

## **Raport științific sintetic**

*privind implementarea proiectului PN-II-RU-TE-2011-3-0053 în perioada ianuarie 2012 – decembrie 2014*

Echipa proiectului PN-II-RU-TE-2011-3-0053 a fost formata între lunile ianuarie – octombrie 2012 din directorul de proiect, CS II dr Sergiu Moroianu. Din luna noiembrie 2012 au fost recrutați în proiect doi studenți masteranzi cu câte  $\frac{1}{2}$  norma, d-rele Nicolina Istrati și Alexandra Otiman. Începând cu luna august 2013 ni s-a alăturat un membru cu experiență al echipei, dl dr Vicențiu Pașol.

În 2012 a fost acceptata spre publicare o lucrare pe tema proiectului: C. Guillarmou, S. Moroianu, J. Park, “Bergman and Calderón projectors for Dirac operators”, în **Journal of Geometric Analysis** 24, no. 1 (2014), 298-336 (revista aflata în zona roșie a tabelului CNCS ordonat după AIS).

Între ianuarie-martie 2012, S. Moroianu a fost invitat la Institutul Henri Poincaré din Paris în cadrul programului trimestrial “Suprafețe” organizat de Olivier Guichard, Anna Wienhart, Bill Goldman și Jean-Marc Schlenker. Acolo a ținut o prezentare despre cercetările recente în colaborare cu Colin Guillarmou pe tema invarianților Chern-Simons ai 3-varietăților de geometrie finită și implicațiile asupra geometriei spațiului Teichmüller.

În lunile aprilie-iunie 2012 S. Moroianu a fost Profesor Invitat la Ecole Polytechnique, Palaiseau, Franța. În aceasta perioadă (luna mai 2012) a participat la conferința cu titlul “Analysis and Geometric Singularities” de la Oberwolfach, unde a ținut o expunere pe tema problemei Cauchy pentru spinorii paraleli, o lucrare în colaborare cu Bernd Ammann și Andrei Moroianu publicata în **Communications in Mathematical Physics** 320, 173-198 (2013), revista aflata în zona roșie a tabelului CNCS ordonat după AIS.

În lunile septembrie și octombrie 2012 S. Moroianu a fost invitat de Fundația de Științe Matematice din Paris și de Ecole Normale Supérieure (Ulm) pentru a continua colaborarea cu Colin Guillarmou pe tema volumului renormalizat. Acest proiect, în care mai este implicat și Jean-Marc Schlenker, generalizează la dimensiuni  $n > 3$  impare unele proprietăți cunoscute ale volumului renormalizat al 3-varietăților hiperbolice convex co-compacte.

Membrii echipei A. Otiman și N. Istrati și-au început activitatea în proiect prin lectura monografiei de Suprafețe Riemanniene a lui O Forster, și au participat la seminarul științific “Riemann Surfaces” la IMAR și Școala Normală Superioară București, unde au făcut mai multe prezentări sub

îndrumarea directorului de proiect. În iunie 2014 N. Istrati a ținut o conferință la seminarul de "Varietăți 2 și 3-dimensionale" de la IMAR. În octombrie 2014 A Otiman a ținut o conferință la seminarul de "Geometrie diferențială" la IMAR.

A. Otiman și N. Istrati au fost invitate în calitate de participant la workshop-ul "Young Topologists Meeting" de la Ecole Polytechnique din Lausanne, Elveția, între 8-12 iulie 2013. Ambele au participat și la ediția din 2014 a acestei manifestări anuale, la Copenhaga (Danemarca), între 30 iunie - 4 iulie 2014. A Otiman a participat și la Cortona Summer School, 21 iulie - 2 august 2014, pe tema "An introduction to Calabi extremal Kahler metric".

