma) = 0$. $\square$

Fie acum z un q-ciclu din K, adică $\partial z = 0$. Asta înseamnă că şi $s_{q-1}(\partial z) = 0$ şi din lemă $\partial s_q(z) = 0$, adică $s_q(z)$ este un q-cilcu din L. Dacă b este o frontieră, adică există $c \in C_{q+1}(K)$ astfel încât $b = \partial c$, în mod similar $\partial s_{q+1}(c) = s_q(\partial c) = s_q(b)$, deci şi $s_q(b)$ este o frontieră.

Am arătat că s induce o aplicaţie la nivelul grupurilor de omologie, $s_{q*} : H_q(K) \to H_q(L)$ sau în notaţie prescurtată $s_* : H_*(K) \to H_*(L)$.

Definiţia 25.2. Se numeşte morfism de lanţuri de omologie o aplicaţie $s : C(K) \to C(L)$, adică un şir de morfisme $s_q : C_q(K) \to C_q(L)$ pentru care $\partial s_q = s_{q-1}\partial$.

Un morfism de lanţuri induce un morfism la nivelul grupurilor de omologie.

Propoziţia 25.3. *Fie $s : K \to L$ şi $t : L \to M$ două aplicaţii simpliciale. Atunci $t_* \circ s_* = (t \circ s)_*$.*

Demonstraţie. Tema. $\square$

26. Subdiviziunea stelară

Pentru a folosi aproximarea simplicială avem nevoie de diviziunea baricentrică, adică trebuie să arătăm că grupurile de omologie sunt invariante la diviziunea baricentrică. Ele sunt invariante în general, la diverse triangulări, dar nu vom arăta acest lucru general. Pentru a demonstra invarianţa la diviziunea baricentrică vom folosi o alta diviziune: subdiviziunea stelară. Vom obţine diviziunea baricentrică prin aplicări succesive ale subdiviziunii stelare.

Fie K un complex simplicial, A un simplex. Fie v baricentrul lui A. Divizăm simplexele din K în felul următor: cele care nu îl au pe A ca o faţă rămân neschimbate; în A unim toate vârfurile cu v; în simplexele pentru care $A < B$ (adică A este o faţă a lui B) unim, la fel, toate vârfurile cu v. Spus mai formal dacă notăm cu L feţele lui B care nu îl conţin pe A, înlocuim pe B cu conul de vârf v peste L. Simplexul astfel rezultat se notează cu K' şi spunem că se obţine din K prin diviziune stelară.

Dacă diviziunea are loc după un segment, acest segment se împarte în două. Dacă are loc după un triunghi acel triunghi se împarte în 3 (câte unul pentru fiecare latură). Dacă diviziunea are loc după o latură a unui triunghi, atunci acel triunghi se împarte în două (e ca şi cum am duce mediana triunghiului).

Să presupunem acum că pentru un complex simplicial K luăm fiecare simplex în oridinea descrescătoare a dimensiunii şi facem subdiviziunea stelară. Se observă uşor (prin desene) că obţinem prima diviziune baricentrică. Ordinea în care alegem simplexele de aceaşi dimensiune nu contează.

Primul rezultat de care avem nevoie este că prin subdiviziunea stelară grupurile de omologie rămân neschimbate. Va rezulta ca un corolar imediat că şi diviziunea baricentrică păstrează omologia.

PROPOZIŢIA 26.1. *Dacă K' este obţinut din K printr-o singură diviziune stelară atunci K' şi K au grupuri izomorfe de omologie.*

DEMONSTRAŢIE. Fie A simplexul după care are loc subdiviziunea. Mai întâi vom construi un morfism de lanţuri $\chi : C(K) \to C(K')$ şi vom arăta că induce izomorfisme la nivelul grupurilor de omologie. Fie σ un q-simplex orientat din K. Dacă A nu este o faţă a lui σ atunci $\chi(\sigma) = \sigma$. În caz contrar, σ este spart în q-simplexe mai mici. Definim $\chi(\sigma)$ ca fiind suma acestor q-simplexe, cu orientările induse de σ. Mai formal, dacă $\sigma = \langle v_0, v_1, \ldots, v_q\rangle$ şi v este baricentrul lui A atunci:

$$\chi(\sigma) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \langle v, v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_q\rangle.$$

Se poate vedea că $\chi(-\sigma) = -\chi(\sigma)$ şi deci că χ induce morfisme de grupuri. La fel , nu e greu de arătat că χ este morfism de lanţuri adică $\chi\partial = \partial\chi$. Avem acum morfismele de grupuri: $\chi_* : H_*(K) \to H_*(L)$.

