

**RAPORT ȘTIINȚIFIC PRIVIND IMPLEMENTAREA PROIECTULUI
“SPECTRAL METHODS IN HYPERBOLIC GEOMETRY”
PN-III-P4-ID-PCE-2020-0794 ÎN 2021**

SERGIU MOROIANU

PUBLICAȚII ȘI PREPRINTURI

- S Moroianu, *Higher transgressions of the Pfaffian*, preprint arXiv:2011.06538.
- J. O’Rourke, C. Vîlcu: Cut Locus Realizations on Convex Polyhedra, preprint arXiv:2102.11097, Proc. CCCG 21, 279-285.
- V. Cortes, L. David, *T-duality for transitive Courant algebroids*, preprint arXiv: 2101.07184 v2/2021.
- S Montaldo, C Oniciuc, A Ratto, *Polyharmonic hypersurfaces into space forms*, Israel J. Math. (to appear)
- C Anghel, R Stan. *Uniformization of Riemann surfaces revisited*, preprint arXiv: 2008.12189.

CONFERINȚE ORGANIZATE:

- Sergiu Moroianu a fost unul dintre organizatorii conferinței “Semiclassical trace formula”, Paris, Franta, 15 - 19.11.2021.

EXPUNERI LA CONFERINȚE:

- R Stan, “Selberg trace formula on compact manifolds”, Workshop for Young Researchers in Mathematics (10th Edition), Constanta, 20 - 21.05.2021
- C Anghel, “Heat kernel asymptotics for real powers of Laplacians”, Workshop for Young Researchers in Mathematics (10th Edition), Constanta, 20 - 21.05.2021
- C Vîlcu, “Cut Locus Realizations on Convex Polyhedra”, 33rd Canadian Conference on Computational Geometry (CCCG 2021), Canada (on-line), 10 - 12 august 2021.
- C Vîlcu, “Convexity on Convex Polyhedra”, The 14th International Conference on Discrete Mathematics: Discrete Geometry and Graph Theory, București, 30.08 - 3.09.2021.
- L David, ”Generalized connections, spinors and T -duality”, ONEW Generalized Connections and Curvature, Barcelona University (Spain) and University of Hamburg (Germany), 15.11.2021.
- C Anghel, “WKB expansions of solutions of the Schrodinger equation”, Semiclassical Trace Formula Workshop, Paris, France, 15 - 19.11.2021.
- R Stan, ”WKB-expansions and applications to the Hamilton-Jacobi equation”, Semiclassical Trace Formula Workshop, Paris, France, 15 - 19.11.2021.

- S Moroianu, "Semiclassical pseudodifferential operators", Semiclassical Trace Formula Workshop, Paris, France, 15 - 19.11.2021.
- L David, " T -duality for transitive Courant algebroids", Special Geometry, Mirror Symmetry and Integrable Systems, Waseda University/RIMS Kyoto University (Japan), 29.11 - 2.12.2021.

EXPUNERI INVITATE:

- L David, " T -duality for transitive Courant algebroids", *Utrecht Geometry Center* (Olanda), 26.03.2021.
- S Moroianu, Université de Lorraine, Metz, 30 .09.2021.
- S Moroianu, University of Luxembourg, 28.09.2021.

VIZITE ȘTIINȚIFICE:

- Andrei Moroianu (Orsay, France) a vizitat IMAR, 17.03.2021 - 02.04.2021
- Adrien Boulanger (Bologna, Italy) a vizitat IMAR, 24.04.2021 - 17.05.2021
- Richard Horja (Miami, SUA) a vizitat IMAR, 29.08 - 4.09.2021.
- Dirk Frettlöh (Bielefeld, Germania) a vizitat IMAR, 29.08 - 3.09.2021.
- S Moroianu, Université de Lorraine, Metz, France, 13.09 - 8.10.2021
- C Anghel, University of Geneva, 1 - 14.11.2021.
- R Stan, University of Geneva, 1 - 14.11.2021.
- Andrei Moroianu (Orsay, France) a vizitat IMAR, 18.11.2021 - 06.12.2021

PARTICIPĂRI LA CONFERINȚE ȘI ȘCOLI DE VARĂ:

- S Moroianu Locally Conformal Symplectic Manifolds: Interactions and Applications", Banf, Canada, 8-12 Noiembrie 2021.

