

Raport stiintific

privind implementarea proiectului in perioada ianuarie 2012 - octombrie 2013

Echipea proiectului PN-II-RU-TE-2011-3-0053 a fost formata in ianuarie - octombrie 2012 din directorul de proiect, CS II dr Sergiu Moroianu. Din luna noiembrie 2012 au fost recrutati in proiect doi studenti masteranzi cu cate $\frac{1}{2}$ norma, d-rele Nicolina Istrati si Alexandra Otiman. Incepand cu luna august 2013 ni s-a alaturat un membru cu experienta al echipei, dl dr Vicențiu Pașol.

In 2012 a fost publicata o lucrare pe tema proiectului: C. Guillarmou, S. Moroianu, J. Park, "Bergman and Calderón projectors for Dirac operators", in **Journal of Geometric Analysis** (revista aflata in zona rosie a tabelului CNCS ordonat dupa AIS).

Intre ianuarie-martie 2012, S. Moroianu a fost invitat la Institutul Henri Poincaré din Paris in cadrul programului trimestrial "Suprafete" organizat de Olivier Guichard, Anna Wienhart, Bill Goldman si Jean-Marc Schlenker. Acolo a tinut o prezentare despre cercetarile recente in colaborare cu Colin Guillarmou pe tema invariantilor Chern-Simons ai 3-varietatilor de geometrie finita si implicatiile asupra geometriei spatiului Teichmüller.

In lunile aprilie-iunie 2012 S. Moroianu a fost Profesor Invitat la Ecole Polytechnique, Palaiseau, Franta. In aceasta perioada (luna mai 2012) a participat la conferinta cu titlul "Analysis and Geometric Singularities" de la Oberwolfach, unde a tinut o expunere pe tema problemei Cauchy pentru spinorii paraleli, o lucrare in colaborare cu Bernd Ammann si Andrei Moroianu publicata in **Communications in Mathematical Physics** **320**, 173-198 (2013), revista aflata in zona rosie a tabelului CNCS ordonat dupa AIS.

In lunile septembrie si octombrie 2012 S. Moroianu a fost invitat de Fundatia de Stiinte Matematice din Paris si de Ecole Normale Supérieure (Ulm) pentru a continua colaborarea cu Colin Guillarmou pe tema volumului renormalizat. Acest proiect, in care mai este implicat si Jean-Marc Schlenker, generalizeaza la dimensiuni $n > 3$ impare unele proprietati cunoscute ale volumului renormalizat al 3-varietatilor hiperbolice convex co-compacte.

Membrii echipei A. Otiman si N. Istrati si-au inceput activitatea in proiect prin lectura monografiei de Suprafete Riemanniene a lui O Forster, si au participat la seminarul stiintific "Riemann Surfaces" la IMAR si Scoala Normala Superioara Bucuresti, unde au facut mai multe prezentari sub indrumarea directorului de proiect.

A. Otiman si N. Istrati au fost invitate in calitate de participant la workshop-ul "Young Topologists Meeting" de la Ecole Polytechnique din Lausanne, Elvetia, intre 8-12 iulie 2013.

V. Pasol a fost invitat in luna octombrie 2013 la Max Plank Institut din Bonn, Germania, pentru activitati de cercetare.

S. Moroianu a tinut expuneri in calitate de conferentiar invitat la 4 conferinte din tara: Conferinta omagiala in onoarea doamnei profesoare Cabiria Andreian-Cazacu (22.02.2013), Conferinta "Workshop for Young Researchers in Mathematics" (Constanta, 9-10.05.2013), Conferinta aniversara a 150 de ani de la infiintarea Facultatii de Stiinte (Universitatea Bucuresti, 29.8 - 1.9.2013) si CAIM 2013 (Universitatea Bucuresti, 19-22.09.2013). De asemenea, S. Moroianu a tinut o expunere la Universitatea Bucuresti in cadrul conferintelor lunare ale Facultatii de Matematica, in luna iunie 2013.

In cadrul colaborarii cu C. Guillarmou, a fost acceptat spre publicare articolul "Chern-Simons line bundle on Teichmüller space", in revista **Geometry & Topology**, revista aflata in zona rosie a tabelului CNCS ordonat dupa AIS.

