Institutul de Matematică ”Simion Stoilow”
al Academiei Române

Metode transcendente în analiza complexă

Coordonator ştiinţific:
C.S. I Dr. Mihnea Colţoiu

Doctorand:
Ovidiu Preda

Teză prezentată pentru obţinerea titlului de
Doctor în Matematică

Bucureşti, Octombrie 2016

REZUMAT

Subiectul acestei teze este pseudoconvexitatea analitică, teza tratând probleme privind spaţii Stein, q-convexitate şi reprezentări integrale.

Prima parte a tezei, reprezentată de primele două capitole, cuprinde noţiuni generale despre spaţii complexe, spaţii complexe normale, spaţii Stein, q-convexitate şi q-convexitate cu colţuri. De asemenea, mai conţine şi definiţii şi rezultate necesare pentru a doua parte a tezei: teorema Colţoiu-Diederich care face legătura între problema Levi şi existenţa anvelopei de olomorfie, teorema lui Skoda, teorema lui Colţoiu privind dimensiunea finită a unor anumite grupuri de coomologie şi, în final, teorema Grauert-Lieb privind construcţia unui nucleu integral Ramírez, care asigură existenţa soluţiilor mărginite pentru ecuaţia $\overline{\partial}$ pe domenii strict pseudoconvexe.

A doua parte, formată din ultimele trei capitole (capitolele 3,4, şi 5), conţine rezultatele originale ale acestei teze. Aceste teoreme sunt cuprinse în articolele autorului [19], [20], şi [21].

Teorema principală din capitolul 3 generalizează o teoremă a lui Fornæss şi Narasimhan, privind problema Levi pe spaţii Stein normale, arătând că aceasta rămâne adevřată chiar şi fără ipoteza de relativ compacitate. Ea este apoi aplicată pentru a demonstra un rezultat privind problema Serre, care afirmă că o condiţie necesară şi suficientă pentru ca un fibrat olomorf local trivial E cu baza Stein şi cu fibra domeniu de olomorfie mărginit din $\mathbb{C}^n$ este Stein dacă şi numai dacă E are anvelopă de olomorfie. O demonstraţie a acestei teoreme, dar numai într-un caz particular şi cu o demonstraţie mult mai complicată a fost dată de Zaffran, folosind suprafeţe Hirzebruch-Inoue.

Teorema centrală a capitolului 4 este un rezultat despre proprietătile coomologice ale intersecţiei de deschişi $(n-1)$-completţi din $\mathbb{C}^n$: intersecţia transversală a unui număr finit de deschişi $(n-1)$-compleţi, mărginiţi, cu frontierele de clasă $\mathcal{C}^2$, este coomologic $(n-1)$-completă.

În ultimul capitol al tezei este demonstrat un rezultat care dă un raspuns pozitiv la problema Corona pentru deschişi strict pseudoconveşi, mărginiţi din $\mathbb{C}^n$, când o condiţie suplimentară este verificată de funcţiile olomorfe

$f_1, \ldots, f_k$ din ipoteza problemei: se presupune că există $i \neq j$ pentru care mulţimile de subnivel $\{|f_i| < \alpha\}$ şi $\{|f_j| < \alpha\}$ sunt separate în apropierea frontierei.

În cele ce urmează, aceste rezultate principale noi vor fi prezentate cu mai multe detalii.

Următoarea teoremă este rezultatul principal al capitolului 3:

Teorema 1. *Fie X un spaţiu Stein normal şi $\Omega \subset X$ un deschis local Stein al lui X. Atunci, pentru orice şir de puncte $(x_n)_n$ în Ω care tinde la o limită $x \in \partial\Omega \setminus X_{\mathrm{sing}}$, există o funcţie olomorfă pe Ω, care este nemărginită pe acest şir.*

Această teoremă generalizează un rezultat al lui Fornæss şi Narasimhan [10], prin eliminarea ipotezei de relativ compacitate a lui Ω. Demonstraţia urmează aceiaşi paşi principali ca cea dată de Fornæss şi Narasimhan, dar fiecare pas este demonstrat utilizând argumente diferite, care evită folosirea ipotezei de relativ compacitate a lui Ω.

