K-TEORIE SI OPERATORI DIFERENTIALI

SERGIU MOROIANU

1. Curs 1

1.1. **Motivatie.** (astazi cursul va fi informal, de prezentare a domeniului)

Numerele intregi sunt construite pornind de la semi-inelul $\mathbb{N}$ prin adaugarea numerelor negative. Acest procedeu a fost extins la orice semiinel de Grothendieck. Primul grup de K-teorie este inelul asociat semiinelului claselor de izomorfism de fibrati vectoriali de dimensiune finita peste un spatiu topologic compact.

Definiţia 1.1. Fie B un spatiu topologic. Un fibrat vectorial este un spatiu topologic E impreuna cu o surjectie continua $p : E \to B$, astfel ca

- Preimaginea fiecarui punct $x \in B$ (numita *fibra* lui x) are o structura de spatiu vectorial.
- Fiecare punct $x \in B$ are o vecinatate $U_x \subset B$ (numita *trivializantă* pentru E) cu proprietatea ca exista un spatiu vectorial V si un homeomorfism
$$\phi_{U_x} : p^{-1}(U_x) \to U_x \times V$$
care comuta cu p, respectiv cu proiectia pe primul factor, si este izomorfism liniar de la fiecare fibra la V.

Spatiul B se numeste *baza* fibratului E. Vom studia fibrati vectoriali de dimensiune finita, in special peste spatii compacte.

Motivatie pentru studierea fibratilor vectoriali: operatorul Dirac, radacina patrata a Laplacianului.

Definiţia 1.2. Fie B un spatiu topologic si V un spatiu vectorial. Fibratul trivial $\underline{V} \xrightarrow{p} B$ este prin definitie produsul cartezian $B \times V$ impreuna cu proiectia pe primul factor.

Exemplul 1.3 (Banda lui Möbius). Fie $I = [0, 1]$ intervalul unitate si $\underline{\mathbb{R}}$ fibratul trivial de fibra $\mathbb{R}$ peste I. Prin identificarea punctelor 0 si 1 din I se obtine un spatiu homeomorf cu S^1. Banda lui Möbius este

Date: March 25, 2005.

fibratul $M \to S^1$ obtinut din $\underline{\mathbb{R}}$ prin identificarea fibrelor deasupra lui 0 si 1 via izomorfismul $(0, v) \mapsto (1, -v)$, $v \in \mathbb{R}$.

Exemplul 1.4. Fibratul tangent. Vectori.

Transf. Fourier. Rezolvarea $1 + \Delta$ pe $L^2(\mathbb{R}^n)$. Operatori diferentiali.

Exemplul 1.5. Fie M o varietate diferentiala si $\Lambda^k(M)$ fibratul formelor de grad k. Operatorul de Rham

$$d : \mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^k(M)) \to \mathcal{C}^\infty(M, \Lambda^{k+1}(M))$$

este un operator diferential (de ordin 1).

Exemplul 1.6. Fie ∇ o conexiune liniara intr-un fibrat E peste M. Atunci ∇ defineste un operator diferential

$$\nabla : \mathcal{C}^\infty(M, E) \to \mathcal{C}^\infty(M, T^*M \otimes E).$$

Simbolul principal. operatori eliptici.

Teorema 1.7. *Fie M of varietate diferentiala compacta fara frontiera, E si F fibrati vectoriali peste M si $D : \mathcal{C}^\infty(M, E) \to \mathcal{C}^\infty(M, F)$ un operator diferential eliptic. Atunci*

(1) $\dim \ker(D) < \infty$;
(2) *Imaginea lui D este inchisa in $\mathcal{C}^\infty(M, F)$;*
(3) $\dim \operatorname{coker}(D) < \infty$

Un operator cu proprietatile din teorema se numeste *Fredholm*. Indexul unui operator Fredholm este prin definitie

$$\operatorname{index}(D) = \dim \ker(D) - \dim \operatorname{coker}(D).$$

O mica perturbare a lui D poate produce salturi in dimensiunea nucleului lui D, insa indexul este insensibil la astfel de deformari. Un rezultat de pe acum clasic (teorema Atiyah-Singer) permite calculul acestei cantitati analitice prin K-teorie, sau echivalent in termeni de clase caracteristice. Vom vedea ca un operator eliptic defineste o clasa de K-teorie pe fibratul cotangent al lui M care incodeaza indexul lui D.

Putem acum anunta mai multe proprietati ale K-teoriei. Este un invariant algebric al spatiilor topologice (pana la omotopie) construit geometric cu ajutorul fibratilor vectoriali. Este un functor (contravariant) in categoria inelelor, de fapt cu mai multa structura (teorie de coomologie generalizata). Pentru varietati diferentiale, este intim legata de indexul operatorilor eliptici. Se pot defini grupuri de K-teorie superioare care se repeta cu perioada 2 (periodicitatea Bott). Demonstratia acestui fapt poate fi data utilizand "fibratul index", o clasa de K-teorie asociata unei familii de operatori Fredholm.