V. Pașol a fost invitat în luna octombrie 2013 la Max Plank Institut din Bonn, Germania, pentru activități de cercetare. A fost publicat articolul Florin P. Boca, Vicențiu Pașol, Alexandru A. Popa, Alexandru Zaharescu, "Pair correlation of angles between reciprocal geodesics on the modular surface", **Algebra and Number Theory** 8 (2014), no. 4, 999-1035.

S. Moroianu a ținut expuneri în calitate de conferențiar invitat la 4 conferințe din țară: Conferința omagială în onoarea doamnei profesoare Cabiria Andreian-Cazacu (22.02.2013), Conferința "Workshop for Young Researchers în Mathematics" (Constanța, 9-10.05.2013), Conferința aniversară a 150 de ani de la înființarea Facultății de Științe (Universitatea București, 29.8 - 1.9.2013) și CAIM 2013 (Universitatea București, 19-22.09.2013). De asemenea, S. Moroianu a ținut o expunere la Universitatea București în cadrul conferințelor lunare ale Facultății de Matematica, în luna iunie 2013, precum și la colocviul lunar al Institutului de Matematica al Academiei Romane (martie 2014).

În cadrul colaborării dintre S. Moroianu și C. Guillarmou, a fost publicat articolul "Chern-Simons line bundle on Teichmüller space", în revista **Geometry & Topology** 18 (2014), 327-377, revista aflată în zona roșie a tabelului CNCS ordonat după AIS.

Directorul de proiect a co-organizat două conferințe de matematica cu participare internațională: Workshop for Young Researchers în Mathematics, Constanța, 22-23 mai 2014 (la care au participat și membrii echipei A Otiman și V Pașol), și "Real and Complex Differential Geometry", Universitatea București, 8-12 septembrie 2014, la care au participat A Otiman și N Istrati. De asemenea, directorul de proiect a fost invitat să țină o conferință în cadrul manifestării "Geometrie spinorielle et analyse sur les varietes" ținute la CIRM Marsilia între 6-10 octombrie 2014.

Membrul echipei V Pașol a fost invitat să participe la conferința "p-adic Variation în Number Theory", Boston, 2-6 iunie 2014, precum și la Workshop for Young Researchers în Mathematics, Constanța, 22-23 mai 2014 unde a ținut o expunere. V Pașol a fost invitat să țină o conferință la seminarul de matematica al Institutului A Renyi din Budapesta (septembrie 2014).

A Oțiman a publicat articolul "Currents on locally conformally Kahler manifolds" în **Journal of Geometry and Physics** 86 (2014), 564-570. Ea și-a susținut în octombrie 2014 teza de Master la Școala Normală Superioară București, sub îndrumarea directorului de proiect.

N Istrati și-a început în septembrie 2014 teza de doctorat la Universitatea Paris VI. A Oțiman și-a început în septembrie 2014 teza la Universitatea București.

### **Detalii despre articolul "Bergman and Calderón projectors for Dirac operators":**

Împreună cu Colin Guillarmou și Jinsung Park am studiat singularitățile proiectorului pe spațiul spinorilor armonici pe o varietate compactă cu bord. Relația dintre spațiul secțiunilor care satisfac o ecuație eliptică la interiorul unei varietăți cu bord și structura conformă a frontierei este unul din mecanismele centrale în corespondența olografică, unul din aspectele teoriei cuantice de câmp. Este necesară înțelegerea aprofundată (microlocală) a nucleului distribuțional al proiectorului Bergman. Din regularitate eliptică, singularitățile apar la frontiera varietății produs  $X \times X$ , care este o varietate cu un colț de codimensiune 2. Arătăm că singularitatea se formează pe o eclatare (blow-up) al lui  $X \times X$  la diagonala bordului, obținându-se o singularitate poli-omogenă cu termeni logaritmici de putere cel mult 3. Pentru proiectorul Calderón, arătăm de exemplu că reziduul Wodzicki local se anulează. Obținem o formulă explicită a unui operator conform invariant cu simbolul principal egal cu cel al lui  $D^3$ , unde  $D$  este operatorul spin Dirac.