Trebuie să arătăm că sunt izomorfisme. Construim o aplicaţie simplicială care să inducă inversele acestor morfisme. Fie $A = \langle v_0, \ldots, v_q\rangle$ şi v este baricentrul său. Definim $\Theta : K' \to K$, $\Theta(v) = v_0$ şi în rest identitatea pe vârfuri. E uşor de văzut că $\Theta\chi$ este identitatea pe $C_q(K)$ şi atunci $(\Theta\chi)_* = 1 = \Theta_*\chi_*$. Mai trebuie arătat că $\chi_*\Theta_* = 1$.

... □

DEFINIŢIA 26.2. Fie $f : |K| \to |L|$ continuă. Fie $s : K_m \to L$ o aproximare simlicială pentru f. Definim

$$f_* = s_* \circ \chi_* : H_*(K) \to H_*(L)$$

aplicaţia indusă de f la nivelul grupurilor de omologie.

Desigur încă nu este o definiţie. Trebuie să arătăm că f_* nu depinde de alegerea lui s. Acest lucru se face cu următoarele două propoziţi.

DEFINIŢIA 26.3. Fie $s, t : K \to L$ două aplicaţii simpliciale. s, t se numesc apropriate dacă orice A simplex în K există B simplex în L astfel încât $s(A)$ şi $t(A)$ sunt feţe ale lui B.

PROPOZIŢIA 26.4. *Dacă două aplicaţii simpliciale sunt apropriate atunci ele induc aceleaşi morfisme de omologie.*

PROPOZIŢIA 26.5. *Dacă $f, g : |K| \to |L|$ sunt omotope atunci există $s_1, s_2, \ldots, s_p : K \to L$ simpliciale oricare două consecutive din şir apropriate astfel încât s_1 este o aproximare simplicială pentru f, iar s_p pentru g.*

Exerciţiile din temă conţin paşii demonstraţiilor. Ele rezolvă problemele din definiţia lui f_* şi chiar mai mult avem următoarea teoremă:

TEOREMA 26.6. *$f, g : |K| \to |L|$ omotope. Atunci $f_* = g_* : H_q(K) \to H_q(L)$.*

O altă teoremă pe care nu o vom demonstra, dar la care ne aşteptam este următoarea:

TEOREMA 26.7. *$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$. Dacă f este identitatea pe un spaţiu atunci şi f_* este identitatea.*

EXERCIŢIUL 26.8. Dacă $s, t : K \to L$ aproximează pe f atunci sunt apropriate.

EXERCIŢIUL 26.9. Fie $s, t : K \to L$ simpliciale şi presupunem că există homomorfisme $d_q : C_q(K) \to C_{q+1}(L)$ pentru fiecare q astfel încât :

$$d_{q-1}\partial + \partial d_q = t - s : C_q(K) \to C_q(L)$$

Atunci s şi t induc aceleaşi homomorfisme pe grupurile de omologie.

Fie acum s şi t aplicaţii simpliciale apropriate. În următoarele trei exerciţii vom construii şirul de aplicaţii d_q. Dacă σ este simplex orientat în K numim *suportul lui* σ cel mai mic simplex din L care conţine şi pe $s(\sigma)$ şi pe $t(\sigma)$ ca feţe.

EXERCIŢIUL 26.10. Dacă $\sigma = v \in C_0(K)$ definim $d_0(\sigma) = 0$ dacă $s(v) = t(v)$ şi $d_0(\sigma) = \langle s(v), t(v)\rangle$ în rest. Verificaţi că $\partial d_0 = t - s : C_0(K) \to C_0(L)$ şi că $d_0(\sigma)$ este un lanţ din suportul lui σ. Unde s-a folosit faptul că s şi t sunt apropriate?

EXERCIŢIUL 26.11. Să presupunem că am defint morfismele $d_i : C_i(K) \to C_{i+1}(L)$ pentru $0 \leq i \leq q-1$ astfel încât :

- $d_{i-1}\partial + \partial d_i = t - s : C_i(K) \to C_i(L)$;
- $d_i(\sigma)$ este un lanţ în suportul lui σ;

Dacă σ este un q-simplex în K, arătaţi că:

$$\partial(t(\sigma) - s(\sigma) - d_{q-1}(\partial\sigma)) = 0$$

şi deduceţi că există $c \in C_{q+1}(L)$ astfel încât :

$$t(\sigma) - s(\sigma) - d_{q-1}(\partial\sigma) = \partial c$$

Ideea este că suportul lui σ este un con.