1.2. **Morfisme de fibrati vectoriali.**

Definiţia 1.8. Fie X, Y doua spatii topologice si $E \to X$, $F \to Y$ doi fibrati vectoriali. Un morfism de fibrati este o aplicatie continua $\phi : E \to F$ care face comutativa diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "p"] & F \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

si care este liniara pe fibre.

Un morfism de fibrati induce o aplicatie continua pe baze.

Un *izomorfism* este un morfism care admite o inversa.

Propoziţia 1.9. *Un morfism care induce un homeomorfism pe baze si care este izomorfism linar pe fiecare fibra este un izomorfism de fibrati.*

Proof. Funcatia det este continua. □

Definiţia 1.10 (Trasul inapoi)**.** Fie $E \to Y$ un fibrat vectorial si $f : X \to Y$ o aplicatie continua. Definim fibratul $F^*E \to X$ ca reuniunea disjuncta

$$F^*E \bigsqcup_{x \in X} E_{f(x)}.$$

Trebuie verificat ca obtinem in acest fel un fibrat. Fie U un deschis din Y trivializant pentru E. Atunci f^*E peste $f^{-1}(U)$ este in bijectie cu fibratul trivial; cerem ca aceasta bijectie sa fie un homeomorfism. Trebuie verificat ca pe intersectii se obtine aceeasi topologie.

Observati ca f^* de un fibrat trivial este trivial, insa f^*E poate fi trivial chiar daca E nu e trivial.

Tema 1.

Exerciţiu 1.11. Aratati ca banda lui Möbius nu este izomorfa cu un fibrat trivial.

Exerciţiu 1.12. Construiti diferentiala de Rham si aratati ca e independenta de coordonate.

Exerciţiu 1.13. Demonstrati ca TM e un fibrat vectorial

Exerciţiu 1.14. Fie H un spatiu Hilbert. Gasiti un subspatiu liniar $E \subset H$ de codimensiune 1 care nu e inchis in H.

2. Curs 2

Extinderea sectiunilor

Fibratul $Hom(E, F)$

Propoziţia 2.1. *Fie B un spatiu normal si paracompact si $E \to B \times I$ un fibrat vectorial. Notam cu $i_t : B \to B \times I$ incluziunea $x \mapsto (x, t)$ si cu π proiectia $B \times I \to B$. Atunci*

$$p^* i_0^* E \simeq E. \tag{1}$$

Proof. Pentru demonstratie presupunem ca B e compact. □

Tragem inapoi izomorfismul (1) prin i_1. Cum $p \circ i_1$ este homeomorfismul identitate pe B, avem $i_1^* p^* i_0^* E = i_0^* E$. Rezulta

$$i_0^* E \simeq i_1^* E. \tag{2}$$

O consecinta utila este faptul ca trasul inapoi prin aplicatii omotope produce fibrati izomorfi. Fie B compact, $f, g : B \to Y$ continue si $F : B \times I \to Y$ o omotopie intre f si g. Atunci $f = F \circ i_0$ si $g = F \circ i_1$. Pentru orice fibrat E peste Y, aplicam (2) fibratului $F^* E$ peste $B \times I$ si obtinem

$$f^* E \simeq g^* E.$$

Definiţia 2.2. Fie B un spatiu topologic compact. Notam cu $\mathrm{Vect}_k(B)$ multimea claselor de izomorfism de fibrati vectoriali complecsi de rang k peste B.

Ar trebui sa ne convingem ca obtinem intr-adevar o multime (ca sa nu dam de paradoxuri gen Russel).

Teorema 2.3 (Invarianta omotopica)**.** *Fie X si Y doua spatii compacte (sau normale si paracompacte) echivalente omotopic. Atunci pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Vect}_k(X) \simeq \mathrm{Vect}_k(Y)$.*

Proof. Fie $\phi : X \to Y$, $\psi : Y \to X$ doua aplicatii astfel ca $\psi \circ \phi$ si $\phi \circ \psi$ sa fie omotope cu identitatea lui X, respectiv lui Y. Aceste aplicatii definesc functii ϕ^*, ψ^* intre $\mathrm{Vect}_k(X)$ si $\mathrm{Vect}_k(Y)$. Din cele de mai sus, $\psi^* \circ \phi^*$ si $\phi^* \circ \psi^*$ sunt bijectii. □

2.1. **Operatii cu fibrati.**

Principiul care guverneaza operatiile este ca orice constructie cu spatii vectoriale care este suficient de canonica se extinde la fibrati

Definiţia 2.4 (Suma directa)**.**

Definiţia 2.5 (Produsul tensorial)**.**

Se observa imediat ca suma directa, respectiv produsul tensorial comuta cu izomorfismele de fibrati. Rezulta ca ele induc operatii (asociative) pe reuniunea

$$\mathrm{Vect}(B) := \bigsqcup_{k=0}^{\infty} \mathrm{Vect}_k(B).$$

Aceste operatii sunt comutative (usor de vazut), asociative si sunt compatibile intre ele (distributivitatea producsului fata de adunare). In plus, aceste operatii au elemente neutre: fibratul $\underline{0}$ este element neutru pentru suma directa, iar $\underline{\mathbb{C}}$ pentru produsul tensorial.

