Şcoala de Studii Avansate a Academiei Române (SCOSAAR)
Departamentul de ştiinţe exacte - Matematică
Institutul de Matematică "Simion Stoilow" al Academiei Române

Rezumatul tezei de doctorat

PROBLEME DE CONTROL OPTIMAL PENTRU ECUAŢII DIFERENŢIALE STOCHASTICE

Ştefana-Lucia Aniţa

Coordonator ştiinţific:
Profesor univ. dr. Lucian Beznea

Bucureşti – 2022

CUPRINS

Cuvinte cheie: Problemă de control optimal stochastic; Ecuaţii diferenţiale stochastice; Control feedback; Problemă de control optimal determinist; Control open-loop; Ecuaţii Kolmogorov; Ecuaţii Fokker-Planck; Soluţii slabe pentru EDP; Condiţii de optimalitate; Semigrupuri de operatori liniari.

1. INTRODUCERE

Această lucrare tratează o serie de probleme de control optimal stochastic cu comenzi feedback. Vom utiliza o tehnică nouă din literatura matematică ce constă în considerarea unei probleme echivalente de control optimal determinist pentru anumite ecuaţii Kolmogorov (de tip forward sau backward). Informaţiile obţinute din studiul problemelor deterministe ne dau o perspectivă mai profundă asupra problemelor stochastice.

În primul capitol prezentăm câteva chestiuni relevante pentru problemele investigate în această teză şi subliniem contribuţia originală a autoarei. Structura tezei este următoarea:

Capitolul 2: Probleme de control optimal stochastic cu comenzi de tip feedback via ecuaţii Kolmogorov. Acest capitol tratează anumite de control optimal stochastic cu comenzi de tip feedback şi se bazează pe lucrările autoarei [1] şi [3]. Rezultatele au fost prezentate în două comunicări (vezi [C1], [C2]) susţinute la conferinţe internaţionale.

Se arată întâi că există o profundă relaţie între problema de control stochastic şi o problemă de control determinist asociată unei perechi de ecuaţii Kolmogorov (backward) cu comenzi de tip open-loop. Se demonstrează că există un control optimal pentru problema deterministă dacă coeficientul de drift are o formă particulară şi dacă o proprietate de convexitate pentru funcţionala de cost are loc. Se demonstrează un principiu de maxim şi se deduc condiţii necesare de optimalitate. Prezentăm câteva exemple şi discutăm o abordare alternativă semigrupală. Subliniem că metoda se poate adapta pentru investigarea unei clase mai generale de probleme de control optimal stochastic. Câteva rezultate auxiliare sunt prezentate la sfârşitul capitolului.

Capitolul 3: Controlul optimal al ecuaţiilor diferenţiale stochastice via ecuaţii Fokker-Planck. Acest capitol tratează o problemă de control optimal stochastic cu comenzi de tip feedback (closed-loop) pentru o ecuaţie diferenţială stochastică şi o problemă de control optimal determinist cu comenzi de tip open-loop pentru o anumită ecuaţie Fokker-Planck (forward Kolmogorov equation). Capitolul se bazează pe lucrările autoarei [2] şi [4]. Unele din idei şi rezultate au fost prezentate în [C3] şi [C4].

Sunt investigate unele proprietăţi de bază ale soluţiilor slabe ale unei ecuaţii diferenţiale stochastice şi ale unei ecuaţii Fokker-Planck şi se discută relaţia dintre cele două ecuaţii. În anumite ipoteze este dovedită echivalenţa dintre problemele de control optimal stochastic şi determinist. Principiul superpoziţiei este unul din ingredientele principale din demonstrarea echivalenţei. Se stabileşte un principiu maxim folosind aşa-numitele controale spike şi se deduc condiţiile de optimalitate necesare pentru problema deterministă. Se obţine un rezultat similar în cazul controalelor independente de timp. Existenţa unui control optimal este demonstrată în ipoteze suplimentare pentru problema de control optimal determinist. Câteva exemple ilustrează aplicabilitatea rezultatelor teoretice. Se discută câteva aspecte referitoare la o problemă cu control cu acţiune nelocală. Capitolul se încheie cu câteva rezultate auxiliare.

Capitolul 4: Extinderi Acest scurt capitol sugerează câteva posibile extinderi şi subiecte pentru investigaţii viitoare. O atenţie deosebită este acordată controlului ecuaţiei Fokker-Planck cu termen nelocal. O altă extindere se referă la o problemă de control optimal al unei ecuaţii Fokker-Planck neliniare și relaţia acesteia cu o problemă de control optimal stochastic al ecuaţiei McKean-Vlasov. Unele din aceste subiecte sunt în studiu în [4].

Capitolul 5: Anexă. Aici amintim câteva noţiuni şi rezultate care sunt indispensabile pe parcursul acestei teze de doctorat: inegalitatea lui Gronwall, teorema de existenţă a lui Lions, teorema de compactitate a lui Aubin, şi teoremele lui Lumer-Phillips şi Trotter-Kato privind semigrupurile de clasă C_0.

Rezultatele originale ale autoarei sunt cuprinse în capitolele 2 şi 3, în timp ce posibile extensii sunt incluse în capitolul 4.

Unele dintre rezultatele originale au fost comunicate la conferinţe internaţionale:

C1. Ş.-L. Aniţa, Optimal control for SDEs with feedback inputs and related Kolmogorov equations, Atelier de travail en Stochastique et EDP, Bucharest, Romania, 20 October, 2020, `http://imar.ro/CFM/2020/EDP-Stochastique-Oct2020.pdf`;

C2. Ş.-L. Aniţa, Stochastic optimal control problems and related Kolmogorov equations, IWSPA 2020 - International Workshop on Stochastic Processes and Their Applications, A virtual workshop, 24 November - 9 December, 2020, `http://blogs.mat.ucm.es/presa/program2020/`;

C3. Ş.-L. Aniţa, Optimal control problem for McKean-Vlasov stochastic equation, The 10th International Conference on Stochastic Analysis and its Applications (10th ICSAA), Kyoto University, Japan, 6-10 September, 2021, `https://www.math.kyoto-u.ac.jp/workshop/ICSAA2020/ICSAA2020_program.pdf` ;

C4. Ş.-L. Aniţa, An optimal control problem related to a non-linear Fokker-Planck equation, Young Researchers Workshop - Romanian Society of Probability and Statistics, Bucharest, Romania, 19 November, 2021, `https://spsr.ase.ro/wp-content/uploads/2021/10/spsr-workshop-2021-3.pdf`.

2. PROBLEME DE CONTROL OPTIMAL STOCHASTIC CU COMENZI DE TIP FEEDBACK VIA ECUAŢII KOLMOGOROV

2.1 Formularea problemei

Considerăm următoarea problemă de control optimal stochastic cu comenzi de tip feedback

$$(\mathbf{CP_S}) \qquad \underset{u\in\mathcal{M}_c}{\mathrm{Min}} \left\{ \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} G(X^u(t,x), u(X^u(t,x)))d\nu(x)\ dt\right] + \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^d} G_T(X^u(T,x))d\nu(x)\right] \right\},$$

unde X^u este soluţia pentru

$$\begin{cases} dX(t) = f(X(t), u(X(t)))dt + \sigma(X(t))dW(t), \quad t\in[0,T] \\ \\ X(0) = x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{2.1}$$

Aici $T \in (0,+\infty)$, $d,\ n,\ m \in \mathbb{N}^*$, $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ este un spaţiu de probabilitate, $W : [0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}^n$ este un proces Wiener şi $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ este filtraţia naturală corespunzătoare.

$$\mathcal{M}_c = \{v \in C_b^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^m); v(x) \in U_0,\ \forall x \in \mathbb{R}^d\}$$

este mulţimea controalelor şi U_0 este o mulţime mărginită, convexă şi închisă a lui $\mathbb{R}^m$ cu $0_m \in U_0$.

(H2.1) ν este o măsură finită a lui $\mathbb{R}^d$ cu o densitate ρ ce satisface

$$\rho \in C_b^1(\mathbb{R}^d), \qquad \rho(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^d, \qquad \frac{\nabla \rho}{\rho} \in C_b(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d).$$

Funcţiile $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d$, $\sigma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d \cdot n}$, $G : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $G_T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$,
$f(x,u) = (f_1(x,u)\ f_2(x,u)\ ...\ f_d(x,u))^T$, $\sigma(x) = (\sigma_{il}(x))_{i=1,2,...,d,\ l=1,2,...,n}$,
$q(x) = (q_{ij}(x))_{i=1,2,...,d,\ j=1,2,...,d} = \sigma(x)\sigma(x)^T$, $\forall x \in \mathbb{R}^d, u \in \mathbb{R}^m$,
satisfac

(H2.2) $f|_{\mathbb{R}^d \times \tilde{U}_0}$ este mărginită şi Lipschitz continuă pe $\mathbb{R}^d \times \tilde{U}_0$, unde $\tilde{U}_0$ este o vecinătate deschisă a lui U_0;

(H2.3) $\sigma \in C_b^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d \cdot n})$ şi există o constantă $\gamma > 0$ astfel încât

$$q_{ij}(x) y_i y_j = \sigma(x)\sigma(x)^T y \cdot y \geq \gamma |y|_d^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d;$$

(H2.4) $G|_{\mathbb{R}^d \times \tilde{U}_0} \in C_b(\mathbb{R}^d \times \tilde{U}_0)$ and $G_T \in C_b(\mathbb{R}^d)$.