Strategia demonstraţiei este următoarea: alegem un punct $p \in \partial\Omega \setminus X_{\mathrm{sing}}$ şi $h_1, \ldots, h_m$ funcţii olomorfe pe X, cu p singurul zero comun. Definim funcţia $f : X \to \mathbb{C}$ prin $f(x) = \det((v_i \Phi_j(x))_{i,j=1,\ldots,n})$, unde $(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ sunt componentele unei aplicaţii olomorfe $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{C}^n$ cu locul de ramificare Z', astfel încât Φ are fibre discrete şi $p \notin Z'$, iar $v_1, \ldots, v_n$ sunt câmpuri vectoriale olomorfe pe X, care generează spaţiul tangent al lui X în p. $Z = \{f = 0\}$ este o hipersuprafaţă a lui X, care nu conţine p.

Apoi, o versiune modificată a unei teoreme a lui Henri Skoda [25, Thm.1] asigură existenţa a m funcţii olomorfe $g_1, \ldots, g_m$ pe $\Omega \setminus Z$, cu suma modulelor ce tinde la infinit în punctul p. Folosind normalitatea spaţiului şi proprietăţile bune ale funcţiei olomorfe f, funcţiile fg_i vor fi extinse la funcţii olomorfe pe Ω. Mai departe, dat un şir în Ω ce tinde la p, cel puţin una dintre aceste funcţii va fi nemărginită pe acest şir, iar astfel demonstraţia se încheie.

Această teoremă generalizată poate fi aplicată pentru a obţine o teoremă de caracterizare pentru un caz particular al problemei Serre, care, în cazul general, cere să se studieze dacă un fibrat olomorf local trivial cu baza Stein şi fibra Stein este de asemenea Stein. De când Serre a propus această problemă, în 1953, diverse contraexemple au fost date si cazuri speciale au fost studiate.

Pentru cazul particular al domeniilor de olomorfie mărginite din $\mathbb{C}^n$ ca fibră, cu o condiţie suplimentară asupra fibrei, Siu [24] a demonstrat că problema Serre are răspuns pozitiv. Primul contraexemplu la problema Serre a fost dat în 1977 de Skoda [26], care a construit un fibrat olomorf local trivial care nu este Stein, cu fibra $\mathbb{C}^2$, iar baza domeniu din $\mathbb{C}$. Mai târziu, Demailly [8] a îmbunătăţit acest exemplu, arătând că baza fibratului poate fi aleasă să fie $\mathbb{C}$ sau discul unitate $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$. Un alt contraexemplu a fost dat în 1985 de G. Coeuré şi J.J. Leob [4]: ei au rezolvat negativ problema Serre pentru cazul particular al fibraţilor olomorfi local triviali cu baza Stein şi domeniu de olomorfie mărginit în $\mathbb{C}^n$ ca fibră. Studiind exemplul lui Coeuré şi Loeb, Pflug şi Zwonek [18] au dat o caracterizare a domeniilor Reinhardt hiperbolice ce pot fi utilizate ca fibră pentru a obţine contraexemple la problema Serre. În 2001, D. Zaffran [27] a demonstrat, utilizând suprafeţe Hirzebruch-Inoue, că exemplul de fibrat construit de Coeuré şi Loeb nu admite anvelopă de olomorfie. În legătură cu acest lucru, ca o aplicaţie a Teoremei 1, demonstrăm următorul rezultat:

Teorema 2. *Fie $p : S \to B$ un fibrat olomorf local trivial cu baza Stein B şi fibra domeniu de olomorfie mărginit din $\mathbb{C}^n$, notată F. Atunci, S este Stein dacă şi numai dacă S are anvelopă de olomorfie.*