EXERCIŢIUL 26.12. Definiţi $d_q(\sigma) = c$ şi arătaţi că asta încheie definiţi a prin inducţie a aplicaţii lor d.

EXERCIŢIUL 26.13. Terminaţi demonstraţia faptului că aplicaţii simpliciale apropriate induc aceleaşi morfisme de omologie.

EXERCIŢIUL 26.14. Fie $f, g : |K| \to |L|$ continue. Spunem că $d(f, g)\langle\varepsilon$ dacă pentru orice $x \in |K|$ $d(f(x), g(x))\langle\varepsilon$. Fie δ un număr Lebesgue pentru acoperirea deschisă a lui $|L|$ cu stelele deschise şi presupunem că $d(f, g)\langle\delta/3$. Arătaţi că mulţilmile:

$$f^{-1}(star(v, L)) \cap g^{-1}(star(v, L)), \forall\ v \in L^{(0)}$$

formează o acoperire deschisă pentru $|K|$.

EXERCIŢIUL 26.15. În ipotezele exerciţiului anterior arătaţi că există $m \in \mathbb{N}$ şi $s : K^m \to L$ simplicială care aproximează şi pe f şi pe g.

EXERCIŢIUL 26.16. Să presupunem acum că f, g sunt omotope şi fie $F : |K| \times I \to |L|$ o omotopie. Fie $f_t(x) = F(x, t)$. Dacă $\delta > 0$ găsiţi $n \in \mathbb{N}$ astfel încât :

$$d(f_{r/n}, f_{(r+1)/n}) < \delta,\ 0 \leq r < n$$

Folosiţi exerciţiul anterior pentru a găsi aproximări simpliciale comune pentru $f_{r/n}$ şi $f_{(r+1)/n}$.

27. Functorul de omologie

Omologia asociază fiecărui complex simplicial K, un şir de grupuri $H_q(K)$ şi fiecărei funcţii continue $f : |K| \to |L|$ morfismele $f_{q*} : H_q(K) \to H_q(L)$ asfel încât :

- dacă f este identitatea ca funcţie continuă atunci f_* este identitatea ca morfisme de grupuri;
- $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$;
- f, g omotope atunci $f_* = g_*$.

Exerciţiile de mai sus incheiau demonstraţia acestor proprietăţi. Vom detalia aici demonstraţiile câtorva dintre ele.

DEFINIŢIA 27.1. $s, t : K \to L$ simpliciale se numesc apropriate dacă pentru orice simplex $A \in K$ există $B \in L$ astfel încât $s(A)$ şi $t(A)$ sunt feţe ale lui B. Cel mai mic simplex $B \in L$ cu această proprietate se numeşte *suportul lui A*.

EXERCIŢIUL 27.2. Dacă $s, t : K \to L$ aproximează pe f atunci sunt apropriate.

DEMONSTRAŢIE. Pentru orice $x \in |K_m|$ $s(x), t(x) \in suport f(x)$ (suportul unui punct, nu al unui simplex). Putem defini deci omologia prin segmente între s şi t:

$$F : |K_m| \times I \to |L|;\ F(x, \tau) = \tau s(x) + (1 - \tau)t(x)$$

Fie acum $\sigma \in K$. $s(\sigma)$ şi $t(\sigma)$ sunt simplexe în L, iar $F(\sigma, I)$ trebuie să fie inclus într-un simplex din L. □

EXERCIŢIUL 27.3. Fie $s, t : K \to L$ simpliciale şi presupunem că există homomorfisme $d_q : C_q(K) \to C_{q+1}(L)$ pentru fiecare q astfel încât :

$$d_{q-1}\partial + \partial d_q = t - s : C_q(K) \to C_q(L)$$

Atunci s şi t induc aceleaşi homomorfisme pe grupurile de omologie.