Pentru orice $u \in \mathcal{M}_c$ avem că $G(\cdot, u(\cdot)), G_T \in C_b(\mathbb{R}^d)$ şi că funcţiile $\varphi_1^u, \varphi_2^u : [0,T] \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi_1^u(t,x) = \mathbb{E}[G(X^u(t,x), u(X^u(t,x)))], \quad \varphi_2^u(t,x) = \mathbb{E}[G_T(X^u(t,x))], \quad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d, \tag{2.2}$$

sunt unicele soluţii slabe (pentru definiţie vezi [1]) pentru

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,x) = f(x,u(x)) \cdot \nabla \varphi_1(t,x) + \dfrac{1}{2} q_{ij}(x) \dfrac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_i \partial x_j}(t,x), & x \in \mathbb{R}^d,\ t \in (0,T) \\ \varphi_1(0,x) = G(x, u(x)) = \varphi_{01}^u(x), & x \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \tag{2.3}$$

şi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial t}(t,x) = f(x,u(x)) \cdot \nabla \varphi_2(t,x) + \dfrac{1}{2} q_{ij}(x) \dfrac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_i \partial x_j}(t,x), & x \in \mathbb{R}^d,\ t \in (0,T) \\ \varphi_2(0,x) = G_T(x) = \varphi_{02}(x), & x \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \tag{2.4}$$

respectiv. Este evident că pentru orice $u \in \mathcal{M}_c$ avem că

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} G(X^u(t,x), u(X^u(t,x))) d\nu(x)\ dt\right] + \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^d} G_T(X^u(T,x)) d\nu(x)\right]$$

$$= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_1^u(t,x) d\nu(x)\ dt + \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_2^u(T,x) d\nu(x),$$

şi că (CP_S) este echivalentă cu următoarea problemă de control optimal determinist cu controale de tip open-loop

$$(\mathbf{CP_D}) \qquad \underset{u \in \mathcal{M}_c}{\mathrm{Min}} \left\{ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_1^u(t,x) d\nu(x)\ dt + \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_2^u(T,x) d\nu(x) \right\}.$$

Este convenabil să considerăm o mulţime mai mare de controale

$$\mathcal{M} = \{v \in L^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^m); v(x) \in U_0 \text{ a.p.t. } x \in \mathbb{R}^d\},$$

şi problema de control optimal determinist

$$(\mathbf{CP}) \qquad \underset{u \in \mathcal{M}}{\mathrm{Min}} \left\{ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_1^u(t,x) d\nu(x)\ dt + \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_2^u(T,x) d\nu(x) \right\},$$

unde φ_1^u and φ_2^u sunt soluţiile slabe pentru (2.3) şi (2.4), respectiv.

2.2 Relaţia dintre problemele de control optimal stochastic şi determinist

Considerăm următoarele spaţii vectoriale: $H = L^2(\mathbb{R}^d;\nu) = \{\psi \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^d);\ \sqrt{\rho}\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)\}$,

$$V = W^{1,2}(\mathbb{R}^d;\nu) = \left\{\psi \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^d);\ \psi, \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^d;\nu),\ i=1,2,...,d\right\}.$$

Din $(H2.1)$ rezultă că $V = \{\psi \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^d); \sqrt{\rho}\psi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d)\}$.

Observăm că $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ şi $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ sunt spaţii Hilbert reale, unde

$$\langle\varphi,\psi\rangle_H = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi\psi\ d\nu(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi\psi\rho\ dx,$$

$$\langle\varphi,\psi\rangle_V = \int_{\mathbb{R}^d} [\varphi\psi + \nabla\varphi\cdot\nabla\psi]\ d\nu(x) = \int_{\mathbb{R}^d} [\varphi\psi + \nabla\varphi\cdot\nabla\psi]\rho\ dx$$

sunt produsele lor scalare. Identificăm dualul lui H (i.e. H^*) cu H şi notăm cu V^* dualul lui V cu produsul în dualitate notat cu $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V,V^*}$ sau $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V^*,V}$. Mai mult, $\langle\varphi,\psi\rangle_{V,V^*} = \langle\varphi,\psi\rangle_H$, pentru orice $\varphi \in V, \psi \in H$. Următoarele scufundări $V \subset H \subset V^*$ sunt continue şi dense.

Să observăm că există două constante m_0, M_0 astfel încât

$$m_0\|\varphi\|_V \le \|\varphi\sqrt{\rho}\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}^d)} \le M_0\|\varphi\|_V, \quad \forall\varphi \in V.$$

Să studiem acum următoarea problemă Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{d\phi}{dt}(t) = \mathcal{A}_0\phi(t) + g(t), \quad t \in (0,T) \\ \\ \phi(0) = \phi_0, \end{cases} \tag{2.5}$$

unde $\mathcal{A}_0 \in L(V,V^*)$ este definit de $\langle\mathcal{A}_0 v_1, v_2\rangle_{V^*,V} = -a^0(v_1,v_2),\ \ \forall v_1,v_2 \in V,\ a^0 : V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$ este operator biliniar şi mărginit şi $g \in L^2(0,T;V^*)$.

Din teorema lui Lions obţinem că dacă $\phi_0 \in H$ şi a^0 satisface în plus

$$\exists\alpha^0 > 0, \beta^0 \ge 0: \quad a^0(v,v) \ge \alpha^0\|v\|_V^2 - \beta^0\|v\|_H^2, \quad \forall v \in V, \tag{2.6}$$

atunci (2.5) admite o unică soluţie slabă (pentru definiţie vezi [1]).

Fie $\mathcal{A}_0^*$ dualul formal al lui $\mathcal{A}_0$, i.e. $\mathcal{A}_0^* \in L(V,V^*)$ definit prin

$$\langle\mathcal{A}_0 v_1, v_2\rangle_{V^*,V} = \langle v_1, \mathcal{A}_0^* v_2\rangle_{V,V^*}, \quad \forall v_1,v_2 \in V,$$

şi considerăm problema Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt}(t) = -\mathcal{A}_0^* p(t) + g(t), \quad t \in (0,T) \\ \\ p(T) = p_T. \end{cases} \tag{2.7}$$

Considerăm acum următoarea ecuaţie diferenţială stochastică

$$\begin{cases} dX(t) = F^0(X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t), \quad t \in [0,T] \\ \\ X(0) = x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{2.8}$$

şi următoarea ecuaţie Kolmogorov asociată

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial t}(t,x) = F^0(x)\cdot \nabla\phi(t,x) + \dfrac{1}{2}q_{ij}(x)\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j}(t,x), & x\in\mathbb{R}^d,\ t\in(0,T) \\ \phi(0,x) = L^0(x) = \phi_0(x), & x\in\mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{2.9}$$

Dacă $F^0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$, $L^0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, atunci (2.9) admite o unică soluţie slabă.

Teorema 2.2.1. ([3]) *Dacă $F^0 : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ este mărginită şi Lipschitz continuă, atunci există o unică soluţie X pentru (2.8). Dacă în plus $L^0 \in C_b(\mathbb{R}^d)$, atunci pentru orice $t\in[0,T]$:*

$$\phi(t,x) = \mathbb{E}[L^0(X(t,x))] \quad a.p.t.\ x\in\mathbb{R}^d, \tag{2.10}$$

unde ϕ este unica soluţie slabă pentru (2.9).

Să revenim acum la problema de control optimal stochastic (CP_S) şi la problema de control optimal determinist (CP). Pentru orice $u\in\mathcal{M}$ definim funcţiile $f^u : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ şi $a_u : V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel $f^u(x) = f(x,u(x)),\ x\in\mathbb{R}^d$, $a_u(\varphi,\psi) = -\int_{\mathbb{R}^d} f^u\cdot\nabla\varphi\psi\rho\ dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}(q_{ij}\psi\rho)\ dx,\quad \forall\varphi,\psi\in V.$

Fie φ_1^u soluţia slabă pentru (2.3), i.e. soluţia slabă pentru (2.9) corespunzătoare la $F^0 := f^u$, $L^0 := G(\cdot,u(\cdot))$ şi φ_2^u soluţia slabă pentru (2.4), i.e. soluţia slabă pentru (2.9) corespunzătoare la $F^0 := f^u$, $L^0 := G_T$. Este evident că pentru orice $u\in\mathcal{M}_c$ avem că $F^0 := f^u$ (şi deci $a^0 := a_u$), $L^0 := G(\cdot,u(\cdot))$ şi $L^0 := G_T$ satisfac ipotezele din Teorema 2.2.1. Astfel (2.1) are o unică soluţie X^u şi

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} G(X^u(t,x),u(X^u(t,x)))d\nu(x)\ dt\right] + \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^d} G_T(X^u(T,x))d\nu(x)\right]$$
$$= \int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\varphi_1^u(t,x)d\nu(x)\ dt + \int_{\mathbb{R}^d}\varphi_2^u(T,x)d\nu(x).$$

Concluzionăm că (CP_S) este echivalentă cu (CP_D).

Lema 2.2.2. ([1]) *Pentru orice $v\in\mathcal{M}$, există $\{v^k\}_{k\in\mathbb{N}^*}\subset\mathcal{M}_c$ astfel încât*

$$v^k \longrightarrow v \quad \text{în } H^m.$$

Aceasta înseamnă că $\mathcal{M}_c$ este o submulţime densă a lui $\mathcal{M}$ în raport cu distanţa lui H^m.

Din Lema 2.2.2 obţinem că pentru orice $u\in\mathcal{M}$ există un şir $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}\subset\mathcal{M}_c$ ce satisface $u_k \longrightarrow u$ în H^m. Ca în demonstraţia Teoremei 2.2.1 rezultă că $\varphi_1^{u_k}\longrightarrow\varphi_1^u$, $\varphi_2^{u_k}\longrightarrow\varphi_2^u$, în $C([0,T];H)$. De aici deducem că

$$\inf_{u\in\mathcal{M}}\left\{\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\varphi_1^u(t,x)d\nu(x)\ dt + \int_{\mathbb{R}^d}\varphi_2^u(T,x)d\nu(x)\right\}$$
$$= \inf_{u\in\mathcal{M}_c}\left\{\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\varphi_1^u(t,x)d\nu(x)\ dt + \int_{\mathbb{R}^d}\varphi_2^u(T,x)d\nu(x)\right\} = m^*.$$

Lema 2.2.3. ([3]) *Pentru orice $u\in\mathcal{M}$ şi pentru orice $h\in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ ce satisface $h(x)\geq 0$ a.p.t. $x\in\mathbb{R}^d$, următoarea problemă*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x) = f^u(x)\cdot \nabla\varphi(t,x) + \dfrac{1}{2}q_{ij}(x)\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j}(t,x), & x\in\mathbb{R}^d,\ t\in(0,T) \\ \varphi(0,x) = h(x), & x\in\mathbb{R}^d \end{cases} \tag{2.11}$$

are o unică soluţie slabă φ şi $\varphi(t,x)\geq 0$ a.p.t. $x\in\mathbb{R}^d$, pentru orice $t\in[0,T]$.