DESCRIEREA REZULTATELOR OBTINUTE

Higher transgressions of the Pfaffian. Caracteristica Euler a unei varietati compacte poate fi calculata prin integrala Pfaffianului curburi Riemaniene. Atunci cand varietatea are frontiera, la aceasta integrala trebuie adaugata o integrala pe bord in functie de curbura medie. Termeni similari de corectie exista pentru colturi de orice codimensiune, formula fiind descoperita de Allendoerfer si Weil. Metoda de demonstratie este prin deformarea frontierei, aproximare cu metrice real-analitice si scufundare izometrica in spatiul euclidian. In articolul de fata formula Allendoerfer-Weil este extinsa la cazul unor varietati poliedrale posibil neregulate, folosind metoda transgresiei introdusa de Chern. Intai construim o procedura de a defini transgresii de ordin superior pentru Pfaffian in prezenta unei familii liniar independente de sectiuni intr-un fibrat; procedura este apoi aplicata fibratului tangent. Rezultatul principal leaga caracteristica Euler de suma acestor transgresii pentru toate fetele varietatii poliedrale. Sunt date formule pentru varietati sferice, euclidiene sau hiperbolice cu fete total geodezice, precum si aplicatii la calcularea volumului 4-simplexelor hiperbolice ideale.

***T*-duality for transitive Courant algebroids.** Geometria complexa generalizata are ca idee principala inlocuirea fibratului tangent TM al unei varietati cu fibratul tangent generalizat $TM \oplus T^*M$, sau, mai general, cu un algebroid Courant. Un algebroid Courant este o fibrare vectoriala E peste o varietate M , impreuna cu o aplicatie de fibrari $\pi : E \rightarrow TM$ (numita ancora), un produs scalar pe E (de obicei, ales de signatura neutra), si o paranteza bilineara pe spatiul sectiunilor lui E (paranteza Dorfmann), care satisfac anumite proprietati de compatibilitate. In preprintul "*T*-duality for transitive Courant algebroids" (autori V. Cortes, L. David, arxiv: 2101.07184 [math.DG], trimis spre publicare) am definit notiunea de *T*-dualitate pentru algebroidi Courant tranzitivi, notiune ce generalizeaza *T*-dualitatea algebroidilor Courant exacti, introdusa si studiata de catre G. Cavalcanti si M. Gualtieri in lucrarea "Generalized complex geometry and *T*-duality" (2011). Fie E si $\tilde{E}$ doi algebroidi Courant peste M , respectiv $\tilde{M}$, unde M si $\tilde{M}$ sunt spatiile totale ale unor fibrari principale $\pi : M \rightarrow B$ si $\tilde{\pi} : \tilde{M} \rightarrow B$ peste aceeasi baza B , cu grup structural un tor k -dimensional T^k . Presupunem ca E si $\tilde{E}$ sunt dotate cu o actiune a lui T^k , actiune care lufteaza actiunea lui T^k pe M si $\tilde{M}$. Spunem ca E si $\tilde{E}$ sunt in *T*-dualitate daca pullback-urile lor E_N si $\tilde{E}_N$ pe spatiul intermediar

$$N = M \times_B \tilde{M} = \{(p, \tilde{p}) \in M \times \tilde{M}, \pi(p) = \tilde{\pi}(\tilde{p})\}$$

sunt isomorfe printr-un izomorfism care satisface o conditie de non-degenerare si o proprietate de invarianta in raport cu $T^{2k} = T^k \times T^k$. Am demonstrat ca daca E si $\tilde{E}$ sunt in *T*-dualitate atunci exista un izomorfism τ intre spatiile de sectiuni invariante ale unor fibrari spinoriale ale lui E si $\tilde{E}$ bine alese, iar acest izomorfism comuta cu operatorii de generare Dirac a lui E si $\tilde{E}$. In plus, exista un izomorfism I intre spatiile sectiunilor invariante ale lui E si $\tilde{E}$. Aceste doua izomorfisme sunt compatibile, i.e. satisfac $\tau(u \cdot s) = I(u) \cdot \tau(s)$ pentru orice spinor invariant s si sectiune invarianta u a lui E , unde $\cdot$ este actiunea Clifford. Am demonstrat existenta unui *T*-dual pentru o clasa de algebroidi Courant tranzitivi. Cazuri importante particulare ale constructiei noastre se refera la algebroidi Courant exacti si la algebroidi Courant heterotici.

Cut Locus Realizations on Convex Polyhedra. Notiunea de *cut locus* a fost introdusa de H. Poincaré în 1905 și a devenit esențială în studiul geodezicilor. Proprietăți algoritmice ale *cut locus*-ului au fost studiate pentru prima oară de M. Sharir ai A. Schorr în 1986.

Arătăm că orice arbore ponderat pozitiv poate fi realizat sub forma *cut locus*-ului unui punct x pe o suprafață poliedrală convexă P . Enunțul completează rezultate anterioare obținute de C. Vîlcu cu J. Itoh, din 2004 și 2015, iar demonstrația lui se bazează pe legătura dintre *cut locus* și teorema de lipire a lui Alexandrov.