Aceasă teoremă are o demonstraţie foarte scurtă şi elegantă, care face apel la Teorema 1: Notăm cu Z anvelopa de olomorfie a lui S. Folosind un rezultat al lui Siu [24], funcţiile olomorfe globale pe S separă punctele şi dau coordonate locale, prin urmare S este deschisă în anvelopa sa de olomorfie Z. Cum B este Stein, poate fi reprezentat ca o subvarietate închisă a lui $\mathbb{C}^n$, definită de funcţii olomorfe globale. În consecinţă, p se poate extinde olomorf la $p_1 : Z \to B$. Pentru fiecare deschis Stein suficient de mic U al lui B, pe care fibratul este trivial, $p_1^{-1}(U)$ este un deschis în Z, iar $p_1^{-1}(U) \cap S = U \times F$, iar din ipoteză ştim că F este domeniu de olomorfie mărginit din $\mathbb{C}^n$. Mai mult, fiecare punct de pe frontiera $x \in \partial S$ este conţinut într-unul dintre aceşti deschişi $p_1^{-1}(U)$ de mai sus. Prin urmare, S este local Stein în Z. Acum, folosind o versiune generalizată a teoremei lui Colţoiu şi Diederich [7] (obţinută eliminând ipoteza de relativ compacitate, lucru posibil de făcut, datorită Teoremei 1), deducem că S este Stein. Implicaţia inversă este trivială. În acest mod, am obţinut o demonstraţie mai generală decât teorema lui Zaffran, cu o demonstraţie mult mai simplă.

În capitolul 4, proprietăţile coomologice ale intersecţiilor finite de deschişi $(n-1)$-compleţi din $\mathbb{C}^n$ sunt studiate.

Diederich şi Fornæss [9] au demonstrat că orice funcţie q-convexă cu colţuri pe o varietate complexă poate fi aproximată cu funcţii $\tilde{q}$-convexe, unde $\tilde{q} = n - \lfloor \frac{n}{q} \rfloor + 1$. Combinând acest rezultat cu teoremele din [1], se obţine, în particular, că orice intersecţie finită de deschişi q-compleţi ai unei varietăţi complexe este coomologic $\tilde{q}$-completă. Un rezultat parţial îmbunătăţit a fost obţinut de Matsumoto [17], care a introdus întregul $\hat{q} = n - \lfloor \frac{n-1}{q} \rfloor$, care verifică $\hat{q} = \tilde{q}$ dacă $q|n$ şi $\hat{q} = \tilde{q} - 1$ dacă $q \not| n$, şi a demonstrat că pentru orice intersecţie finită $\cap_{j=1}^{t} D_j$ de deschişi q-compleţi ai unei varietăţi complexe necompacte M, avem $H^i(\cap_{j=1}^{t} D_j, \mathcal{F}) = 0$, pentru orice $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(M)$ şi pentru orice $i \geq \hat{q}$.

Totuşi, pentru $q = n-1$, teoremele din [9] nu sunt de nicun folos, deoarece $\tilde{q} = n$ şi deja ştim din teorema Greene-Wu [14] că orice varietate complexă necompactă n-dimensională este n-completă.

De asemenea, pentru $q = n - 1$, $\hat{q} = n - 1$, dar teorema lui Matsumoto nu demonstrează $(n-1)$-completitudinea coomologică, deoarece ipoteza cere ca $\mathcal{F}$ sa fie coerent pe toată varietatea, şi nu doar pe intersecţia $\cap_{j=1}^{t} D_j$.