2.3 Existenţa unui control optimal pentru problema deterministă

Existenţa unui control optimal pentru problema (CP) se va demonstra în ipoteza suplimentară că $f(x,u) = f_0(x) + f_1(x)u$, unde $f_0 : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ şi $f_1 : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^{d\cdot m}$ sunt Lipschitz continue şi mărginite.

Presupunem că pe lângă $(H2.1) - (H2.4)$ avem

(H2.5) Pentru orice $x \in \mathbb{R}^d$, funcţia $u \mapsto G(x,u)$ este convexă pe U_0 şi $G|_{\mathbb{R}^d \times \tilde{U}_0} \in C_b^{0,1}(\mathbb{R}^d \times \tilde{U}_0)$.

Teorema 2.3.1. ([1, 3]) *Există cel puţin un control optimal u^* pentru problema (CP).*

2.4 Principiul de maxim pentru problema de control optimal determinist

Pentru orice $u \in \mathcal{M}$ considerăm operatorul liniar continuu $\mathcal{A}_u : V \longrightarrow V^*$,

$$\mathcal{A}_u \varphi = f^u \cdot \nabla \varphi + \frac{1}{2} q_{ij} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Adjunctul formal al acestui operator, $\mathcal{A}_u^* : V \to V^*$ este definit prin

$$\mathcal{A}_u^* \psi = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot (f^u \psi \rho) + \frac{1}{2\rho} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (q_{ij} \psi \rho), \quad \forall \psi \in V.$$

Presupunem că u^* este un control optimal pentru problema (CP). Fie p_1^*, unica soluţia slabă (pentru definiţie vezi [1]) a următoarei ecuaţii retrograde

$$\begin{cases} \dfrac{dp_1}{dt}(t) = -\mathcal{A}_{u^*}^* p_1(t) + 1, \quad t \in (0,T) \\ \\ p_1(T) = 0, \end{cases} \tag{2.12}$$

i.e. p_1^* este soluţia slabă pentru

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p_1}{\partial t}(t,x) = \dfrac{1}{\rho(x)} \nabla \cdot (f^{u^*}(x) p_1(t,x) \rho(x)) - \dfrac{1}{2\rho(x)} \cdot \dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (q_{ij}(x) p_1(t,x) \rho(x)) + 1, & x \in \mathbb{R}^d,\ t \in (0,T) \\ \\ p_1(T,x) = 0, & x \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

şi fie p_2^*, unica soluţie slabă pentru următoarea ecuaţie retrogradă

$$\begin{cases} \dfrac{dp_2}{dt}(t) = -\mathcal{A}_{u^*}^* p_2(t), \quad t \in (0,T) \\ \\ p_2(T) = -1, \end{cases} \tag{2.13}$$

i.e. p_2^* este soluţia slabă pentru

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p_2}{\partial t}(t,x) = \dfrac{1}{\rho(x)} \nabla \cdot (f^{u^*}(x) p_2(t,x) \rho(x)) - \dfrac{1}{2\rho(x)} \cdot \dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (q_{ij}(x) p_2(t,x) \rho(x)), & x \in \mathbb{R}^d,\ t \in (0,T) \\ \\ p_2(T,x) = -1, & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

Teorema 2.4.1. (Principiul de maxim) ([3]) *Dacă G este independent de u şi dacă u^* este un control optimal pentru problema (CP), atunci aproape pentru orice $x \in \mathbb{R}^d$:*

$$f(x,u^*(x)) \cdot \int_0^T \left[p_1^*(t,x)\nabla\varphi_1^{u^*}(t,x) + p_2^*(t,x)\nabla\varphi_2^{u^*}(t,x)\right] dt$$
$$= \max_{u_0 \in U_0} \left\{ f(x,u_0) \cdot \int_0^T \left[p_1^*(t,x)\nabla\varphi_1^{u^*}(t,x) + p_2^*(t,x)\nabla\varphi_2^{u^*}(t,x)\right] dt \right\}.$$

Observaţia 2.4.1. ([3]) Dacă G nu depinde de u şi dacă în plus avem că $f|_{\mathbb{R}^d \times \tilde{U}_0} \in C_b^{0,1}(\mathbb{R}^d \times \tilde{U}_0; \mathbb{R}^d)$, atunci dacă u^* este un control optimal pentru problema (CP) avem că

$$(D_u f^{u^*})^T(x) \int_0^T \left[p_1^*(t,x)\nabla\varphi_1^{u^*}(t,x) + p_2^*(t,x)\nabla\varphi_2^{u^*}(t,x)\right] dt \in N_{U_0}(u^*(x)) \subset \mathbb{R}^m,$$

a.p.t. $x \in \mathbb{R}^d$. Am notat cu $D_u f = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial u_l}\right)_{i=1,2,\dots,d,l=1,2,\dots,m}$ şi cu $(D_u f)^T$ transpusa acesteia.

Presupunem acum că G depinde de x şi u şi că pe lângă $(H2.1)-(H2.4)$ avem că

(H2.2*) $f|_{\mathbb{R}^d \times \tilde{U}_0} \in C_b^{0,1}(\mathbb{R}^d \times \tilde{U}_0; \mathbb{R}^d)$;

(H2.4*) $G|_{\mathbb{R}^d \times \tilde{U}_0} \in C_b^{0,1}(\mathbb{R}^d \times \tilde{U}_0)$.

Teorema 2.4.2. (Condiţii necesare de optimalitate de ordinul întâi) ([3]) *Dacă u^* este un control optimal pentru problema (CP), atunci a.p.t. $x \in \mathbb{R}^d$:*

$$p_1^*(0,x)\nabla_u G(x,u^*(x)) + (D_u f^{u^*})^T(x) \int_0^T [p_1^*(t,x)\nabla\varphi_1^{u^*}(t,x) + p_2^*(t,x)\nabla\varphi_2^{u^*}(t,x)]dt \in N_{U_0}(u^*(x)).$$

Observaţia 2.4.2. ([3]) În cazul particular $U_0 = \overline{B(0_m;\mu)}$ (unde μ este o constantă pozitivă) concluzionăm că a.p.t. $x \in \mathbb{R}^d$:

$$u^*(x) \in \mu\ sign\{p_1^*(0,x)\nabla_u G(x,u^*(x)) + (D_u f^{u^*})^T(x) \int_0^T [p_1^*(t,x)\nabla\varphi_1^{u^*}(t,x) + p_2^*(t,x)\nabla\varphi_2^{u^*}(t,x)]dt\}.$$

Lema 2.4.3. ([3]) *Pentru orice $u \in \mathcal{M}$, soluţia slabă p pentru*

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt}(t) = -\mathcal{A}_u^* p(t) + 1, \quad t \in (0,T) \\ \\ p(T) = 0 \end{cases} \tag{2.14}$$

satisface $p(0,x) < 0$ a.p.t. $x \in \mathbb{R}^d$.

Corolar 2.4.1. ([3]) Dacă u^* este un control optimal pentru problema (CP), atunci din Teorema 2.4.2 şi Lema 2.4.3 obţinem că

$$u^*(x) \in (\nabla_u G(x,\cdot) + N_{U_0}(\cdot))^{-1}(F(x)) \quad \text{a.p.t. } x \in \mathbb{R}^d,$$

unde $F(x) = -\dfrac{1}{p_1^*(0,x)}(D_u f^{u^*})^T(x) \displaystyle\int_0^T \left[p_1^*(t,x)\nabla\varphi_1^{u^*}(t,x) + p_2^*(t,x)\nabla\varphi_2^{u^*}(t,x)\right] dt.$

2.5 Exemple şi comentarii

Comentariul 2.5.1. ([3]) Dacă presupunem că $\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)dx = 1$, atunci putem vedea ν ca pe distribuţia lui $X^u(0)$ şi $\mathbb{E}\left[G(X^u(t,x), u(X^u(t,x)))\right]$ şi $\mathbb{E}\left[G_T(X^u(T,x))\right]$ ca pe medii condiţionate.

Exemplul 2.5.1. ([3]) Un important caz particular se obţine pentru $f(x,u) = f_0(x) + f_1(x)u$, cu $f_0 \in C_b^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$, $f_1 \in C_b^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d\cdot m})$, $G(x,u) = \frac{1}{2}|u|_m^2$ şi $U_0 = \overline{B(0_m;\mu)}$, $\mu > 0$. Din Teorema 2.4.2 obţinem că

$$p_1^*(0,x)u^*(x) + f_1(x)^T \int_0^T \left[p_1^*(t,x)\nabla\varphi_1^{u^*}(t,x) + p_2^*(t,x)\nabla\varphi_2^{u^*}(t,x)\right] dt \in N_{U_0}(u^*(x))$$

a.p.t. $x \in \mathbb{R}^d$. Cum $p_1^*(0,x) < 0$ a.p.t. $x \in \mathbb{R}^d$ (vezi Lema 2.4.3), putem concluziona că

$$u^*(x) = P_{\overline{B(0_m;\mu)}}(\tilde{F}(x)) \quad \text{a.p.t. } x \in \mathbb{R}^d,$$

unde $\tilde{F}(x) = -\dfrac{1}{p_1^*(0,x)} f_1(x)^T \int_0^T \left[p_1^*(t,x)\nabla\varphi_1^{u^*}(t,x) + p_2^*(t,x)\nabla\varphi_2^{u^*}(t,x)\right] dt.$

Exemplul 2.5.2. ([3]) Cazul $m = d$, $f(x,u) = 1_{K_0}(x)u$ este un caz limită pentru $f(x,u) = f_0(x) + f_1(x)u$, când $f_0 \equiv 0_d$, $f_1 = 1_{K_0} I_d$. Aici K_0 este o submulţime convexă şi închisă a lui $\mathbb{R}^d$ cu $0_d \in K_0$. Acest caz corespunde situaţiei când controlul acţionează doar pentru $x \in K_0$. Funcţia f nu verifică ipoteza (H2.2). Oricum, problema poate fi "aproximată" de (CP_S) dacă luăm $f_0 \equiv 0_d$ şi $f_1 = 1_{K_0,\varepsilon} I_d$, unde $1_{K_0,\varepsilon}$ este o versiune regularizată ("mollified") a lui 1_{K_0} ($\varepsilon > 0$ este o constantă mică).