DEMONSTRAŢIE. Este u exerciţiu de algebră. Fie z un q-ciclu ($\partial z = 0$). Atunci:

$$t(z) - s(z) = d_{q-1}(\partial z) + \partial d_q(z) = \partial d_q(z)$$

Deci $t(z)$ şi $s(z)$ aparţin aceleaşi clase de omologie. □

EXERCIŢIUL 27.4. Dacă $\sigma = v \in C_0(K)$ definim $d_0(\sigma) = 0$ dacă $s(v) = t(v)$ şi $d_0(\sigma) = \langle s(v), t(v) \rangle$ în rest. Verificaţi că $\partial d_0 = t - s : C_0(K) \to C_0(L)$ şi că $d_0(\sigma)$ este un lanţ din suportul lui σ. Unde s-a folosit faptul că s şi t sunt apropriate?

DEMONSTRAŢIE. Faptul că s şi t sunt apropriate se foloseşte chiar în definiţia lui d_0. Acum $\partial d_0(\sigma) = t(\sigma) - s(\sigma)$ indiferent dacă $s(\sigma)$ şi $t(\sigma)$ sunt egale sau nu. □

Exerciţiul 27.5. Să presupunem că am defint morfismele $d_i : C_i(K) \to C_{i+1}(L)$ pentru $0 \le i \le q-1$ astfel încât :

- $d_{i-1}\partial + \partial d_i = t - s : C_i(K) \to C_i(L)$;
- $d_i(\sigma)$ este un lanţ în suportul lui σ;

Dacă σ este un q-simplex în K, arătaţi că:

$$\partial(t(\sigma) - s(\sigma) - d_{q-1}(\partial\sigma)) = 0$$

şi deduceţi că există $c \in C_{q+1}(L)$ astfel încât :

$$t(\sigma) - s(\sigma) - d_{q-1}(\partial\sigma) = \partial c$$

Demonstraţie. Din prima ipoteza de inducţie:

$$t(\partial\sigma) - s(\partial\sigma) = d_{q-2}(\partial\partial\sigma) + \partial d_{q-1}(\partial\sigma)$$

Folosind faptul că $\partial\partial\sigma = 0$ şi că s, t comută cu ∂ obţinem egalitatea cerută. Din a doua ipoteză de inducţie rezultă că lanţul $t(\sigma) - s(\sigma) - d_{q-1}(\partial\sigma)$ se află în interiorul simplexului $suport(\sigma)$. Omologia unui simplex este 0, deci deoarece este un ciclu este şi o frontieră. □

Exerciţiul 27.6. Definiţi $d_q(\sigma) = c$ şi arătaţi că asta încheie definiţi a prin inducţie a aplicaţii lor d.

Demonstraţie. Trebuie să mai vedem a doua ipoteză de inducţie. ∂c este un ciclu din $suport(\sigma)$ deci şi c este un lanţ din $suport(\sigma)$. □

Câteva aplicaţii imediate ale omologiei:

Teorema 27.7. *S^n şi S^m sunt homeomorfe $\Leftrightarrow$ $n = m$.*

Demonstraţie. Fie $h : S^n \to S^m$ homeomorfism. Atunci $h_* : H_*(S^n) \to H_*(S^m)$ este izomorfism. Dar $H_k(S^n) = \mathbb{Z} \Leftrightarrow k = n$ şi este 0 în rest. Deci $n = m$. □

Corolar 27.8. *$\mathbb{R}^n$ şi $\mathbb{R}^m$ sunt homeomorfe $\Leftrightarrow$ $n = m$.*

Demonstraţie. $\mathbb{R}^m$ fără un punct este omotop cu cu S^{m-1}. □

Teorema 27.9. *(Brouwer) O aplicaţie continuă $f : B^n \to B^n$ are un punct fix.*

Demonstraţie. Este aceaşi demonstraţie ca în cazul $n = 2$, doar că acum utilizăm H_{n-1} în loc de π_1. □

28. Gradul unei aplicaţii

Fie $h : |K| \to S^n$ o triangulare a sferei. Ştim că $H_n(K) = \mathbb{Z}$ şi fie $\langle z \rangle$ unul din cei doi generatori ai acestui grup (alegerea este echivalentă cu alegerea unei orientări). Definim $f^h = h^{-1}fh : |K| \to |K|$ şi această funcţie induce un morfism $f_*^h : H_n(K) \to H_n(K)$, morfism care îl trimite pe $\langle z \rangle$ într-un multiplu $\lambda\langle z \rangle$, $\lambda \in \mathbb{Z}$. Acest număr λ se numeşte gradul lui f şi se notează cu $degf$. O observaţie simplă dar necesară este că $degf$ nu depinte de alegerea generatorului $\langle z \rangle$.