### **Detalii despre articolul "The Cauchy problem for Einstein metrics and parallel spinors":**

Împreună cu B. Ammann și A. Moroianu am studiat problema existenței unei metrici care admite un spinor paralel pornind de la o hipersuprafață dată împreună cu un spinor fixat (o obstrucție imediată este ca spinorul să fie Killing generalizat). Aceasta problemă necesită în prealabil rezolvarea problemei Cauchy pentru metrici Einstein, deoarece un spinor paralel nu poate exista decât pe varietăți Ricci-plate. Obținem rezultate de existență în cazul real-analitic și contraexemple în cazul neted (am re-descoperit în particular un rezultat de existență al lui Koiso, rămas puțin cunoscut specialiștilor în domeniu).

Pornim de la o varietate Riemanniană  $(M, g)$  și un tensor simetric  $W$  și ne punem întrebarea dacă există o metrică Einstein pe o varietate Riemanniană  $Z$  în care  $M$  să se scufunde (local) izometric, cu a doua formă fundamentală  $W$ . Dacă  $Z$  ar fi un spațiu de curbura constantă,  $W$  ar trebui să fie un tensor Codazzi, adică să fie o 1-formă cu valori vectoriale închisă la acțiunea derivării exterioare cuplată cu derivarea covariantă. În acest caz, mai este

necesara și o constrângere asupra curburii scalare a lui  $g$ , mai precis  $Scal(g)$  este data de a doua funcție simetrica fundamentala aplicata valorilor proprii ale lui  $W$ .

Pentru ca  $Z$  sa fie Einstein, se obține o constrângere mai slaba despre derivata exterioara a lui  $W$ , anume doar contractia pe pozițiile 2 și 3 trebuie sa se anuleze. Cea de-a doua constrângere privind curbura scalara rămâne neschimbata. În aceste condiții, este natural sa ne intrebam dacă mai exista și alte constrângeri, sau dimpotrivă putem arata existenta lui  $Z$ . În cazul de interes pentru fizica matematica, anume când cautam o metrica Lorentziana pe  $Z$ , soluția a fost găsită de Choquet-Bruhat, care a arătat ca spatiul-timp  $Z$  exista întotdeauna. În cazul Riemannian, este nevoie în plus sa presupunem ca datele inițiale sunt real-analitice, altfel construim contraexemple. Rezultatul de existenta fusese deja demonstrat de Koiso, asa cum am realizat după finalizarea manuscrisului. Contraexemplele nu exista decât în dimensiuni  $n+1$  cu  $n$  mai mare sau egal cu 3. Un astfel de contraexemplu se obține luând o metrica pe o 3-varietate conexa astfel ca tensorul Cotton sa se anuleze pe un deschis și sa fie nenul pe alt deschis. Rezolvând problema Yamabe, construim o metrica de curbura constanta în clasa conforma a lui  $g$ , și atunci  $W:=g$  satisface ecuatiile de constrângere. Din existenta metricii Einstein pe  $Z$  ar rezulta o hipersuprafață  $M$  de curbura medie constanta. Dar metricile Einstein sunt analitice, iar hipersuprafețele total ombilicale de asemenea, deci  $g$  însăși ar rezulta analitica, ceea ce contrazice proprietățile de anulare ale tensorului Cotton care e invariant conform.

Problema Cauchy pentru spinorii paraleli este strâns legata de cea de mai sus. Într-adevăr, un spinor paralel nu poate exista decât pe o varietate Ricci-plata. Reciproc, restricția la o hipersuprafață a unui spinor paralel este un spinor Killing generalizat, anume derivata sa covarianta este contractia sa Clifford cu endomorfismul  $W$ . Se pune natural întrebarea dacă un astfel de spinor Killing generalizat determina o metrica Einstein Ricci plata și o extindere la un spinor paralel. În articol demonstram acest lucru pentru date inițiale real-analitice, și construim contraexemple pentru date inițiale ne-analitice.