Observaţia 2.5.1. Ca în Teorema 2.4.2 se obţine că pentru orice $u, v \in L^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^m)$ astfel ca $u \in \mathcal{M}$ şi $u + \varepsilon v \in \mathcal{M}$ pentru orice $\varepsilon > 0$ suficient de mic, derivata direcţională a lui I în u, după direcţia v este

$$dI(u)(v) = -\left\langle p_1^u(0)\nabla_u G^u + (D_u f)^T \int_0^T [p_1^u(t)\nabla\varphi_1^u(t) + p_2^u(t)\nabla\varphi_2^u(t)]dt, v \right\rangle_H,$$

unde p_1^u, p_2^u sunt soluţiile slabe pentru (2.12) şi (2.13), respectiv, corespunzând lui $u^* := u$.

Această observaţie ne permite să propunem un algoritm conceptual de tip gradient (vezi de asemenea [21], [22]) pentru problema (CP). Controlul u va fi îmbunătăţit la fiecare pas.

O abordare alternativă

O abordare alternativă bazată pe semigrupurile de clasă C_0 poate fi utilizată pentru a demonstra că problemele (CP_S) şi (CP_D) sunt echivalente şi că relaţia dintre (CP_S) şi (CP) are loc dacă vedem pe φ_1^u şi φ_2^u ca fiind soluţiile mild pentru (2.3) şi (2.4), respectiv.

2.6 Notă asupra abordării considerate

Observaţia 2.6.1. ([3]) Un exemplu de problemă de control optimal stochastic unde mediile/mediile condiţionate sunt sub acţiunile lui de J şi J_T, respectiv, este următorul
$(\mathbf{CP_S^1})$

$$\underset{u\in\mathcal{M}_c}{\text{Min}} \left\{ \int_0^T J\left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}[G(X^u(t,x), u(X^u(t,x)))]d\nu(x)\right) dt + J_T\left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}[G_T(X^u(T,x))]d\nu(x)\right)\right\}$$

(aici $J, J_T \in C(\mathbb{R}^d)$). Această problemă este echivalentă cu următoarea problemă de control determinist

$$(\mathbf{CP^1_D}) \qquad \underset{u\in\mathcal{M}_c}{\mathrm{Min}} \left\{ \int_0^T J\left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_1^u(t,x)d\nu(x)\right)\, dt + J_T\left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_2^u(T,x)d\nu(x)\right)\right\},$$

şi este strâns înrudită cu

$$(\mathbf{CP^1}) \qquad \underset{u\in\mathcal{M}}{\mathrm{Min}} \left\{ \int_0^T J\left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_1^u(t,x)d\nu(x)\right)\, dt + J_T\left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_2^u(T,x)d\nu(x)\right)\right\}.$$

În anumite ipoteze asupra lui J şi J_T, problema (CP^1) poate fi tratată analog problemei (CP).

Abordarea din acest capitol poate fi extinsă la cazul poroblemelor mai generale de control optimal stochastic pentru care studiul nu poate fi redus la o singură ecuaţie Kolmogorov, ca în Observaţia 2.6.1. Alte asemenea cazuri se întâlnesc în probleme financiare unde funcţionala de cost depinde de dispersia lui $G_T(X^u(T))$ (ca o mărime a costului asociat riscului).

2.7 Rezultate auxiliare

Lema 2.7.1. **([1])** *$C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ este o submulţime densă a lui V.*

Lema 2.7.2. **([1])** *Dacă $\alpha \in V$, atunci $q_{ij}\dfrac{\partial^2\alpha}{\partial x_i \partial x_j} \in V^*$. Mai mult, există o constantă $\tilde{M} \geq 0$ astfel încât*

$$\left\| q_{ij}\frac{\partial^2\alpha}{\partial x_i \partial x_j}\right\|_{V^*} \leq \tilde{M}\|\alpha\|_V, \quad \forall \alpha \in V.$$

3. CONTROLUL OPTIMAL AL ECUAŢIILOR DIFERENŢIALE STOCHASTICE VIA ECUAŢII FOKKER-PLANCK

3.1 Formularea problemei

Considerăm următoarea ecuaţie diferenţială stochastică cu control feedback

$$\begin{cases} dX(t) = f\left(t, X(t), u(t, X(t))\right) dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \quad t \in [0,T], \\ \\ X(0) = X_0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Aici $T \in (0, +\infty)$, d, n, $m \in \mathbb{N}^*$, $W : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ este o mişcare Browniană pe un spaţiu de probabilitate filtrat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]})$ cu filtraţie completă şi X_0 este o variabilă aleatoare cu valori în $\mathbb{R}^d$ independentă de $(W(t))_{t\in[0,T]}$ şi astfel încât $\mathbb{E}[|X_0|_d^2] < +\infty$. Mai mult, presupunem că X_0 admite o densitate de probabilitate ρ_0.

Aici $u(t, X)$ este un control feedback ce aparţine mulţimii

$$\mathcal{U} = \{v : [0,T] \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^m; \quad v \text{ este o funcţie Borel, } v(t,x) \in U_0 \text{ a.p.t. } (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d\},$$

unde U_0 este o submulţime închisă şi mărginită a lui $\mathbb{R}^m$ cu $0_m \in U_0$. Notăm că $u(t,x) = 0_m$ înseamnă că de fapt controlul nu acţionază în (t,x).

Dacă nu facem alte precizări, presupunem în acest capitol că funcţiile $f : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^{d\cdot n}$, $q : [0,T] \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^{d\cdot d}$,

$$\begin{array}{l} f(t,x,u) = (f_1(t,x,u)\ f_2(t,x,u)\ ...\ f_d(t,x,u))^T, \quad \sigma(t,x) = (\sigma_{il}(t,x))_{i=1,2,\ldots,d,\ l=1,2,\ldots,n}, \\ q(t,x) = \sigma(t,x)\sigma(t,x)^T = (q_{ij}(t,x))_{i,j=1,2,\ldots,d} \quad (q_{ij}(t,x) = \sigma_{il}(t,x)\sigma_{jl}(t,x)), \end{array}$$

pentru orice $t \in [0,T], x \in \mathbb{R}^d, u \in \mathbb{R}^m$ şi satisfac

(H3.1) $f|_{[0,T]\times\mathbb{R}^d\times U_0}$ este o funcţie Borel mărginită;

(H3.2) $\sigma \in C_b^1([0,T] \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d\cdot n})$ şi există o constantă $\gamma > 0$ astfel încât

$$\sigma(t,x)\sigma(t,x)^T y \cdot y = q_{ij}(t,x)y_i y_j \geq \gamma |y|_d^2, \quad \forall (t,x,y) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d.$$

Pentru ρ_0 presupunem pentru claritatea expunerii că

(H3.3) $\rho_0 \in C_0(\mathbb{R}^d)$, $\rho_0(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$ şi $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \rho_0(x)dx = 1$.

Pentru orice $u \in \mathcal{U}$, următoarea ecuaţie Fokker-Planck

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t}(t,x) = -\nabla \cdot (f^u(t,x)\rho(t,x)) + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(q_{ij}(t,x)\rho(t,x)), & t \in (0,T), x \in \mathbb{R}^d, \\ \rho(0,x) = \rho_0(x), & x \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \tag{3.2}$$

are o unică soluţie slabă (definită în următoarea secţiune) $\rho^u(t,x)$, care este o funcţie de densitate, i.e. $\forall t \in [0,T]$: $\rho^u(t,x) \geq 0$, a.p.t. $x \in \mathbb{R}^d$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \rho^u(t,x)dx = 1$ (vezi secţiunea următoare).

Aici şi în restul capitolului se notează $f^u(t,x) = f(t,x,u(t,x))$. În ipotezele date deducem din principiul superpoziţiei că pentru orice $u \in \mathcal{U}$ există o (unică în lege/ distribuţie) soluţie slabă pentru (3.1) care are densitate, care este de fapt $\rho^u(t)$, pentru orice $t \in [0,T]$. Notăm oricare dintre aceste soluţii cu X^u.

Presupunem că $G : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ şi $G_T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfac

(H3.4) G este continuă ca funcţie de $(t,x,u) \in [0,T]\times\mathbb{R}^d\times U_0$ şi există $G_0 \in C([0,T]\times\mathbb{R}^d) \cap L^2((0,T)\times\mathbb{R}^d)$ astfel încât $|G(t,x,u)| \leq G_0(t,x), \quad \forall (t,x,u) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d \times U_0$;

(H3.5) $G_T \in C(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$.