În survey-ul [6], Colţoiu propune următoarea problemă: dacă D este un deschis $(n-1)$-complet cu colţuri din $\mathbb{C}^n$, rezultă că D este chiar $(n-1)$-complet? O versiune mai slabă a acestei probleme este să se studieze dacă orice deschis $(n-1)$-complet cu colţuri din $\mathbb{C}^n$ este coomologic $(n-1)$-complet. Un caz particular de deschişi $(n-1)$-compleţi cu colţuri este reprezentat de intersecţiile finite de deschişi $(n-1)$-compleţi. În capitolul 4 al tezei, se demonstrează că dacă punem nişte condiţii suplimentare asupra frontierelor acestor deschişi din intersecţie, atunci problema are un răspuns afirmativ.

Demonstraţia utilizează metodele elaborate de Colţoiu pentru a demonstra conjectura W. Barth [5]. Mai întâi, următoarea lemă topologică este demonstrată:

Lema 3. *Considerăm $D_j \subset \mathbb{C}^n$, $j = 1, \ldots, r$ deschişi mărginiţi, cu frontierele de clasă $\mathcal{C}^2$, astfel încât oricare două frontiere se intersectează transversal.*

Atunci, există constantele $d_0 > 0$ şi $\eta_0 > 0$ suficient de mici, cu proprietatea următoare: pentru orice $\tau_1, \ldots, \tau_r \in \mathcal{C}_0^\infty(\cap_{j=1}^{r} D_j)$, $\tau_1 \geq 0, \ldots, \tau_r \geq 0$, există o constantă suficient de mică $\lambda_o = \lambda_0(\tau_1, \ldots, \tau_r) > 0$, astfel încât pentru orice constante $0 \leq \mu_j \leq \lambda_0$, $j = 1, \ldots, r$, mulţimea

$$B_{ij}(d) = (D_i \cup D_j) \setminus \\ \setminus \left(\{\delta_{\partial D_i}(x) e^{-\eta_0 \|x\|^2 - \mu_i \tau_i(x)} > d\} \cup \{\delta_{\partial D_j}(x) e^{-\eta_0 \|x\|^2 - \mu_j \tau_j(x)} > d\} \right)$$

nu are componente conexe compacte, pentru orice $1 \leq i, j \leq r$ şi pentru orice $0 < d < d_0$.

Cu toate că enunţul este similar cu [5, Lemma 2.4], demonstraţia este diferită şi foloseşte retracta tare de deformare dată de Teorema vecinătăţiiguler pentru varietăţi cu bord, pentru trei parţi diferite ale lui $\overline{B_{ij}(d)}$, iar aceste trei retracte sunt apoi "lipite" convenabil pentru a obţine o retractă tare de deformare a lui $\overline{B_{ij}(d)}$ în $\partial(D_1 \cup D_2)$, care implică non-existenţa componentelor conexe compacte pentru $B_{ij}(d)$.

Următoarea lemă este o adaptare a Lemei 3.5 din [5], la contextul si notatiile problemei în discuţie. Ea foloseşte pentru demonstraţie rezultatul de aproximare [1, p.250], partea dificilă a demonstraţiei fiind constituită de aproximarea grupurilor de $(n-2)$-coomologie, necesară pentru a aplica lema [1, p.250]. Acest rezultat este valabil numai pentru $d > 0$ suficient de mic, dat de Lema 3.

Lema 4. *Fie $D_j \subset\subset \mathbb{C}^n$, $1 \leq j \leq r$, deschişi $(n-1)$-completi cu frontierele de clasă $\mathcal{C}^2$, astfel încât oricare două frontiere se intersectează transversal.*

Atunci, există o constantă $c_0 > 0$ şi o funcţie de exhaustiune $(n-1)$-convexă $\varphi_j : D_j \to \mathbb{R}$, astfel încât, dacă notăm $\varphi = \max(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$, atunci pentru orice fascicul $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(\cap_{j=1}^r D_j)$ şi pentru orice $c > c_0$, aplicaţia de restricţie

$$H^{n-1}(\cap_{j=1}^r D_j, \mathcal{F}) \to H^{n-1}(\{\varphi < c\}, \mathcal{F})$$

este bijectivă. În particular, $\cap_{j=1}^r D_j$ este coomologic $(n-1)$-convex.