O observaţie puţin mai grea, dar la fel de esenţială este că gradul nu depinde nici de triangularea aleasă iniţial. Fie $t : |L| \to S^n$ o altă triangulare, şi notăm cu $\Phi = h^{-1}t$:

$|L| \to |K|$. Φ este un morfism, $f^t = \Phi^{-1} \circ f^h \circ \Phi$, iar f_* înmulţeşte fiecare element din $H_n(K)$ cu λ. Deci:

$$\begin{aligned} f^t_*(\langle z\rangle) =& \Phi_*^{-1}(f^h_*(\Phi_*(\langle z\rangle))) = \Phi_*^{-1}(\lambda\Phi_*(\langle z\rangle)) \\ =& \lambda\Phi_*^{-1}(\Phi_*(\langle z\rangle)) = \lambda\langle z\rangle. \end{aligned}$$

Funcţii omotope au acelaşi grad. Asta deoarece $f \sim g$ implică $f^h \sim g^h$ şi deci induc acelaşi morfism de omologie. O teoremă remarcabilă afirmă şi reciproca acestui fapt: dacă două funcţii au acelaşi grad atunci ele sunt omotope. Nu vom demonstra acest lucru.

Gradul unui homeomorfism topologic este ± 1, deoarece trebuie să inducă un izomorfism algebric la nivelul omologiei. Gradul identităţii este 1, al aplicaţiei constante este 0. Totodată $deg(f \circ g) = degf \cdot degg$, deoacece $(f \circ g)^h_* = f^h_* \circ g^h_*$.

Deoarece gradul este invariant la diverse triangulări putem alege una anume. Fie v_i punctul de pe $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ care are 1 pe coordonata i şi 0 în rest. Notăm cu v_{-i} antipodul său. Punctele $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_s}$ formează un simplex dacă $|i_1|\langle|i_2|\langle\ldots\langle|i_s|$. Pentru $n = 1$ triangularea este pătratul, pentru $n = 2$ octoedru. Notăm acest complex cu Σ, iar $\pi : \Sigma \to S^n$ este proiecţia radială.

Identificăm acum $H_n(S^n)$ cu $H_n(\Sigma) = Z_n(\Sigma)$ (grupul ciclilor) trebuie să specificăm un generator. Fie simplexul orientat $\sigma = \langle v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}\rangle$. Această orientare va induce orientări şi pe celelalte simplexe. Suma tuturor n-simplexelor lui Σ cu aceste orientări formează un ciclu z care genereazǎ $Z_n(\Sigma)$.

Fie acum o funcţie $f : S^n \to S^n$. Vrem să calculăm $degf$ şi mai întâi luăm $s : |\Sigma_m| \to |\Sigma|$ aproximare simplicială a lui f^π. Simplexele lui Σ_m au orientările induse de orientările din Σ. Dacă avem $\chi : C(\Sigma) \to C(\Sigma_m)$ aplicaţia pe care am construit-o între un complex şi diviziunea baricentrică, atunci orientarea unui simplex este semnul cu care apare el în $\chi(z)$. Notăm cu α numărul simplexelor τ din Σ_m pentru care $s(\tau) = \sigma$ şi cu β numărul simplexelor pentru care $s(\tau) = -\sigma$.

TEOREMA 28.1. *$degf = \alpha - \beta$*

DEMONSTRAŢIE. $f^\pi_* : H_n(\Sigma) \to H_n(\Sigma)$ este compunerea $\chi_* \circ s_*$. $\chi(z)$ este suma simlexelor din Σ_m orientate "bine". Coeficientul lui σ din $s_*(\chi(z))$ este $\alpha - \beta$. Asta rezultă din modul cum au fost definite numerele α şi β. Deci:

$$f^\pi_*(z) = s_*\chi_*(z) = (\alpha - \beta)z$$

Deci $degf = \alpha - \beta$. □

TEOREMA 28.2. *Aplicaţia antipodală $x \to -x$ pe S^n are gradul $(-1)^{n+1}$.*

DEMONSTRAŢIE. $f(v_i) = v_{-i}$ pentru orice i. f este deja simplicială în raport cu triangularea pe care am ales-o. Singurul simplex care ajunge prin f în $\langle v_1, \ldots, v_{n+1}\rangle$ este $\langle v_{-1}, \ldots, v_{-(n+1)}\rangle$. Simplexele $\langle v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}\rangle$ şi $\langle v_{-1}, v_2, \ldots, v_{n+1}\rangle$ sunt vecine şi deci sunt orientate diferit. De fiecare dacă când schimbăm un v_i cu v_{-1} apare un -1. Obţinem că $f_*(\langle v_{-1}, \ldots, v_{-(n+1)}\rangle) = (-1)^{n+1}\langle v_1, \ldots, v_{n+1}\rangle$. Deci, conform teoremei precedente, $degf = (-1)^{n+1}$. □

COROLAR 28.3. *O funcţie* $f : S^n \to S^n$ *fără puncte fixe are gradul* $(-1)^{n+1}$.