Detalii despre articolul "Bergman and Calderón projectors for Dirac operators":

Impreuna cu Colin Guillarmou si Jinsung Park am studiat singularitatile proiectorului pe spatiul spinorilor armonici pe o varietate compacta cu bord. Relatia dintre spatiul sectiunilor care satisfac o ecuatie eliptica la interiorul unei varietati cu bord si structura conforma a frontierei este unul din mecanismele centrale in corespondenta olografica, unul din aspectele teoriei cuantice de camp. Este necesara intelegerea aprofundata (microlocala) a nucleului distributional al proiectorului Bergman. Din regularitate eliptica, singularitatile apar la frontiera varietatii produs $X \times X$, care este o varietate cu un colt de codimensiune 2. Aratam ca singularitatea se formeaza pe o eclatare (blow-up) al lui $X \times X$ la diagonala bordului, obtinandu-se o singularitate poli-omogena cu termeni logaritmici de putere cel mult 3. Pentru proiectorul Calderón, aratam de exemplu ca reziduul Wodziki local se anuleaza. Obtinem o formula explicita a unui operator conform invariant cu simbolul principal egal cu cel al lui D^3 , unde D este operatorul spin Dirac. Rezultatele sunt deja publicate online la adresa <http://link.springer.com/article/10.1007/s12220-012-9338-9>

Detalii despre articolul "The Cauchy problem for Einstein metrics and parallel spinors":

Impreuna cu B. Ammann si A. Moroianu am studiat problema existentei unei metrice care admite un spinor paralel pornind de la o hipersuprafata data impreuna cu un spinor fixat (o obstructie imediata este ca spinorul sa fie Killing generalizat). Aceasta problema necesita in prealabil rezolvarea problemei Cauchy pentru metrice Einstein, deoarece un spinor paralel nu poate exista decat pe varietati Ricci-plata. Obtinem rezultate de existenta in cazul real-analitic si contraexemple in cazul neted (am re-descoperit in particular un rezultat de existenta al lui Koiso, ramas putin cunoscut specialistilor in domeniu).

Pornim de la o varietate Riemaniana (M, g) si un tensor simetric W si ne punem intrebarea daca exista o metrica Einstein pe o varietate Riemaniana Z in care M sa se scufunde (local) izometric, cu a doua forma fundamentala W . Daca Z ar fi un spatiu de curbura constanta, W ar trebui sa fie un tensor Codazzi, adica sa fie o 1-forma cu valori vectoriale inchisa la actiunea derivarii exterioare cuplata cu derivarea covarianta. In acest caz, mai este necesara si o constrangere asupra curburii scalare a lui g , mai precis $Scal(g)$ este data de a doua functie simetrica fundamentala aplicata valorilor proprii ale lui W .

Pentru ca Z sa fie Einstein, se obtine o constrangere mai slaba despre derivata exterioara a lui W , anume doar contractia pe pozitiiile 2 si 3 trebuie sa se anuleze. Cea de-a doua constrangere privind curbura scalara ramane neschimbata. In aceste conditii, este natural sa ne intrbăm daca mai exista si alte constrangeri, sau dimpotriva putem arata existenta lui Z . In cazul de interes pentru fizica matematica, anume cand cautam o metrica Lorentziana pe Z , solutia a fost gasita de Choquet-Bruhat, care a aratat ca spatiul-timp Z exista intotdeauna. In cazul Riemanian, este nevoie in plus sa presupunem ca datele initiale sunt real-analitice, altfel construim contraexemple. Rezultatul de existenta fusese deja demonstrat de Koiso, asa cum am realizat dupa finalizarea manuscrisului. Contraexemplele nu exista decat in dimensiuni $n+1$ cu n mai mare sau egal cu 3. Un astfel de contraexemplu se obtine luand o metrica pe o 3-varietate conexa astfel ca tensorul Cotton sa se anuleze pe un deschis si sa fie nenul pe alt deschis. Rezolvand problema Yamabe, construim o metrica de curbura constanta in clasa conforma a lui g , si atunci $W:=g$ satisface ecuatiile de constrangere. Din existenta metricii Einstein pe Z ar rezulta o hipersuprafata M de curbura medie constanta. Dar metricile Einstein sunt analitice, iar hipersuprafetele total umbilice de asemenea, deci g insasi ar rezulta analitica, ceea ce contrazice proprietatile de anulare ale tensorului Cotton care e invariant conform.