Este un exerciţiu simplu demonstraţia faptului că într-un spaţiu Stein, şi în particular în $\mathbb{C}^n$, q-convexitatea şi q-completitudinea sunt echivalente. Următoarea lemă, inspirată din rezultatele lui Ballico [2], arată, folosind inducţie dupa dimensiunea spaţiului şi reducerea la absurd, că într-un spaţiu complex olomorf separat, şi în particular în $\mathbb{C}^n$, q-convexitatea coomologică şi q-completitudinea coomologică sunt echivalente.

Lema 5. *Într-un spaţiu complex olomorf separat X, cu $\dim(X) < \infty$, orice deschis coomologic q-convex $U \subset X$ este coomologic q-complet.*

Drept o consecinţă directă a lemelor 4 şi 5, se obţine teorema principală a capitolului 4:

Teorema 6. *Fie $D_j \subset\subset \mathbb{C}^n$, $1 \leq j \leq r$ deschişi $(n-1)$-compleţi cu frontierele de clasă $\mathcal{C}^2$, astfel încât oricare două frontiere se intersectează transversal. Atunci, $\cap_{j=1}^r D_j$ este coomologic $(n-1)$-complet.*

Capitolul 4 se încheie cu o demonstraţie care arată că exemplul de domeniu din $\mathbb{C}^n$ dat de Diederich şi Fornæss pentru a arăta optimalitatea lui $\tilde{q}$

verifică ipotezele teoremei 6 pentru $q = n - 1$, prin urmare este un domeniu coomologic $(n-1)$-complet pe care există o funcţie de exhaustiune $(n-1)$-convexă cu colţuri, care nu poate fi aproximată cu funcţii $(n-1)$-convexe. Este încă o problemă deschisă dacă orice deschis coomologic q-complet este chiar q-complet. Prin urmare, în vederea găsirii unui raspuns la această problemă, este de interes să se studieze dacă acest exemplu de deschis construit de Diederich şi Fornæss este chiar $(n-1)$-complet.

Ultimul capitol al tezei, capitolul 5, este dedicat studierii unui caz particular al problemei Corona pentru domenii tare pseudoconvexe din $\mathbb{C}^n$.

Algebra Banach comutativă şi spaţiul Hardy $H^\infty(\mathbb{D})$ constă în funcţiile olomorfe mărginite pe discul unitate deschis $\mathbb{D}$. Spectrul S al acesteia conţine $\mathbb{D}$, deoarece pentru orice $z \in \mathbb{D}$, există idealul maximal ce constă în toate funcţiile $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ cu $f(z) = 0$. Subspaţiul $\mathbb{D}$ nu poate forma tot spectrul S, în principal pentru că spectrul este un spaţiu compact, iar $\mathbb{D}$ nu este compact. Conjectura lui Kakutani din 1941 afirmă că complementul închiderii lui $\mathbb{D}$, numit coroana (eng. *corona*) este vid. Aceasta este cunoscută drept problema Corona. Se dovedeşte că această problemă este echivalentă cu un enunţ mult mai elementar: *Să presupunem că $f_1, \ldots, f_k$ sunt funcţii mărginite olomorfe pe discul unitate $\mathbb{D}$, cu proprietatea*

$$|f_1(\zeta)| + |f_2(\zeta)| + \ldots + |f_k(\zeta)| > \delta > 0$$

pentru o anumită constantă pozitivă δ şi pentru orice $\zeta \in \mathbb{D}$ ($f_1, \ldots, f_k$ se numesc datele Corona pentru $\mathbb{D}$). Atunci, există funcţiile olomorfe mărginite $g_1, \ldots, g_k$ pe $\mathbb{D}$, astfel încât

$$f_1(\zeta)g_1(\zeta) + f_2(\zeta)g_2(\zeta) + \ldots + f_k(\zeta)g_k(\zeta) \equiv 1$$

pentru orice $\zeta \in \mathbb{D}$.