DEMONSTRAŢIE. Dacă f nu are puncte fixe putem defini omotopia:

$$F(x,t) = \frac{(1-t)f(x) - tx}{||(1-t)f(x) - tx||},$$

omotopie între f şi aplicaţia antipodală. Deci f şi aplicaţia antipodală au acelaşi grad. □

COROLAR 28.4. *Dacă* n *este par şi* $f : S^n \to S^n$ *este omotopă cu identitatea, atunci* f *are puncte fixe.*

DEMONSTRAŢIE. Dacă f este omotopă cu identitatea are gradul 1. Dacă f nu ar avea puncte fixe ar avea gradul $(-1)^{n+1} = -1$ deoarece n este par. □

TEOREMA 28.5. S^n *admite un câmp de vectori nenul dacă şi numai dacă* n *este impar.*

DEMONSTRAŢIE. Pentru n par, dacă $v(x)$ este un câmp de vectori nenuli pe S^n, atunci $f(x) = v(x)/||v(x)||$ este omotopă cu identitatea. Asta înseamnă că are un punct fix, şi obţinem o contradicţie cu faptul că $x \perp v(x)$.

Pe de altă parte pentru n impar:

$$v(x) = (x_2, -x_1, x_4, -x_3, \dots, x_{n+1}, -x_n)$$

este un câmp de vectori nenuli pe S^n, după cum se poate verifica. □

29. Complemente despre banda lui Möbius

Banda lui Möbius "învârtită" de două ori este homeomorfă cu cilindru (un dreptungi de hârtie, răsucit de două ori şi lipit pe cele două laturi opuse). Această figură poate fi scufundată în $\mathbb{R}^3$. În $\mathbb{R}^3$ nu o putem însă deforma la un cilindru, deşi cele două spaţii sunt homeomorfe. Întrebarea este dacă putem face asta într-un spaţiu cu patru dimensiuni, adică în $\mathbb{R}^4$.

Răspunsul este afirmativ, în $\mathbb{R}^4$ există o deformare continuă la cilindru. Mai întâi să descriem ca submulţime din $\mathbb{R}^3$ spaţiu descris:

$$X = \{z + tv(z) |\ z \in S^1, t \in [-1,1]\} \subset \mathbb{R}^3$$

$v : S^1 \to \mathbb{R}^3$ este o funcţie cu modulul suficient de mic pentru că X să nu se autointersecteze. Fie $e_4 = (0,0,0,1) \in \mathbb{R}^4$. Pentru $s \in [0,1]$ definim spaţiile:

$$X_s = \{z + t((1-s)v(z) + se_4)\}$$

Fiecare este homeomorf cu X, $X_0 = X$, iar

$$X_1 = \{(z,0,t) |\ z \in S^1, t \in [-1,1]\},$$

adică X_1 este un cilindru.

30. Omologie cu coeficienţi

Grupurile $C_q(K)$ au fost definite liber peste $\mathbb{Z}$. Am avut o mulţime de generatori şi am luat toate sumele cu coeficienţi întregi. Putem lua însă orice al inel în locul lui $\mathbb{Z}$.

Fie R inel comutativ $(\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}_2)$. Definim

$$C_i(K, R) = C_i(K) \otimes_{\mathbb{Z}} R.$$

$\otimes_{\mathbb{Z}}$ înseamnă produsul tensorial peste $\mathbb{Z}$. Efectul nu este decât schimbarea coeficienţilor. Trebuie să definim şi aplicaţiile de bord:

$$\partial(s \otimes r) = (\partial s) \otimes r.$$

În mod evident relaţia $\partial\partial = 0$ rămâne adevărată. Putem defini deci:

$$H_i(K, R) = \ker(\partial_i)/\mathrm{Im}(\partial_{i+1})$$

Observaţia 30.1. $H_i(K, R) \not\approx H_i(K) \otimes_{\mathbb{Z}} R$. În caz că o astfel de formulă ar fi fost adevărată teoria generală nu ar mai fi avut sens.

