Geometria Varietăţilor Torice

Foaia de Exerciţii no. 1

03.05.06

1) Fie $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ un con convex poliedral. Se ştie că dacă $\tau \subset \sigma$ este o faţă, iar $v_1, v_2 \in \sigma$ a.î. $v_1 + v_2 \in \tau$, atunci $\tau_1, \tau_2 \in \tau$. Arătaţi reciproca acestui fapt : dacă $\tau \subset \sigma$ este o submulţime cu proprietatea că dacă $v_1, v_2 \in \sigma$ a.î. $v_1 + v_2 \in \tau$, implică $\tau_1, \tau_2 \in \tau$, atunci τ este conţinută într-o faţă.

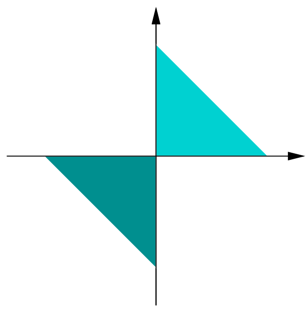
2) Fie $v_1 = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$, $v_2 = (1, \sqrt{2}) \in \mathbb{R}^2$ şi $\sigma = \sigma(v_1, v_2)$. Arătaţi că monoidul $S_\sigma := \sigma \cap \mathbb{Z}^2$ nu este finit generat.

3) Arătaţi că un con simplicial este ascuţit.

4) Arătaţi că algebra monoidală $\mathbb{C}[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}]$ este izomorfă cu $\mathbb{C}[X]/(X^n - 1)$.

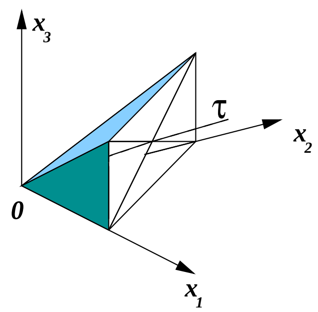
5) Descrieţi închiderea întreagă a inelului $\mathbb{C}[X^2Y, XY^2]$.

6) Descrieţi varietatea torică asociată evantaiului de mai jos.



7) Arătaţi că dualul unui con regulat este un con regulat.

8) Fie e_1, e_2, e_3 baza canonică din $\mathbb{R}^3$. Considerăm evantaiul Δ în $\mathbb{R}^3$ obţinut din conul $\sigma(e_1, e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_3)$ prin adăugarea laturii $\tau = \sigma(e_1 + e_2 + e_3)$; vezi figura de mai jos.



a. Descrieţi starul lui τ şi închiderea $V(\tau)$ a orbitei O_τ.

b. Determinaţi *toate* închiderile orbitelor conurilor din Δ.

9) Fie Δ un evantai din $\mathbb{R}^n$ şi τ un con de dimensiune $n - 1$. Arătaţi că varietatea $V(\tau)$ este izomorfă cu dreapta proiectivă $\mathbb{P}^1$ dacă şi numai dacă τ este faţa comună a două conuri distincte din Δ.

10) Fie Δ un evantai din $\mathbb{R}^n$. Arătaţi că punctele fixe ale varietăţii X_Δ sunt în corespondenţă bijectivă cu conurile n-dimensionale ale lui Δ.