### **Detalii despre articolul "Chern-Simons line bundle on Teichmüller space":**

Impreuna cu c. Guillarmou am studiat volumul renormalizat al 3-varietăților hiperbolice (i.e., Einstein de curbura negativa în aceasta dimensiune) de geometrie finita folosind invariantii Chern-Simons. Pe o varietate compacta, acesti invarianti sunt construiti pornind de la formula algebrica a formei de transgresie a primei clase Pontriaghin. Invariantul Chern-Simons este bine definit pana la un intreg, si constituie o obstructie la scufundari conforme in spatiul euclidian. Pe varietati compacte cu bord, invariantul nu mai este numeric ci constituie o sectiune canonica intr-un fibrat complex Hermitian in drepte. Articolul nostru exploateaza bijectia dintre clase conforme pe

suprafata de la infinit pe de o parte, si metrice hiperbolice pe interiorul lui  $X$  pe de cealalta parte, pentru a construi o sectiune canonica in fibratul Chern-Simons pe spatiul claselor conforme. Dificultatile sunt conceptuale, deoarece integralele care apar sunt mereu divergente. Totusi, exploatand regularizarea cunoscuta a volumului varietatilor de geometrie finita, reusim sa construim fibratul si sectiunea Chern-Simons. Intrucat spatiul de moduli al claselor conforme pe o suprafata este o varietate Kähler, se pune intrebarea daca fibratul construit este sau nu olomorf. Curbura conexiunii sale este calculata la a fi un multiplu al formei Kähleriene a spatiului Teichmüller, deci de tip  $(1,1)$ . Rezulta ca fibratul Chern-Simons este olomorf. Mai mult, gasim o noua conexiune olomorfa (ne-hermitiana) astfel incat sectiunea Chern-Simons sa fie covariant constanta. Rezulta ca aceasta sectiune este si ea olomorfa. Consecintele acestor rezultate sunt relatia dintre fibratul determinant si fibratul Chern-Simons, anume gasirea unui izomorfism geometric. Mai promitator, speram ca asocierea facuta intre un cobordism hiperbolic si un fibrat cu sectiune olomorfa sa ne permita o cuantizare a spatiului de moduli Riemann.

### **Detalii despre articolul „Currents on locally conformally Kahler manifolds“**

In acest articol adaptam la cazul varietatilor local conform Kahler teorema de caracterizare a varietatilor Kahler data de R. Harvey si H.B. Lawson in „An intrinsic characterization of Kahler manifolds“ (Invent. math. 74, 1983). Acest rezultat, care constituie punctul de plecare pentru articol si este in cea mai mare masura o consecinta a teoremei de separare Hahn-Banach, afirma ca o varietate complexa compacta admite o metrica Kahler daca si numai daca nu exista curenti pozitivi de tip  $(1,1)$  care sa fie componente de frontiera.

In geometria local conform Kahler, un loc special il ocupa operatorul  $d_\theta$  asociat unei forme Lee. Odata ce am introdus operatorul  $d_\theta$  si pe curenti prin dualitate, un rezultat similar se va mentine pentru varietatile LCK, anume: o varietate complexa compacta admite o metrica local conform Kahler cu forma Lee  $\theta$  daca si numai daca nu exista curenti pozitivi de tip  $(1,1)$  care sa fie componente  $(1,1)$  ale unei frontiere fata de  $d_\theta$ . Pasii demonstratiei sunt la fel ca in articolul lui R. Harvey si H.B. Lawson si ingredientul principal ramane teorema de separare Hahn-Banach, care produce o forma Kahler in articolul original, respectiv o forma LCK in versiunea din acest articol.