Exemplul 30.2. Pentru a vedea şi un contra exemplu, să considerăm omologia cu coeficienţi în $\mathbb{Z}_2$. Avantajul enorm este că într-un modul peste $\mathbb{Z}_2$ avem egalitatea $\sigma = -\sigma$, deci nu ne mai interesează orientările. De multe ori în studiul spaţiilor neorientabile omologia peste $\mathbb{Z}_2$ este singura obţiune. De exemplu pentru o suprafaţă neorientabilă $H_2(K) = 0$, dar $H_2(K, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$.

31. Coomologia

Coomologia este teoria duală omologiei. Începem prin a considera dualele obiectelor pe care le-am definit în construcţia omologiei.

$$C^i(K) = C_i(K)^* = \{f : C_i(K) \to \mathbb{Z} |\ f\ morfism\ de\ grupuri\}.$$

Aplicaţile între aceste grupuri C^i, dualele aplicaţiilor ∂ vor mări indicii cu 1. Deci $\delta_i : C^i(K) \to C^{i+1}(K)$ şi:

$$\langle \delta f, s \rangle = \langle f, \partial s \rangle$$

Pentru a defini grupurile de coomologie trebuie să verificăm o relaţie similară pe care o verificau aplicaţiile ∂.

$$\langle \delta\delta f, s \rangle = \langle \delta f, \partial s \rangle = \langle f, \partial\partial s \rangle = \langle f, 0 \rangle = 0.$$

Deci într-adevăr $\delta\delta = 0$ şi putem defini acum grupurile de coomologie:

$$H^i(K) = \ker(\delta_i)/\mathrm{Im}(\delta_{i-1}).$$

Observaţia 31.1. $H^i(K)$ nu este $H_i(K)^*$. Ambele sunt grupuri finit generate. Partea de torsiune poate să difere. În schimb partea liberă este aceiaşi. Se numeşte numărul Betti de ordin i β_i rangul grupurilor $H_i(K)$ şi $H^i(K)$.

Observaţia 31.2. La fel ca la omologie, putem avea coomologie cu coeficienţi în orice inel R. Putem defini R-modulele $C^i(K, R) = \{f : C_i(K) \to R |\ f\ morfism\ de\ grupuri\}$

32. Omologie singulară

În construcţia *grupului fundamental* am considerat toate drumurile bazate într-un punct şi am factorizat la o relaţie de echivalenţă bogată. Am văzut apoi că putem triangula spaţiul şi putem construi grupul fundamental doar cu drumuri pe muchii. Pentru omologie am ales direct varianta a doua, am construit *omologie simplicială*. *Omologie singulară* înseamnă să considerăm toate simplexele posibile din spaţiu, nu numai acelea dintr-o triangulare. Avantajul enorm este că nu mai avem nevoie de triangulare. Nu toate spaţiile sunt triangulabile şi chiar pentru cele triangulabile lucram foarte greu şi am avut nevoie de multe teoreme adiacente teoriei. Dezavantajul este că omologia singulară este o teorie mai abstractă şi aridă

Definiţia 32.1. Pentru $n \in \mathbb{N}$ mulţimea:

$$\Delta_n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} |\ x_i \geq 0;\ \sum_{i=0}^{n} x_i = 1\}$$

se numeşte simplexul canonic de dimensiune n.

Fie acum X un spaţiu. Un simplex singular în X înseamnă o aplicaţie $f : \Delta_j \to X$ (nu cerem injectivitate sau alte proprietăţi, deci imaginea lui f în X poate să nu semene deloc cu un simplex). De exemplu, fie K un complex singular şi $X = |K|$ realizarea sa geometrică. Atunci pentru orice j-simplex T din K şi pentru o ordonare a vârfurilor lui T, obţinem un simplex singular aplicând vârfurile j-simplexului canonic peste vârfurile lui T şi extinzând prin linearitate.

Definim acum grupurile de lanţuri C_j^{sing}.

Definiţia 32.2. Grupurile $C_j^{sing}(X)$ sunt grupurile abeliene liber generate de toate simplexele singulare de dimensiune j în X:

$$C_j^{sing} = \langle f : \Delta_j \to X \rangle$$

Observaţia 32.3. Grupurile C_j^{sing} au o mulţime foarte mare de generatori, în general nenumărabilă. Pentru $X \subset \mathbb{R}^n$ cardinalul mulţimii simplexelor singulare este $\aleph_1$.