Pentru orice $u \in \mathcal{U}$ se notează cu $G^u(t,x) = G(t,x,u(t,x))$ şi avem că

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T G^u(t,X^u(t))dt\right] + \mathbb{E}[G_T(X^u(T))] = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} G^u(t,x)\rho^u(t,x)dx\ dt + \int_{\mathbb{R}^d} G_T(x)\rho^u(T,x)dx.$$

Această egalitate nu depinde de alegerea lui X^u. Se obţine astfel că problema de control stochastic cu comenzi feedback

$$(\mathbf{P_S}) \qquad \operatorname*{Min}_{u\in\mathcal{U}} \left\{\mathbb{E}\left[\int_0^T G(t,X^u(t),u(t,X^u(t)))dt\right] + \mathbb{E}\left[G_T(X^u(T))\right]\right\}$$

este echivalentă cu următoarea problemă de control optimal determinist cu comenzi de tip open-loop

$$(\mathbf{P}) \qquad \operatorname*{Min}_{u\in\mathcal{U}} \left\{\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} G^u(t,x)\rho^u(t,x)dx\ dt + \int_{\mathbb{R}^d} G_T(x)\rho^u(T,x)dx\right\}.$$

3.2 Soluţie slabă pentru ecuaţia Fokker-Planck. Relaţia dintre problema stochastică de control optimal şi o problemă deterministă de control optimal asociată unei ecuaţii Fokker-Planck

Considerăm următoarele spaţii Hilbert reale: $V = H^1(\mathbb{R}^d)$ şi $H = L^2(\mathbb{R}^d)$. Identificăm dualul lui H cu H şi notăm $V^* = H^{-1}(\mathbb{R}^d)$ dualul lui V, cu produsul în dualitate $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V,V^*}$ (sau $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V^*,V}$). Mai mult, pentru orice $\varphi \in V$, $\psi \in H$ avem $\langle \varphi, \psi \rangle_{V,V^*} = \langle \varphi, \psi \rangle_H$ (unde $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ este produsul scalar uzual pe H).

Notăm că următoarele scufundări $V \subset H \subset V^*$ sunt continue şi dense.

Fie $F : [0,T] \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ o funcţie Borel mărginită. Să discutăm acum relaţia dintre soluţiile slabe (probabilistic) pentru următoarea ecuaţie diferenţială stochastică (pentru definiţie vezi [20])

$$dX(t) = F(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \quad t \in [0,T], \tag{3.3}$$

soluţiile cu valori măsuri de probabilitate pentru ecuaţia Fokker-Planck (pentru definiţie vezi [20])

$$\frac{\partial}{\partial t}\mu(t) = L_t^*\mu(t), \quad t \in [0,T], \tag{3.4}$$

unde $L_t(x) = F(t,x) \cdot \nabla + \dfrac{1}{2} q_{ij}(t,x) \dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ şi L_t^* este adjunctul său formal, şi soluţia slabă pentru următoarea problemă (pentru definiţie vezi [2])

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t}(t,x) = -\nabla \cdot (F(t,x)\rho(t,x)) + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(q_{ij}(t,x)\rho(t,x)), & t \in (0,T), x \in \mathbb{R}^d, \\ \rho(0,x) = \rho_0(x), & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{3.5}$$

Teorema 3.2.1. **([2])** *Dacă $\rho_0 \in H$, atunci există o unică soluţie slabă ρ pentru* (3.5).

Dacă în plus $\rho_0(x) \geq 0$ a.p.t. $x \in \mathbb{R}^d$, atunci pentru orice $t \in [0,T]$, $\rho(t,x) \geq 0$ a.p.t. $x \in \mathbb{R}^d$.

Teorema 3.2.2. **([2])** *Dacă ρ_0 satisface (H3.3), atunci pentru orice $t \in [0,T]$, $\rho(t,\cdot)$ este o densitate de probabilitate, i.e.*

$$\rho(t,x) \geq 0, \text{ a.p.t. } x \in \mathbb{R}^d, \qquad \int_{\mathbb{R}^d} \rho(t,x)dx = 1.$$

Mai mult, $\rho \in C([0,T]; L^1(\mathbb{R}^d))$.

Observaţia 3.2.2. Cum $\rho \in C([0,T]; L^1(\mathbb{R}^d))$, rezultă că pentru orice $\psi \in C_b(\mathbb{R}^d)$, funcţia $t \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\rho(t,x)dx$ este continuă pe $[0,T]$, i.e. dacă considerăm $\nu : [0,T] \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ definită de

$$\nu(t)(A) = \int_A \rho(t,x)dx, \quad \text{pentru orice mulţime Borel } A \subset \mathbb{R}^d,$$

atunci $\nu \in C([0,T]; \mathcal{P}(\mathbb{R}^d))$.

Dacă $(X(t))_{t\in[0,T]}$ este o soluţie slabă pentru (3.3), atunci din formula lui Itô obţinem că $(\mathcal{L}(X(t)))_{t\in[0,T]}$ este o soluţie cu valori măsuri de probabilitate pentru (3.4).

Proprietăţile lui ρ implică faptul că $(\nu(t))_{t\in[0,T]}$ (definit ca în Observaţia 3.2.2) este o soluţie cu valori măsuri de probabilitate pentru (3.4) şi satisface $\nu(0) = \mathcal{L}(X_0)$. Aplicând principiul superpoziţiei putem concluziona că există o soluţie slabă $(\tilde{X}(t))_{t\in[0,T]}$ pentru (3.3) astfel încât $\mathcal{L}(\tilde{X}(t)) = \nu(t)$, $\forall t \in [0,T]$.

Să revenim la relaţia cu soluţia slabă pentru (3.5). Din Observaţia 3.2.2 obţinem că $(\nu(t))_{t\in[0,T]}$ este o soluţie cu valori măsuri de probabilitate pentru (3.4) ce satisface că $\nu(0) = \mathcal{L}(X_0)$. Rezultă că există o soluţie slabă $(X(t))_{t\in[0,T]}$ pentru (3.3) cu $\mathcal{L}(X(0)) = \mathcal{L}(X_0)$, satisfăcând în plus $\mathcal{L}(X(t)) = \nu(t), \forall t \in [0,T]$.

Dacă presupunem în plus că F este uniform Lipschitz continuă în raport cu variabila x şi cum $\rho \in L^2((0,T)\times\mathbb{R}^d)$, atunci obţinem din teorema 1.3 [28] că orice soluţie cu valori măsuri de probabilitate $(\mu(t))_{t\in[0,T]}$ pentru (3.4) cu $\mu(0) = \nu(0)$ (are densitate ρ_0) satisface $\mu(t) = \nu(t), \forall t \in [0,T]$ (acesta este un rezultat de slabă unicitate pentru (3.4) cu valoarea iniţială $\mathcal{L}(X_0)$). În consecinţă, orice soluţie slabă pentru (3.3) cu legea/distribuţia iniţială $\mathcal{L}(X_0)$ satisface că legea sa este egală cu $\nu(t), \forall t \in [0,T]$.

Dacă în plus presupunem că F este continuă şi uniform Lipschitz continuă în raport cu variabila x, atunci (3.3) are o unică soluţie tare $(X(t))_{t\in[0,T]}$, cu $X(0) = X_0$ (aici se consideră filtraţia $\mathcal{F}_t$ generată de X_0 şi $W(s)$, $s \in [0,t]$), care este de asemenea soluţie slabă pentru (3.3) şi în plus $\mathcal{L}(X(t)) = \nu(t)$, $\forall t \in [0,T]$ ($X(t)$ are pe $\rho(t)$ ca densitate de probabilitate).

Să ne întoarcem la relaţia dintre (3.1) şi (3.2), şi dintre (P_S) şi (P). Notăm că pentru orice $u \in \mathcal{U}$, $F := f^u$ este o funcţie Borel mărginită. Problema (3.2) are o unică soluţie slabă ρ^u.

Dacă pentru orice $u \in \mathcal{U}$ notăm cu X^u orice soluţie slabă a EDS din (3.1) cu proprietatea că pentru orice $t \in [0,T]$, $\mathcal{L}(X^u(t)) = \nu^u(t)$, unde $\nu^u : [0,T] \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ este dat de $\nu^u(t)(A) = \displaystyle\int_A \rho^u(t,x)dx$, pentru orice mulţime Borel $A \subset \mathbb{R}^d$ (i.e. $\rho^u(t)$ este o densitate de probabilitate pentru $\nu^u(t)$), atunci

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T G^u(t,X^u(t))dt\right] + \mathbb{E}[G_T(X^u(T))] = I(u),$$

şi concluzionăm că (P_S) şi (P) sunt echivalente.

Dacă $f|_{[0,T]\times\mathbb{R}^d\times U_0}$ este mărginită, continuă şi uniform Lipschitz continuă în raport cu (x,u), atunci pentru orice $u \in \mathcal{U}_c = \mathcal{U} \cap C_b^{0,1}([0,T]\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^m)$, $F := f^u$ este mărginită, continuă şi uniform Lipschitz continuă în raport cu x. Este evident că (3.1) are o unică soluţie tare (aici se consideră filtraţia $\mathcal{F}_t$ generată de X_0 şi $W(s)$, $s \in [0,t]$), pe care o notăm cu X^u. Aceasta este de asemenea o soluţie slabă pentru EDS din (3.1) şi satisface că $\rho^u(t)$ este densitate de probabilitate pentru $\mathcal{L}(X^u(t))$ pentru orice $t \in [0,T]$.

Avem că pentru orice $u \in \mathcal{U}_c$: $\mathbb{E}\left[\displaystyle\int_0^T G^u(t,X^u(t))dt\right] + \mathbb{E}[G_T(X^u(T))] = I(u)$ şi

$$\inf_{u\in\mathcal{U}_c}\left\{\mathbb{E}\left[\int_0^T G(t,X^u(t),u(t,X^u(t)))dt\right] + \mathbb{E}\left[G_T(X^u(T))\right]\right\} = \inf_{u\in\mathcal{U}_c} I(u).$$

Notăm că X^u este de fapt unica soluţie tare pentru (3.1).