Lennart Carleson [3] a rezolvat afirmativ problema Corona pentru discul unitate $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ în 1962. De atunci, problema a fost studiată atât pe domenii arbitrare din $\mathbb{C}$, cât şi în mai multe variabile. S-a demonstrat că are răspuns pozitiv pentru mai multe tipuri de domenii din $\mathbb{C}$ (exemple pot fi gasite în [12]). Fornæss şi Sibony în [11] şi [23] au studiat problema Corona în mai multe variabile şi au construit exemple de domenii pseudoconvexe în care problema are răspuns negativ, unul dintre aceste exemple fiind chiar un domeniu mărginit cu frontiera strict pseudoconvexă, cu exceptia unui singur punct. Totusi, pentru domenii cu frontiera strict pseudoconvexă (peste tot), un astfel de contraexemplu nu a fost găsit şi chiar pentru domenii simple, cum este bila unitate din $\mathbb{C}^n$, problema este încă deschisă. Până acum, nu se cunoaşte niciun domeniu din planul complex $\mathbb{C}$ pe care problema să aibă răspuns negativ şi niciun domeniu din $\mathbb{C}^n$ pe care problema să aibă răspuns pozitiv.

În ultimul capitol, este studiată problema Corona pe domenii mărginite, strict pseudoconvexe din $\mathbb{C}^n$, când o condiţie suplimentară este verificată de datele Corona. Obiectivul este generalizarea la mai multe functii a rezultatelor lui Krantz [16], folosind aceeaşi metodă de demonstraţie şi obţinând, în acest context, o soluţie afirmativă a problemei. Capitolul 5 se încheie cu o remarcă asupra necesităţii folosirii unei condiţii suplimentare mai tari pentru teorema centrală din [16], pentru ca aceasta să rămână adevărată.

Rezultatul principal al capitolului este următorul:

Teorema 7. *Fie $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ un domeniu mărginit, tare pseudoconvex şi $f_1, \ldots, f_k$ date Corona pentru Ω. Fie $V_j(\alpha) = \{z \in \Omega : |f_j(z)| < \alpha\}$. Presupunem că există $\alpha > 0$ şi $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ pentru care*

$$\overline{V_i(\alpha)} \cap \overline{V_j(\alpha)} \cap \partial\Omega = \emptyset,$$

unde închiderile sunt luate în $\mathbb{C}^n$.

Atunci, există funcţii olomorfe mărginite $g_1, \ldots, g_k$ pe Ω, pentru care

$$\sum_j f_j g_j \equiv 1.$$

Strategia demonstraţiei este următoarea: dacă $f_1, \ldots, f_k$ reprezintă datele Corona pe Ω, definim $U_j(\alpha) = \{\zeta \in \Omega : |f_j(\zeta)| > \alpha\}$. Este clar că $U_j(\alpha)$ sunt deschise şi $\bigcup_j U_j(\alpha) \supseteq \Omega$ pentru orice $\alpha < \delta/2k$, unde δ este constanta din condiţia Corona. Considerăm $(\varphi_j)_j$ o partiţie a unităţii arbitrară subordonată acoperirii $(U_j(\alpha))_j$. Apoi, punem

$$g_j = \frac{\varphi_j}{f_j} + \sum_i v_{ji} f_i,$$

unde $v_{ij} = -v_{ji}$ şi $v_{ii} = 0$. O simplă verificare formală arată că g_j sunt corect definite şi $\sum_j f_j g_j \equiv 1$. Deoarece φ_j sunt funcţii reale, funcţiile g_j definite astfel nu sunt neapărat olomorfe, dar se poate alege o partiţie a unităţii convenabilă pentru care se pot gasi funcţiile v_{ji} astfel încât g_j să fie olomorfă şi mărginită.