Polyharmonic hypersurfaces into space forms. Am studiat hipersuprafetele poli-armonice de ordin r in forme spatiale de curbura sectionala constanta c . In general, o subvarietate poli-armonica de ordin r este caracterizata de faptul ca imersia izometrica care o defineste verifica o ecuatie eliptica neliniara de ordin $2r$ in care termenul de ordin cel mai mare este dat de laplacianul compus cu el insusi de r -ori. Forma ecuatiei de caracterizare a hipersuprafetelor poli-armonice este foarte complicata dar, in cazul hipersuprafetelor de

curbura medie f constanta si cu norma operatorului forma $|A|$ constanta ea se simplifica foarte mult. Astfel se ajunge la o ecuatie de caracterizare de gradul 4 in norma operatorului forma, indiferent de r , iar ordinul r apare drept coefficient al acestei ecuatii de gradul 4 relativ simple. Datorita acestei ecuatii, s-a putut demonstra ca daca c este mai mic sau egal cu zero, atunci o hipersuprafata poli-armonica cu f constanta si $|A|$ constanta este minimala. Acesta este un rezultat de neexistenta deoarece orice subvarietate minimala (armonica) este poli-armonica. Dar, daca c este strict pozitiv, adica varietatea ambianta este sfera euclidiană, situatia este diferita. Astfel s-au clasificat toate hipersuprafetele izoparametrice care sunt poli-armonice, obtinandu-se numeroase exemple de hipersuprafete poli-armonice (si neminimale).

Uniformization of Riemann surfaces revisited. Teorema de uniformizare a fost demonstrata independent de P. Koebe si H. Poincaré in anul 1907. Aceasta spune ca orice suprafata Riemann X simplu-conexa este biolomorfa cu planul complex $\mathbb{C}$, cu discul unitate deschis $\mathbb{D}$, sau cu sfera lui Riemann $\hat{\mathbb{C}}$. In acest articol de tip *survey* este prezentata demonstratia teoremei pentru suprafete Riemann simplu-conexe necompacte, cazul suprafetelor compacte fiind o consecinta usoara. In articol sunt evitate complet argumente care folosesc teorema Riemann-Roch, fascicule sau coomologie de fascicule, Lema $\partial\bar{\partial}$, coomologie singulara sau teorie Runge. In acest fel, demonstratia teoremei de uniformizare devine accesibila oricarui student la master care-si doreste sa o aprofundeze.

Primul pas al demonstratiei este sa gasim o exhaustiune $(X_n)_n$ a suprafetei initiale X cu varietati compacte, simplu-conexe, cu frontiera $\mathcal{C}^\infty$. Folosind metoda Perron pentru familii de functii subarmonice, rezolvam problema Dirichlet pe suprafete Riemann cu bord. Mai precis, se demonstreaza ca pentru orice functie continua definita pe bordul unei suprafete Riemann, exista o extensie armonica a acesteia continua pana la frontiera. Folosind acest rezultat, construim pentru fiecare suprafata X_n din exhaustiune o functie de tip Green, adica o functie armonica pe interiorul lui X_n , care se anuleaza pe frontiera ∂X_n , cu un pol logarithmic intr-un anumit punct fixat. Cu ajutorul acestor functii Green, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ se construiesc un biolomorfism de la suprafata $\mathring{X}_n$ cu valori in discul unitate $\mathbb{D}$. Cu un argument de trecere la limita, gasim un biolomorfism pe imagine de la suprafata initiala X cu valori in $\mathbb{C}$, iar teorema lui Riemann din plan finalizeaza argumentul.

TINERI IMPLICAȚI ÎN PROIECT

Din echipa proiectului fac parte trei tineri cercetatori: **Cipriana Anghel, George-Rareș Stan și Dragoș Manea.**

Dna Anghel si dl Stan sunt inscrisi la doctorat la IMAR sub indrumarea Directorului de Proiect. Ei au participat cu comunicari la conferinta “Workshop for Young Researchers in Mathematics (10th Edition)” care a avut loc online intre 20-21 mai 2021. De asemenea, au participat cu cate o comunicare la workshop-ul “Semiclassical Trace Formula” care a avut loc la Paris, Franta intre 15 - 19.11.2021.

Dl Manea a absolvit Masterul la Universitatea Oxford in 2021. Titlul lucrării sale de Master a fost: “Spectral Sets and Normal Dilations”. In luna noiembrie 2021 a fost admis la doctorat la Institutul de Matematică “Simion Stoilow” al Academiei Române sub

indrumarea prof Liviu Ignat.

Director de proiect,
C.S. I Dr. Sergiu Moroianu