### **Detalii despre articolul “Positivity of the renormalized volume of almost-Fuchsian hyperbolic 3-manifolds”:**

Am aratat, impreuna cu Corina Ciobotaru, pozitivitatea volumului renormalizat pentru varietatile aproape-fuchsiane, o clasa care formeaza o submultime deschisa in spatiul de moduli de varietati quasi-fuchsiane. Metoda de demonstratie este geometrica: folosim o foliatie echidistanta a

3-varietatii aproape-fuchsiene pornind de la o suprafata minimala cu curburile principale mai mici in valoare absoluta ca 1. Aratam ca pe de o parte volumul renormalizat astfel obtinut este 0, folosind definitia geometrica a volumului renormalizat a lui Krasnov si Schlenker. Pe de alta parte, comparam acest volum cu volumul renormalizat "canonic", calculat astfel incat curbura gaussiana a suprafetei la infinit sa fie constanta -4. Comparatia se bazeaza pe formula de tip Polyakov de schimbare conforma a volumului renormalizat. Articolul este postat pe arhiva de preprinturi arXiv si acceptat spre publicare in revista **Proceedings of the American Mathematical Society**.

### **Detalii despre articolul "The renormalized volume and uniformisation of conformal structures":**

In acest preprint, postat pe arXiv impreuna cu Colin Guillarmou si Jean-Marc Schlenker, studiem volumul renormalizat al varietatilor Poincare-Einstein  $X$  in dimensiuni  $n+1$ , cu  $n$  par mai mare ca 2. Motivatia este data de cazul  $n=2$ , caz in care varietatile respective sunt varietati hiperbolice convex co-compacte. Aratam mai intai ca volumul renormalizat depinde de alegerea unei metrici in clasa conforma la infinit (spre deosebire de cazul  $n$  impar) si dependenta este data de o formula de tip Polyakov, similara cu formula de schimbare a determinantului operatorului Laplace la schimbari conforme de metrica. Aceasta formula ne permite sa demonstram ca volumul renormalizat are puncte critice in metrice unde a doua functie simetrica  $\sigma_2$  in valorile proprii ale operatorului Ricci este constanta pe frontiera ideala. Aratam ca local in jurul unei astfel de metrice putem deforma in mod unic metrica ambienta la deformari ale metricii la infinit, ceea ce ne permite sa realizam un deschis din spatiul de metrice Poincare-Einstein pe  $X$  ca o varietate Lagrangiana in spatiul structurilor conforme pe frontiera. Deducem o generalizare a reciprocitatii quasi-fuchsiene (McMullen) la dimensiuni superioare. Aratam in final ca in metrice de tip produs warped peste o varietate Einstein de curbura negativa, volumul renormalizat admite un punct de minim.

### **Detalii despre articolul "Renormalized volume on Teichmüller space of punctured surfaces":**

Acest articol este un proiect in curs de redactare impreuna cu Colin Guillarmou si Frederic Rochon. Studiem variatia invariantilor 3-varietatilor hiperbolice de geometrie finita (cum ar fi volumul renormalizat sau invariantul Chern-Simons) la degenerari inspre frontiera spatiului Teichmüller (varietatile de mai sus sunt descrise de un spatiu de moduli care consta dintr-un produs de spatii Teichmüller, corespunzand fiecărei componente a frontierei ideale). Deoarece compactficarea spatiului Teichmüller este in sine

foarte complicata, rezultatele noastre acopera doar anumite degenerari, corespunzand anumitor puncte din blow-up-up spatiului Teichmuller in subvarietatile de frontiera care reprezinta 3-varietati hiperbolice cu cusp-uri de rang 1. Unul din rezultate este continuitatea volumului renormalizat la astfel de degenerari, limita fiind chiar volumul renormalizat al 3-varietatii cu cusp de rang 1. Alte rezultate privesc limita in aceasta degenerare a altor invarianti cuantici precum invariantul eta, torsiunea analitica, invariantul Chern-Simons, si extinderea la frontiera spatiului Teichmuller a fibratului Chern-Simons.

Bucuresti

26 noiembrie 2014

Director proiect,

---

CS1 dr. habil. Sergiu Moroianu