Problema Cauchy pentru spinorii paraleli este strans legata de cea de mai sus. Intr-adevar, un spinor paralel nu poate exista decat pe o varietate Ricci-plata. Reciproc, restrictia la o hipersuprafata a unui spinor paralel este un spinor Killing generalizat, anume derivata sa covarianta este contractia sa Clifford cu endomorfismul W . Se pune natural intrebarea daca un astfel de

spinor Killing generalizat determina o metrica Einstein Ricci plata si o extindere la un spinor paralel. In articol demonstram acest lucru pentru date initiale real-analitice, si construim contraexemple pentru date initiale ne-analitice.

Detalii despre articolul “Chern-Simons line bundle on Teichmüller space”:

Impeuna cu c. Guillarmou am studiat volumul renormalizat al 3-varietatilor hiperbolice (i.e., Einstein de curbura negativa in aceasta dimensiune) de geometrie finita folosind invariantii Chern-Simons. Pe o varietate compacta, acesti invarianti sunt construiti pornind de la formula algebrica a formei de transgresie a primei clase Pontriaghin. Invariantul Chern-Simons este bine definit pana la un intreg, si constituie o obstructie la scufundari conforme in spatiul euclidian. Pe varietati compacte cu bord, invariantul nu mai este numeric ci constituie o sectiune canonica intr-un fibrat complex Hermitian in drepte. Articolul nostru exploateaza bijectia dintre clase conforme pe suprafata de la infinit pe de o parte, si metrice hiperbolice pe interiorul lui X pe de cealalta parte, pentru a construi o sectiune canonica in fibratul Chern-Simons pe spatiul claselor conforme. Dificultatile sunt conceptuale, deoarece integralele care apar sunt mereu divergente. Totusi, exploitand regularizarea cunoscuta a volumului varietatilor de geometrie finita, reusim sa construim fibratul si sectiunea Chern-Simons. Intrucat spatiul de moduli al claselor conforme pe o suprafata este o varietate Kähler, se pune intrebarea daca fibratul construit este sau nu olomorf. Curbura conexiunii sale este calculata la a fi un multiplu al formei Kähleriene a spatiului Teichmüller, deci de tip $(1,1)$. Rezulta ca fibratul Chern-Simons este olomorf. Mai mult, gasim o noua conexiune olomorfa (ne-hermitiana) astfel incat sectiunea Chern-Simons sa fie covariant constanta. Rezulta ca aceasta sectiune este si ea olomorfa. Consecintele acestor rezultate sunt relatia dintre fibratul determinant si fibratul Chern-Simons, anume gasirea unui izomorfism geometric. Mai promitator, speram ca asocierea facuta intre un cobordism hiperbolic si un fibrat cu sectiune olomorfa sa ne permita o cuantizare a spatiului de moduli Riemann.

Concluzii

Activitatea în cadrul proiectului este promitătoare, avem perspective să ne îndeplinim cu brio obiectivele științifice propuse. Pe partea de resurse umane, anume formarea unei tinere echipe valoroase, lucrurile sunt de asemenea pe un fagăș bun. Dacă finanțarea nu ar suferi prin sincope și incertitudini, acest grant ar constitui cu siguranță un puternic sprijin în încheierea unei echipe valoroase pe domeniul analizei globale și al geometriei hiperbolice la Institutul de Matematica al Academiei Române din București. Chiar și în condițiile existente, am reușit prin management adecvat să nu repercutăm disfuncționalitățile administrative ale autorității contractante asupra membrilor echipei aflați la începutul carierei și care ar putea fi mai ușor descurajați. Am încrederea că, la fel cum noi, partenerii științifici, ne facem datoria îndeplinind obiectivele grantului, și UEFISCDI va găsi resursele necesare pentru o abordare predictibilă a acestor granturi multi-aniuale, potrivit principiului cheltuirii responsabile a fondurilor din surse publice.

București

16 octombrie 2013

Director proiect,