Olomorifia lui g_j este echivalentă cu $\overline{\partial} g_j = \frac{\overline{\partial}\varphi_j}{f_j} + \overline{\partial}\left(\sum_i v_{ji} f_i\right) \equiv 0$, şi notăm cu $S(k) = S(k; \varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ acest sistem de k ecuaţii. Inductiv, se poate demonstra că acest sistem are soluţii mărginite v_{ji}, extinzând la fiecare pas la un domeniu mai mare de definiţie soluţiile obţinute la pasul anterior. Pentru pasul de inducţie, se foloseşte existenţa soluţiilor mărginite pentru ecuaţia $\overline{\partial}$ cu coeficienţi mărginiţi pe domenii tare pseudoconvexe cu frontiera netedă pe porţiuni, demonstrată în [15]. Singurul pas diferit în demonstraţie este penultimul, unde o lemă bazată pe construcţia lui Grauert şi Lieb [13] a unui nucleu integral Ramírez [22] cu proprietăţi speciale este, în schimb, folosită: dacă D este un deschis mărginit, tare pseudoconvex în $\mathbb{C}^n$ şi $W(\alpha') = \{z \in D : \gamma(z) < \alpha'\}$, unde γ este o funcţie tare pseudoconvexă, iar f este o $(0,1)$-formă $\overline{\partial}$-închisă în $W(\alpha')$ cu coeficienţi mărginiţi şi cu $\mathrm{supp}(f)$ relativ compact în D, atunci ecuaţia $\overline{\partial} u = f$ are soluţii mărginite pe $W(\alpha) = \{z \in D : \gamma(z) < \alpha\}$, unde $\alpha < \alpha'$.

Condiţia suplimentară din enunţul teoremei 7, pentru date Corona formate din doar două funcţii, cere ca mulţimile de subnivel $V_1(\alpha)$ şi $V_2(\alpha)$ să fie separate pentru o constantă suficient de mică α.

Un caz mai general ar fi ca această condiţie suplimentară să ceară numai ca zerourile funcţiilor f_1 şi f_2 să fie separate. Totuşi, această condiţie nu este suficientă pentru existenţa unei partiţii a unităţii $(\varphi_j)_j$ subordonată acoperirii $(U_j(\alpha))_j$, care să verifice proprietatea (chiar mai slabă decât mărginirea derivatelor parţiale) $|\nabla \varphi_j(z)| \leq C d_{\partial\Omega}(z)^{-\frac{1}{m}}$, unde $C > 0$ este o constantă, iar $d_{\partial\Omega}(z)$ este distanţa euclidiană de la z la $\partial\Omega$ şi $m > 2n+3$, condiţie presupusă indeplinită în [16]. De fapt, pentru $m > 2$, această estimare nu mai este valabilă, deci metoda folosită în [16] pentru obţinerea soluţiilor mărginite pentru ecuaţia $\overline{\partial}$ nu funcţionează. Un contraexemplu simplu care arată acest lucru este construit în ultima parte a capitolului 5, folosind produse Blaschke infinite pe un disc din $\mathbb{C}$.

BIBLIOGRAFIE

[1] Andreotti, A.; Grauert, H.: *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes*, Bull. Soc. Math. France **90** (1962) 193–259.

[2] Ballico E.: *Annullamento di gruppi di coomologia e spazi di Stein*. Boll. Un. Mat. Ital. 18 B **5** (1981), 649–662.

[3] Carleson L.: *Interpolation by bounded analytic functions and the corona problem*, Ann. of Math. (2) **76** (1962), 547–559.

[4] Coeuré G.; Loeb J.J.: *A counterexample to the Serre problem with a Bounded Domain of* $\mathbb{C}^2$ *as Fiber*, Ann. Math. Second Series, **122**, No. 2 (1985), 329–334.

[5] Colţoiu M.: *On Barth's conjecture concerning* $H^{n-1}(\mathbb{P}^n \setminus A, \mathcal{F})$, Nagoya Math. J. **45** (1997), 99–123.