Dacă în plus U_0 este convexă, atunci din Lema 3.7.2 (din secţiunea 3.7) obţinem că $\mathcal{U}_c$ este o submulţime densă a lui $\mathcal{U}$ (cu topologia lui $L^2_{loc}([0,T]\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^m)$). Pe de altă parte, dacă în plus $f|_{[0,T]\times\mathbb{R}^d\times U_0}$ este mărginită, continuă şi uniform Lipschitz continuă în raport cu (x,u), atunci rezultă că

$$\inf_{u\in\mathcal{U}_c} I(u) = \inf_{u\in\mathcal{U}} I(u).$$

3.3 Principiul de maxim pentru problema de control determinist

Presupunem în această secţiune că f satisface ipoteza mai restrictivă

(H3.1') $f|_{[0,T]\times\mathbb{R}^d\times U_0}$ este o funcţie mărginită,

şi că ρ_0 satisface ipoteza mai slabă

(H3.3') $\rho_0 \in L^2(\mathbb{R}^d),\ \rho_0(x) \geq 0$ a.p.t. $x \in \mathbb{R}^d,\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \rho_0(x)dx = 1.$

Pentru orice $u \in \mathcal{U}$ şi $t \in [0,T]$ definim operatorul liniar $\mathcal{A}^u(t) : V \longrightarrow V^*$,

$$\mathcal{A}^u(t)\varphi = -\nabla \cdot (f^u(t,\cdot)\varphi) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(q_{ij}(t,\cdot)\varphi), \quad \forall \varphi \in V.$$

Rezultă pe cale standard că $\mathcal{A}^u(t) \in L(V,V^*)$ şi $\|\mathcal{A}^u(\cdot)\|_{L(V,V^*)} \in L^\infty(0,T)$.
Fie $\mathcal{A}^u(t)^* \in L(V;V^*)$ adjunctul său formal, definit astfel $\mathcal{A}^u(t)^*\psi = f^u(t,\cdot)\cdot\nabla\psi + \dfrac{1}{2}q_{ij}(t,\cdot)\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_i \partial x_j}$.

Presupunem că u^* este un control optimal pentru problema (P). Fie p unica soluţie slabă pentru

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt}(t) = -\mathcal{A}^{u^*}(t)^*p(t) + G(t,\cdot,u^*(t,\cdot)), & t \in (0,T), \\ \\ p(T) = -G_T, \end{cases} \tag{3.6}$$

Aceasta este o problemă Cauchy în V^* şi (3.6) se mai poate scrie în mod echivalent ca

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial t} = -f^{u^*}\cdot\nabla p - \dfrac{1}{2}q_{ij}\dfrac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} + G^{u^*}, & t \in (0,T), x \in \mathbb{R}^d, \\ \\ p(T,x) = -G_T(x), & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{3.7}$$

Teorema 3.3.1. (Principiul de maxim) ([2]) *Dacă u^* este un control optimal pentru problema (P), atunci*

$$\rho^{u^*}(t,x)[f(t,x,u^*(t,x))\cdot\nabla p(t,x) - G(t,x,u^*(t,x))] = \max_{u_0\in U_0} \rho^{u^*}(t,x)[f(t,x,u_0)\cdot\nabla p(t,x) - G(t,x,u_0)],$$

a.p.t. $(t,x) \in (0,T)\times\mathbb{R}^d$.

Observaţia 3.3.1. ([2]) De fapt, principiul de maxim spune că aproape pentru orice $(t,x) \in (0,T)\times\mathbb{R}^d$ avem că

$$u^*(t,x) = \arg\max\{\rho^{u^*}(t,x)[f(t,x,u_0)\cdot\nabla p(t,x) - G(t,x,u_0)];\ u_0 \in U_0\}.$$

Dacă în plus U_0 este convexă şi $f|_{[0,T]\times\mathbb{R}^d\times U_0} \in C_b^{0,0,1}([0,T]\times\mathbb{R}^d\times U_0;\mathbb{R}^d)$, $G|_{[0,T]\times\mathbb{R}^d\times U_0} \in C_b^{0,0,1}([0,T]\times\mathbb{R}^d\times U_0)$, atunci

$$\rho^{u^*}(t,x)((D_u f(t,x,u^*(t,x)))^T\nabla p(t,x) - \nabla_u G(t,x,u^*(t,x))) \in N_{U_0}(u^*(t,x)),$$

a.p.t. $(t,x) \in (0,T)\times\mathbb{R}^d$, unde $D_u f = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial u_l}\right)_{i=1,2,\dots,d,\ l=1,2,\dots,m}$ şi $(D_u f)^T$ este transpusa sa.

Cazul independent de timp

Dacă f, σ, G şi G_0 sunt independente de timp, atunci este natural să luăm în considerare şi următoarea problemă de control optimal stochastic cu comenzi de tip feedback

$$(\mathbf{P_S^0}) \qquad \underset{u\in\mathcal{M}}{\mathrm{Min}} \left\{\mathbb{E}\left[\int_0^T G(X^u(t),u(X^u(t)))dt\right] + \mathbb{E}\left[G_T(X^u(T))\right]\right\},$$

şi următoarea problemă de control optimal determinist cu comenzi de tip open-loop

$$(\mathbf{P^0}) \qquad \operatorname*{Min}_{u\in\mathcal{M}} \left\{ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} G(x,u(x))\rho^u(t,x)dx\ dt + \int_{\mathbb{R}^d} G_T(x)\rho^u(T,x)dx \right\},$$

unde $\mathcal{M} = \{v : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^m;\ v \text{ este o funcţie Borel},\ v(x) \in U_0,\ \text{a.p.t. } x \in \mathbb{R}^d\}$.

Teorema 3.3.3. **([2])** *Dacă $u^* \in \mathcal{M}$ este un control optimal pentru problema (P^0), atunci*

$$\begin{aligned} &f(x,u^*(x))\cdot \int_0^T \nabla p(t,x)\rho^{u^*}(t,x)dt - G(x,u^*(x))\int_0^T \rho^{u^*}(t,x)dt \\ &= \max_{u_0\in U_0}\left[f(x,u_0)\cdot \int_0^T \nabla p(t,x)\rho^{u^*}(t,x)dt - G(x,u_0)\int_0^T \rho^{u^*}(t,x)dt\right], \end{aligned}$$

a.p.t. $x \in \mathbb{R}^d$, unde p este unica soluţie slabă pentru (3.7).

Observaţia 3.3.2. **([2])** Dacă în plus U_0 este convexă şi $f|_{\mathbb{R}^d\times U_0} \in C_b^{0,1}(\mathbb{R}^d \times U_0;\mathbb{R}^d)$, $G|_{\mathbb{R}^d\times U_0} \in C_b^{0,1}(\mathbb{R}^d \times U_0)$, atunci a.p.t. $x \in \mathbb{R}^d$:

$$(D_u f(x,u^*(x)))^T \int_0^T \nabla p(t,x)\rho^{u^*}(t,x)dt - \nabla_u G(x,u^*(x))\int_0^T \rho^{u^*}(t,x)dt \in N_{U_0}(u^*(x)).$$

3.4 Existenţa unui control optimal pentru problema de control determinist

Presupunem în această secţiune că U_0 este de asemenea convexă şi că

$$f(t,x,u) = f_0(t,x) + f_1(t,x)u, \quad \forall (t,x,u) \in [0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^m,$$

unde $f_0 : [0,T]\times\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $f_1 : [0,T]\times\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^{d\cdot m}$ sunt continue şi mărginite. Presupunem de asemenea că pe lângă $(H3.4)$ şi $(H3.5)$, G şi G_T satisfac că funcţia de la U_0 la $\mathbb{R}$

$$u \longmapsto G(t,x,u) \text{ este convexă },\ \forall (t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^d,$$

$$G(t,x,u) \geq \alpha_1, \quad \forall (t,x,u) \in [0,T]\times\mathbb{R}^d\times U_0, \quad G_T \in H^1(\mathbb{R}^d), \quad G_T(x) \geq \alpha_2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Aici α_1, α_2 sunt constante reale.

Teorema 3.4.1. **([2])** *Problema (P) admite cel puţin un control optimal.*

Observaţia 3.4.1. **([2])** Presupunem că $f(x,u) = f_0(x) + f_1(x)u$, $\forall (x,u) \in \mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^m$, unde $f_0 : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $f_1 : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^{d\cdot m}$ sunt continue şi mărginite şi σ, G şi G_0 sunt independente de t. În mod analog rezultă că există cel puţin un control optimal pentru (P^0) (definit în secţiunea 3.3).

3.5 Exemple

Această scţiune cuprinde mai multe exemple; reamintim doar pe unul dintre acestea.

Exemplul 3.5.1. **([2])** Presupunem că $U_0 = \overline{B(0_m;r)}$ $(r \in (0,+\infty))$, $f(t,x,u) = f_1(t,x)u$, unde $f_1 : [0,T]\times\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^{d\cdot m}$ este continuă şi mărginită, $f_1(t,x) = 0_{d\cdot m}, \forall t \in [0,T], |x|_d \geq R$ $(R \in (0,+\infty))$, $G(t,x,u) = \frac{1}{2}G_1(t,x)|u|_m^2$, unde $G_1 \in C([0,T]\times\mathbb{R}^d), G_1(t,x) = 0, \forall t \in [0,T], |x|_d \geq R, G_1(t,x) > 0, \forall (t,x) \in (0,T)\times B(0_d;R)$. Obţinem că

$$u^*(t,x) = P_{\overline{B(0_m;r)}}\left(\frac{f_1(t,x)^T\nabla p(t,x)}{G_1(t,x)}\right),$$

a.p.t. în $\{(t,x) \in (0,T) \times B(0_d;R); \rho^{u^*}(t,x) > 0\}$, unde $P_{\overline{B(0_m;r)}}$ este proiecţia pe $\overline{B(0_m,r)}$ şi p este soluţia slabă pe (3.7).