Rezulta ca $\mathrm{Vect}(B)$ este un semi-inel.

Constructia Grothendieck (4 definitii).

Exemplul 2.6. In general pentru un semi-grup S, morfismul canonic $\theta : S \to K(S)$ nu este injectiv. Ca exemplu, fie $S = \mathbb{N} \bigcup X\mathbb{N}$ (doua copii ale lui $\mathbb{N}$) semigrupul comutativ cu tabla de adunare

$$nX +_S mX = (n+m)X, \quad n +_S m = n+m, \quad n +_S mX = n+m.$$

Atunci $\theta(m) = \theta(mX)$.

3. Curs 3

Exemplul 3.1. Fie B spatiul cu un singur punct (notat *). Atunci $\mathrm{Vect}(*) \simeq \mathbb{N}$, izomorfismul fiind dat de dimensiune. Rezulta ca $K(*) = \mathbb{Z}$.

In acest curs ne vom oprim asupra unor alte proprietati ale fibratilor, inainte de a continua constructia K-teoriei.

Existenta complementului. Fie B un spatiu compact si $p : E \to B$ un fibrat vectorial de dimensiune n. Fie $\mathcal{U}$ o acoperire trivializanta pentru E, pe care o putem considera finita, $\mathcal{U} = U_1, \ldots, U_k$. Fie $\phi_j : E_{|U_j} \to \underline{\mathbb{C}}^n$ o trivializare deasupra lui U_j. Alegem ψ_k o partitie a unitatii subordonata lui $\mathcal{U}$. Atunci

$$E \to \underline{\mathbb{C}}^{nk} \qquad\qquad v \mapsto \oplus_{j=1}^{k} \psi_j(p(v))\phi_j(v)$$

este o injectie a lui E in fibratul trivial. Complementul ortogonal al lui E_x in $\underline{\mathbb{C}}^{nk}$ variaza conitnuu cu $x \in B$ si de fapt formeaza un fibrat vectorial pentru B. Din definitie, este evident ca $E^{\perp} \oplus E = \underline{\mathbb{C}}^{nk}$.

Functii de cuplare. Sa demonstram urmatorul izomorfism:

$$\mathrm{Vect}_k(S^n) = [S^{n-1}, GL_k(\mathbb{C})]$$

unde paranmteza dreapta din membrul drept semnifica clase de omotopie. Fie

Grasmaniene. $\mathrm{Vect}_k(B) = [B, Gr_k(\mathbb{C}^\infty)]$

Coomologie Čech.

4. Curs 4

Fibratul dual. Fie $E \to B$ un fibrat (complex). Am vrea sa definim un fibrat E^* a carui fibra in fiecare punct $x \in B$ sa fei spatiul vectorial dual la E_x. Fie $\mathcal{U}$ o acoperire a lui B cu deschisi trivializanti pentru E si $(\phi_{\alpha\beta})$ cociclul Čech asociat unor trivializari pentru $U_\alpha \cap U_\beta$. Observam ca

$$\psi_{\alpha\beta} := (\phi^*_{\alpha\beta})^{-1}$$

formeaza un nou cociclu Čech. Fie E^* fibratul asociat.

Simplificare a K-teoriei peste spatii compacte. Sa observam ca structura speciala a semi-inelului $\mathrm{Vect}(B)$ pentru B compact permite sa simplificam definitia inelului $K(B)$. Anume, orice fibrat F are un complement F^c astfel incat $F \oplus F^c \simeq \underline{\mathbb{C}}^n$ pentru $n \in \mathbb{N}$. Rezulta ca orice clasa de K-teorie $E - F$ se poate reprezenta prin $(E + F^c) - \mathbb{C}^n$.

Definiţia 4.1. Doi fibrati $E, F \to B$ se numesc *stabil izomorfi* daca exista $p, q \in \mathbb{N}$ si un izomorfism

$$E \oplus \underline{\mathbb{C}}^p \to F \oplus \underline{\mathbb{C}}^q.$$

Propoziţia 4.2. *Doua perechi $(E, \underline{\mathbb{C}}^n)$ si $(F, \underline{\mathbb{C}}^m)$, definesc aceeasi clasa in $K(B)$ daca si numai daca E si F sunt stabil izomorfi.*

K-teorie relativa.

Definita cu triplete a K-teoriei. Putem defini alternativ $K(X, A)$ ca fiind inelul claselor de echivalenta de triplete $(E, \underline{\mathbb{C}}^n, \sigma)$ unde $\sigma : E_{|A} \to \underline{\mathbb{C}}$ este un izomorfism, modulo relatia de echivalenta generata de izomorfisme stabile si omotopii.

Excizie

Sir exact.