Pentru a defini aplicaţiile ∂ trebuie să vedem ce înseamnă faţă a simplexului canonic.

Definiţia 32.4. Pentru $n \in \mathbb{N}$ şi pentru $j \leq n$ definim mulţimea:

$$\Delta_n^j = \{x \in \Delta_n |\ x_j = 0\}$$

Pentru fiecare $j \leq n$ Δ_n^j este izomorf canonic cu Δ_{n-1}. Asta face posibilă următoarea definiţie.

Definiţia 32.5. Fie $f : \Delta_n \to X$, f generator în C_n^{sing}. Atunci:

$$\partial_n f = f|_{\Delta_n^0} - f|_{\Delta_n^1} + \ldots + (-1)^n f|_{\Delta_n^n}$$

$\partial_n : C_n^{sing} \to C_{n-1}^{sing}$.

O demonstraţie similară cu cea de la omologia simplicială arată că $\partial\partial = 0$. Putem defini astfel:

$$H_i^{sing} = \ker(\partial_i)/\mathrm{Im}(\partial_{i+1}).$$

Pentru un complex simplicial K avem acum două construcţii. Avem grupurile de omologie simplicială $H_i(K)$ şi grupurile de omologie singulară $H_i^{sing}(|K|)$. Aceste grupuri sunt izomorfe canonic.

Fie $S \in K_j$ un simplex orientat. Atunci există $f : \Delta_j \to S$ homeomorfism liniar orientat (există $(j+1)!/2$ posibilităţi de astfel de funcţii). Se poate defini astfel o scufundare a lui $C_i(K)$ în $C_i^{sing}(|K|)$. Fie $\Phi : C_i(K) \to C_i^{sing}(|K|)$ acestă scufundare. Este uşor de văzut că Φ comută cu ∂. Deci Φ induce un morfism $\Phi_* : H(K) \to H^{sing}(|K|)$.

TEOREMA 32.6. $\Phi_* : H(K) \to H^{sing}(|K|)$ *este izomorfism şi nu depinde de alegeri.*

DEMONSTRAŢIE. (idee) Construim aplicaţia $\Psi : C_i^{sing}(|K|) \to C_i(K)$ folosind teorema de aproximare simplicială. Se arată că Φ_* şi Ψ_* sunt inverse una alteia. □

33. Coomologia de Rham

Pentru o varietate diferenţiabilă putem obţine o teorie de coomologie folosind formele diferenţiabile. Fie deci X varietate diferenţiabilă şi $\Lambda^k(X) = \{\omega$ *formă diferenţiabilă de grad* $k\}$.

Între aceste grupuri (formele diferenţiabile se pot aduna) există aplicaţiile de diferenţiere $d : \Lambda^i \to \Lambda^{i+1}$, local date de:

$$d(f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k.$$

Indicii sunt măriţi cu 1, deci este o teorie de coomologie. Se verifică într-un mod similar faptul că $d \circ d = 0$. Putem defini:

$$H^i_{dR}(X) = \ker d_i/\mathrm{Im} d_{i-1}$$

TEOREMA 33.1. *(de Rham)* $H^i_{dr}(X) \simeq H^i_{sing}(X, \mathbb{R})$.

DEMONSTRAŢIE. (idee) Fie $f : \Delta_k \to X$ un simplex singular şi $\omega \in \Lambda^k(X)$. Putem integra ω pe $\mathrm{Im} f$:

$$\langle \omega, f \rangle = \int_{\mathrm{Im} f} \omega.$$

Formele diferenţiale definesc prin formula de mai sus un colanţ singular. Trebuie verificată egalitatea:

$$\langle d\omega, f \rangle = \langle \omega, \partial f \rangle$$

Aceasta este doar teorema lui Stokes rescrisă:

$$\int_Y d\omega = \int_{\partial Y} \omega$$

Avem astfel aplicaţii de la $H^i_{dR}(X)$ la $H^i_{sing}(X, \mathbb{R})$. □

Referinţe

armstrong 1. M. A. Armstrong, *Basic topology,* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983.

botttu 2. R. Bott şi L. Tu, *Differential forms in algebraic topology,*

dieudonne 3. J. Dieudonné, *Éléments d'analyse. Tome I: Fondements de l'analyse moderne,* Cahiers Scientifiques, Fasc. XXVIII Gauthier-Villars, Paris 1968.