3.6 O problemă de control optimal cu comenzi cu acţiune nelocală

Presupunem că driftul f este egal cu controlul u (i.e. $f(t,x,u) = u$) şi că u nu depinde explicit de timp. Atunci, (3.1) devine

$$\begin{cases} dX(t) = u(X(t))dt + \sigma(t,X(t))dW(t), \quad t \in [0,T], \\ \\ X(0) = X_0. \end{cases}$$

Funcţia ρ, soluţia slabă pentru (3.2) poate fi văzută ca o densitate probabilistică a unei populaţii.

Fie $\zeta(x)$ densitatea în $x \in \mathbb{R}^d$ a unei a doua populaţii (sau a unei alte entităţi) care produce un stimul pentru prima populaţie. De dragul clarităţii presupunem că a doua populaţie este independentă de timp, imobilă, localizată în $\overline{B(0_d;R_0)}$ $(R_0 > 0)$ şi că respinge indivizii primei populaţii care sunt la o distanţă mai mică de R (aici R este o constantă pozitivă). Înseamnă că ζ este un control cu acţiune nelocală. Această acţiune se exprimă matematic în funcţie de aşa numitul "gradient generalizat" (gradient nelocal) cu nucleul $\mathcal{G}_R$. Mai exact,

$$u(x) = -\nabla\left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{G}_R(x-y)\zeta(y)dy\right)$$

$(u = -\nabla(\mathcal{G}_R * \zeta))$ descrie acţiunea nelocală (efectul) produs de a doua populaţie asupra indivizilor primei populaţii în $x \in \mathbb{R}^d$. Presupunem că funcţia $\mathcal{G}_R$ este nenegativă, suficient de regulată şi că supportul acesteia este o submulţime a lui $\overline{B(0_d;R)}$.
Termenul $-\nabla \cdot (u(x)\rho(t,x)) = \nabla \cdot (\nabla(\mathcal{G}_R * \zeta)(x)\rho(t,x))$ din (3.2) descrie aşa numita "cross-dispersion" (vezi [12], [13]).

O mulţime potrivită de controale este

$$\mathcal{M}^0 = \{\zeta : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R};\ \zeta \text{ este funcţie Borel}, 0 \leq \zeta(x) \leq \tilde{M}_0 \text{ a.p.t. } x \in \mathbb{R}^d,\ \zeta(x) = 0 \text{ a.p.t. } |x|_d > R_0\}.$$

Aici $\tilde{M}_0$ este o constantă pozitivă şi presupunem că $\mathcal{G}_R \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{G}_R(x) > 0$ dacă $|x|_d < R$ şi $\mathcal{G}_R(x) = 0$ dacă $|x|_d \geq R$. Mulţimea de acţiuni produse de controalele ζ este

$$\mathcal{U}^0 = \left\{u;\ u(x) = -\nabla(\mathcal{G}_R * \zeta)(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^d,\ \zeta \in \mathcal{M}^0\right\}.$$

Considerăm următoarea problemă de control optimal determinist cu comenzi $\zeta \in \mathcal{M}^0$:

$$(\mathbf{P^0_{nl}}) \qquad \underset{\zeta \in \mathcal{M}^0}{\text{Min}} \left\{\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \overline{G}(x,\zeta(x))\rho^\zeta(t,x)dx\ dt + \int_{\mathbb{R}^d} G_T(x)\rho^\zeta(T,x)dx\right\}.$$

Folosim fie notaţia ρ^u, fie ρ^ζ (unde $u(x) = -\nabla\left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{G}_R(x-y)\zeta(y)dy\right)$).

Presupunem că $\overline{G} \in C(\mathbb{R}^d \times [0,\tilde{M}_0])$ şi că există $\overline{G}_0 \in C(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ astfel încât

$$|\overline{G}(x,\zeta)| \leq \overline{G}_0(x), \quad \forall (x,\zeta) \in \mathbb{R}^d \times [0,\tilde{M}_0].$$

Mai mult, presupunem că

$$\zeta \longmapsto \overline{G}(x,\zeta) \text{ este convexă },\ \forall x \in \mathbb{R}^d,$$

$$\overline{G}(x,\zeta) \geq \alpha_1, \quad \forall (x,\zeta) \in \mathbb{R}^d \times [0,\tilde{M}_0], \quad G_T(x) \geq \alpha_2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Aici α_1, α_2 sunt constante reale.

Problema de control optimal determinist este evident echivalentă cu următoarea

$$(\mathbf{P^0_{Snl}}) \qquad \underset{\zeta\in\mathcal{M}^0}{\mathrm{Min}} \left\{ \mathbb{E}\left[\int_0^T \overline{G}(X^\zeta(t), \zeta(X^\zeta(t)))dt\right] + \mathbb{E}\left[G_T(X^\zeta(T))\right]\right\},$$

unde am utilizat notaţia X^u sau X^ζ (unde $u(x) = -\nabla\left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{G}_R(x-y)\zeta(y)dy\right)$).

Teorema 3.6.1. *Există cel puţin un control optimal ζ^* pentru problema (P^0_{nl}).*

Presupunem în plus că $\overline{G} \in C_b^{0,1}(\mathbb{R}^d \times [0, \tilde{M}_0])$.

Teorema 3.6.2. *Dacă p este soluţia slabă pentru*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial t} = \nabla(\mathcal{G}_R * \zeta^*)\cdot\nabla p - \dfrac{1}{2}q_{ij}\dfrac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} + \overline{G}(\cdot, \zeta^*(\cdot)), & t\in(0,T), x\in\mathbb{R}^d, \\ p(T,x) = -G_T(x), & x\in\mathbb{R}^d, \end{cases}$$

atunci

$$\zeta^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{a.p.t. pentru } \displaystyle\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\rho^{\zeta^*}(t,y)\nabla p(t,y)\cdot\nabla\mathcal{G}_R(y-x)dy\ dt \\ & \quad +\dfrac{\partial\overline{G}}{\partial\zeta}(x,\zeta^*(x))\displaystyle\int_0^T\rho^{\zeta^*}(t,x)dt > 0,\ |x|_d \le R_0 \\ \tilde{M}_0, & \text{a.p.t. pentru } \displaystyle\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\rho^{\zeta^*}(t,y)\nabla p(t,y)\cdot\nabla\mathcal{G}_R(y-x)dy\ dt \\ & \quad +\dfrac{\partial\overline{G}}{\partial\zeta}(x,\zeta^*(x))\displaystyle\int_0^T\rho^{\zeta^*}(t,x)dt < 0,\ |x|_d \le R_0. \end{cases}$$

3.7 Rezultate auxiliare

Presupunem că ρ_0 satisface ipoteza mai slabă $(H3.3')$ (în loc de $(H3.3)$).

Lema 3.7.1. ([2]) *Există o constantă nenegativă $\tilde{M}$ astfel încât*

$$\|\rho^u\|_{C([0,T];H)} \le \tilde{M}, \quad \forall u\in\mathcal{U}.$$

Lema 3.7.2. ([2]) *Dacă U_0 este şi convexă, atunci pentru orice $u\in\mathcal{U}$ există un şir $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}\subset\mathcal{U}_c$, astfel încât*

$$u_k \longrightarrow u \quad \text{în } L^2_{loc}([0,T]\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^m),$$

i.e. închiderea lui $\mathcal{U}_c$ în $L^2_{loc}([0,T]\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^m)$ este $\mathcal{U}$.

Lema 3.7.3. ([2]) *Dacă $f|_{[0,T]\times\mathbb{R}^d\times U_0}$ este o funcţie continuă şi mărginită şi dacă $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}\subset\mathcal{U}$ satisface*

$$u_k \longrightarrow u, \quad \text{a.p.t. in } [0,T]\times\mathbb{R}^d,$$

atunci

$$\rho^{u_k} \longrightarrow \rho^u \quad \text{în } C([0,T];H).$$

4. EXTINDERI VIITOARE

4.1 Extinderi la Capitolul 2

O atenţie specială va fi acordată problemelor lumii reale descrise de ecuaţii diferenţiale stochastice (vezi [29] pentru EDS din Fizică şi Inginerie şi [24] pentru Finanţe).

4.2 Extinderi la Capitolul 3

Prima extindere. Considerăm următoarea problemă de control optimal stochastic cu comenzi feedback

$$(\overline{\mathbf{P}}_{\mathbf{S}}) \qquad \operatorname*{Min}_{u\in\mathcal{U}} \left\{ \mathbb{E}\left[\int_0^T G^u(t,X^u(t))dt\right] + I_{\mathcal{K}_0}(X^u(T)) \right\},$$

unde $\mathcal{K}_0$ este submulţime nevidă şi închisă a lui $L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)$. Notăm că aceasta nu este un caz particular al problemei (P_S). Considerăm o problemă "aproximativă"

$$(\overline{\mathbf{P}}^{\varepsilon}_{\mathbf{S}}) \qquad \operatorname*{Min}_{u\in\mathcal{U}} \left\{ \mathbb{E}\left[\int_0^T G^u(t,X^u(t))dt\right] + \frac{1}{2\varepsilon} d_{\mathcal{K}_0}(X^u(T))^2 \right\},$$

unde $\varepsilon > 0$ şi $d_{\mathcal{K}_0}(y) = \inf\{\|y-z\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)};\ z\in\mathcal{K}_0\}$.