[6] Colţoiu M.: *q-convexity. A survey*. Complex analysis and geometry XII, Pitman Research Notes in Math. vol. **366**, 83–93.

[7] Colţoiu M.; Diederich K.: *On Levi's problem on complex spaces and envelopes of holomorphy*, Math. Ann. **316** (2000), no. 1, 185–199.

[8] Demailly J.-P.: *Un exemple de fibré holomorphe non de Stein à fibre* $\mathcal{C}^2$ *ayant pour base le disque ou le plan*. Invent. Math. **48** (1978), no.3, 293–302.

[9] Diederich K.; Fornæss J.E.: *Smoothing q-convex functions and vanishing theorems*, Invent. Math. **82** (1985), 291–305.

[10] Fornæss J.E.; Narasimhan R.: *The Levi problem on Complex Spaces with Singularities*, Math. Ann. **248** (1980), 47–72.

[11] Fornæss J.E.; Sibony N.: *Smooth pseudoconvex domains in* $\mathbb{C}^2$ *for which the corona theorem and* L^p *estimates for* $\overline{\partial}$ *fail*, Complex Analysis and Geometry, 209–222, Univ. Ser. Math., Plenum, New York, (1993).

[12] Garnett J.B.; Jones P.W.: *The corona problem for Denjoy domains*, Acta Math. **155** (1985), 27–40.

[13] Grauert H.; Lieb I.: *Das Ramirezsche Integral und die Lösung der Gleichung* $\overline{\partial} f = \alpha$ *im Bereich der beschränkten Formen*, Rice Univ. Studies **56** no.2, 29–50 (1971).

[14] Greene R.E.; Wu H.H.: *Embedding of open riemannian manifolds by harmonic functions*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **25** (1975) 215–235.

[15] Henkin G.M.; Sergeev A.G.: *Uniform estimates of the solutions of the* $\overline{\partial}$*-equation in pseudoconvex polyherdra*. Mat. Sb. (N.S.) **112 (154)** (1980), no.4 (8), 522–567.

[16] Krantz S.G.: *The Corona Problem with two pieces of data*. Proc. Amer. Math. Soc. **138**, no.10, (2010), 3651–3655.

[17] Matsumoto K.: *On the cohomological completeness of q-complete domains with corners*, Nagoya Math. J. **168** (2002), 105–112.

[18] Pflug P.; Zwonek W.: *The Serre problem with Reinhardt fibers*. (English, French summary) Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **54** (2004), no.1, 129–146.

[19] Preda O.: *Locally Stein open subsets in Normal Stein spaces*, J. Geom. Anal. **25** (2015), 2759–2766.

[20] Preda O.: *On the intersection of* $(n-1)$*-complete open subsets with* $\mathcal{C}^2$ *boundary in* $\mathbb{C}^n$, preprint.

[21] Preda O.: *The Corona problem with restrictions on the relative position of sublevel sets*, Arch. Math. **105** (2015), 563–569.

[22] Ramírez de Arellano E.: *Ein Divisionsproblem und Randintegraldarstellungen in der komplexen Analysis*, Math. Ann. **184** (1969/1970) 172–187.

[23] Sibony N.: *Problème de la couronne pour des domaines pseudoconvexes à bord lisse*, Ann. of Math. (2) **126** (1987), 675–682.

[24] Siu Y.-T.: *Holomorphic Fiber Bundles whose Fibers are Bounded Stein Domains with Zero First Betti Number*, Math. Ann. **219** (1976), 171–192.

[25] Skoda H.: *Application des techniques L^2 à la théorie des idéaux d'une algébre de fonctions holomorphes avec poids*. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **5** (1972), 545–579.

[26] Skoda H.: *Fibrés holomorphes à base et à fibre de Stein*. Invent. Math. **43** (1977), no.2, 97–107.

[27] Zaffran D.: *Serre problem and Inoue-Hirzebruch surfaces*, Math. Ann. **319** (2001), 395–420.