Pentru $\mathcal{K}_0 = \{y\in L^2(\Omega;\mathbb{R}^d);\ \|y\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)} \geq r_0\}$ $(r_0>0)$ avem că

$$d_{\mathcal{K}_0}(y)^2 = (\min\{r_0, \|y\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)}\} - r_0)^2.$$

Problema $(\overline{P}^{\varepsilon}_S)$ este echivalentă cu următoarea problemă de control optimal determinist

$$(\overline{\mathbf{P}}^{\varepsilon}) \qquad \operatorname*{Min}_{u\in\mathcal{U}} \left\{ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} G^u\rho^u dx\ dt + \frac{1}{2\varepsilon}\left(\min\{r_0, (\int_{\mathbb{R}^d} |x|_d^2 \rho^u(T,x)dx)^{\frac{1}{2}}\} - r_0\right)^2 \right\}.$$

Metodele dezvoltate şi utilizate în Capitolul 3 pot fi adaptate pentru a investiga $(\overline{P}^{\varepsilon}_S)$ şi de asemenea $(\overline{P}^{\varepsilon})$.

A doua extindere. O altă posibilă extindere a studiului din Capitolul 3 se referă la problema de control optimal determinist (P) cu ρ^u fiind, de această dată, soluţia slabă a următoarei ecuaţii Fokker-Planck cu termen nelocal

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t}(t,x) = -\nabla(f^u(t,x)\rho(t,x)) + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}(q_{ij}(t,x)\rho(t,x)) \\ \qquad -\zeta(x)\rho(t,x) + \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \zeta(y)\rho(t,y)\kappa(x,y)dy, & t\in(0,T),\ x\in\mathbb{R}^d, \\ \rho(0,x) = \rho_0(x), & x\in\mathbb{R}^d, \end{cases} \tag{4.1}$$

unde $\zeta \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\zeta(x) \geq 0$ a.p.t. $x \in \mathbb{R}^d$, $\kappa \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, $\kappa(x,y) \geq 0$ a.p.t. $(x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \kappa(x,y)dx = 1$ a.p.t. $y \in \mathbb{R}^d$.
Densitatea de probabilitate corespunzătoare lui X^u satisface (4.1) dacă, în loc de un simplu zgomot Brownian, considerăm suma a două zgomote independente, unul Brownian şi unul de tip Poisson (vezi [14], [11]).

4.3 Controlul optimal al unei ecuaţii McKean-Vlasov via ecuaţia Fokker-Planck neliniară

Considerăm următoarea problemă de control optimal determinist

$$(\mathbf{P^1}) \qquad \operatorname*{Min}_{u \in \mathcal{U}^0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} G(t,x,u(x))\rho^u(t,x)dx\ dt + \int_{\mathbb{R}^d} G_T(x)\rho^u(T,x)dx,$$

unde ρ^u este soluţia "mild", definită folosind semigrupurile neliniare, a următoarei ecuaţii Fokker-Planck neliniare

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t}(t,x) = -\nabla \cdot (u(x)b(\rho(t,x))\rho(t,x)) + \Delta\beta(\rho(t,x)), & t \in (0,T),\ x \in \mathbb{R}^d \\ \rho(0,x) = \rho_0(x), & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

În anumite ipoteze această problemă este strâns legată de următoarea problemă de control optimal stochastic (via principiul superpoziţiei)

$$(\mathbf{P^1_S}) \qquad \operatorname*{Min}_{\zeta \in \mathcal{M}^0} \mathbb{E}\left[\int_0^T G(t, X^u(t), \zeta(X^u(t)))dt\right] + \mathbb{E}[G_T(X^u(T))],$$

unde X^u este o anumită soluţie (probabilistic) slabă a următoarei ecuaţii McKean-Vlasov

$$\begin{cases} dX(t) = u(X(t))b\left(\frac{d\mathcal{L}_{X(t)}}{dx}(X(t))\right)dt + \sigma\left(\frac{d\mathcal{L}_{X(t)}}{dx}(X(t))\right)dW(t), & t \in [0,T] \\ X(0) = X_0. \end{cases}$$

Aici $\sigma(r) = \sqrt{2}\left(\frac{\beta(r)}{r}\right)^{\frac{1}{2}}$ şi $u = -\nabla(\mathcal{G}_R * \zeta)$. Controalele $\zeta \in \mathcal{M}^0$ au acţiuni nelocale $u \in \mathcal{U}^0$ (ca în secţiunea 3.6).

Intenţionăm să studiem problema (P^1) folosind o abordare semigrupală bazată pe semigrupuri neliniare în $L^1(\mathbb{R}^d)$. Proprietăţile soluţiilor ecuaţiei Fokker-Planck neliniare sunt obţinute în [6], [7], [8], [9]. Pentru a trata problema de control optimal determinist vom considera o aproximare Euler implicită (backward) a ecuaţiei Fokker-Planck neliniare şi problema de control optimal corespunzătoare. Existenţa unui control optimal şi condiţiile de optimalitate pentru problema aproximativă sunt mai uşor de obţinut decât pentru problema (P^1). Studiul este în curs în [4].

5. **ANEXĂ**

Am reamintit aici câteva rezultate care au fost indispensabile pe parcursul acestei teze de doctorat: inegalitatea lui Gronwall, teorema de existenţă şi unicitate a lui Lions, teorema de compactitate a lui Aubin, câteva rezultate privind operatorii disipativi şi semigrupurile de clasă C_0.

BIBLIOGRAFIE

[1] Ş.-L. Aniţa, A stochastic optimal control problem with feedback inputs, Internat. J. Control, online (2020), DOI: 10.1080/00207179.2020.1806360.

[2] Ş.-L. Aniţa, Optimal control of stochastic differential equations via Fokker–Planck equations. Appl. Math. Optimiz., 84 (2021), 1555–1583.

[3] Ş.-L. Aniţa, Optimal control for stochastic differential equations and related Kolmogorov equations, submitted (2021).

[4] Ş.-L. Aniţa, Optimal control of a McKean-Vlasov equation via nonlinear Fokker-Planck equation, to be submitted (2022).

[5] V. Barbu, Optimal feedback controllers for a stochastic differential equation with reflection, SIAM J. Control Optimiz., 58 (2) (2020), 986–997.

[6] V. Barbu, M. Röckner, Probabilistic representation for solutions to nonlinear Fokker-Planck equations, SIAM J. Math. Anal., 50 (4) (2018), 4246–4260.

[7] V. Barbu, M. Röckner, From nonlinear Fokker-Planck equations to solutions of distribution dependent SDE, Ann. Probab., 48 (2020), 1902–1920.

[8] V. Barbu, M. Röckner, Uniqueness for nonlinear Fokker-Planck equations and weak uniqueness for McKean-Vlasov SDEs, Stoch. PDE: Anal. Comp., online (2020).

[9] V. Barbu, M. Röckner, D. Zhang, Optimal control of nonlinear stochastic differential equations on Hilbert spaces, SIAM J. Control Optimiz., 58 (4) (2020), 2383–2410.

[10] L. Beznea, I. Cîmpean, M. Röckner, A new approach to the existence of invariant measures for Markovian semigroups, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist., 55 (2) (2019), 977–1000.

[11] L. Beznea, L. Stoica, From diffusions to processes with jumps, in "Probability Theory and Mathematical Statistics" (B. Grigelionis et al., eds.), Proceedings of the sixth Vilnius conference, Vilnius, Lithuania, June 28 - July 3, 1993. Utrecht: VSP. 53-74 (1994).

[12] V. Capasso, D. Bakstein, An Introduction to Continuous-Time Stochastic Processes. Theory, Models, and Applications to Finance, Biology, and Medicine. 4th edition, Birkhäuser, 2021.

[13] V. Capasso, D. Morale, Asymptotic behavior of a system of stochastic particles subject to nonlocal interactions, Stoch. Anal. Appl., 27 (3) (2009), 574–603.

[14] S.I. Denisov, W. Horsthemke, P. Hänggi, Generalized Fokker-Planck equation: derivation and exact solutions, Eur. Phys. J. - B, 68 (2009), 567–575.

[15] L.C. Evans, An Introduction to Stochastic Differential Equations, AMS, 2013.

[16] A. Figalli, Existence and uniqueness of martingale solutions for SDEs with rough or degenerate coefficients, J. Funct. Anal., 254 (2008), 109–153.

[17] A. Fleig, R. Gugliemi, Optimal control of the Fokker-Planck equation with space-dependent controls, J. Optimiz. Theory Appl., 174 (2) (2017), 408–427.

[18] W.H. Fleming, R.W. Rishel, Deterministic and Stochastic Optimal Control, Springer-Verlag, New York, 1975.

[19] A. Friedman, Stochastic Differential Equations and Applications, Dover, New York, 2006.

[20] X. Huang, P. Ren, F.-Y. Wang, Distribution dependent stochastic differential equations, Front. Math. China, 16 (2021), 257–301.

[21] H.J. Kelley, Gradient theory of optimal flight paths, J. Amer. Rocket Soc., 30 (1960), 947–953.

[22] R. Klessig, E. Polak, An adaptive precision gradient method for optimal control, SIAM J. Control Optimiz., 11 (1) (1973), 80–93.

[23] J.-L. Lions, Quelques Méthodes de Resolution des Problèmes aux Limites Nonlinéaires, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[24] B. Øksendal, Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications, Fifth Edition, Springer, Berlin, 1998.

[25] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1983.

[26] E. Pardoux, A. Răşcanu, Continuity of the Feynman–Kac formula for a generalized parabolic equation, Stochastics, 89 (5) (2017), 726–752.

[27] H. Risken, The Fokker–Planck Equation. Methods of Solution and Applications. 2nd ed., Springer, Heidelberg, 1989.

[28] M. Röckner, X. Zhang, Weak uniqueness of Fokker–Planck equations with degenerate and bounded coefficients, C. R. Math., 348 (7-8) (2010), 435-438.

[29] K. Sobczyk, Stochastic Differential Equations: with Applications to Physics and Engineering, Kluwer, Dordrecht, 1991.

[30] D. Trevisan, Well-posedness of multidimensional diffusion processes with weakly differentiable coefficients, Electron. J. Probab., 21 (2016), 1–41.

[31] M. Tucsnak, G. Weiss, Observation and Control for Operator Semigroups, Birkhäuser, Basel, 2009.